



OBZORNIK

ZA MATEMATIKO

IN FIZIKO

LJUBLJANA

1960

VEŠT V. 1

VSEBINA

Članki

	Stran
Atomski spektri i nuklearni spin (Branimir Marković)	1
Ravninski elastostatični problemi (Tomislav Skubic)	9
Elementarna teorija distribucij (Anton Suhadole)	21

Novice

Razpolovitev trikotnika (J. Strnad)	29
Elektroluminescenca (S. Šterbal, E. Pirkmajer)	31
Zaznavnost v radiografiji z žarki gama (Rajko Korbar)	34

Domače vesti

XIII. plenum Zveze društev matematikov in fizikov Jugoslavije (Jože Povšič)	38
Občni zbor Društva matematikov in fizikov LRS (M. Švikaršič)	40
Beseda o delu aktiva matematikov in fizikov OLO Ljubljana za šolsko leto 1958/59 (Francè Šušteršič)	41
Delo mladih matematikov (Stanko Uršič)	43
Tečaj za matematiko in fiziko v Novem mestu (Dušan Modic)	44

Šola

O programih matematično fizikalne skupine na višji pedagoški šoli (Francè Ahlin)	44
Hitrost zvoka pri iztepanju (praktična vaja za osemletko) (Francè Ahlin)	47

Nove knjige	47
-----------------------	----

CONTENTS

Articles

	Page
Atomic spectra and Nuclear Spin (Branimir Marković)	1
Some Basic Problems of Elasticity (Tomislav Skubic)	9
Elementary Theory of Distributions (Anton Suhadole)	21

News

Bisection of the Triangle (J. Strnad)	29
Electroluminescence (S. Šterbal, E. Pirkmajer)	31
Resolution in Defectoscopy (Rajko Korbar)	34
13 th Session of the Association of Mathematicians and Physicists of Yugoslavia (Jože Povšič)	38
General Meeting of the Society of Mathematicians and Physicists of Slovenia (M. Švikaršič)	40

School	44
------------------	----

ATOMSKI SPEKTRI I NUKLEARNI SPIN

BRANIMIR MARKOVIČ, Fizički institut i institut »R. Bošković«, Zagreb

I. Frekvencija ν svjetlosti određene spektralne linije u atomskom spektru nekog elementa proporcionalna je s diferencijom dvaju energetske stanja atoma — to je jedan od osnovnih postulata Bohrove teorije o atomu, — t. j.

$$E_1 - E_2 = h \nu, \quad (1)$$

gdje je h Planckova konstanta, a E_1 i E_2 energije atoma prije i poslije emisije fotona, koji ima energiju $h \nu$.

Ako znamo kakva energetska stanja može imati atom i ako znamo iz kojeg energetske stanja može atom prelaziti u neko drugo energetske stanje, onda znamo točno kako izgleda spektar tog atoma. No i obrnuto: ako znamo atomski spektar nekog elementa iz tog spektra možemo zaključiti kakva sve energetske stanja može imati atom dotičnog elementa, odnosno iz toga si možemo stvoriti sliku ili model kako atom izgleda.

Proučavajući atomske spektre mogla se i stvoriti slika o gradnji atoma. Diskretne spektralne linije kod atomskih spektara upućivale su na to, da atom ne može imati bilo kakvu energiju, već da su energetske stanja atoma diskontinuirana ili kvantizirana. Znači, da elektron oko jezgre ne može kružiti u bilo kojoj udaljenosti od jezgre, već samo na stazama, koje imaju određene »kvantizirane« udaljenosti od jezgre — to je drugi postulat Bohrove teorije o atomu.*

Energetsko stanje atoma ovisi o tome na kojoj se po redu stazi nalazi elektron, računajući staze od jezgre prema sve većim udaljenostima. Broj koji nam kaže na kojoj se po redu stazi nalazi elektron zove se glavni kvantni broj n .

Određena n -ta staza elektrona je općenito elipsa, ali ta elipsa može biti različitog ekscentriciteta, pa čak i kružnica. Zbog toga će i zakretni moment** elektrona biti na istu n -tu stazu različit; ovisit će o obliku elipse po kojoj kruži elektron. No ni taj moment ne može imati bilo koju vrijednost, već određene kvantizirane vrijednosti. Valno mehanička ispitivanja atoma daju nam, da je moment staze elektrona jednak $\sqrt{l(l+1)} (h/2\pi)$, gdje je $l = 0, 1, 2 \dots n-1$; l je angularni kvantni broj staze.

Prema tome koliki je l za pojedine elektrone, zovemo te elektrone: za $l = 0$, s-elektron; za $l = 1$, p-elektron, za $l = 2$, d-elektron; za $l = 3$, f-elektron itd.

No uz to što elektron kruži oko jezgre, on rotira i oko svoje osi — postoji moment** ili spin elektrona, a valno mehanička teorija daje, da je taj spin jednak $\sqrt{s(s+1)} (h/2\pi)$, gdje je $s = \frac{1}{2}$.

* Izvajanja v članku so vseskozi osnovana na Bohrovem modelu atoma. To bo dobrodošlo tistim bralcem našega lista, ki jim kvantna mehanika — po kateri ostro določeni tiri elektronov sploh ne obstajajo — morda ni tako domača. — Op. ur.

** Slovensko: vrtilna količina.

Napomenut ćemo ovdje, da u atomu ne mogu postojati više nego dva elektrona koja bi imala iste kvantne brojeve n i l (Paulijev princip).

Elektron kružeći oko jezgre stvara magnetsko polje, a postoji magnetsko polje i od spina elektrona — zbog toga dakle mora postojati međudjelovanje (interakcija) između kružnog gibanja elektrona oko jezgre i spina elektrona.

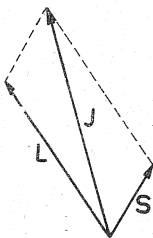
Ako je energija koju bi imao atom, jer mu se elektron giba po stazi koja ima kvantni broj l , ali bez spina elektrona, $E_{l,0}$, a energija koju atom ima, jer mu se elektron giba po stazi koja ima kvantni broj l , a elektron ima spin s , jednaka $E_{l,s}$, onda račun daje, da je promjena energije, koju atom ima zbog toga, što elektron ima spin, dana relacijom

$$E_{l,0} - E_{l,s} = \Delta E_{l,s} = A \cdot L \cdot S \cos(L/S), \quad (2)$$

gdje je A konstanta koja ovisi o atomu i elektronu, a $L = \sqrt{l(l+1)}$, odnosno

$$S = s(s+1).$$

Angularni moment elektrona, mjereno u jedinicama $h/2\pi$ je $L = \sqrt{l(l+1)}$; L je vektor. Isto tako i $S = \sqrt{s(s+1)}$ je vektor. Ta dva vektora — zbog međudjelovanja — daju rezultujući vektor $J = \sqrt{j(j+1)}$, gdje je $\vec{L} + \vec{S} = \vec{J}$. Broj j zovemo unutarnji kvantni broj (sl. 1), koji može imati vrednost: $l-s$ ili $l+s$ (ili pak samo s , ako $l=0$, računajući da je $s = \frac{1}{2}$).



Sl. 1. Sastavljanje vektora $\vec{L}$ i $\vec{S}$ u vektor $\vec{J}$

Iz formule (2) uz sl. 1, dobijemo, da je

$$\Delta E_{l,s} = A \cdot \frac{1}{2} (J^2 - L^2 - S^2) \quad (3)$$

Ako desnu i lijevu stranu jednadžbe (3) podijelimo s $h \cdot c$, gdje je c brzina svjetlosti dobijemo:

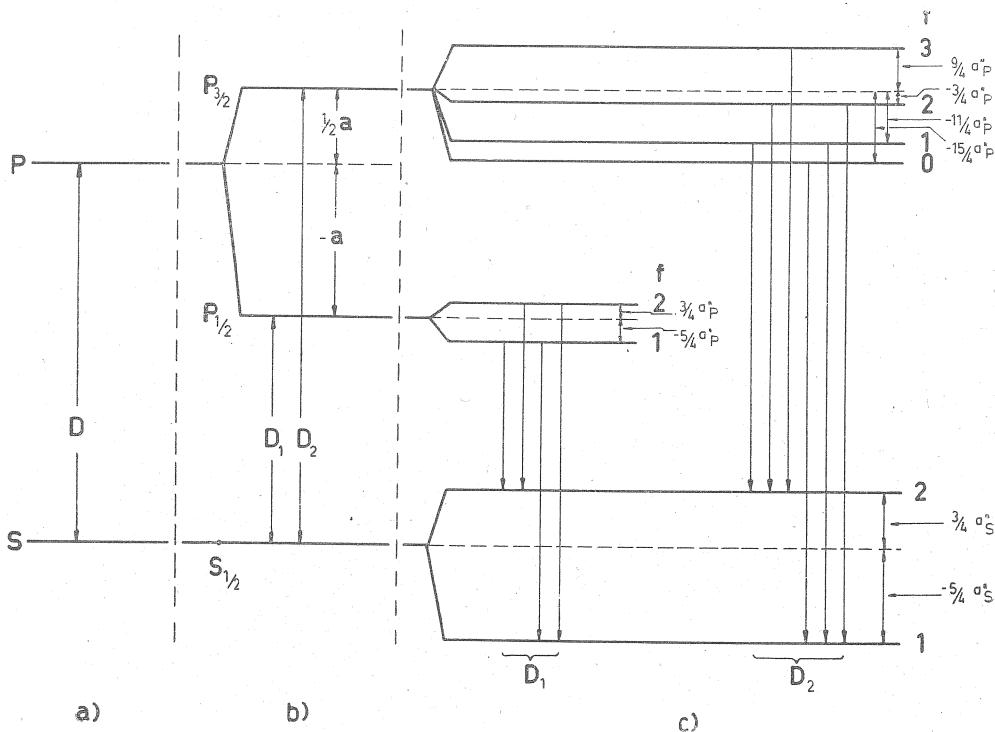
$$A \overline{\nu}_{l,s} = a \cdot \frac{1}{2} (J^2 - L^2 - S^2) \quad (4)$$

gdje je $\overline{\nu}$ valjni broj, t. j. ν/c , i $a = A/hc$.

II. Proučavajući rentgenske i atomske spektre znademo kako su razmješteni elektroni oko jezgre pojedinih atoma. S druge strane znademo, da atomski spektri nastaju na taj način, što se vanjski elektroni, t. j. oni elektroni, koji se nalaze na stazama, koje nisu popunjene elektronima, svojim prelazima daju emisiju energije iz atoma, t. j. daju emisiju fotona iz atoma.

Uzmimo na pr. atom Na. U nepobudjenom stanju oko jezgre atoma Na kruži 11 elektrona, koji su razmješteni tako, da u prvoj stazi ili ljusci kruže 2 elektrona ($n=1$, $l=0$): simbolički to pišemo $1s^2$. U drugoj ljusci kruži 8 elektrona ($n=2$, $l=0$ i $l=1$): simbolički to pišemo $2s^2$, $2p^6$. U trećoj ljusci

je samo jedan elektron ($n = 3, l = 0$): simbolički to pišemo $3s^1$. Elektron $3s^1$ jest onaj, koji je odgovoran za atomski spektar Na. Ako je Na atom u nepobudjenom stanju, onda se taj elektron nalazi u $3s$ stazi ($n = 3, l = 0$). Kaže se, da se cijeli atom nalazi u S stanju. No taj elektron — ako Na atom pobudimo — može doći na stazu $4p$ ($n = 4, l = 1$). Kažemo, da se cijeli atom nalazi u P stanju.



Sl. 2. Grafički prikaz energetske strukture atoma natrija: a) bez obzira na finu strukturu, b) fina struktura nivoa (s povećanim razmacima), c) hiperfina struktura nivoa (s povećanim razmacima)

Prelazom atoma iz P stanja u S stanje, t. j. ako elektron prijeđe iz $4p$ staze u $3s$ stazu, iz atoma se emitira kvant energije — foton, koji daje poznatu žutu spektralnu liniju u atomskom spektru natrija. Grafički bi to mogli prikazati kao na sl. 2 a, gdje nam P i S znače odgovarajuća energetska stanja (nivoa) u atomu, a strelica od P do S znači emisiju fotona određene energije, kod nas konkretno energiju žute D spektralne linije u atomskom spektru natrija.

No zbog spina elektrona postoji drugačija shema energetske strukture. Ako je elektron na $3s$ stazi, onda je $l = 0, s = \frac{1}{2}$, a $j = l + s = \frac{1}{2}$. Simbolički pišemo, da je atom u $S_j = S_{1/2}$ stanju. Ako je pak elektron na $4p$ stazi, onda je $l = 1, s = \frac{1}{2}$, pa je $j = l + s = \frac{3}{2}$ ili $j = l - s = \frac{1}{2}$. Atom je u stanju P_j , t. j. u stanju $P_{3/2}$ ili $P_{1/2}$. To znači, da atom može prijeći iz stanja $P_{3/2}$ u stanje $S_{1/2}$ ili iz $P_{1/2}$ u $S_{1/2}$. Dakle atom u stanju P ima dva energetska nivoa: $P_{3/2}$ i $P_{1/2}$.

Iz jednađbe (4) izlazi, da je zbog spina elektrona pomaknut nivo $P_{3/2}$ prema gore obzirom na nivo P za:

$$\Delta \nu = a \frac{3/2 (3/2 + 1) - 1 (1 + 1) - \frac{1}{2} (\frac{1}{2} + 1)}{2} = \frac{a}{2},$$

odnosno pomaknut je nivo $P_{1/2}$ prema dolje obzirom na nivo P za:

$$\Delta \nu = a \frac{\frac{1}{2} (\frac{1}{2} + 1) - 1 (1 + 1) + \frac{1}{2} (-\frac{1}{2} + 1)}{2} = -a$$

Nivo $S_{1/2}$ nije pomaknut prema nivou S ; naime za taj nivo

$$\Delta \nu = a \frac{\frac{1}{2} (\frac{1}{2} + 1) - 0 (0 + 1) - \frac{1}{2} (\frac{1}{2} + 1)}{2} = 0$$

Grafički je to predočeno na sl. 2 b. Postoje dakle dvije spektralne linije — postoji dublet, žute D spektralne linije natrija. Eksperimenat to i potvrđuje. Žuta D spektralna linija natrija (gledajući je spektroskopima, koji imaju dovoljno veliku moć razlučivanja) raspada se u dvije komponente u D_1 (5895,9 Å) i D_2 (5890,0 Å). To je *fina struktura spektralne linije*, koja je uzrokovana spinom elektrona.

Eksperimenti pokazuju (gledajući spektar sa spektroskopima veoma velike moći razlučivanja, t. j. s interferencionim spektroskopima), da svaka od linija D_1 i D_2 pokazuje još finiju strukturu, postoji *hiperfina struktura spektralne linije* (hfs. s. l.). Pauli je došao na ideju, da do te hfs. s. l. dolazi zbog toga, što i jezgra atoma ima zakretni moment, tako zvaní nuklearni spin. Račun pokazuje, da je nuklearni spin jezgre I ($\hbar/2\pi$) = $\sqrt{i(i+1)} (\hbar/2\pi)$, gdje je i odgovarajući kvantni broj. Kod jezgara sa parnim brojem nukleona i je celi broj (obično 0), dok kod neparnih jezgara može biti $i = \frac{1}{2}$ ili $\frac{3}{2}$ itd. Postoji zbog toga međudjelovanje izmedju spina jezgre i angularnog momenta elektrona i spina elektrona, odnosno postoji međudjelovanje izmedju vektora I i vektora J , koji daju rezultujući vektor F :

$$\vec{F} = \vec{I} + \vec{J}, \quad (5)$$

gdje je, analogno prijašnjim oznakama, $F = \sqrt{f(f+1)}$; F je totalni moment atoma. Kvantni broj f poprima vrednosti $i+j$, $i+j-1, \dots, |i-j|$.

Zbog toga — kao zbog spina elektrona — imamo sada zbog spina jezgre još finije cijepanje energetskih nivoa. Pomaci energetskih nivoa, zbog spina jezgre, analogno jednađbi (4), izraženi u valnim brojevima, dani su izrazom

$$\Delta \nu_{j,f} = a'' \cdot \frac{1}{2} (F^2 - I^2 - J^2) \quad (6)$$

Jasno je, da je tu konstanta a'' znatno (često oko 10^4 puta) manja, nego konstanta a u jednađbi (4).

Zbog spina jezgre, koji na pr. kod jezgre $^{11}\text{Na}^{23}$ iznaša $i = \frac{3}{2}$, energetska stanja $S_{1/2}$, $P_{1/2}$ i $P_{3/2}$ cijepaju se na više nivoa.

Stanje $S_{1/2}$ ima: f od $\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$ do $\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$, dakle $f = 2$ ili 1, stanje $S_{1/2}$ cijepa se na 2 nivoa.

Stanje $P_{1/2}$ ima: f od $\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$ do $\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$, dakle $f = 2$ ili 1 , stanje $P_{1/2}$ cijepa se na 2 nivoa.

Stanje $P_{3/2}$ ima: f od $\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$ do $\frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$, dakle $f = 3, 2, 1$ ili 0 , stanje $P_{3/2}$ cijepa se na 4 nivoa.

Koliko su ti nivoi pomaknuti prema nivou, kad ne bi postajao spin jezgre, možemo izračunati iz jednadžbe (6).

Pomaci za nivo $S_{1/2}$ i $P_{1/2}$ iznose:

$$\Delta v_{1/2, 2} = a'' \frac{2 \cdot (2 + 1) - 3/2 (3/2 + 1) - 1/2 (1/2 + 1)}{2} = \frac{3}{4} a'',$$

odnosno

$$\Delta v_{1/2, 1} = a'' \frac{1 (1 + 1) - 3/2 (3/2 + 1) - 1/2 (1/2 + 1)}{2} = -\frac{5}{4} a'',$$

ali za $S_{1/2}$ je a'' veće nego za $P_{1/2}$.

Pomaci za nivo $P_{3/2}$ iznose:

$$\Delta v_{3/2, 3} = a'' \frac{3 (3 + 1) - 3/2 (3/2 + 1) - 3/2 (3/2 + 1)}{2} = \frac{9}{4} a''$$

$$\Delta v_{3/2, 2} = a'' \frac{2 (2 + 1) - 3/2 (3/2 + 1) - 3/2 (3/2 + 1)}{2} = -\frac{3}{4} a''$$

$$\Delta v_{3/2, 1} = a'' \frac{1 (1 + 1) - 3/2 (3/2 + 1) - 3/2 (3/2 + 1)}{2} = -\frac{11}{4} a''$$

$$\Delta v_{3/2, 0} = a'' \frac{0 (0 + 1) - 3/2 (3/2 + 1) - 3/2 (3/2 + 1)}{2} = -\frac{15}{4} a''$$

Grafički je to predloženo na sl. 2 c.

Teorija nam daje, a eksperiment potvrđuje, da niso mogući svi energetski prelazi u atomu. Postoje određena izborna pravila, koja glase: mogući su samo oni prelazi za koje je:

$$\Delta l = \pm 1$$

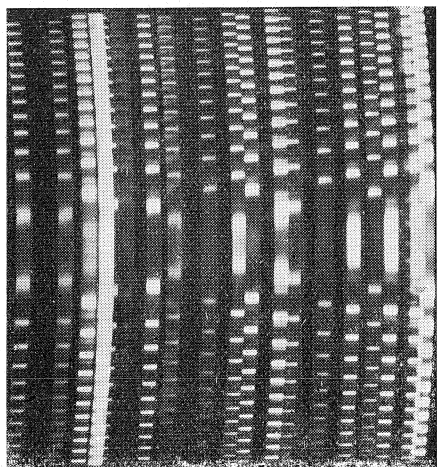
$$\Delta j = 0 \text{ ili } \pm 1 \text{ (ali prelaz } j = 0 \text{ na } j = 0 \text{ je zabranjen)} \quad (7)$$

$$\Delta f = 0 \text{ ili } \pm 1 \text{ (ali prelaz } f = 0 \text{ na } f = 0 \text{ je zabranjen)}$$

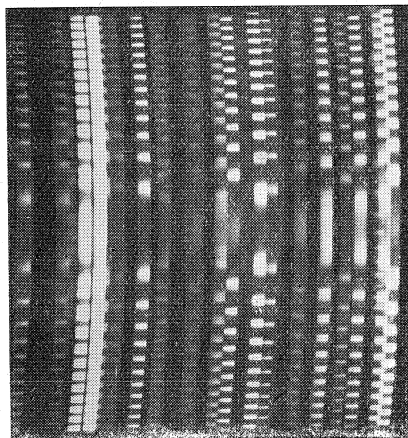
Primjenivši ta izborna pravila u našem slučaju (gledaj sl. 2 c) vidimo, da D_1 linija ima hfs., koja se sastoji od 4 komponente, a D_2 linija ima hfs., koja se sastoji od 6 komponenata. Naglašavamo ponovno, da je a'' znatno manje od a , pa su zato i razlike u valnim brojevima pojedinih komponenata hfs. veoma malene i zbog toga je hfs. uočljiva samo sa spektroskopima velike moći razlučivanja.

III. U daljnjem razmatranju pokazat ćemo kako se može iz proučavanja atomskog spektra odrediti nuklearni spin ili momenat jezgre nekog elementa.

Pokazat ćemo, kako je određen momenat jezgre atoma $_{10}\text{Ne}^{21}$.* Poznato je, da se prirodni neon sastoji od tri izotopa i to $_{10}\text{Ne}^{20}$ (90,00 %), $_{10}\text{Ne}^{21}$ (0,27 %) i $_{10}\text{Ne}^{22}$ (9,73 %). Momenat jezgre onih atoma, koji imaju parnu atomsku masu jednak je nuli. Znači, da izotopi $_{10}\text{Ne}^{20}$ i $_{10}\text{Ne}^{22}$ nemaju hfs. s. l. Gledamo li spektar prirodnog neona u spektrografu s Fabry-Perotovim etalonom, t. j. s takvim spektrografom, koji ima veoma veliku moć razlučivanja, uočiti ćemo da je svaka linija dvostruka. Jedna pripada $_{10}\text{Ne}^{20}$, a druga $_{10}\text{Ne}^{22}$. Linije, koje pripadaju $_{10}\text{Ne}^{21}$ ne će se vidjeti, jer tog izotopa ima veoma malo. Na sl. 3 snimljen je spektar prirodnog neona. Taj spektar dobiven je na taj način, da je Geisslerova cijev specijalnog oblika bila napunjena s veoma malo prirodnim neonom i helijem. Uz to bila je hladjena tekućim zrakom. Sve je to učinjeno zato, da bi se čim više smanjila širina linija. Svaka spektralna linija



Sl. 3. Hiperfina struktura spektralnih linija prirodnog neona



Sl. 4. Hiperfina struktura spektralnih linija Ne^{21}

je rastavljena u niz koncentričnih krugova, koje daje Fabry-Perotov etalon. Na slici uočavamo, da kod svake spektralne linije postoji sistem dvostrukih krugova. Jedan sistem krugova (intenzivniji) pripada $_{10}\text{Ne}^{20}$, a drugi (manje intenzivan) pripada $_{10}\text{Ne}^{22}$.

Ako analogan pokus ponovimo s Geisslerovom cijevi punjenom s $_{10}\text{Ne}^{21}$ i helijem opažamo, da su mnoge linije sastavljene od više komponenata. Postoje više sistema krugova kod mnogih linija (sl. 4). Dakle linije u spektru $_{10}\text{Ne}^{21}$ pokazuju hfs. Znači, da jezgra $_{10}\text{Ne}^{21}$ ima momenat različit od nule.

Spektar neona je poznat, t. j. poznata je fina struktura spektralnih linija neona. To znači: poznata su energetska stanja atoma neona.

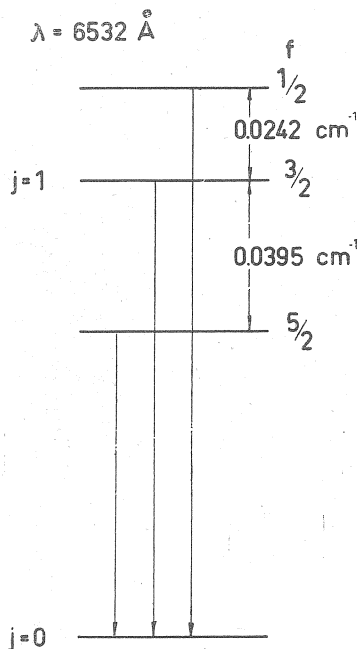
Da bi se iz hfs. s. l. odredio momenat jezgre, zgodno je, da se analiziraju one spektralne linije, koje nastaju prelazom iz energetskog nivoa, gdje je unutarnji kvantni broj $j \neq 0$, na energetski nivo, gdje je $j = 0$ ili obrnuto. Naime, onaj energetski nivo, gdje je $j = 0$, nema hfs.

* Ova istraživanja izvršio sam većim dijelom u Fizičkom institutu Sveučilišta u Kopenhavnu kod prof. dr. E. Rasmussena.

Spektralne linije neona koje zadovoljavaju gornji uvjet su na pr.

6532 Å	$1s_3 - 2p_7$	0 — 1
6266 Å	$1s_3 - 2p_5$	0 — 1
6074 Å	$1s_4 - 2p_3$	1 — 0
5400 Å	$1s_4 - 2p_1$	1 — 0

U prvom stupcu unesene su valne dužine spektralnih linija u Å. U drugom stupcu označena su energetska stanja atoma (u Paschenovoj simbolici) poslije i prije emisije fotona, koji daje dotičnu spektralnu liniju. U trećem stupcu unesene su odgovarajuće vrijednosti unutarnjeg kvantnog broja j .



Sl. 5. Shema nastajanja spektralne linije Ne: $\lambda = 6532 \text{ Å}$

Uzet ćemo u poblize razmatranje na pr. spektralnu liniju $\lambda = 6532 \text{ Å}$. Ona nastaje prelazom iz energetskog stanja gdje je $j = 1$ na energetsko stanje gdje je $j = 0$. Na spektrogramu se vidi, da ta linija ima tri komponente hfs. Poznavajući razmak između ploča Fabry-Perotovog etalona (u našem slučaju razmak između ploča iznosio je 40 mm) može se mjerenjem odrediti kolike su razlike u valnim brojevima pojedinih komponenata hfs. Nađeno je, da su te razlike: $0,0395 \text{ cm}^{-1}$ i $0,0242 \text{ cm}^{-1}$. Znači, da viši energetski nivo ima 3 komponente razmaknute u omjeru $0,0395 : 0,0242$. Niži energetski nivo ima samo jednu komponentu ($j = 0$). Na sl. 5 je to shematski nacrtano.

Iz teorije znamo, da vrijednosti nuklearnog spina mjerene u jedinicama $\hbar/2\pi$ mogu biti: $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, 2, $\frac{5}{2}$, ... Uz to znamo, da je $\vec{F} = \vec{I} + \vec{J}$.

Načinimo tablicu za razne vrijednosti i i vrijednost $j = 1$.

i	j	f	Broj komponenata hfs.	Omjer razmaka energetskih nivoa hfs.
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$	2	—
1	1	2, 1	2	—
$\frac{3}{2}$	1	$\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$	3	5:3
2	1	3, 2, 1	3	5:3
$\frac{5}{2}$	1	$\frac{7}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}$	3	7:5

Eksperiment nam daje, da se razmaci energetskih nivoa hfs., gdje je $j = 1$ odnose kao 0,0395:0,0242, a to je približno kao 5:3. To znači, da je momenat jezgre ili nuklearni spin jezgre atoma $_{10}\text{Ne}^{21}$ jednak

$$i = \frac{3}{2}$$

Istu vrijednost dobivamo analizirajući i druge spektralne linije.

Otstupanje vrijednosti mjerenog omjera razlike energetskih nivoa od točne vrijednosti 5:3 ne dolaze samo zbog eksperimentalne pogreške mjerenja, već imaju svoj dublji razlog. Naime, ako jezgra atoma ima kvadrupolni moment, t. j. ako jezgra atoma stvara oko sebe električno polje takvo kao da je jezgra električno nabijeni splošteni ili produženi rotacioni elipsoid, onda to utječe na razmak energetskih nivoa hfs. Iz pomaka energetskih nivoa, nastalih na taj način, dade se izračunati koliki je kvadrupolni moment jezgre. Ti pomaci kod $_{10}\text{Ne}^{21}$ su neznatni i padaju u područje pogreške mjerenja, pa iz toga možemo zaključiti, da je kvadrupolni moment jezgre $_{10}\text{Ne}^{21}$ približno jednak nuli, t. j.

$$Q = 0,$$

a to je u skladu s ljuskastim modelom jezgre.

Literatura:

1. R. C. Johnson: Atomic Spectra, London, 1950.
2. H. E. White: Introduction to Atomic Spectra, New York, 1934.
3. S. Tolansky: Hyperfine Structure in line Spectra and Nuclear Spin, London, 1948.
4. H. Kopfermann: Kernmomente, Frankfurt am Main, 1956.

RAVNINSKI ELASTOSTATIČNI PROBLEMI

TOMISLAV SKUBIC

(Oddelek za tehniško fiziko)

I. UVOD

Pri reševanju osnovnih problemov teorije elastičnosti pridemo kmalu do velikih matematičnih težav. Zato ne moremo reševati vseh problemov na enak način, ampak je treba izdelati za rešitev vsake skupine problemov posebne metode. Ena najvažnejših takih skupin so *ravninski problemi teorije elastičnosti*. Za reševanje teh problemov obstaja več metod. V našem članku si hočemo ogledati novejšo metodo, ki uporablja teorijo funkcij kompleksne spremenljivke. Medtem ko dajo starejše splošnejše metode redkokdaj kaj več kot eksistenco rešitev, omogoča omenjena metoda eksplicitne rešitve mnogih tehnično važnih problemov. Osnovana je na tem, da prevede robne probleme ravninske teorije elastičnosti na reševanje funkcionalnih enačb na nekem kompleksnem polju. Prvi je vpeljal to metodo ruski matematik G. V. Kolosov že leta 1909. Do njene uporabe pri reševanju konkretnih problemov pa je prišlo šele čez slabih štirideset let v glavnem po zaslugi skupine ruskih matematikov, med katerimi je najbolj zaslužen in najbolj znan N. I. Mushe-lišvili.

Dvodimenzionalne elastostatične probleme lahko razdelimo v dve fizikalno različni skupini. Pri prvi gre za obravnavanje deformacij dolgih valjastih teles, na katera delujejo zunanje sile tako, da je komponenta deformacije v smeri osi valja enaka nič, ostale komponente pa se ne spreminjajo po dolžini valja. To so *problemi ravninske deformacije*. Druga skupina problemov pa obravnava deformacijo tankih plošč, ki so obremenjene tako, da so komponente napetosti v smeri debeline plošče enake nič. To so tako imenovani *problemi ravninskih napetosti*. Izkaže se, da je matematična formulacija teh dveh skupin problemov identična. Reševanje nas pripelje na določitev dveh funkcij kompleksne spremenljivke, ki ju je treba dobiti iz danih funkcionalnih enačb.

II. OSNOVNE ENAČBE IN ROBNİ PROBLEMI STATIKE PROŽNIH TELES

Oglejmo si nekaj znanih enačb mehanike prožnih teles, ki jih bomo rabili pri nadaljnjem izvajanju! Iz ravnovesnih pogojev dobimo *ravnovesne enačbe*, ki se glasijo

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0\end{aligned}\tag{1}$$

Pri tem smo zaznamovali normalne napetosti s σ , tangencialne napetosti s τ , komponente prostorninske sile pa z X , Y in Z . Tangencialne komponente napetosti so simetrične, tako da je $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ in $\tau_{zx} = \tau_{xz}$.

Med komponentami napetosti in komponentami u , v in w premikov veljajo naslednje zveze, ki so samo razširjeni *Hookov zakon*

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \lambda \vartheta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma_y = \lambda \vartheta + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \sigma_z = \lambda \vartheta + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \\ \tau_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right),\end{aligned}\quad (2)$$

pri čemer je $\vartheta = \partial u / \partial x + \partial v / \partial y + \partial w / \partial z$ *specifična prostorninska deformacija*, λ in μ pa sta *Laméjevi konstanti*, ki sta značilni za snov, iz katere je telo.

Ker mejne ploskve telesa v splošnem niso vzporedne koordinatnim ravninam, rabimo tudi izraze za komponente napetosti X_n , Y_n in Z_n na poševni ploskvi, katere zunanja normala oklepa s koordinatnimi osmi kote (n, x) , (n, y) in (n, z) . Ravnovesni pogoji na tetraedru, čigar tri mejne ploskve so vzporedne koordinatnim ravninam xy , yz in zx , nam dajo naslednje enačbe

$$\begin{aligned}X_n &= \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{yx} \cos(n, y) + \tau_{zx} \cos(n, z) \\ Y_n &= \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y) + \tau_{zy} \cos(n, z) \\ Z_n &= \tau_{xz} \cos(n, x) + \tau_{yz} \cos(n, y) + \sigma_z \cos(n, z)\end{aligned}\quad (3)$$

Iz sistemov diferencialnih enačb (1) in (2) je treba določiti devet neznanih funkcij u , v , w , σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} in τ_{zx} . Enačbe (1) in (2) popolnoma določajo statično ravnovesje telesa, če so znane zunanje sile, ki delujejo na telo, in prostorninske sile. Ravnovesno stanje telesa je znano, če poznamo v vsaki točki telesa komponente napetosti ali, kar je zaradi enačb (2) isto, komponente premikov. Pri tem pa morajo zadoščati napetosti oziroma premiki na mejni ploskvi S področja V , ki ga zavzema telo, tako imenovanim *robnim pogojem*. Z ozirom na robne pogoje ločimo v splošnem tri vrste osnovnih problemov.

Pri *prvem osnovnem robnem problemu* so na površini telesa predpisane komponente napetosti $X_n = T_1$, $Y_n = T_2$, $Z_n = T_3$. Če te vrednosti vstavimo v enačbe (3), dobimo robne pogoje, ki jim morajo zadoščati rešitve sistemov (1) in (2), pri čemer so seveda T_1 , T_2 in T_3 znane funkcije na mejni ploskvi telesa.

Pri *drugem osnovnem robnem problemu* je treba rešiti sistema (1) in (2), če so na površini telesa predpisani premiki. Komponente premikov morajo zadoščati robnim pogojem

$$u = g_1, \quad v = g_2, \quad w = g_3, \quad (4)$$

pri čemer so g_1 , g_2 in g_3 znane funkcije na mejni ploskvi.

V praksi imamo večkrat opravka z *mešanim osnovnim robnim problemom*, pri katerem so na enem delu površine telesa predpisani premiki, na drugem pa napetosti.

III. RAVNINSKI PROBLEMI STATIKE PROŽNIH TELES

Pri ravninskih elastostatičnih problemih je komponenta w premika enaka nič, komponenti u in v pa sta funkciji samo spremenljivk x in y . Enačbe (1) in (2) se v tem primeru glasijo

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0 \quad (5)$$

$$\sigma_x = \lambda \vartheta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma_y = \lambda \vartheta + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (6)$$

pri čemer je $\vartheta = \partial u / \partial x + \partial v / \partial y$.

Ker so vse količine, ki v teh enačbah nastopajo, neodvisne od spremenljivke z , se lahko omejimo pri obravnavanju teh problemov na točke ravnine xy . Kadar bomo govorili o polju R , ki ga zavzema telo, bomo vedno mislili na dvodimenzionalno polje, ki je presek telesa z ravnino xy . Predpostavili bomo, da so komponente premikov enolične in zvezne funkcije z zveznimi odvodi do vključno tretjega reda po vsem polju R . Iz enačb (6) potem sledi, da so komponente napetosti enolične in zvezne funkcije z zveznimi drugimi odvodi.

Potrebovali bomo še eno enačbo, ki je zaradi pomanjkanja prostora ne moremo izpeljati, sledi pa neposredno iz enačb (5) in (6). Glasi se

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = - \frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \quad (7)$$

Pri tem pomeni $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ Laplaceov operator v dveh dimenzijah.

Pri obravnavanju ravninskih elastostatičnih problemov se bomo omejili le na najpreprostejše. Polje R v ravnini xy naj bo končno in naj ga omejuje ena sama krivulja C . Mejna krivulja naj bo izražena parametrično v obliki $x = x(s)$, $y = y(s)$, pri čemer je s naravni parameter, to je dolžina loka. Zaradi preprostosti vzemimo še, da je mejna krivulja v vseh točkah gladka. To pomeni, da sta funkciji $x(s)$ in $y(s)$ zvezno odvedljivi in da oba odvoda nista enaka nič za isto vrednost parametra s .

Oglejmo si še robne pogoje! Naj bosta $T_1(s)$ in $T_2(s)$ komponenti napetostnega vektorja, ki deluje na robu C polja R , $g_1(s)$ in $g_2(s)$ pa komponenti premikov na mejni krivulji. Ker oklepa normala n z osjo z pravi kot, dobimo zaradi enačb (3) robna pogoja

$$\begin{aligned} \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) &= T_1(s) \\ \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y) &= T_2(s) \end{aligned} \quad (8)$$

in namesto robnih pogojev (4) imamo

$$u = g_1(s), \quad v = g_2(s) \quad (9)$$

Te enačbe morajo biti izpolnjene na krivulji C . Funkciji $T_1(s)$ in $T_2(s)$ morata biti izbrani tako, da so zunanje sile na robu C v ravnovesju s prostorninskima silama X in Y .

Ravninski problemi se nekoliko poenostavijo, če v diferencialnih enačbah ne nastopajo prostorninske sile. Ker so ravnovesne enačbe linearne, jih vedno lahko prevedemo v homogeno obliko, če najdemo eno od partikularnih rešitev. Zato bomo v naslednjih izvajanjih predpostavljali, da prostorninskih sil ni.

IV. NAPETOSTNA FUNKCIJA

Če ne upoštevamo prostorninskih sil, se enačbi (5) glasila

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad (10)$$

enačba (7) pa preide v obliko

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (11)$$

Iz ravnovesnih enačb (10) izhaja obstoj funkcije $U(x, y)$, ki je definirana takole

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (12)$$

Ta funkcija se imenuje *napetostna* ali tudi *Airyjeva funkcija*, ker jo je vpeljal l. 1862 angleški astronom G. B. Airy.

Če izrazimo komponente napetosti s funkcijo U , vidimo, da sta izpolnjeni enačbi (10) identično, medtem ko enačba (11) zahteva, da zadošča funkcija U na polju R *biharmonični enačbi*

$$\nabla^2 \nabla^2 U = 0$$

ali

$$\Delta^4 U = \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0 \quad (13)$$

Zato se imenuje funkcija U *biharmonična funkcija*. Ker smo predpostavljali, da so napetosti σ_x , σ_y in τ_{xy} enolične in zvezne funkcije skupaj z drugimi odvodi, mora imeti funkcija U zvezne odvode do vključno četrtega, odvodi od drugega reda dalje pa morajo biti enolične funkcije na polju R .

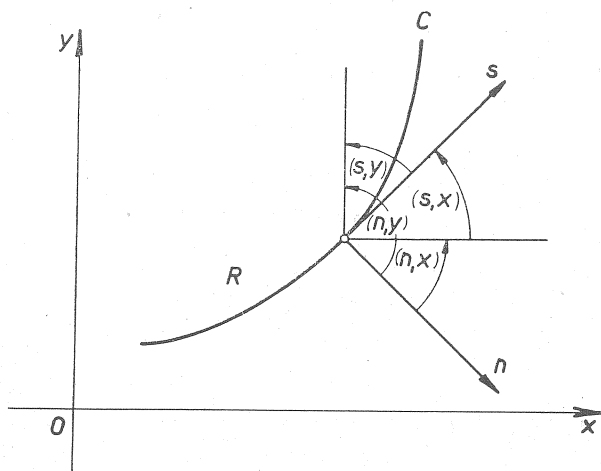
Zaradi robnih pogojev (8) veljajo za funkcijo U določene omejitve. Če upoštevamo enačbe (12), imata robna pogoja (8) obliko

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \cos(n, x) - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \cos(n, y) &= T_1(s) \\ -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \cos(n, x) + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cos(n, y) &= T_2(s) \end{aligned} \quad (14)$$

Iz slike 1 je razvidno, da je

$$\begin{aligned}\cos(n, x) &= \cos(s, y) = \frac{dy}{ds} \\ \cos(n, y) &= -\cos(s, x) = -\frac{dx}{ds}\end{aligned}\quad (15)$$

Pri tem smo upoštevali, da je odvod krajevnega vektorja $\vec{r} = (x, y)$ po naravnem parametru s enak vektorski enoti $\vec{\xi}$ na tangenti krivulje.



Slika 1

Zaradi enačb (15) lahko pišemo enačbi (14) v obliki

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) = T_1(s), \quad -\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) = T_2(s)$$

Če integriramo ti dve enačbi po krivulji C od neke začetne točke s_0 do neke spremenljive točke s , dobimo

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x} &= -\int_{s_0}^s T_2(s) ds = f_1(s) + c_1 \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= \int_{s_0}^s T_1(s) ds = f_2(s) + c_2\end{aligned}\quad (16)$$

Pri tem sta $f_1(s)$ in $f_2(s)$ znani funkciji. Iz enačb (16) je razvidno, da prva odvoda funkcije U na krivulji C nista enolično določena in da je po drugi strani tudi za notranjost polja R neka prostost v izbiri funkcije U in njenih prvih odvodov. To je razumljivo, saj so komponente napetosti določene z drugimi odvodi funkcije U .

Pokazati hočemo, da se da rešitev biharmonične enačbe (13) izraziti z dvema analitičnima funkcijama.* V ta namen vpeljimo funkcijo $P(x, y)$, ki je definirana z enačbo $\nabla^2 U = P$. Ta funkcija je na polju R harmonična, ker je zaradi (12) enolična in ker zadošča Laplaceovi diferencialni enačbi $\nabla^2 P = \nabla^2 \nabla^2 U = 0$. Zato lahko konstruiramo analitično funkcijo $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$. Če naj bo $P + iQ$ analitična funkcija na polju R , morata biti P in Q enolični in zvezni funkciji spremenljivk x in y in morata zadoščati sistemu *Cauchy-Riemannovih diferencialnih enačb*

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

Diferencialni enačbi kažeta, da je s funkcijo P določena tudi funkcija Q do aditivne konstante in da je Q harmonična na polju R . Funkcija $\varphi(z)$, ki je definirana takole

$$\varphi(z) = \frac{1}{4} \int f(z) dz = p + iq,$$

je zato na polju R tudi analitična in zato je

$$\varphi'(z) = \frac{\partial p}{\partial x} + i \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{1}{4} (P + iQ)$$

Če upoštevamo, da zadoščata tudi funkciji p in q sistemu *Cauchy-Riemannovih diferencialnih enačb*, dobimo

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{1}{4} P, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{1}{4} Q \quad (17)$$

Če še upoštevamo, da sta funkciji p in q harmonični, velja na polju R enačba

$$\nabla^2 (U - px - qy) = 0$$

Zato lahko pišemo funkcijo $U(x, y)$ v obliki

$$U = px + qy + p_1(x, y),$$

pri čemer je funkcija $p_1(x, y)$ harmonična na polju R . S pomočjo te funkcije lahko enako kot prej dobimo analitično funkcijo $\chi(z) = p_1(x, y) + iq_1(x, y)$. Potem se da funkcija U izraziti z analitičnima funkcijama $\varphi(z)$ in $\chi(z)$ na naslednji način

$$U = \frac{1}{2} [\bar{z} \varphi(z) + z \overline{\varphi(z)} + \chi(z) + \overline{\chi(z)}] = \operatorname{Re} [\bar{z} \varphi(z) + \chi(z)] \quad (18)$$

Pri tem smo s prečnimi črtami zaznamovali konjugirano kompleksne vrednosti, Re pa pomeni realni del izraza v oglatem oklepaju.

* To je prvi ugotovil *E. Goursat* l. 1898.

VI. IZRAŽAVA NAPETOSTI IN PREMIKOV Z NOVIMA FUNKCIJAMA

Zaradi enačb (12) se dajo tudi komponente napetosti izraziti z analitičnima funkcijama $\varphi(z)$ in $\chi(z)$. Iz omenjenih enačb lahko hitro izpeljemo naslednji enačbi

$$\begin{aligned}\sigma_x + i\tau_{xy} &= \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - i \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = -i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} \right) \\ \sigma_y - i\tau_{xy} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} \right)\end{aligned}\quad (19)$$

Izraz $\partial U / \partial x + i \partial U / \partial y$, ki nastopa v obeh enačbah, dobimo iz enačbe (18) z odvajanjem po x in y

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{1}{2} [\varphi'(z) + \overline{z} \varphi'(z) + \overline{\varphi(z)} + z \overline{\varphi'(z)} + \chi'(z) + \overline{\chi'(z)}] \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{1}{2} i [-\varphi(z) + \overline{z} \varphi'(z) + \overline{\varphi(z)} - z \overline{\varphi'(z)} + \chi'(z) - \overline{\chi'(z)}]\end{aligned}$$

Odtod sledi

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} = \varphi(z) + z \overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}, \quad (20)$$

pri čemer je $\psi(z) = \chi'(z)$ tudi analitična funkcija. Če izraz (20) odvajamo najprej po x in nato še po y in vstavimo dobljeni vrednosti v enačbi (19), dobimo

$$\begin{aligned}\sigma_x + i\tau_{xy} &= \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} - z \overline{\varphi''(z)} - \overline{\psi'(z)} \\ \sigma_y - i\tau_{xy} &= \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} + z \overline{\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)}\end{aligned}\quad (21)$$

Če enačbi (21) najprej seštejemo, nato pa odštejemo in vzamemo na obeh straneh konjugirano kompleksno vrednost, dobimo

$$\begin{aligned}\sigma_x + \sigma_y &= 2 [\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] = 4 \operatorname{Re} [\varphi'(z)] \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2 [z \overline{\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)}]\end{aligned}\quad (22)$$

Ti dve enačbi povesta, kako se izražajo komponente napetosti z analitičnima funkcijama $\varphi(z)$ in $\psi(z)$.

Sedaj je treba izraziti še premike s funkcijama φ in ψ . Pri tem moramo upoštevati enačbe (6), ki povezujejo premike z napetostmi. Če razrešimo prvo teh enačb na $\partial u / \partial x$, drugo pa na $\partial v / \partial y$ in upoštevamo enačbe (12) ter da je $\sigma_x + \sigma_y = \nabla^2 U$ in $\vartheta = \partial u / \partial x + \partial v / \partial y = \Delta^2 U / [2(\lambda + \mu)]$, dobimo

$$\begin{aligned}2\mu \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \Delta^2 U \\ 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \Delta^2 U\end{aligned}\quad (23)$$

Če pa še upoštevamo, da je $P = \nabla^2 U$, torej $\partial^2 U / \partial y^2 = P - \partial^2 U / \partial x^2$ in $\partial^2 U / \partial x^2 = P - \partial^2 U / \partial y^2$ ter da je zaradi (17) $P = 4 \partial p / \partial x = 4 \partial q / \partial y$, lahko pišemo enačbi (23) v obliki

$$2\mu \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$2\mu \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \frac{\partial q}{\partial y}$$

Če integriramo prvo enačbo po x , drugo pa po y , dobimo

$$\begin{aligned} 2\mu u &= -\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} p + F_1(y) \\ 2\mu v &= -\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} q + F_2(x) \end{aligned} \quad (24)$$

Pri tem sta $F_1(y)$ in $F_2(x)$ poljubni funkciji. Če vstavimo dobljena izraza za u in v v tretjo enačbo (6), ki jo zaradi (12) lahko pišemo v obliki

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

in če upoštevamo, da je zaradi (17) $\partial p / \partial y + \partial q / \partial x = 0$, dobimo

$$F_1'(y) + F_2'(x) = 0$$

Odtod sledi, da sta F_1 in F_2 linearni funkciji spremenljivk y oziroma x in predstavljata samo premike togega telesa. Zato teh dveh funkcij pri obravnavanju ravninskih elastostatičnih problemov ni treba upoštevati in jih zato v enačbah (24) smemo črtati. Če drugo enačbo (24) pomnožimo z i in jo prištejemo prvi ter upoštevamo, da je $\varphi(z) = p + iq$, dobimo enačbo

$$2\mu(u + iv) = \kappa \varphi(z) - z \overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}, \quad (25)$$

ki pove, kako se izražajo premiki s funkcijama $\varphi(z)$ in $\psi(z)$. Pri tem pomeni $\kappa = (\lambda + 3\mu)/(\lambda + \mu) = 3 - 4\sigma$, kjer je σ Poissonovo število.

Sedaj nastane vprašanje, če je kaj poljubnosti v izbiri funkcij $\varphi(z)$ in $\psi(z)$. Zanima nas, kakšna je razlika med dvema skupinama funkcij φ , ψ in φ_0 , ψ_0 , ki ustrezata isti porazdelitvi napetosti na polju R . Če upoštevamo pravkar izpeljane enačbe, se izkaže, da je funkcija $\varphi(z)$ določena do linearne funkcije $ciz + a$, $\psi(z)$ pa do aditivne konstante β , pri čemer je c realna konstanta, a in β pa sta poljubni kompleksni konstanti. To nam dovoljuje še nekaj prostosti v izbiri funkcij φ in ψ .

VII. IZRAŽAVA ROBNIH POGOJEV S FUNKCIJAMA $\varphi(z)$ IN $\psi(z)$

Z analitičnima funkcijama $\varphi(z)$ in $\psi(z)$ se dajo izraziti tudi robni pogoji (8) in (9). Če sta dani komponenti napetosti $T_1(s)$ in $T_2(s)$ na ograji C polja R , sledi iz enačb (16), da je na krivulji C izpolnjena enačba

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} = f_1(s) + i f_2(s) + \text{konst.},$$

pri čemer je

$$f_1(s) + i f_2(s) = i \int_{s_0}^s [T_1(s) + i T_2(s)] ds$$

Če upoštevamo še enačbo (20), dobimo robni pogoj v obliki

$$\varphi(z) + z \overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = f_1 + i f_2 + \text{konst.} \quad (26)$$

Tej enačbi morata zadoščati funkciji $\varphi(z)$ in $\psi(z)$ na robu polja R . Konstanta na desni strani te enačbe je v splošnem kompleksna. Lahko pa ji damo določeno vrednost, če upoštevamo, da je neka poljubnost v izbiri funkcij $\varphi(z)$ in $\psi(z)$.

Če sta dani komponenti premikov $g_1(s)$ in $g_2(s)$ na robu C polja R , dobimo iz enačbe (25) robni pogoj

$$z \varphi(z) - z \overline{\varphi'(z)} - \psi(z) = 2 \mu [g_1(s) + i g_2(s)], \quad (27)$$

ki mu morata zadoščati funkciji $\varphi(z)$ in $\psi(z)$ na ograji C polja R .

VIII. KONFORMNA UPODOBITEV

Ravninske elastostatične probleme rešimo najpreprosteje tako, da konformno upodobimo polje R v kompleksni ravnini z s pomočjo analitične funkcije $z = \omega(\zeta)$ obratno enolično v notranjost enotnega kroga $|\zeta| = 1$ v kompleksni ravnini ζ . Iz teorije analitičnih funkcij izhaja, da je upodobitev, ki jo da analitična funkcija $\omega(\zeta)$, konformna v vseh točkah ravnine ζ , kjer je odvod $\omega'(\zeta)$ različen od nič. Če hočemo to doseči, je po teoremu Smirnova dovolj, da ima ograja C polja R zvezno ukrivljenost. Vzemimo, da ima krivulja C to lastnost. Če leži točka $z = 0$ v notranjosti končnega polja R , lahko za $|\zeta| \leq 1$ razvijemo funkcijo $\omega(\zeta)$ v potenčno vrsto

$$z = \omega(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \zeta^n \quad (28)$$

Pri tem smo vzeli, da točki $\zeta = 0$ ustreza točka $z = 0$. Poglejmo sedaj, kako se s prehodom k ζ transformirajo enačbe (20), (25), (26) in (27)! Najprej vpeljimo naslednje označbe

$$\varphi(z) = \varphi[\omega(\zeta)] = \varphi_1(\zeta), \quad \psi(z) = \psi[\omega(\zeta)] = \psi_1(\zeta)$$

Ker je $\varphi'(z) = \frac{d\varphi_I}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz} = \varphi_I'(\zeta) \cdot \frac{1}{\omega'(\zeta)}$, preideta za $|\zeta| \leq 1$ enačbi (20) in

(25) v obliko

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} = \varphi_I(\zeta) + \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \overline{\varphi_I'(\zeta)} + \overline{\psi_I(\zeta)}$$

$$2\mu(u + iv) = \kappa \varphi_I(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \overline{\varphi_I'(\zeta)} - \overline{\psi_I(\zeta)}$$

Zato preideta robna pogoja (26) in (27) v

$$\varphi_I(\zeta) + \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \overline{\varphi_I'(\zeta)} + \overline{\psi_I(\zeta)} = F(\vartheta) \quad (29)$$

$$\kappa \varphi_I(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \overline{\varphi_I'(\zeta)} - \overline{\psi_I(\zeta)} = G(\vartheta) \quad (30)$$

Enačbama (29) in (30) morata zadoščati funkciji $\varphi_I(\zeta)$ in $\psi_I(\zeta)$ na robu γ enotnega kroga $|\zeta| = 1$. Pri tem sta funkciji $F(\vartheta)$ in $G(\vartheta)$ na tem robu enolično določeni z (28) iz znanih vrednosti izrazov $f_1 + i f_2 + \text{konst.}$ in $2\mu(g_1 + i g_2)$, ki sta dana na robu C polja R v ravnini z . Za funkciji $\varphi_I(\zeta)$ in $\psi_I(\zeta)$ zahtevamo, da sta na polju $|\zeta| \leq 1$ zvezni. Če je polje R omejeno, sta $\varphi_I(\zeta)$ in $\psi_I(\zeta)$ analitični funkciji na polju $|\zeta| < 1$. Zato ju za $|\zeta| \leq 1$ lahko razvijemo v potenčno vrsto

$$\varphi_I(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \zeta^n, \quad \psi_I(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^n \quad (31)$$

Pri tem smo izbrali funkcijo $\varphi_I(\zeta)$ tako, da je $\varphi_I(0) = 0$. Če ti dve vrsti vstavimo v robna pogoja (29) in (30), dobimo sistem enačb za koeficiente a_n in b_n . Če koeficiente določimo, dobimo funkciji $\varphi_I(\zeta)$ in $\psi_I(\zeta)$ in s tem je v ravnini ζ problem rešen. S prehodom v ravnino z dobimo nato funkciji $\varphi(z)$ in $\psi(z)$ in iz enačb (22) in (25) komponente napetosti in premikov.

Metoda določevanja koeficientov je večkrat zelo nerodna. Obstajajo še druge metode, ki so pripravnejše in včasih hitreje pripeljejo do cilja, so pa zato matematično zahtevnejše, ker je treba reševati integralne in integro-diferencialne enačbe.

IX. REŠITEV OSNOVNIH PROBLEMOM ZA KROŽNO POLJE

Oglejmo si na zelo preprostem zgledu, kako pridemo z obdelano metodo do rešitve ravninskih elastostatičnih problemov! Naj bo polje v ravnini z notranjost kroga $|z| \leq R$. Funkcija, ki konformno upodobi to polje v notranjost kroga $|\zeta| \leq 1$, je

$$z = R\zeta$$

Spremenljivko ζ pišimo na robu γ enotnega kroga $|\zeta| \leq 1$ v obliki $\sigma = e^{i\vartheta}$.^{*} Potem se robni pogoj (29) glasi

$$\varphi_I(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi_I'(\sigma)} + \overline{\psi_I(\sigma)} = F(\vartheta), \quad (32)$$

enačbi (31) pa imata obliko

$$\varphi_I(\sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sigma^k, \quad \psi_I(\sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \sigma^k$$

Potenčna vrsta, v katero je treba razviti izraz $\omega(\sigma)/\overline{\omega'(\sigma)}$, se reducira na en sam člen $\omega(\sigma)/\overline{\omega'(\sigma)} = R\sigma/R = \sigma$.

Funkcijo $f_1(\vartheta) + if_2(\vartheta)$, ki določa porazdelitev napetosti na robu γ , razvijmo v Fourierovo vrsto

$$F(\vartheta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \sigma^k, \quad (33)$$

pri čemer je

$$A_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\vartheta) e^{-ik\vartheta} d\vartheta, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Če vstavimo dobljene vrednosti v robni pogoj (32), dobimo za koeficiente a_k in b_k enačbo

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sigma^k + \sigma \sum_{k=1}^{\infty} k \overline{a_k} \sigma^{-k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \overline{b_k} \sigma^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \sigma^k$$

Če primerjamo koeficiente pri enakih potencah spremenljivke σ , dobimo naslednje enačbe

$$\begin{aligned} a_1 + \overline{a_1} &= A_1 \\ a_k &= A_k, \quad k \geq 2, \\ b_k &= \overline{A_{-k}} - (k+2) A_{k+2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (34)$$

Prva enačba pove, da je koeficient A_1 realno število. Funkciji $\varphi_I(\zeta)$ in $\psi_I(\zeta)$ se potem glasita

$$\begin{aligned} \varphi_I(\zeta) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \zeta^k = \frac{A_1}{2} \zeta + \sum_{k=2}^{\infty} A_k \zeta^k \\ \psi_I(\zeta) &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k \zeta^k = \sum_{k=0}^{\infty} [\overline{A_{-k}} - (k+2) A_{k+2}] \zeta^k \end{aligned}$$

Če vstavimo v ti dve enačbi $\zeta = z/R$, dobimo funkciji $\varphi(z)$ in $\psi(z)$. Napetosti in premike v pravokotnih koordinatah dobimo iz enačb (22) in (25).

Kadar so pri tem problemu dani premiki na robu polja, razvijemo funkcijo $G(\vartheta) = 2\mu [g_1(\vartheta) + ig_2(\vartheta)]$ v Fourierovo vrsto

$$G(\vartheta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k \sigma^k$$

Enačbo za določitev koeficientov dobimo v tem primeru iz robnega pogoja (30)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sigma^k - \sigma \sum_{k=1}^{\infty} k \overline{a_k} \sigma^{-k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} \overline{b_k} \sigma^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k \sigma^k$$

^{*} V literaturi je navada pisati za $e^{i\vartheta}$ znak σ , ki ga pa ne smemo zamenjati s Poissonovim številom. Konjugirana vrednost je potem $\overline{\sigma} = e^{-i\vartheta} = \sigma^{-1}$.

Če spet primerjamo koeficiente pri enakih potencah spremenljivke σ , dobimo za koeficiente a_k in b_k enačbe

$$\begin{aligned} \kappa a_1 - \bar{a}_1 &= B_1, \\ \kappa a_k &= B_k, \quad k > 1, \\ \bar{b}_k &= -B_{-k} - (k+2) a_{k+2}, \quad k \geq 0. \end{aligned}$$

S tem dobimo funkciji $\varphi_1(\zeta)$ in $\psi_1(\zeta)$ oziroma $\varphi(z)$ in $\psi(z)$ in problem je rešen.

Zgled. Če deluje na robu kroga s polmerom R enakomeren tlak p , se komponenti napetosti na robu polja glasita $T_1 = -p \cos \vartheta$, $T_2 = -p \sin \vartheta$. Zato je

$$f_1(s) + i f_2(s) = i \int_{s_0}^s (T_1 + i T_2) ds = -i \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} p e^{i\vartheta} R d\vartheta = -p R e^{i\vartheta}$$

in

$$f_1(\vartheta) + i f_2(\vartheta) = -p R \sigma$$

Iz enačbe (33) je razvidno, da je samo koeficient $A_1 = -p R$ različen od nič, vsi ostali pa so enaki nič. Iz enačb (31) in (34) dobimo

$$\varphi_1(\zeta) = -\frac{p R}{2} \zeta, \quad \psi_1(\zeta) = 0$$

in odtod

$$\varphi(z) = -\frac{p z}{2}, \quad \psi(z) = 0$$

Komponente napetosti in premikov nam dajo enačbe (22) in (25). Iz njih dobimo

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y &= -p, \quad \tau_{xy} = 0, \\ u &= \frac{p(1-\kappa)}{4\mu} x, \quad v = \frac{p(1-\kappa)}{4\mu} y \end{aligned}$$

Pri tem problemu je treba običajno dobiti komponente napetosti in premikov v polarnih koordinatah. Tega pa tu zaradi pomanjkanja prostora nismo mogli izpeljati, ker bi rabili enačbe (22) in (25) v polarnih koordinatah.

Naša izvajanja naj služijo le za uvod v metode, ki se pri reševanju ravninskih elastostatičnih problemov poslužujejo funkcij kompleksne spremenljivke. Zato smo se omejili le na najpreprostejši primer, ko je polje R , ki ga zavzema telo, končno in omejeno z ena samo krivuljo, za katero smo vzeli, da je v vseh točkah gladka in da ima zvezno ukrivljenost. Prav nič se nismo dotaknili vprašanja, kako se rešujejo ravninski problemi, če je polje neskončno ali če je omejeno z več krivuljami, skratka če rob ne zadošča vsem omenjenim zahtevam. Prav tako si nismo mogli ogledati elegantnejše, a matematično težje poti za reševanje ravninskih problemov, pri kateri je treba poznati teorijo integralnih in integrodiferencialnih enačb.

Literatura:

1. N. I. Mushelišvili, Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity, Groningen 1953.
2. I. S. Sokolnikoff, Mathematical Theory of Elasticity, New York 1956.
3. J. Plemelj, Teorija analitičnih funkcij, Ljubljana 1953.
4. L. Šuklje, Trdnost, Ljubljana 1952.
5. J. Hlitičjev, Poglavlja iz teorije elastičnosti, Beograd 1948.

ELEMENTARNA TEORIJA DISTRIBUCIJ

ANTON SUHADOLC

Iz analize vemo, da ni vsaka zvezna funkcija odvedljiva. Vemo tudi, da lahko dobimo iz konvergentne vrste z odvajanjem po členih divergentno vrsto. Prav tako ni zmerom limita zveznih funkcij zvezna funkcija. Te težave so navedle matematike, da so iskali tako razširitev pojma zvezne funkcije, limite in odvoda, da bi te težave odpadle. Res se je to posrečilo matematiku L. Schwartzu s teorijo distribucij. Schwartzova vpeljava distribucij ni elementarna, zato so v zadnjih letih poskušali matematiki izdelati teorijo distribucij na druge načine. Posebno enostavno se je to posrečilo poljskima matematikoma Mikusinskemu in Sikorskemu. V naslednjem si bomo ogledali njuno teorijo distribucij.

Iz osnov analize je znano dejstvo, da je limita konvergentnega zaporedja racionalnih števil lahko racionalno ali iracionalno število. Potreben pogoj, da je zaporedje $\{a_n\}$ konvergentno, je, da zadošča Cauchyjevemu pogoju: po predpisu poljubnega števila $\varepsilon > 0$ moremo dobiti tako naravno število N , da je

$$|a_n - a_m| < \varepsilon, \text{ za vse } n, m > N.$$

Vzemimo, da iracionalnih števil še ne poznamo! V okviru racionalnih števil pa Cauchyjev pogoj ni tudi zadosten; zaporedje decimalnih približkov za $\sqrt{2}:1$; 1,4; 1,41; 1,412; ... zadošča Cauchyjevemu pogoju, limite pa to zaporedje v obsegu racionalnih števil nima, saj vemo, da ni racionalnega števila, katerega kvadrat bi bil enak 2. Nemški matematik G. Cantor je definiral pojem realnega števila z zaporedji: vsako zaporedje racionalnih števil, ki ustreza Cauchyjevemu pogoju, definira neko realno število. Dve taki zaporedji definirata isto število, če konvergira njuna razlika proti 0. Pravimo, da sta zaporedji med seboj ekvivalentni. Vsa ekvivalentna zaporedja določajo isto realno število.

Podobno bomo vpeljali pojem distribucije. Kot osnova nam bodo služila zaporedja zveznih funkcij. Najprej še definirajmo, kdaj konvergira zaporedje zveznih funkcij skoraj enakomerno.

Zaporedje zveznih funkcij $\{F_n(x)\}$ konvergira na odprtem intervalu $A < x < B$ skoraj enakomerno proti funkciji $F(x)$, če konvergira enakomerno na vsakem zaprtem intervalu, ki je vsebovan v intervalu (A, B) . Z znaki zapišemo to takole:

$$F_n(x) \Rightarrow F(x), \quad n \rightarrow \infty, \quad -\infty \leq A < x < B \leq \infty$$

Limita $F(x)$ je zvezna funkcija za vsak x med A in B , le v krajiščih tega intervala ni vedno zvezna.

Analogno pojmu Cauchyjevega zaporedja bomo vpeljali pojem fundamentalnega zaporedja.

Zaporedje zveznih funkcij $\{f_n(x)\}$ imenujemo na intervalu $A < x < B$ fundamentalno, če eksistira celo število $k \geq 0$ in zaporedje zveznih funkcij $\{F_n(x)\}$ tako, da je

$$1. \quad F_n^{(k)}(x) = f_n(x) \quad (F_1)$$

$$2. \quad F_n(x) \Rightarrow F(x), \quad n \rightarrow \infty. \quad (F_2)$$

Z besedo povemo zgornje takole: Zaporedje $\{f_n(x)\}$ je fundamentalno, če zaporedje, ki ga dobimo s k -kratno integracijo tega zaporedja, konvergira skoraj enakomerno.

Vsako skoraj enakomerno konvergentno zaporedje $\{f_n(x)\}$ je tudi fundamentalno; če namreč vzamemo $k = 0$ in $F_n(x) = f_n(x)$, sta res pogoja (F_1) in (F_2) izpolnjena.

Med fundamentalnimi zaporedji definiramo relacijo ekvivalence takole: Fundamentalni zaporedji $\{f_n(x)\}$ in $\{g_n(x)\}$ sta ekvivalentni, če eksistira celo število $k \geq 0$ in taki zaporedji zveznih funkcij $\{F_n(x)\}$ in $\{G_n(x)\}$, da je

$$f_n(x) = F_n^{(k)}(x), \quad g_n(x) = G_n^{(k)}(x) \quad (E_1)$$

$$F_n(x) \Rightarrow F(x), \quad G_n(x) \Rightarrow G(x), \quad n \rightarrow \infty \quad (E_2)$$

Relacija ekvivalence ima običajne lastnosti:

Refleksivnost: Vsako fundamentalno zaporedje je ekvivalentno samemu sebi.

Simetrija: Če je fundamentalno zaporedje $\{f_n(x)\}$ ekvivalentno zaporedju $\{g_n(x)\}$, je tudi zaporedje $\{g_n(x)\}$ ekvivalentno zaporedju $\{f_n(x)\}$.

Tranzitivnost: Če je fundamentalno zaporedje $\{f_n(x)\}$ ekvivalentno zaporedju $\{g_n(x)\}$ in zaporedje $\{g_n(x)\}$ ekvivalentno zaporedju $\{h_n(x)\}$, sta tudi zaporedji $\{f_n(x)\}$ in $\{h_n(x)\}$ ekvivalentni.

Prvi lastnosti sta iz definicije očitni, tretjo pa je moč dokazati brez posebnih težav.

S pomočjo relacije ekvivalence lahko razdelimo fundamentalna zaporedja na razrede med seboj ekvivalentnih zaporedij. Razred $[f_n]$ tvorijo vsa fundamentalna zaporedja, ki so ekvivalentna zaporedju $\{f_n(x)\}$. Iz lastnosti ekvivalenčne relacije sklepamo, da sta razreda $[f_n]$ in $[g_n]$ enaka tedaj in le tedaj, če sta fundamentalni zaporedji $\{f_n(x)\}$ in $\{g_n(x)\}$ med seboj ekvivalentni.

Definicija distribucije je sedaj na dlani.

Razred med seboj ekvivalentnih zaporedij določa distribucijo $f(x)$.

Enakost distribucij definiramo takole: Distribuciji $f(x)$ in $g(x)$ sta enaki tedaj in le tedaj, ko sta enaka razreda, ki ti distribuciji določata. Razreda sta enaka tedaj in le tedaj, ko najdemo v prvem razredu fundamentalno zaporedje $\{h_n(x)\}$, ki je ekvivalentno nekemu fundamentalnemu zaporedju $\{k_n(x)\}$ iz drugega razreda.

Taka posplošitev zvezne funkcije je smiselna, ker vsebuje vse zvezne funkcije kot poseben primer. Naj bo namreč $f(x)$ zvezna funkcija! Zaporedje, ki ima vse člene enake $f(x)$, torej $f_n(x) = f(x)$ za vsak n , je fundamentalno, saj sta zahtevi (F_1) in (F_2) izpolnjeni za $k = 0$ in je $F_n(x) = f_n(x) = f(x)$. Razred, ki ga določa to zaporedje, tvorijo fundamentalna zaporedja, ki limitirajo proti $f(x)$ skoraj enakomerno. Razred $[f]$ smemo torej istovetiti z zvezno funkcijo $f(x)$.

Ni vsaka distribucija neka navadna funkcija, kot kaže zgled:

$$f_n(x) = (n/2\pi)^{1/2} \exp(-nx^2).$$

To zaporedje konvergira proti 0, če je $x \neq 0$. Pri $x = 0$ pa narašča $f(0)$ z n preko vsake meje. Tvorimo funkcije

$$g_n(t) = \int_{-\infty}^t f_n(u) du, \quad F_n(x) = \int_{-\infty}^x g_n(t) dt \quad (1)$$

Funkcije $g_n(x)$ limitirajo proti 0 za negativne x -e in proti 1 za pozitivne. Funkcije $F_n(x)$ limitirajo skoraj enakomerno proti 0, če je $x < 0$, in proti x , če je $x \geq 0$. Od tod vidimo, da je zaporedje $\{f_n(x)\}$ fundamentalno, ker sta izpolnjena pogoja (F_1) in (F_2) s $k = 2$. Zaporedje $\{F_n(x)\}$ je definirano z enačbo (1) ter $F(x) = 0$, $x < 0$, $F(x) = x$, $x \geq 0$. Razred zaporedij, ekvivalentnih zaporedju $\{f_n(x)\}$, imenujemo distribucijo $\delta(x)$. Natančneje bomo spoznali naravo te distribucije pozneje.

Za distribucije moremo vpeljati algebraične operacije. Vsota distribucij $f(x)$ in $g(x)$, ki ju določata zaporedji $\{f_n(x)\}$ in $\{g_n(x)\}$, je distribucija, definirana z zaporedjem $\{f_n(x) + g_n(x)\}$. Podobno definiramo razliko. Distribucija $\lambda f(x)$, kjer je λ število, pa pomeni distribucijo, definirano z zaporedjem $\{\lambda f_n(x)\}$. Brez težave bi se prepričali, da so tako vpeljane algebraične operacije res smiselne.

Z uvedbo iracionalnih števil smo dosegli, da je korenjenje pozitivnega števila vedno izvršljiva operacija. Kaj pridobimo z uvedbo distribucij, bodo povedali naslednji izreki.

Za vsako, na intervalu $A < x < B$ zvezno funkcijo $F(x)$, eksistira zaporedje polinomov $\{P_n(x)\}$, ki konvergira proti $F(x)$ skoraj enakomerno.

Naj bo $\{a_n\}$ naraščajoče zaporedje števil, ki konvergira proti A , $\{b_n\}$ pa padajoče zaporedje, ki konvergira proti B . Uporabimo znani Weierstrassov izrek o aproksimaciji zveznih funkcij s polinomi! Po tem izreku moremo najti za vsak n , tak polinom $P_n(x)$, da je $|F(x) - P_n(x)| < 1/n$, $a_n \leq x \leq b_n$. Ta enačba pove, da konvergira zaporedje $\{P_n(x)\}$ skoraj enakomerno proti $F(x)$.

Distribucijo $f(x)$ določa neko fundamentalno zaporedje $\{f_n(x)\}$. Zato eksistira celo število $k \geq 0$ in tako zaporedje zveznih funkcij, $\{F_n(x)\}$, da je

$$F_n^{(k)}(x) = f_n(x), \quad F_n(x) \Rightarrow F(x), \quad n \rightarrow \infty$$

K funkciji $F(x)$ moremo po prejšnjem izreku najti zaporedje polinomov, $\{P_n(x)\}$, ki konvergira skoraj enakomerno proti $F(x)$. Zaporedje polinomov $\{p_n(x)\}$, pri čemer je $p_n(x) = P_n^{(k)}(x)$, pa je ekvivalentno zaporedju $\{f_n(x)\}$, saj sta izpolnjeni zahtevi (E_1) in (E_2) . Tako smo dobili izrek:

Vsako distribucijo moremo izraziti z nekim fundamentalnim zaporedjem polinomov $\{p_n(x)\}$.

Sedaj že moremo definirati odvod distribucije.

m -ti odvod distribucije $f(x) = [p_n(x)]$ definira razred zaporedij, ki so ekvivalentna zaporedju $\{p_n^{(m)}(x)\}$.

Iz te definicije je neposredno razvidna veljavnost izreka:

I. Vsaka distribucija je poljubnokrat odvedljiva.

V nadaljnjem bomo rabili še naslednji pomožni izrek:

Če je fundamentalno zaporedje $\{f_n(x)\}$ sestavljeno iz funkcij, ki so m -krat zvezno odvedljive, je distribucija, določena z zaporedjem $\{f_n^{(m)}(x)\}$, kar m -ti odvod distribucije $[f_n(x)]$, torej

$$[f_n^{(m)}(x)] = [f_n(x)]^{(m)}.$$

Zaporedje $\{f_n(x)\}$ je fundamentalno, zato eksistira celo število $k \geq 0$ in zaporedje $\{f_n^{(m)}(x)\}$ tako, da sta izpolnjena pogoja (F_1) in (F_2) . Zaporedje

$\{f_n^{(m)}(x)\}$ je tudi fundamentalno, kar vidimo, če vzamemo v definiciji fundamentalnega zaporedja namesto števila k število $k + m$. Izberimo si sedaj zaporedje polinomov $\{p_n(x)\}$, ekvivalentno zaporedju $\{f_n(x)\}$. Fundamentalni zaporedji $\{f_n^{(m)}(x)\}$ in $\{p_n^{(m)}(x)\}$ sta ekvivalentni, ker sta izpolnjena pogoja (E_1) in (E_2) , če zamenjamo k s $k + m$. To pomeni, da je distribucija, ki jo določa zaporedje $\{f_n^{(m)}(x)\}$, enaka m -kratnemu odvodu distribucije $[f_n(x)]$. To dejstvo zapišemo takole:

$$[f_n^{(m)}(x)] = [f_n(x)]^{(m)}.$$

Še posebej nam ta izrek pove, da sovpada odvod distribucije, ki je m -krat zvezno odvedljiva funkcija, z njenim navadnim odvodom.

Zvezna funkcija ni vedno odvedljiva; pač pa moremo odvajati zvezno funkcijo kot distribucijo. Odvod zvezne funkcije kot distribucije bomo imenovali posplošeni odvod zvezne funkcije.

II. Vsaka distribucija je posplošeni odvod neke zvezne funkcije.

Naj bo distribucija $f(x)$ določena z zaporedjem $\{f_n(x)\}$! Po definiciji fundamentalnega zaporedja eksistira tako zaporedje $\{F_n(x)\}$, da je

$$f_n(x) = F_n^{(m)}(x), \quad F_n(x) \Rightarrow F(x), \quad n \rightarrow \infty$$

Razred $[F_n(x)]$ določa prav zvezno funkcijo $F(x)$. Zaporedje $\{F_n(x)\}$ je sestavljeno iz k -krat zvezno odvedljivih funkcij, zato moremo nanj uporabiti prejšnji izrek:

$$f(x) = [f_n(x)] = [F_n^{(k)}(x)] = [F_n(x)]^{(k)} = F^{(k)}(x).$$

Distribucija $f(x)$ je res k -ti posplošeni odvod zvezne funkcije $F(x)$.

Naslednjega izreka ne bomo dokazovali, ker je dokaz predolg.

III. Če je odvod distribucije enak 0, je distribucija kar neka konstanta.

Naj pripomnimo, da je množica distribucij, kot jih je definirali L. Schwartz, obširnejša od naše. Med Schwartzovimi distribucijami so namreč tudi take, ki niso odvod končnega reda nobene zvezne funkcije. To pomanjkljivost naše teorije bi lahko odpravili s primerno posplošitvijo pojma fundamentalnega zaporedja.

Z distribucijami moremo tvoriti zaporedja. Rečemo, da zaporedje distribucij $f_n(x)$ konvergira k distribuciji $f(x)$, v znakih $\lim f_n(x) = f(x)$, če eksistira celo število $k \geq 0$, zvezna funkcija $F(x)$ in zaporedje zveznih funkcij $\{F_n(x)\}$, da velja:

$$F_n^{(k)}(x) = f_n(x), \quad F_n(x) \Rightarrow F(x), \quad F^{(k)}(x) = f(x). \quad (2)$$

Tu razumemo odvajanje v posplošenem smislu.

Vrsta iz distribucij $\sum f_n(x)$ konvergira proti distribuciji $f(x)$, če konvergira zaporedje delnih vsot v zgoraj definiranem smislu proti distribuciji $f(x)$.

S tema definicijama moremo dokazati izreka, ki jasno kažeta, kako je teorija distribucij enostavnejša od klasične analize.

IV. Če konvergira zaporedje distribucij $f_n(x)$ proti distribuciji $f(x)$, konvergira zaporedje m -tih odvodov proti m -temu odvodu limite $f(x)$, v znakih:

$$\lim f_n^{(m)}(x) = (\lim f_n(x))^{(m)}.$$

Iz konvergenca zaporedja distribucij $f_n(x)$ sledi eksistenca takega zaporedja zveznih funkcij, $\{F_n(x)\}$, da so izpolnjeni pogoji (2). Isti pogoji so izpolnjeni tudi za zaporedje distribucij $f_n^{(m)}(x)$, če nadomestimo v (2) celo število k s celim številom $k+m$; s tem je izrek dokazan. Podoben izrek velja tudi za vrste iz distribucij. Poseben primer tega izreka je izrek:

V. Za vsako konvergentno vrsto je veljavna enačba

$$\Sigma f_n'(x) = (\Sigma f_n(x))'.$$

Za distribucije velja torej: Konvergentna zaporedja in konvergentne vrste smemo členoma odvajati.

Vemo, da so zvezne funkcije vsebovane med distribucijami. Zanima nas, kakšne nezvezne funkcije so tudi zastopane med distribucijami. Vzemimo funkcijo $f(x)$, ki je integrabilna na vsakem intervalu, ki je vsebovan v intervalu (A, B) ! Naj bo $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, $A < x < B$. Iz teorije Riemannovega (ali Lebesguesovega) integrala poznamo formulo:

$$F'(x) = f(x) \text{ skoraj povsod.}$$

$F(x)$ je zvezna funkcija, zato v posplošenem smislu odvedljiva. Distribucija, ki je posplošeni odvod te funkcije, naj nam predstavlja navadno integrabilno funkcijo $f(x)$.

Na ta način je postala n. pr. nezvezna funkcija $\ln|x|$ neka distribucija, namreč ravno posplošeni odvod zvezne funkcije

$$F(x) = \int_a^x \ln|x| dx.$$

Funkcija $1/x$ ni niti zvezna, niti integrabilna na intervalu, ki vsebuje točko $x=0$. Pač pa moremo zaradi enačbe $(\ln|x|)' = 1/x$, $x \neq 0$, indentificirati navadno funkcijo $1/x$ z odvodom distribucije $\ln|x|$.

Podobno moremo smatrati funkcijo $(x-x_0)^{-k}$ kot k -kratni odvod distribucije $[(-1)^k \ln|x-x_0|/(k-1)!]$.

Tako smo dosegli, da spadajo med distribucije vse integrabilne funkcije in funkcije s poli.

Množenje distribucije z distribucijo se ne da zadovoljivo definirati. Pač pa moremo distribucijo množiti z neskončnokrat odvedljivo funkcijo. Vzemimo iz razreda $[f_n(x)]$, ki definira distribucijo $f(x)$, neko zaporedje $\{f_n(x)\}!$ Iz tega zaporedja tvorimo novo zaporedje $\{f_n(x)\omega(x)\}$. V primeru, ko je $\omega(x)$ neskončnokrat odvedljiva funkcija, je zaporedje $\{f_n(x)\omega(x)\}$ fundamentalno, kot bi nam to pokazal krajši račun. Razred $[f_n(x)\omega(x)]$ vseh fundamentalnih zaporedij, ki so ekvivalentna zaporedju $\{f_n(x)\omega(x)\}$, imenujemo produkt funkcije $\omega(x)$ z distribucijo $f(x)$, torej $\omega(x)f(x)$. Navadni računski zakoni, n. pr. komutativnost, distributivnost, ostanejo v veljavi.

Distribucijo $f_a(x)$, ki je odvisna od zveznega parametra a , definiramo z razredom med seboj ekvivalentnih fundamentalnih zaporedij, pri katerih so vsi členi zvezno odvisni od parametra a .

Distribucije $f_a(x)$ so pri različnih vrednostih parametra a lahko definirane na različnih intervalih $A_a < x < B_a$; zato moramo pojem skoraj enakomerne konvergence malo posplošiti.

Naj bo interval (A, B) tak, da je vsak zaprti interval $[a, b]$, ki je vsebovan v (A, B) , vsebovan tudi v intervalih (A_a, B_a) za vse a , ki so dovolj blizu vrednosti a_0 . Zvezne funkcije $F_a(x)$, definirane na intervalih $A_a < x < B_a$, konvergirajo na intervalu $A < x < B$ skoraj enakomerno k funkciji $F(x)$, ko gre $a \rightarrow a_0$, če konvergirajo $F_a(x)$ na vsakem intervalu $[a, b]$ enakomerno proti funkciji $F(x)$:

$$F_a(x) \Rightarrow F(x), \quad a \rightarrow a_0.$$

Distribucija $f_a(x)$, definirana na intervalu $A_a < x < B_a$, limitira na intervalu $A < x < B$ proti distribuciji $f(x)$, ko gre $a \rightarrow a_0$, v znakih:

$$\lim f_a(x) = f(x), \quad a \rightarrow a_0,$$

če so izpolnjeni tile pogoji: Eksistira neka na intervalu $A < x < B$ zvezna funkcija $F(x)$, nadalje na intervalih $A_a < x < B_a$ zvezne funkcije $F_a(x)$ ter neko celo število $k \geq 0$ tako, da konvergira $F_a(x)$ skoraj enakomerno proti funkciji $F(x)$ in je $F_a^{(k)}(x) = f_a(x)$, $F^{(k)}(x) = f(x)$.

Mogli bi se prepričati, da je limita $f(x)$ enolično določena, če eksistira.

Za distribucije moremo definirati tudi pojem »vrednost v točki«. Rekli bomo:

Distribucija $f(x)$ ima v točki x_0 vrednost $f(x_0)$, kadar eksistira limita $f(ax + x_0)$, ko gre $a \rightarrow 0$.

Če ta limita eksistira, je konstanta. Dokaz tega dejstva bomo izpustili. Če eksistira funkcijska vrednost v točki x_0 , imenujemo to točko regularno; točko, v kateri limita ne eksistira, pa imenujemo singularno.

Pojem nedoločene integrala vpeljemo s pomočjo izreka II. Naj bo distribucija $f(x)$ k -ti odvod zvezne funkcije $F(x)$! Postavimo $F^{(k-1)}(x) = \varphi(x)$; potem je $f(x) = \varphi'(x)$. Distribucijo $\varphi(x)$ imenujemo nedoločeni integral distribucije $f(x)$. Naj bo $\psi(x)$ kak drug nedoločeni integral distribucije $f(x)$! Odvoda distribucij $\varphi(x)$ in $\psi(x)$ sta enaka $f(x)$, odvod razlike $\varphi(x) - \psi(x)$ je tedaj enak 0. Po izreku III. se nedoločena integrala razlikujeta kvečjemu za konstanto.

Določeni integral definiramo kot razliko dveh distribucij:

$$\int_a^b f(x+t) dt = \varphi(b+x) - \varphi(a+x), \quad (3)$$

kjer je $\varphi(x)$ nedoločeni integral distribucije $f(x)$.

Za računanje s tem integralom veljajo navadni računski zakoni; dokažimo za zgled pravilo

$$\int_a^b f(x+t) dt + \int_b^c f(x+t) dt = \int_a^c f(x+t) dt.$$

Po definiciji je:

$$\int_a^b f(x+t) dt + \int_b^c f(x+t) dt = \varphi(b+x) - \varphi(a+x) + \varphi(c+x) - \\ - \varphi(b+x) = \varphi(c+x) - \varphi(a+x) = \int_a^c f(x+t) dt.$$

Posebno zanimiva sta izreka o integriranju zaporedij in vrst.

VI. Če konvergira zaporedje distribucij $f_n(x)$ proti distribuciji $f(x)$, konvergira tudi zaporedje določenih integralov $\int_a^b f_n(x+t) dt$ proti distribuciji

$$\int_a^b f(x+t) dt, \text{ v znakih}$$

$$\lim \int_a^b f_n(x+t) dt = \int_a^b \lim f_n(x+t) dt, \quad n \rightarrow \infty.$$

Če je zaporedje distribucij $f_n(x)$ konvergentno, eksistira celo število $k \geq 0$ in zvezne funkcije $F_n(x)$ tako, da je $F_n^{(k)}(x) = f_n(x)$ in $F^{(k)}(x) = f(x)$. Ker konvergira zaporedje zveznih funkcij $\{F_n(x+a)\}$ skoraj enakomerno proti $F(x)$, konvergira zaporedje razlik $\{F_n(x+b) - F_n(x+a)\}$ skoraj enakomerno proti razliki $F(x+b) - F(x+a)$. Po izreku IV. smemo enačbo $F_n(x+b) - F_n(x+a) \Rightarrow F(x+b) - F(x+a)$ $(k-1)$ -krat odvajati. To nam da po definiciji (3) $\lim \int_a^b f_n(x+t) dt = \int_a^b \lim f_n(x+t) dt$.

Podoben izrek velja za vrste:

VII. Če je vrsta distribucij $\sum f_n(x)$ konvergentna, jo smemo členoma integrirati, torej velja

$$\sum \int_a^b f_n(x+t) dt = \int_a^b \sum f_n(x+t) dt.$$

Vrednost distribucije $\int_a^b f(x+t) dt$ v točki $x=0$, če eksistira, bomo označili z $\int_a^b f(t) dt$. V primeru, ko je funkcija $f(x)$ lokalno integrabilna, je to prav njen določen integral v navadnem smislu.

S pomočjo tako vpeljanega integrala lahko bolje spoznamo naravo distribucije $\delta(x)$; dokazati se da namreč formula

$$\int_a^b \omega(t) \delta(t-x) dt = \begin{cases} \omega(x), & a < x < b \\ 0, & x > b \text{ ali } x < a. \end{cases}$$

$\omega(x)$ je neskončnokrat odvedljiva funkcija. V primeru, ko je $\omega(x) \equiv 1$, imamo

$$\int_a^b \delta(t-x) dt = \begin{cases} 1, & a < x < b \\ 0, & b < x \text{ ali } a > x. \end{cases}$$

Čeprav je distribucija $\delta(t-x)$ povsod 0, razen v točki $t=x$, je njen integral po intervalu, ki vsebuje točko $t=x$, enak 1!

Fourierjeva analiza za distribucije je posebno preprosta. Distribucija, definirana na intervalu $(-\infty, \infty)$, je periodična s periodo 2π , če zadošča enačbi $f(x+2\pi) = f(x)$. Za vsako periodično distribucijo eksistira integral $\int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$.

To vidimo takole:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) dt = \varphi(x+\pi) - \varphi(x-\pi) \quad (4)$$

Odvod te distribucije je $f(x+\pi) - f(x-\pi) = 0$ zaradi periodičnosti distribucije $f(x)$; integral (4) ima zato po izreku III. konstantno vrednost, ki jo označimo z $\int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$. Prav podobno bi mogli uvideti, da so tudi integrali

$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt$ in $\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt$ konstante. Ti integrali, deljeni s π , so ravno

Fourierjevi koeficienti distribucije $f(x)$. Od tod vidimo, da so Fourierjevi koeficienti vsake periodične distribucije konstante. Nadalje bi mogli dokazati izrek:

VIII. Vsaka periodična distribucija $f(x)$ s periodo 2π je vsota trigonometrične vrste

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

pri tem so koeficienti

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt.$$

Primer periodične distribucije, ki ni navadna funkcija, je $\delta_{2\pi}(x)$, ki je odvod funkcije $E(x/2\pi)$; $E(x)$ pomeni največje celo število, ki ne presega števila x . $\delta_{2\pi}(x)$ moremo zapisati tudi kot vsoto $\delta_{2\pi}(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x+2k\pi)$. $\delta_{2\pi}(x)$ se da razviti v vrsto po cosinusi takole:

$$\delta_{2\pi}(x) = 1/\pi (1/2 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots).$$

Z uporabo gornjega izreka dobimo zanimive formule:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots = \frac{1}{2} \cot \frac{1}{2} x$$

$$(\sin x)^{-1} = 2 (\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \dots).$$

Te formule so v navadnem smislu brez pomena, saj so vrste divergentne. Formule imajo pomen v okviru teorije distribucij.

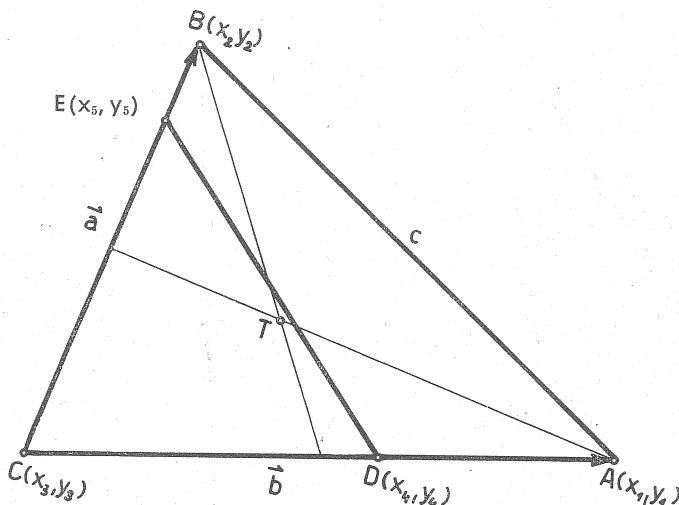
Literatura:

Mikusinski, Sikorski, Elementary Theory of Distributions, Warszawa 1957.

RAZPOLOVITEV TRIKOTNIKA

Proteus¹ je pred časom postavil bralcem vprašanje, kako bi z eno premico ploščinsko razpolovili dva trikotnika, ki ležita v ravnini v poljubni medsebojni legi. Pozneje pa je vprašanje opustil, ker presega odgovor okvir poljudnega lista.

Na tem mestu si postavimo bolj splošno vprašanje: Kje leže vse premice, ki ploščinsko razpolavljajo dani trikotnik? Zaradi preglednosti uporabimo vektorsko pisavo in zaznamujemo z $\mathbf{r}_i$ krajevne vektorje do posameznih točk. Vsi ti vektorji ležijo v ravnini xy . Če dva izmed njih vektorsko med seboj



Slika 1.

pomnožimo, ima produkt smer osi z . Da bo krajše, pa pišimo v takšnem primeru p namesto $(0, 0, p)$. Potem je ploščina p trikotnika, ki ga oklepata vektorja $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$ s skupnim krajiščem C , enaka: $p = \frac{1}{2} \mathbf{b} \times \mathbf{a}$ (glej sliko 1).

Če naj daljica DE razpolovi ploščino p_0 trikotnika ABC , mora veljati

$$\frac{1}{2} (\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_3) \times (\mathbf{r}_5 - \mathbf{r}_3) = \frac{1}{2} p_0 \quad (1)$$

Točka D leži na stranici b , točka E pa na stranici a , zato je

$$y_4 - y_3 = q(x_4 - x_3) \quad (2)$$

$$y_5 - y_3 = s(x_5 - x_3)$$

kjer sta $q = (y_1 - y_3)/(x_1 - x_3)$ in $s = (y_2 - y_3)/(x_2 - x_3)$ strmini stranic b in a . Iz (1) in (2) dobimo, da je

$$x_4 x_5 - x_3(x_4 + x_5) = S - x_3^2 \quad (3)$$

pri čemer je $2S = (x_1 - x_3)(x_2 - x_3) = 2p_0/(s - q)$.

¹ Proteus 14, 78, 175, 212 (1952).

Enačba premice, ki razpolavlja trikotnik ABC, se glasi:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) = p_0 \quad (4)$$

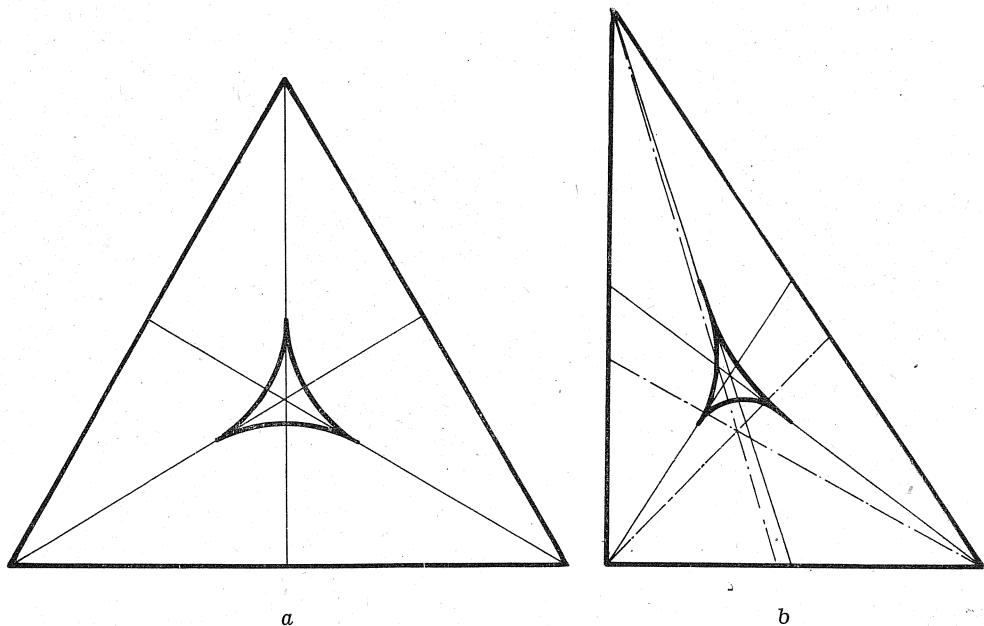
Z uvedbo parametra $t = x_4 - x_3$ dasta (3) in (4) enačbo enoparametrične družine premic

$$F(x, y, t) = (x - x_3)(sS - qt^2) - (y - y_3)(S - t^2) - p_0 t = 0 \quad (5)$$

Če naj leži točka D med A in razpoloviščem b, mora veljati za parameter ena izmed omejitev

$$\frac{1}{2}(x_1 - x_3) \leq t \leq x_1 - x_3 \quad (6)$$

$$\frac{1}{2}(x_1 - x_3) \geq t \geq x_1 - x_3$$



Sl. 2. Ogrinjača premic, ki razpolavljajo: a) enakostraničen trikotnik, b) pravokoten trikotnik. Tanke izvlečene črte so težišnice, prekinjene pa kotne simetrale

Da obsežemo v celoti družino premic, ki razpolavljajo naš trikotnik, moramo v (5) in (6) dvakrat ciklično permutirati indekse.

Ogrinjačo² družine (5) dasta enačbi

$$F(x, y, t) = 0$$

$$\partial F(x, y, t) / \partial t = 0$$

Z njima dobimo³

$$x = x_3 + (S + t^2)/2t; \quad y = y_3 + (sS + qt)/2t \quad (7)$$

² I. Vidav: Višja matematika I, DZS, Ljubljana 1947, str. 493.

³ Če uvedemo kot parameter $t = y_4 - y_3$, dobimo podobne formule, ki jih moramo uporabiti, kadar je $x_1 = x_3$.

To pa je šele en odsek ogrinjače. Druga dva da ciklična permutacija indeksov v (6) in (7). Celotno ogrinjačo sestavljajo torej odseki treh krivulj. S kratkim računom se prepričamo, da so to odseki hiperbol. Njihove osi leže na simetralah trikotniških kotov. Težiščnica je skupna tangenta na dve sosednji hiperboli. Dotikališče pa je obenem ost ogrinjače.

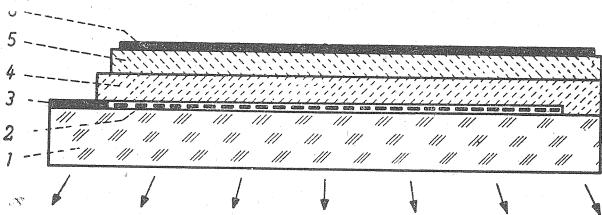
J. Strnad

ELEKTROLUMINESCENCA

Luminescenca je skupno ime za pojave emisije svetlobe, ki se bistveno razlikujejo od običajnega toplotnega sevanja. Le-to je odvisno od povprečne energije molekul, medtem ko gre pri luminescenci za vzbujanje posameznih molekul ali atomov z energijo, ki zdaleč presega povprečno termično. Temperatura takšnega svetila se pri tem ne spremeni dosti in po navadi ni visoka, tako da lahko govorimo o hladnih svetilih.

Glede na vzroke, ki povzročajo luminescenco, ločimo fotoluminescenco (fluorescenca in fosforescenca), kjer gre za vzbujanje delcev s svetlobo; kemoluminescenca (beli fosfor, kresnica), manj znano kristaloluminescenca, ki jo opazamo pri rasti ali drobljenju kristalov (n. pr. pri drobljenju sladkorja), katodno luminescenca, ki jo izkoriščamo pri katodnih ceveh, ter sorodno elektroluminescenca, ki si jo bomo v nadaljnjem ogledali.

Elektroluminescenca moremo opazovati na nekaterih trdnih snoveh, kot so ZnS, CaS, BaS, ZnO, in drugih. Če damo tako snov v izmenično električno polje, opazimo svetlenje — luminescenca.



Sl. 1. Shematična slika elektroluminescentnega svetila. 1 steklena plošča (nosilec), 2 zelo tanka, prozorna in prevodna plast kositrovega oksida, 3 kovinska kontaktna folija, 4 plast ZnS v suspenziji v prozornem laku (25μ debela), 5 bel reflektor (20μ debel), 6 kovinska elektroda. Delovna napetost je nekaj 100 voltov, frekvenca po od 50 do 10 000 Hz

Vse snovi, pri katerih opazujemo elektroluminescenca, so polprevodniki in vsebujejo manjše količine (okoli $1:10^4$) drugih primesi, kot na primer bakra v obliki CuSO_4 . Te tuje snovi, ki jih imenujemo fosforogene, povzročajo, da so nekateri elektroni prosto gibljivi in jih moremo z električnim poljem pospešiti. Ob trku z vezanim elektronom odda prosti elektron pridobljeno energijo vezanemu, ki se vzbudi in odda ob prehodu v osnovno stanje svetlobni kvant — foton.

Podobnost elektroluminescence s katodno je očitna; saj gre v obeh primerih za vzbujanje s pospešenimi elektroni. V prvem pospešujemo elektrone, ki so že v snovi, v drugem pa se svetleča plast vzbudi zaradi trkov z elektroni od zunaj, ki prihajajo na primer iz elektronske brizgalke pri katodni cevi.

Slika 1 daje shematično podobo elektroluminescentnega svetila. V bistvu gre za ploščni kondenzator. Pritisnjena napetost povzroči svetljenje tanke plasti luminescentne snovi, pri čemer ne nastopijo nikake kemične ali fizikalne spremembe svetila, ki se komaj občutno segreje.

Na stekleno nosilno ploščo je nanesena prozorna elektroda, na primer tenka plast kositrovega dioksida, ki ga nabrizgajo pri povišani temperaturi. Nad elektrodo je plast luminescentne snovi, ki obstoji iz suspenzije primerno pripravljene cinkove svetlice v prozornem laku. Debelina plasti je nekako 25μ . Sledi tanka plast belega laka, ki služi kot reflektor, nad njo pa je kovinska elektroda.

Časovni potek svetlosti pri vzbujanju z izmenično napetostjo kaže slika 2. Maksimum nastopi v vsaki polperiodi. V frekvenčnem območju od nekako 10 do 1000 Hz je v posameznih periodah oddana množina svetlobe skoraj neodvisna od frekvenca in je zato časovno povprečje svetlosti približno sorazmerno frekvenci.

Odvisnost svetlosti (B) od napetosti (U) podaja naslednja empirična enačba

$$(1) \quad B = B_0 \exp(-\text{konst} / \sqrt{U}),$$

kjer je U napetost na sponkah svetila. Ta rezultat lahko tudi izpeljemo, kakor sledi.

Če hočemo dobiti foton z energijo $h\nu$, mora v vezani elektron zadeti prost elektron z energijo, ki je večja od $h\nu$. Prosti elektron mora preteči med dvema trkoma dovolj veliko napetost, to je pri vidni svetlobi približno 2 do 3 V. Povprečna prosta pot (l) elektrona v kristalu je okroglo $100 \text{ \AA}$. Poljska jakost (E), ki bi bila zadostna pri tej prosti poti, bi bila torej okrog $2,5 \cdot 10^8 \text{ V/m}$. Pogoji za uspešen trk se glasi:

$$(2) \quad e_0 E x \geq h\nu,$$

kjer je x pot, ki jo preteče elektron, preden trči. Verjetnost, da bo imel elektron daljšo prosto pot kot x , je¹

$$(3) \quad W(x) = e^{-x/l}.$$

Če izračunamo iz enačbe (2) mejni $x = h\nu/e_0 E$, dobimo za verjetnost uspešnega trka pri dani poljski jakosti E takle rezultat:

$$(3) \quad W(h\nu/e_0 E) = \exp(-h\nu/e_0 E l).$$

Svetlost svetila je odvisna od števila emitiranih fotonov in je torej sorazmerna verjetnosti za uspešen trk. Lahko bi torej zapisali enačbo

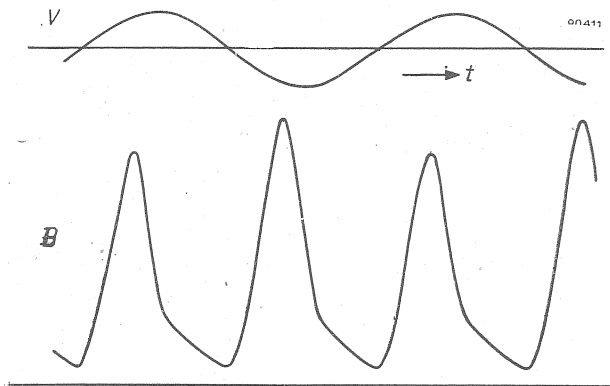
$$(4) \quad B = B_0 \exp(-\text{konst}/E).$$

Iz primerjave enačb (1) in (4) zlahka vidimo, da polje v svetilu ne more biti homogeno; saj bi sicer bila poljska jakost E sorazmerna napetosti U , ne pa $\sqrt{U}$.

¹ Podobno enačbo kot velja tu za elektrone, poznamo tudi za absorpcijo svetlobe, kjer velja $\Phi = \Phi_0 \exp(-x/l)$. Pri tem je l^{-1} absorpcijski koeficient, ali drugače povedano, l je povprečna prosta pot fotonov.

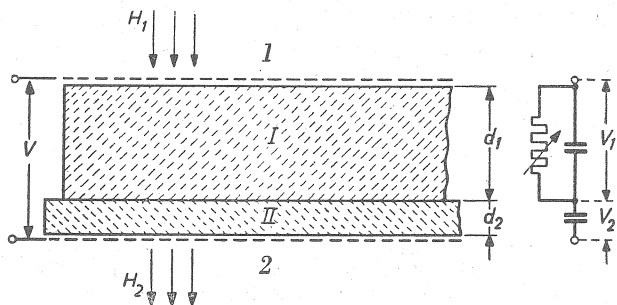
Da je električno polje v resnici nehomogeno, sledi tudi iz dejstva, da moremo opaziti elektroluminiscenco pri tako majhni napetosti na svetilu, da bi bila poljska jakost v primeru homogenosti premajhna (n. pr. samo 10^6 V/m), za opazno število uspešnih trkov.

Nehomogenost polja si razlagamo takole: Zaradi vzbujanja se atomi kristala ionizirajo. Zaradi primesi ionov bakra, ki ima nižjo valenco kot



Sl. 2. Odvisnost svetlosti od časa pri določeni frekvenci

cinkovi ioni, ostane pozitiven naboj vezan v bližini bakrovega iona. Ko nastane v bližini negativne elektrode v kristalu dovolj pozitivnih ionov, je poljska jakost tu večja kot drugod. To pospeši vzbujanje ter nastanek novih pozitivnih nabojev, tako da se polje še bolj skrči na območje tanke plasti ob katodi. Vzemimo, da skoraj vsa napetost pade na tanki plasti prostorskega naboja in da nosijo že vsi bakrovi ioni v tej plasti dodaten pozitiven naboj! Če sedaj še



Sl. 3. Zgradba amplificona z zunanjim krmiljenjem; desno: nadomestna shema; 1 in 2 prozorni elektrodi; I fotoprevodnik, II elektroluminescentna plast. Vse tri slike so vzete iz članka Diemlerja, Klasensa in Zalma v Philips Technische Rundschau, z ljubeznivim dovoljenjem uredništva te revije

povišamo pritisnjeno napetost, se poveča tudi prostorski naboj Q in s tem sorazmerno tudi debelina plasti prostorskega naboja. Ker moremo smatrati tako plast za ploščni kondenzator z debelino d , vidimo, da njegova kapaciteta pada z večanjem pritisnjene napetosti; saj raste d , s katerim je C obratno sorazmeren. Iz $U = Q/C$ in iz pravkar omenjenih sorazmernosti sledi, da je U sorazmeren d^2 , poljska jakost $E = U/d$ pa $\sqrt{U}$, kar je v skladu z enačbo (1).

Elektroluminescenčna svetila niso uporabna za razsvetljavo, ker imajo slab izkoristek in majhno svetlost. 1 m² takšnega svetila daje komaj tolikšen svetlobni tok kot 200 wattna žarnica. Pač pa se takšna svetila uporabljajo za osvetlitev skal merilnih instrumentov, ur in podobnega.

Prednost teh svetil je v tem, da ne zahtevajo nobenih vakuumskih delov. Svetlost posameznih delov ploskovnega svetila se da na preprost način spreminjati, kar izkoriščamo pri slikovnih ojačevalnikih. Amplificoni, kakor imenujemo te ojačevalnike, so sestavljeni v glavnem iz dveh plasti. Nad plastjo ZnS (slika 3) je plast fotoupora (plast I, na primer kadmijev sulfid). Plasti vežemo zaporedoma na napetost U . Na mestih, ki niso osvetljena, je pri pravilni izbiri debelin obeh plasti vsa napetost na fotouporu in je svetlost fotoluminescentne plasti (II) majhna. Na osvetljenih mestih se poveča napetost na plasti II, ker se zmanjša upornost fotoupora. To povzroči povečanje svetlosti svetleče se plasti. Tako reproducira plast II časovno in krajevno spreminjanje osvetljenosti plasti I. Narejeni so bili že amplificoni, ki sevajo na kvant vpadle svetlobe 50 kvantov. Zveza v splošnem ni linearna, da se pa linearizirati s tem, da amplificon ne napajamo s čisto sinusno napetostjo, ampak z mešanico več frekvenc. Kadar pa želimo povečati kontraste, je nelinearna karakteristika zaželeno in jo izkoriščajo pri ojačevanju rentgenskih slik.

Kot rečeno, ni verjetno, da bi elektroluminescentna svetila kdaj nadomestila svetila, ki so danes v običajni rabi; po drugi strani pa lahko predvidevamo, da se bodo slikovni ojačevalniki marsikje koristno uveljavili, zlasti v rentgenski tehniki.

S. Šterbal,
E. Pirkmajer

(Nuklearni institut »Jožef Stefan«, Ljubljana)

Literatura:

G. Diemler, H. A. Klasens, P. Zalm: Elektrolumineszenz und Bildverstärkung, Philips Technische Rundschau 18, 349 (1956/57).

G. Destriau: The New Phenomenon of Electrophotoluminescence and its Possibilities for the Investigation of Crystal Lattice. Phil. Mag. 38, 700, 774, 880 (1947).

ZAZNAVNOST V RADIOGRAFIJI Z ŽARKI GAMA

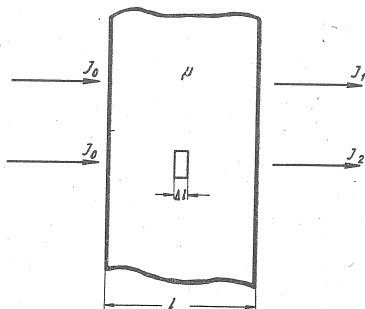
Radiografija (po slovensko presvetljevanje) z rentgenskimi žarki se že dolgo rabi v zdravilstvu, v novejšem času pa tudi v tehniki (tudi pri nas že). Namesto da bi svetili skozi človeško telo, lahko posvetimo skozi kak odlitek ali del kakega stroja. Morebitne votline v notranjščini odlitka se pokažejo kot svetlejše pege na senčni fotografiji, podobno kot se kažejo poškodbe kosti na zdravniškem rentgenskem posnetku.

Za presvetljevanje debelejših kovinskih kosov navadni rentgenski žarki z valovnimi dolžinami po nekaj desetink angströma (to je z energijami po nekaj deset keV) niso dobri, ker se premočno absorbirajo. Lahko bi dali na rentgensko cev večjo napetost in s tem zmanjšali valovno dolžino. Rentgenski aparati za napetosti po več sto kilovoltov pa so že precej okorni. Težavam se izognemo tako, da uporabljamo žarke gama, to je rentgenske žarke, ki jih sevajo mnoga radioaktivna jedra. Energije teh žarkov so večinoma v območju od nekaj sto keV do 1 MeV ali še čez.

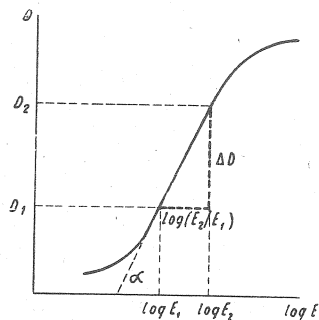
Za radiografske namene se dandanes dobi naprodaj že cela vrsta radioaktivnih izotopov, ki sevajo žarke gama z različnimi energijami. Ni vseeno,

za kateri izotop se odločimo, ampak moramo vnaprej preceniti, kakšni žarki bodo za dano nalogo najbolj primerni. Odločilna je dosegljiva zaznavnost, ki je definirana z velikostjo najmanjše napake, ki jo v materialu ravno še zaznamo. Zaznavnost je odvisna od vrste uporabljenih žarkov, filmov in preiskovanega materiala.

Vzemimo, da posvetimo skozi preiskovani material z vzporednimi žarki gama, kot kaže slika 1. Material ima debelino l in absorpcijski koeficient μ . Vpadajoči rentgenski svetlobni tok ima gostoto I_0 . Po prehodu skozi material je na mestu, kjer ni napake, izstopajoča gostota svetlobnega toka $I_1 = I_0 \exp(-\mu l)$. V materialu je špranja z debelino Δl . Po prehodu na tem



Sl. 1. Absorpcija žarkov v materialu z napako



Sl. 2. Karakteristika filma

mestu je izstopajoča gostota svetlobnega toka $I_2 = I_0 \exp[-\mu(l - \Delta l)]$. Razmerje obeh jakosti je $I_2/I_1 = \exp(\mu \Delta l)$. Velikost napake lahko izračunamo iz navedenega razmerja:

$$\Delta l = \ln(I_2/I_1)/\mu.$$

V radiografiji ne merimo izstopajočih gostot svetlobnih tokov, temveč razlike v počrnitvi filma. Počrnitev filma (D) je definirana z negativnim dekadičnim logaritmom prepustnosti filma za vidno svetlobo: $D = \log \Phi_0/\Phi$, kjer sta Φ_0 in Φ vpadli ter prepuščeni svetlobni tok. Poznati moramo karakteristiko filma, ki prikazuje počrnitev filma v odvisnosti od logaritma ekspozicije. Ekspozicija E je enaka produktu osvetlitvenosti in časa osvetlitve $E = I t$. Primer karakteristike kaže slika 2. S slike razberemo strmino ravnega dela krivulje, ki se tudi imenuje strmina filma: $\gamma = \tan \alpha = \Delta D / \log(E_2/E_1)$.

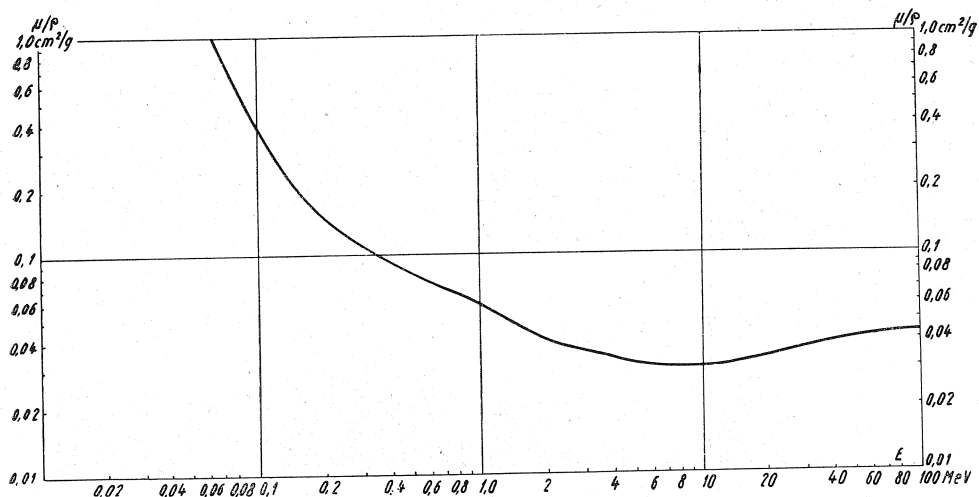
V našem primeru je ekspozicija na mestu brez napake $E_1 = I_1 t$ in na mestu z napako $E_2 = I_2 t$. Od tod je $\log(E_2/E_1) = \log(I_2/I_1) = \ln(I_2/I_1) \cdot \log e$. Velikost napake dobimo torej iz razlike počrnitve takole:

$$\Delta l = \Delta D / \mu \gamma \log e.$$

Velikost najmanjše zaznavne napake je omejena z najmanjšo razliko v počrnitvi filma, ki jo človeško oko lahko še zazna. Ta razlika znaša približno $\Delta D_m = 0,02$. Potem je velikost najmanjše zaznavne napake

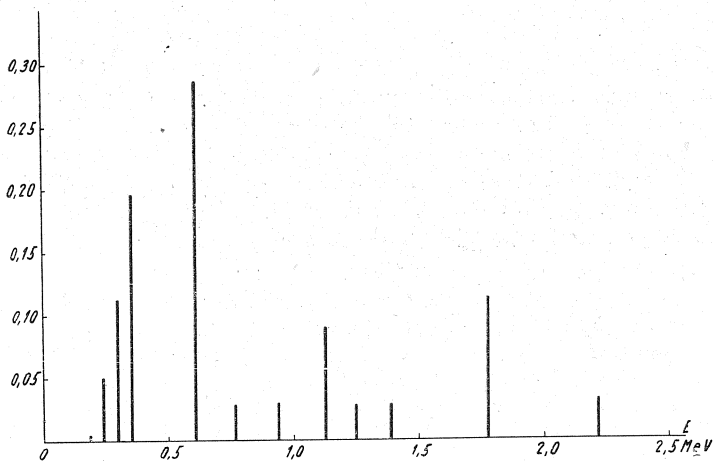
$$\Delta l_m = \Delta D_m / \mu \gamma \log e.$$

Vidimo torej, da je najmanjša zaznavna napaka odvisna od strmine filma γ , ki je pri večini filmov enaka okrog 2, in od absorpcijskega koeficienta. Ta je odvisen od materiala in energije žarkov. Absorpcijski koeficient v sploš-



Sl. 3. Masni absorpcijski koeficient železa v odvisnosti od energije [3]

nem pojema z naraščajočo energijo žarkov, razen pri zelo visokih energijah, kjer zopet narašča (slika 3). Zato bo zaznavnost slabša pri delu z žarki gama, ki imajo večjo energijo. Zato se pri delu z radioaktivnimi izotopi raje odločimo za iridij 192 kot pa za kobalt 60, čeprav ima iridij 192 v primeri s ko-

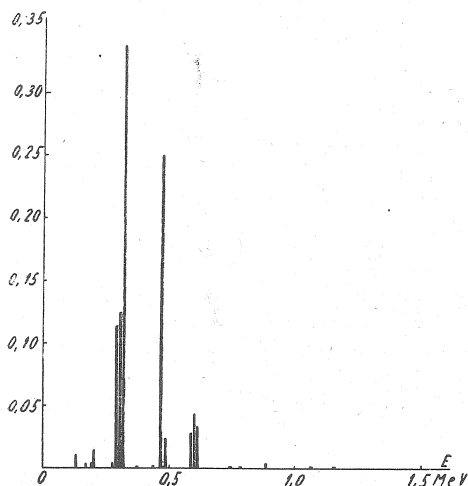


Sl. 4. Spekter žarkov gama iz radija (s potomci)

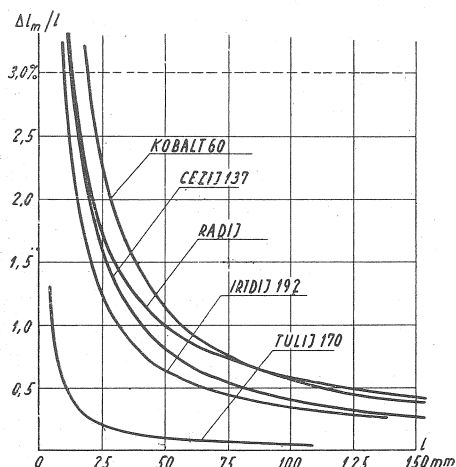
baltom zelo kratko razpolovno dobo (kobalt 5 let, iridij pa 68 dni). Z iridijem 192 zaznamo namreč zaradi manjše energije žarkov (v glavnem 0,3 in 0,5 MeV) manjšo napako kot pa s kobaltom 60 (energija blizu 1,2 MeV).

Če vnesemo v diagram razmerje $\Delta l_m/l$ v odvisnosti od debeline materiala, dobimo krivuljo teoretične meje zaznavnosti napak. S pomočjo teh krivulj se v praksi odločimo, kakšne izvore bomo uporabili z ozirom na naše zahteve pri delu. Absorpcijske koeficiente za posamezne izvore žarkov gama izračunamo s pomočjo diagrama na sliki 3. Račun je enostaven v primeru, ko seva izotop žarke gama z eno samo energijo. Takšna izotopa sta n. pr. tulij 170 (84 keV, 129 dni) in cezij 137 (0,67 MeV, 33 let).

Radij, iridij 192 in kobalt 60 imajo več črt. Absorpcijska krivulja je enaka vsoti absorpcijskih krivulj za posamezno črto. Absorpcijski koeficient je enak $\mu = -d \ln I/dx$. Kobalt 60 seva žarke gama z energijama 1,171 MeV in 1,331 MeV. Relativni jakosti obeh črt sta v povprečju enaki. Ta je absorpcijski



Sl. 5. Spekter žarkov gama iz iridija 192



Sl. 6. Krivulje zaznavnosti napak v železu za uporabne izvore žarkov gama

koeficient praktično konstanten. Radij ima 12 črt, iridij 192 pa 20 črt [4]. Energijo in relativno jakost posameznih črt za oba izvora kažeta sliki 4 in 5. Z izračunanimi absorpcijskimi koeficienti dobimo krivulje zaznavnosti napak, ki jih kaže slika 6. Iz slike je razvidno, da je zaznavnost napak z iridijem 192 in cezijem 137 boljša kot pa zaznavnost s kobaltom 60.

Rajko Korbar,
Iskra, Kranj

Literatura:

1. S. T. Nazarov: *Primenenie radioaktivnih izotopov v defektoskopiji, Primenenie izotopov v tehnike, biologii i sel'skom hoz'jajstve*, Izdat. AN SSSR, 98-117 (1955).
2. H. Moeller, H. Weeber: *Die Durchstrahlungsleistung von radioaktiven Isotopen*, Archiv für das Eisenhüttenwesen, 28, 542 (1957).
3. T. Rockwell: *Reactor Shielding Design Manual*, Van Nostrand, 447 (1956).
4. M. V. John, S. V. Nablo: *Disintegration of Ir¹⁹² and Ir¹⁹⁴*, Phys. Rev, 96, 1599 (1954).

XIII. PLENUM ZVEZE DRUŠTEV MATEMATIKOV IN FIZIKOV JUGOSLAVIJE

Dne 30. septembra 1959 je v Beogradu zasedal XIII. plenum Zveze. Na dnevnem redu so bila običajna poročila o delu izvršnega odbora, komisij in republiških društev, razpravljanje o tekmovanju učencev, razpravljanje o pismu Društva NR Hrvatske glede kongresa; pretresala so se vprašanja o pravilih Zveze.

V referatu izvršnega odbora je bilo ugotovljeno, da se naša republiška društva in Zveza iz leta v leto bolj kažejo kot samostojni pobudniki delavnosti na področjih prosvete, šolstva in znanosti ter tako postajajo vedno bolj koristna za našo skupnost in neločljiv del splošnega mehanizma naše socialistične demokracije. Ta delavnost pa se čuti mnogo bolj v središčih naših republik kakor v notranjosti — na terenu naših komun. — Zastopniki republiških društev so imeli v pretekli poslovni dobi dva sestanka: v oktobru 1958 v Zagrebu, ta je bil z referati in z razpravo o referatih posvečen novim učnim programom iz matematike in fizike v srednji šoli; v decembru istega leta v Ljubljani so pa razpravljali o vprašanjih učnih načrtov za matematiko in fiziko na univerzah ter o izvajanju podiplomskega študija. — Po sklepu Zveznega sveta za znanost januarja 1959 predstavlja našo državo v Mednarodni uniji za matematiko in v Mednarodni uniji za fiziko naša Zveza. Glede na to sta bila ustanovljena v okviru Zveze Nacionalni komite za matematiko in Nacionalni komite za čisto in uporabno fiziko.

Komisija za organizacijo znanstvenega dela in zveze z inozemstvom se je bavila z izdajanjem zbranih del pok. akademika M. Petrovića. Člani komisije so si razdelili njegova dela, da jih pripravijo za tisk. Sklenjeno je bilo, da bo ta komisija priredila za člane Zveze seminar o njegovih znanstvenih delih. — Komisija se je tudi ukvarjala z organizacijo referatov za III. kongres. Razen nekaterih naših članov je povabila tudi nekaj inozemskih znanstvenikov svetovnega slovesa, da bodo referirali iz sodobnih raziskovalnih področij matematične analize, geometrije, matematične fizike in kvantne mehanike.

Nastavi matematike i fizike, zveznemu časopisu, namenjenemu učiteljem na srednjih šolah, ni uspelo rešiti nekatera osnovna vprašanja, kakor redno izhajanje ter razširitev kroga sodelavcev in naročnikov. Čeprav je časopis pomemben v zvezi z nalogami, kako uveljaviti šolsko reformo, je pomoč, ki jo časopisu nudijo republiška društva, premajhna. — Kakor na prejšnjih plenutih, tako je bilo tudi na tem z zadovoljstvom ugotovljeno, da Matematičko-fizički list opravlja koristno delo med učenci in učitelji ter da redno izhaja. Ima 14 801 naročnika, od teh jih je iz naše republike 843.

Učenci osnovnih in srednjih šol v vseh republikah tekmujejo v znanju matematike in fizike, zlasti narašča njihovo število v prosvetnih središčih. Ta delavnost naših društev spada med najkoristnejše. V NR Srbiji n. pr. je iz matematike na prvi stopnji tekmovalo 2 000 učencev iz 68 gimnazij, na tretji stopnji oziroma na finalnem tekmovanju pa je bilo 109 učencev iz 44 gimnazij; pri tem delu je sodelovalo najmanj 150 učiteljev matematike. V beograjskem okraju so organizirali tudi tekmovanje v dveh stopnjah za učence 8. razreda

osnovnih šol. Na prvi stopnji je tekmovalo 600 učencev iz 57 šol, na drugi, finalni stopnji pa preko 100 učencev. Zanimivo je, da so rezultati tekmovanja vzbudili nepričakovano zanimanje tudi pri starših dijakov-tekmovalcev. V Makedoniji so izvedli tekmovanje učencev iz fizike; učenci so dobili numerične in eksperimentalne naloge. Dani so že vsi pogoji, da se v tekočem šolskem letu organizira zvezno tekmovanje iz matematike. Pred tem tekmovanjem pa morajo biti republiška tekmovanja, ki naj izberejo najboljše dijake. Izbrana je bila posebna komisija, ki mora izdelati predlog, kako organizirati tekmovanje učencev iz vse Jugoslavije. — V razgovoru je bilo ugotovljeno, da n. pr. poljska država že celo vrsto let daje velika sredstva za taka tekmovanja, da se tam nekateri učitelji ukvarjajo samo s to delavnostjo in da so bili na takih tekmovanjih odkriti talenti, ki so danes med matematiki splošno znani.

V aprilu 1959 je izvršni odbor predlagal republiškim društvom, da naj se III. kongres matematikov in fizikov Jugoslavije preloži na jesen 1960, ker so družbene organizacije prijavile za leto 1959 že preko petdeset kongresov in je bilo zato treba pretehtati preložitve. Na ta predlog je poslalo v pismu izvršnemu odboru svoje pripombe samo Društvo NR Hrvatske. Le-to zavrača zgornji sklep in predlaga drugačen značaj kongresa. V razgovoru, ki ga je vodil in v katerem je posredovalno vplival predsednik našega društva dr. A. Vadnal, je bilo ugotovljeno in sklenjeno: 1. izvršni odbor je moral iz upravičenih razlogov predlagati odložitve kongresa za leto dni; 2. kongres bo septembra 1960 v Beogradu; 3. značaj in vsebina kongresa bosta taka, kakor je bilo sklenjeno na plenumu v Prištini; 4. izprememba značaja in vsebine prihodnjih kongresov je v tesni zvezi z ustreznimi izpremembami pravil Zveze.

Prebran je bil predlog za izpremembo pravil Zveze, o katerem se je že razpravljalo na plenumih v Sarajevu in Ljubljani. Po razgovoru je bila predlagana izprememba sprejeta. Nato je bilo še sklenjeno: 1. v najkrajšem času naj vsa društva pripravijo svoje morebitne predloge za spremembo pravil ter jih dostavijo Zvezi in drugim društvom; 2. izvršni odbor naj po dobljenih predlogih izdela končno redakcijo, ki bo predložena plenumu oziroma kongresu.

Po poročilih in razgovorih o njih so bili sprejeti še naslednji sklepi: V Zagrebu bo v kratkem sestanek komisije za pouk matematike in fizike v srednjih šolah. Na njem bo treba pretresati in izdelati skupen načrt o dolgoročnem strokovnem izpopolnjevanju učiteljev — morda o tečajih iz opisne geometrije, iz geometrije, iz tehnične vzgoje, iz risanja itd. Tam bo treba rešiti tudi ostala vprašanja pri realizaciji reforme osnovne in srednje šole. V zvezi s poslednjim vprašanjem morajo naša društva še naprej sistematično sodelovati z republiškimi Zavodi za proučevanje šolstva. — V Beogradu bo sestanek komisije za organizacijo znanstvenega dela. Razpravljal bo o nalogah, kako organizirati znanstveno delo po republikah, o sodelovanju z republiškimi sveti za znanost in o organizaciji mednarodnih simpozijev za ustrezná področja matematike in fizike. — Nacionalna komiteja za matematiko in fiziko naj se takoj konstituirata in izdelata statut in načrt dela. — Izvršni odbor naj prosi Zvezni svet za znanost, da naša Zveza predstavlja državo tudi na področju astronomije. Ta pa mora takoj nato formirati še Nacionalni komite za astronomijo. — Zveza naj takoj prične sodelovati pri pripravah za proslavo 250-letnice rojstva R. Boškovića, ki bo 1961. leta. — Plenum je odobril poročilo blagajnika in predlog proračuna Zveze za 1960. leto.

Postala je že tradicija, da je po vsakem plenumu Zveze organizirano strokovno pedagoško posvetovanje. Letos je tako posvetovanje organiziralo Društvo NR Srbije. Na njem so razpravljali o različnih področjih matematike in vzporedne fizike. To je bilo v dneh 1., 2. in 3. oktobra.

Jože Povšič

OBČNI ZBOR DRUŠTVA MATEMATIKOV IN FIZIKOV LRS

24. oktobra 1959 je bil v Ljubljani redni občni zbor Društva matematikov in fizikov LRS. Upravni odbor je dal obračun o delu v pretekli poslovni dobi. Iz poročil predsednika dr. A. Vadnala in vodij posameznih sekcij je bilo razvidno, da je odbor uspešno opravil delo, ki je zahtevalo zelo veliko prizadevnost in vztrajnost nekaterih odbornikov.

Društvo šteje 388 članov. V minuli poslovni dobi je bilo v rednih stikih z ostalimi republiškimi društvi in z Zvezo društev matematikov in fizikov FLRJ v Beogradu. Delo društva je bilo organizirano po sekcijah.

Zelo uspešno je delovala sekcija za popularizacijo matematike in fizike pod vodstvom prof. Uršiča. Za ljubljanske srednješolce je organizirala krožke iz matematike in fizike. Dijaki so se jih udeleževali v velikem številu in z zanimanjem. 5. aprila 1959 je uvedla v Ljubljani tekmovanje dijakov vseh gimnazij in strokovnih šol v Sloveniji. Društvo je nagradilo najboljše tekmovalce.

Največji uspeh v pretekli poslovni dobi je izdajanje knjižnice Sigma, ki bo skrbela za širjenje matematične in fizikalne izobrazbe. Društvo, ki bo skrbelo za izbiro in strokovno kvaliteto izdaj, je sklenilo dogovor z Mladinsko založbo, ki je prevzela vse založniške posle. Do občnega zbora je izšla prva knjižica te zbirke, in sicer delo dr. I. Vidava: Rešeni in nerešeni problemi matematike. V tisku sta še dve knjižici.

Lepe uspehe je dosegla sekcija za dvig pouka in predavanja pod vodstvom prof. Šušteršiča. Poleg rednih mesečnih sestankov s predavanji je ob koncu šolskega leta organizirala ekskurzijo na Štajersko in v Pomurje z ogledom tovarne glinice in aluminija v Kidričevem in naftnih polj v Lendavi.

Sekcija za tisk je izdajala Obzornik za matematiko in fiziko. Uredniki želijo več prispevkov in toplo vabijo člane k sodelovanju.

Mariborska podružnica je pod vodstvom F. Bezjaka prirejala predavanja iz raznih področij matematike, fizike in iz metodike matematike. V marcu je organizirala tekmovanje srednješolcev v Mariboru, Ptujju in Ravnah. Najboljši so se aprila udeležili tekmovanja v Ljubljani.

Delovanje društva ne bi bilo uspešno, ako ne bi bilo izdatne materialne in moralne pomoči naših prosvetnih oblasti. Za to veliko razumevanje in pomoč je občni zbor izrekel posebno zahvalo zlasti republiškemu in okrajnemu svetu za šolstvo.

Društvo je v pretekli poslovni dobi posvetilo več pozornosti problemom s področja matematike kot fizike. Zato naj bi se v delo društva vključili tudi tisti fiziki, ki se ne ukvarjajo s pedagoškim delom.

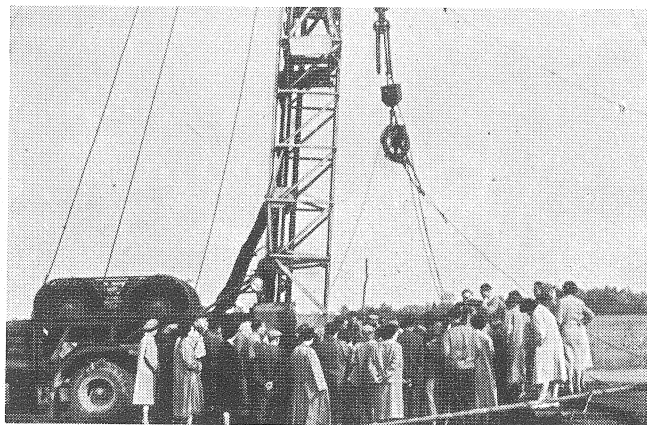
V novi upravni odbor so bili izvoljeni: dr. A. Vadnal, predsednik, J. Povšič, podpredsednik, M. Švikaršič, tajnik, J. Vrtačnik, namestnik, F. Plevnik, blagajnik, kot odborniki pa: F. Ahlin, dr. F. Dominko, dr. I. Kuščer, F. Kvaternik, Ž. Knap, N. Prijatelj, V. Rupnik, F. Šušteršič, S. Uršič, dr. V. Vidav.

V nadzorni odbor so bili izvoljeni: F. Čemažar, M. Potisek, O. Sajovic. v častno razsodišče pa: I. Molinaro, dr. A. Peterlin, dr. A. Vakselj.

M. Švikaršič

BESEDA O DELU AKTIVA MATEMATIKOV IN FIZIKOV OLO LJUBLJANA ZA ŠOLSKO LETO 1958/9

Namen strokovnih aktivov, ki so po vojni zaživeli po vseh naših večjih kulturnih središčih, je pač ta, da se po vseh šolah čim bolj dvigne raven pouka matematike in fizike ne le v strokovnem, temveč tudi v metodičnem in didaktičnem oziru. Strokovni aktivni naj bi poglobili, poenotili in vskladili naše učno in vzgojno delo ter nas hkrati združili v neprisiljeno tovariško skupnost. Škoda le, da še do danes — po več kot desetletnem uspešnem delu — strokovni aktivni niso mogli zajeti vseh naših tovarišev! Delo v strokovnem aktivu bi moralo biti naša skupna potreba in osebna dolžnost. Kdor že ne more aktivno sodelovati, naj bi vsaj redno prihajal na mesečne sestanke, dobrohotno svetoval in stvarno kritiziral. Ni namreč lahko krožiti program sestankov za to



Skupina izletnikov ob vrtini pri Lendavi

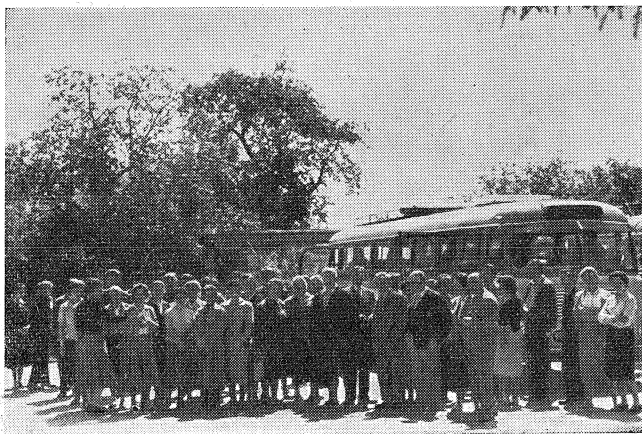
veliko in heterogeno skupnost, ki združuje skoraj 200 učiteljev matematike in fizike od osemletke do univerze. Od tod na videz upravičene pripombe, češ da je bilo predavanje previsoko in pretežko; pa spet, da je bila tema preenostavna in že obdelana. Nasprotno pa tisti tovariši, ki redno prihajajo na mesečna predavanja, radi priznavajo, da vedno nekaj pridobe, hkrati pa s svojim zanimanjem in udeležbo dajejo priznanje in pobudo vsem onim, ki navzlic veliki zaposlenosti še najdejo časa za aktivno in nesebično pomoč skupnosti. Razveseljivo je dejstvo, da na strokovne sestanke v vedno večjem številu prihajajo naši tovariši s podeželja, četudi morda z velikimi gmotnimi, časovnimi in fizičnimi žrtvami.

Tudi letos je bila udeležba na mesečnih sestankih zadovoljiva. Povprečno je znašala 35, največ pa 72. In vendar se upravičeno vprašujemo, ali ne bi mogla biti še znatno večja, če... Najbolj privlačna so predavanja iz fizike, če so podprta z lepimi eksperimenti.

Na prvem sestanku 19. oktobra 1958 je Francè Šušteršič govoril o programu reformirane osnovne šole in gimnazije, Stanko Uršič pa o matematičnih in fizikalnih krožkih. Na drugem sestanku 26. novembra 1958 je Francè Ahlin prožil metodične in didaktične pomisleke pri pouku mehanike na nižji stopnji.

Ing. Janko Bleiweis je 17. decembra 1958 na Vodogradbenem inštitutu obravnaval prelive v hidravliki. Dr. Ivan Vidav in dr. Ivan Kuščer sta 9. januarja 1959 načela temo: Med gimnazijo in univerzo. Dr. Francè Križanič je 12. februarja 1959 razlagal elektronske računske stroje in njihovo funkcijo. Mirko Adlešič je 18. marca 1959 vodil številne poslušalce po svetu barv. Silvo Breškvar je 23. aprila 1959 predaval o galaksijah. Končno je 9. maja 1959 ing. M. Ocepek mojstrsko obdelal problem nafte v FLRJ in s tem hvaležne poslušalce lepo pripravil na poučno ekskurzijo v Prekmurje, ki je potekla približno takole:

V zgodnjem sobotnem jutru sta dva velika avtobusa potegnila malo oškrbljeno hekatombo Pitagorovih naslednikov izpred ljubljanskega kolodvora v megleno sivino. Okretni gosenci sta hitro požirali kilometre, skremženo jutro pa se je zrcalilo tudi na obrazih iz vsega okraja mobiliziranih izletnikov.



Skupina izletnikov pred odhodom iz Slatine Radenci

Šele, ko se je tam nekje pri Kamniku (gostoljubne in slavne Trojane smo žal morali obiti v velikem loku) prismejalo sonce, so se zvedrila tudi naša lica. Sunkovita vožnja po divjem cestnem reliefu skozi Tuhinjsko dolino je sprožila prenekatero šalo in vzbujala dober tek. Pri Ločici smo se ločili od te zanikrne ceste drugega reda in motorji naših udobnih vozil so veselo zabrnili po asfaltu. V zaletu smo prečkali Celje, mesto belo in veselo, ter srečno prispeli v Kidričevo. V Hajdini smo si utirali pot skozi visoko rošno travo do prvega mitreja. Kar smešno je bilo, da kakih deset fizikov ni znalo odpreti nezaklenjenih vrat drugega mitreja, kakor da bi bila na voljo res samo »Deo soli invicto Mithrae«. Dveurni postanek v Ptujju so mnogi izkoristili za obisk prekrasnega muzeja, drugi so pretezali od dolge vožnje premrle ude ob obali mogočne Drave, tretji pa so s tekočino merili volumen steklenih prisekanih stožcev. Ko smo po polurni zamudi le ugotovili, da so se tudi vse naše tovarišice že vrnile, smo spet pognali proti Ormožu in Čakovcu ter se ustavili pri belih rudarjih v Lendavi. Tisti, ki že iz navade niso prišli poslušat predavanje inženirja Ocepka, so z vidnim zanimanjem napenjali ušesa in oči, mi drugi smo pa vse to teoretično že — obvladali. Naš ekspedicijski fotograf Albin je pridno streljal na vse količakaj vabljive cilje in s tem vznemirjal nekatere to-

varišice, da so si nehote morale venomer popravljati frizuro in pozo. Sonce se je že nagibalo, ko smo pridrdrali v Mursko Soboto. Naši dobri tovariši iz prekmurske metropole so že pustili vse nade na naš prihod in nam zato tem bolj prisrčno stisnili roko, ko smo vendarle prišli. Cesta do Slatine Radencev je še prekosila ono iz Tuhinjske doline, prerešetal nam vse ude in povzročila, da je večerja teknila tudi izbirčnim in da so mnogi baje to noč prespali v tričetrtnem taktu. V prekrasnem nedeljskem jutru smo se spočiti in okrepčani spustili po valoviti, prelepi štajerski deželi mimo Ptujске gore in Rogaške Slatine v Podplat, kjer so nas čakali novi napor: odlično kosilo in pohod v vinske gorice. V naskoku smo zavzeli veliko zidanico tamošnje Vinarske zadruge in dostojno proslavili to zmago. Pa da ne bi kdo kaj napačnega mislil! Vse je bilo prav, lepo in veselo — tako, da je celo resni in skrbni komandant drugega avtobusa, tovariš Stane morda desetkrat zapored intoniral isto, zares ganljivo narodno pesem. Menda ni več treba poudariti, da smo v visokem razpoloženju zbrali raztresene ude in da smo točno po načrtu pristali v zaspani Ljubljani.

Francè Šušteršič

DELO MLADIH MATEMATIKOV

Srednješolski krožki iz matematike, ki jih že tretje leto prireja Društvo matematikov in fizikov LRS, so tudi v letošnjem šolskem letu privabili mlade ljubitelje te eksaktne znanosti. Predavali so: Zvonimir Bohte — Približno do-ločanje korenov enačb; Anton Suhadolc — Računanje ploščin, Stanko Uršič — Številski sistemi; Jamnik — Kombinatorika in verjetnostni račun; dr. Ivan Vidav — Neevklidska geometrija; Francè Ahlin — Poliedri; Milan Ziegler — Enačbe 3. in 4. stopnje. Vsako predavanje je bila zaključena celota, po predavanju pa so s primernimi vajami aplicirali pridobljeno znanje. Ude-ležba na predavanjih je bila povprečno 50 dijakov tedensko. Med temi je veliko takih, ki so vsa tri leta pridno sodelovali v naših krožkih in pri tekmovanju. Po treh letih uspešnega dela z našimi srednješolci moremo ugotoviti, da so bili krožki potrebni in koristni, saj so mnogi vzljubili matematiko in jo bodo tudi v bodoče gojili. Lahko rečemo, da smo pomagali pri prehodu iz srednje šole na univerzo marsikateremu dijaku, ki sedaj na univerzi nadaljuje delo, ki ga je že v srednji šoli vzljubil.

Razveseljivo je tudi, da je podružnica našega društva v Kranju z uspehom začela tako delo. Tudi tu so srednješolci poslušali ista predavanja kot v Ljubljani. Pri teh so sodelovali profesorji iz Kranja in nekateri iz Ljubljane. Izkazalo se je, da je tudi v Kranju nekaj ljubiteljev matematike med mladino, kar je potrdilo že lansko republiško tekmovanje v Ljubljani, kjer so se srednješolci iz Kranja zelo dobro odrezali.

Na plenumu Zveze društev matematikov in fizikov Jugoslavije, ki je bil 30. septembra 1959 v Beogradu, je bila izbrana komisija, ki naj bi proučila smotre tekmovanja najboljših matematikov srednješolcev v zveznem merilu. Komisija je sklenila, naj se do meseca marca izvršijo tekmovanja po posameznih republikah. V drugi polovici aprila 1960. leta pa naj bi bilo zvezno tekmovanje, v katerem naj bi sodelovalo 25 dijakov iz tretjega razreda in 25 iz četrtega razreda gimnazij ali strokovnih šol. Tisti, ki bodo pokazali naj-

boljši uspeh v republiškem tekmovanju, se bodo udeležili končnega tekmovanja v Beogradu, in sicer za vsak razred po 7 dijakov iz Srbije, 5 iz Hrvatske, 4 iz Slovenije, 4 iz Bosne in Hercegovine, 3 iz Makedonije in 2 iz Črne gore.

Glede vsebine in karakterja tekmovalnih nalog je komisija sklenila, naj bi bilo zastopano 50 % takih nalog; ki jih običajno rešujejo v šoli, ostalih 50 % pa takih, ki zahtevajo globlje razmišljanje.

Sklenjeno je bilo tudi, naj zveza društev priporoča univerzam in višjim šolam, da se vsakemu udeležencu zveznega tekmovanja prizna sprejemni izpit iz matematike za sprejem na univerzo ali višjo šolo.

Dobro bi bilo, da bi posamezne gimnazije in strokovne šole do konca februarja izbrale tiste dijake, ki bi sodelovali pri republiškem tekmovanju v Ljubljani meseca marca 1960. V Ljubljani bi tekmovali po posameznih razredih, snov bo pa zajeta iz učnega načrta za gimnazije, vključno snov prvega semestra letošnjega leta. Izvzeta bi bila opisna geometrija.

Stanko Uršič

TEČAJ ZA MATEMATIKO IN FIZIKO V NOVEM MESTU

Tajništvo za šolstvo, kulturo in prosveto pri OLO Novo mesto je v avgustu 1959 organiziralo štiridnevni tečaj za učitelje matematike in fizike na osemletkah. Program je pripravil matematični aktiv v Novem mestu. Anketa, izvedena na koncu tečaja, je pokazala, da je bil program dobro izbran in tudi izpeljan. Teme so bile naslednje: 1. Terenska merjenja (Tone Trdan), 2. Finančna matematika (ing. Karel Marn), 3. Nekatera metodična vprašanja (Tone Trdan), 4. Ponazorila pri pouku matematike, zlasti o flanelografu (insp. Jože Zabkar), 5. Fizika in biologija (Viktor Fabian), 6. Preprosta oprema zbirke za optiko (Dušan Modic), 7. Osnovna učila za pouk elektrike (Dušan Modic). Zadnji dve predavanji so spremljale vaje za udeležence. Razen tega so udeleženci obiskali tovarno zdravil v Novem mestu.

Tečaja se je udeležilo 19 učiteljev.

Dušan Modic

ŠOLA

O PROGRAMIH MATEMATIČNO FIZIKALNE SKUPINE NA VIŠJI PEDAGOŠKI ŠOLI

Kakor je znano, je glavni namen Višje pedagoške šole ta, da vzgaja učno osebje za višje razrede osemletk in za splošne predmete na tehniških šolah nižje stopnje. Njen defektološki odsek pa pripravlja osebje za pouk na specialnih šolah.

Zato so bili programi za one predmetne skupine, ki pripravljajo za predmetni pouk, torej tudi skupine za matematiko in fiziko sestavljeni tako, da vsebujejo tisto snov, ki mora biti nujno strokovno ozadje oziroma obzorje vsakega učitelja matematike in fizike na prej omenjenih šolah.

Zaradi večje logične povezanosti matematičnega gradiva je bilo take programe težko narediti in so gotovo možna še izboljšanja. Jasno pa je seveda, da mora biti matematična izobrazba absolventa VPS širša in globlja od izobrazbe absolventa gimnazije, po drugi strani pa skromnejša od absolventa fakultete, šolanega za pouk matematike.

Višja pedagoška šola je bila prvotno namenjena skoraj izključno učiteljem iz prakse, ki so kazali veselje do strokovne izpopolnitve za pouk na nekdanjih meščanskih šolah oziroma kasneje na nižjih gimnazijah. Sedaj pa sprejema absolvente vseh srednjih šol, vendar absolvente strokovnih šol le na ustrezne skupine. Programi na matematično-fizikalni skupini so bili sestavljeni v smislu prvotnega namena šole tako, da računajo z osnovnim znanjem, kakršno ima iz teh dveh predmetov absolvent učiteljskega.

Predmetnik vsake predmetne skupine, ki zajema po dva šolska učna predmeta, vsebuje strokovna in methodska predavanja za ta dva predmeta, razen tega pa še splošna predavanja: pedagogiko, psihologijo, tuji jezik in predvojaško vzgojo.

Strokovna predavanja na skupini za matematiko in fiziko so naslednja:

I. semester: aritmetika in algebra (4 ure na teden), planimetrija (5 ur), trigonometrija (3 ure), fizika (8 ur), fizikalni praktikum (3 ure); vsega torej 23 ur na teden.

II. semester: algebra (3 ure), infinitezimalni račun (4 ure), analitična geometrija v ravnini (3 ure), stereometrija (3 ure), fizika (8 ur), fizikalni praktikum (3 ure); vsega 24 ur na teden.

III. semester: višja algebra (3 ure), infinitezimalni račun (3 ure), analitična geometrija v prostoru (3 ure), opisna geometrija (2 uri), fizika (8 ur), fizikalni praktikum (2 uri), metodika matematike (2 uri), metodika fizike (2 uri); vsega 25 ur.

IV. semester: infinitezimalni račun (4 ure), opisna geometrija (2 uri), fizika (8 ur), fizikalni praktikum (2 uri), metodika matematike (2 uri), metodika fizike (2 uri); vsega 20 ur.

Matematični predmeti prvega semestra v znatni meri zajemajo snov gimnazije; v neki meri jo tudi dopolnjujejo, sistemizirajo in pojmovno poglobljajo. V drugem semestru sta še taka predmeta analitična geometrija v ravnini in stereometrija, medtem ko se obravnava v algebri in v infinitezimalnem računu v precejšnji meri nova snov. V tretjem in četrtem semestru je snov vsa nova.

V aritmetiki se natančneje obravnavajo števila, računske operacije z njimi in deljivost, v algebri seže program najvišje v obravnavi determinant, sistemov linearnih enačb, enačb tretje in četrte stopnje, poglavja o polinomih, simetričnih funkcij in enostavnih aproksimacijskih metod za določanje realnih korenov enačb.

V infinitezimalnem računu je precejšen poudarek na pojmu limite in na lastnostih funkcij, obravnavata se odvod in integral ter njuna uporaba v geometriji in fiziki.

V planimetriji in stereometriji se bolj sistematično in kritično obravnava snov, ki je bila doslej v programih višje gimnazije.

V trigonometriji se bolj kritično obravnava snov, ki je tudi v programih dosedanje višje gimnazije z dodatkom o ciklotometričnih funkcijah in sferni geometriji.

V analitični geometriji v ravnini gre program čez srednjo šolo le z vektorsko algebro in vektorskim obravnavanjem analitične geometrije ter z obravnavanjem splošne enačbe druge stopnje. Novi so elementi prostorske analitične geometrije, kjer se poleg osnovnih pojmov obravnavajo ravnina, premica in tipi ploskev druge stopnje.

V fiziki je program nekaj širši, kot je program za gimnazijo, obravnavanje v nekaj večji meri kvantitativno kot v gimnaziji in spremljano s fizikalnimi praktičnimi vajami.

V celoti bi torej lahko rekli, da je popolnoma novega programa glede na gimnazijo le kaka tretjina. Zahteva pa se povsod seveda aktivno znanje, saj je to matematično oziroma fizikalno obzorje, ki ga naj dobi absolvent na šoli in ki mu kasneje pomaga pri njegovem pouku.

Metodiki obeh predmetov pa direktno pripravljata študente za njihovo kasnejše delo; poleg splošnih stvari se pri teh dveh predmetih pregleda snov, ki jo bodo učili, z metodičnega stališča. V zvezi s tema predmetoma je tudi primerno število hospitacij in dva nastopa, eden iz matematike, eden iz fizike, ki ju mora vsak absolvent opraviti.

Iz vseh predavanj mora študent delati izpite oziroma kolokvije; kolokvije iz predavanj predmeta, ki si ga je izbral za diplomski predmet, izpite iz predavanj ostalega predmeta. Diplomski izpit je le iz diplomskega predmeta.

Skupina dela v težkih razmerah posebno pri fiziki, saj nima niti lastnih prostorov in je brez pomožnega osebja.

Po izkušnjah, ki jih ima šola s študenti, bodisi da pridejo z učiteljišča, bodisi z gimnazije ali s strokovnih šol, predstavlja omenjena snov dovolj veliko nalogo skoraj za vse študente. Precej je celo takih, ki jo obvladajo bolj težko oziroma v nekaj daljšem času, kot traja študij. Morda preseneča, da je med temi precej absolventov gimnazij. K temu je treba pripomniti, da pripravljata tehnika in prirodoslovje absolvente gimnazij z večjimi ambicijami in sposobnostmi mnogo bolj kot pa VPS, od koder so perspektive zelo ozke. Tako pridejo seveda na VPS vobče le povprečni ali celo podpovprečni absolventi gimnazij. Za štipendiste, ki so v večini, pa je treba pripomniti, da so večkrat brez primerne posluha za matematiko in fiziko; lotijo se tega študija, ker nimajo pravih predstav o njem, štipendijo pa dobijo zaradi velikih potreb lahko le za ta študij.

Ker so potrebe po tovrstnem kadru še vedno zelo velike, se pojavljajo zunaj šole zaradi zmotnega mnenja, da je glavna ovira za zadosten dotok kadra pretežak študij, tendence po krčenju strokovnega programa. Smatram, da bi vsako znatnejše skrčenje predmetnikov in programov v živo prizadelo že itak minimalno strokovno izobrazbo absolventov VPS in tako povzročilo neposredno škodo pri pouku matematike in fizike na osemletkah. Znano je namreč, da učitelji brez zadostne strokovne izobrazbe ne morejo razviti svojih učencev tako, da bi jih napravili sposobne za nadaljevanje študija na srednjih šolah.

Pravilna pot do zadostnega dotoka kadra za pouk matematike in fizike je zboljšanje pogojev za delo na VPS ter stimulacija in primerna izbira študentov.

Francè Ahlin

Če karkoli iztepaš v primerni razdalji d (ugodno kakih 35 m) od vertikalne stene, razločno slišiš odmeve udarcev. Izberi si tak ritem udarjanja, da boš odmeve slišal ravno v sredah med po dvema zaporednima udarcema, torej tako, da si bodo udarci z odmevi vred sledili v enakih presledkih. To lahko dokaj natančno dosežeš, če imaš zadovoljivo razvit smisel za ritem. Dobro bi to napravil muzik in morda nič slabše tudi mlatič. Saj končno to ni nič drugega kot mlatenje dveh mlatičev, pri čemer je eden izmed njiju pač odmev. V času od zaznave udarca in njegovega odmeva preleti zvok razdaljo do stene in nazaj ($2d$), v času od udarca do naslednjega bi pa to storil dvakrat, torej preletel razdaljo $4d$. Ta zadnji čas pa prav lahko določiš. Z uro, ki ima sekundni kazalec, ugotoviš s štetjem število p presledkov med po dvema zaporednima udarcema recimo v 100 sekundah. Potem je en tak presledek $100/p$ sekund in hitrost zvoka $4d$: $(100/p)$ ali $4dp/100$ m/s. Praktični rezultati so seveda odvisni od razvitosti smisla za ritem, vobče pa so prav zadovoljivi. Morda se bo kdo od učencev celo spomnil, da moraš razdaljo $2d$ zmanjšati za razdaljo od mesta udarjanja do ušes in ti s tem napraviš veselje.

Metoda spominja na Fizeaujev način določitve svetlobne hitrosti, na določanje razdalj z radarjem ali globin z zvokom oziroma ultrazvokom.

Francè Ahlin

NOVE KNJIGE

Z. Mamuzić: Kombinatorika. Matematička biblioteka 6. Beograd 1957. Strani 122.

Matematička biblioteka je zbirka, ki jo izdaja matematična katedra elektrotehnične fakultete v Beogradu. O namenu te zbirke in o prvih štirih knjigah glej Obzornik VI, str. 141. Tu je zdaj nadaljnjih pet zvezkov te zbirke.

Elementi kombinatorike se uporabljajo v raznih matematičnih disciplinah: v verjetnostnem računu, pri determinantah itd. Vendar obravnavamo tam kombinatoriko le mimogrede, kot pomožno sredstvo. Avtor pa je to področje matematike razložil sistematično, toda elementarno, tako da je knjiga dostopna tudi dijakom višjih gimnazij. Njena vsebina je bogata: obširno so obravnavane permutacije, kombinacije in variacije. Vsebuje pa tudi osnovne pojme teorije množic: preslikavanja, relacije, funkcije itd. Kot zgledi za uporabo pa so razen binomske formule še definicija determinante in grupe. Tako se lahko začetnik seznani tudi s temi pojmi.

D. S. Mitrinović: Važnije nejednakosti. Matematička biblioteka 7. Beograd 1958. Strani 64.

Ta zvezek je posvečen velikemu srbskemu matematiku M. Petroviću. O njegovem življenju in delu govori avtor v uvodu. Neenačbe imajo pomembno vlogo na raznih matematičnih področjih. Spomnimo se le najznamenitejših: geometrijska sredina pozitivnih števil je zmerom manjša od aritmetične sredine, Cauchyjeva neenačba, Minkowskijeva neenačba (le-ta pove, da je v trikotniku stranica manjša od vsote drugih dveh stranic), Hölderjeva neenačba,

Hadamardova ocena determinante itd. Pričujoča knjižica govori o vseh teh neenačbah in še o mnogo drugih. Nekatere avtor dokazuje, druge le omenja v končni zbirki neenačb. Pri prebiranju te knjige pa se mi vsiljuje tole vprašanje: Delo je pisano elementarno, vendar so v njem obravnavana že precej specialna področja in take neenačbe, ki jih sicer redkokje srečamo v matematiki. Ali je taka knjiga najprimernejše berilo za srednješolce? Podoben pomislek imam tudi pri nekaterih drugih knjigah te zbirke.

D. Mihailović: Elementi vektorske algebre i analitičke geometrije v prostoru. Matematička biblioteka 8. Beograd 1958. Strani 178.

Knjiga obravnava vektorsko algebro in njeno uporabo v analitični geometriji. Namenjena je predvsem študentom tehničnih fakultet (pa tudi študentom naravoslovne fakultete), kjer se vektorska algebra predava v okviru predmeta matematika I. Vsa teorija je v knjigi razložena elementarno in lahkoumljivo, povsod je dosti zgledov in nalog. Glavna poglavja so: Elementi vektorske algebre, elementi analitične geometrije (ravnina in premica v prostoru), ploskve druge stopnje in rotacijske ploskve.

M. S. Popadić: Deljivost celih brojeva. Matematička biblioteka 9. Beograd 1959. Strani 96.

Knjiga obravnava tisti del elementarne teorije števil, ki govori o deljivosti celih števil. Kratka vsebina: uvod, osnovni pojmi, največja skupna mera in najmanjši skupni večkratnik, Diofantske enačbe, praštevila in lastnosti nekaterih številskoteoretičnih funkcij. Na koncu vsakega poglavja je dodana dokaj obsežna zbirka nalog.

R. S. Mitronović: Male planete. Matematička biblioteka 10. Beograd 1959. Strani 44.

Namen tega dela je seznaniti bralca z izsledki pri raziskavanju malih planetov. Prikazana je zgodovina teh planetov od njihovega odkritja do danes in problematika, ki se nanje nanaša. Pri tem so upoštevani doprinosi jugoslovanskih znanstvenikov. Knjižica govori o odkritju malih planetov, o njihovi oddaljenosti od Sonca, o premeru, prostornini in masi, o številu malih planetov, njihovem izvoru, o planetih, ki so bili odkriti na astronomskem observatoriju v Beogradu, o vlogi teh planetov pri interplanetarnih poletih itd.

Ivan Vidav

OBVESTILO

Kakor smo že poročali, je založba Mladinska knjiga v Ljubljani s sodelovanjem Društva matematikov in fizikov LR Slovenije pričela izdajati matematično knjižno zbirko SIGMA. Do zdaj so izšle 3 knjige:

Ivan Vidav: Rešeni in nerešeni problemi matematike.

Alojzij Vadnal: Verjetnostni račun.

Niko Prijatelj: Uvod v matematično logiko.

Knjige, razen prve, ki je že razprodana, se dobijo v vseh knjigarnah.

OPRAVIČILO

Uredništvo Obzornika za mat. in fiziko prosi cenjene naročnike in bralce lista, da oprostite zamudi, ki je nastala v izhajanju časopisa zaradi bolezni tehničnega urednika. Upamo, da bo v bodoče list spet lahko redno izhajal 4-krat letno.

ИЗВИНЕНИЕ

Редакция математическо-физического журнала «Обзорник» извиняется перед подписчиками и читателями, что запоздал выпуск журнала из-за болезни техперсонала. Надеемся, что в будущем журнал будет выходить регулярно и 4 раза в год.

JUSTIFICATION

Owing to the illness of the technical editor the subscribers and readers of the "Obzornik" are politely asked by the editors to apologize the delayed issue of the newspaper. — We hope that in future the newspaper will be able to issue in regular terms.

UREDNIŠTVO JE PREJELO V ZAMENO

Bulletin scientifique, Zagreb 1959, T. 4, No. 4, T. 5, No. 1.
Elektrotehniški vestnik, Ljubljana 1959, št. 1—2, 3—4, 5—6, 7—8.
Farmacevtski vestnik, Ljubljana 1959, št. 1—2, 3—6, 7—12.
Fotokemijska industrija, Zagreb 1959, št. 2, 3, 4.
Glasnik mat.-fiz. i astr., Zagreb 1959, T. 14, No. 1, 2, 3.
Gospodarski vestnik, Ljubljana 1959, št. 43—101, 1960, št. 1—15.
Idrijski razgledi, Idrija 1959, št. 2, 3, 4.
Matematičko fizički list, Zagreb 1959/60, št. 1, 2.
Philip's Technische Rundschau, Eindhoven 1958/59, No. 9, 10, 11, 12 in 1959/60, No. 1, 2, 3.
Physics Today, New York 1959, Vol. 3, 4, 5, 6.
Proteus, Ljubljana 1959/60, št. 2, 3, 4—5.
Proceedings of the mathematical and physical Society ob Egypt, Cairo 1958, No. 22.
Publikacije elektrotehničkog fakulteta, Beograd 1959, No. 23, 24, 25, 23, 27.
Publications mathématiques, Paris 1959, No. 2.
Sodobna pedagogika, Ljubljana, X., št. 3—4, 5—6, 9—10.
Ukrajinskij matematičeskij žurnal, Kijev 1959, T. XI., No. 1, 3.
Uspehi matematičeskikh nauk, Moskva 1959, T. XIV., Vyp. 2, 3, 4, 5, 6.
Varilna tehnika, Ljubljana 1959, VIII., št. 1, 2, 3, 4.
Vestnik Moskovskogo Universiteta, Moskva 1959, No. 1.
Zdravstveni vestnik, Ljubljana 1959, št. 4—5, 8—9, 10.

SPOROČILO UPRAVE

To številko »Obzornika« smo poslali vsem dosedanjim naročnikom, ki niso lista odpovedali. Vsem smo priložili tudi položnico za plačilo naročnine, istočasno pa smo tistim, ki imajo dolg še za prejšnje letnike, posebej poslali račun. Pribodna številka časopisa...

Zveza Društev matematikov in fizikov FLRJ izdaja časopis:

Nastava matematike i fizike

Naročnina je za člane vseh republiških društev matematikov in fizikov 300 din, za ostale naročnike, šole in biblioteke 400 din. Naročila in naročnino pošiljajte na žiro-račun Nastave 101-701-5-1262 z oznako »za Nastavu«.

Društvo matematikov in fizikov NRS izdaja

Vesnik Društva matematičara i fizičara NRS

Letno izide v dveh dvojnih številkah, letna naročnina je 400 din. Naročnino pošiljajte na ček. račun 101-707-3-119 Društvu matematičara i fizičara NRS pod oznabo »Za Vesnik«. Dopise pošiljajte na naslov društva Beograd pošt. fah 791.

Društvo matematikov in fizikov NRH izdaja za vso državo

MATEMATIČKO FIZIČKI LIST

za učence srednjih šol. Letnik ima 4 številke, med počitnicami ne izhaja. Letna naročnina je 240 din, posamezna številka 60 din.

Profesorji srednjih šol, priporočajte list dijakom! Naročila in naročnino pošiljajte na naslov:

Matematičko-fizički list, Zagreb, Ilica 16/III, p. p. 165 ali na čekovni račun št. 400-73-5-1884.

Društvo matematikov in fizikov LR Hrvatske izdaja časopis

Glasnik matematičko-fizički i astronomski

Naročnina za leto 1958 znaša 480 din. Časopis naročite pri administraciji Glasnika: Hrvatsko prirodoslovno društvo, Zagreb, Ilica št. 16-III. Čekovni račun 400-73-3-1077 za Društvo matematičara i fizičara NRH.

Obzornik za matematiko in fiziko izhaja vsak tretji mesec. Izdaja ga Društvo matematikov in fizikov LRS. Urejujejo ga: Robert Blinc, Peter Gosar, A. Kuhelj, I. Kušćar, A. Moljk, N. Prijatelj, I. Vidav. Odgovorni in tehnični urednik: F. Kvaternik. Upravo vodi F. Kvaternik. — Tiska tiskarna ČZP »Ljudska pravica« v Ljubljani. — Naročnina je 250 din, za podjetja in ustanove, ki plačajo po računu in za naročnike, ki plačajo po terjatvi, pa 280 din. Posamezna številka 100 din. Naročnino nakažite na