OBZORNIK
ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA
1957-58
VI. št. 4

VSEBINA

Članki Stran

O problemu dimenzij (Niko Prijatelj) 145
O transcendentnih številih (Jože Grasselli) 153
Magnetostrikcija (Zvonimir Ogorelec) 162

Novice

O 13. Hilbertovem problemu (Gabrijel Tomšič) 167
Zanimivosti po svetu 169

Domače vesti

Diplomska dela na oddelku za tehniško fiziko v Ljubljani 171
Tekmovanje mladih matematikov (Stanko Uršič) 172
Fizikalni tečaj za srednješolce (Franc Plevnik) 175
Julij Nardin (Jože Povšič) 176

Šola

Osnutek predmetnika in učnega načrta matematike za gimnazije (Francè Ahlin) 177
Kaj si želimo od novega srednješolskega učnega programa za fiziko? (Ivan Kuščer) 181
O predlogu plana i programa fizike za gimnazije 183

Nove knjige 185

Vprašanja 187

Odgovori 188

Utrinki 192

CONTENTS

Articles Page

On the Problem of Dimensions (Niko Prijatelj) 145
Transcendental Numbers (Jože Grasselli) 153
Magnetostriction (Zvonimir Ogorelec) 162

News

On the 13th Hilberts Problem (Gabrijel Tomšič) 167
News from various Countries 169

Home News

List of Theses presented by Candidates for Diploma of Technical Physics at the University of Ljubljana 171
Competitions of Young Mathematicians (Stanko Uršič) 171
A Course of Physics for Secondary-school Students (Franc Plevnik) 175
Julij Nardin (Jože Povšič) 176

School

Outline of the Curriculum for Mathematics on Secondary Schools (Francè Ahlin) 177
What do we expect from the new Secondary-school Curriculum for Physics? (Ivan Kuščer) 181
On the Curriculum of Physics for Secondary Schools 183

New Books 185

Questions 187

Answers 188

OBZORNIK
ZA
MATEMATIKO
IN
FIZIKO

1957-58 LJUBLJANA LETNIK VI

Uredniški odbor:
Anton Kuhelj, Ivan Kuščer, Anton Moljk, Ivan Vidav, Niko Prijatelj,
Ivan Štalec (tehnični in odgovorni urednik)

Izdalo Društvo matematikov in fizikov Ljudske republike Slovenije
Natisnila tiskarna ČZP »Ljudske pravice« v Ljubljani

Članki

Vektorji — vir pomembnih matematičnih pojmov (Ivan Vidav) 1
Elastičnost — plastičnost — viskoznost (Franc Cvelbar) 11
Radioaktivnost ozračja (Alojz Kline) 18
Verige in procesi Markova (Rajko Jamnik) 49
Stieltjesov integral (Jože Grasselli) 56
Izoperimetrične neenačbe in njih uporaba v fiziki (Anton Suhadolc) . . 61
Merjenje debelin z radioaktivnimi izotopi (Jože Pahor) 66
Osnovni pojmi teorije informacij (Rajko Jamnik) 97
O metodi najmanjših kvadratov (Milan Čopič) 108
Jedrska magnetna resonanca (Ivan Zupančič) 120
O problemu dimenzij (Niko Prijatelj) 145
O transcendentnih številih (Jože Grasselli) 153
Magnetostrikcija (Zvonimir Ogorelec) 162

Novice

Reševanje enačb z iteracijo (Sergej Pahor) 74
Število π na deset tisoč decimalk (J. V.) 77
Jurij Vega v luči sovjetskih zgodovinsko-matematičnih raziskav (Jože Povšič) 78
Sanjarjenje z odprtimi očmi (Rudi Kladnik) 80
Zborovanje mednarodne unije za fiziko (N. P.) 83
Mednarodni seminar študentov matematike v Varšavi (Gabrijel Tomšič) 83
Cestne krivine (Janez Strnad) 133
Mednarodni fizikalni kolokviji v letu 1959 137
O 13. Hilbertovem problemu (Gabrijel Tomšič) 167
Zanimivosti po svetu 169

Domače vesti

Občni zbor Društva matematikov in fizikov LRS (Jože Grasselli) . . . 44
XI. plenum Zveze društev matematikov in fizikov FLRJ (Jože Povšič) . 44
Strokovna posvetovanja v Hercegnovem (Jože Žabkar) 46
XII. plenum Zveze društev matematikov in fizikov FLRJ (Jože Povšič) . 138
Občni zbor Društva matematikov in fizikov LRS (Jože Grasselli) . . . 139
Krožki iz matematike (Stanko Uršič) 140
Diplomska dela na oddelku za tehniško fiziko v Ljubljani 171
Tekmovanje mladih matematikov (Stanko Uršič) 172
Fizikalni tečaj za srednješolce (Franc Plevnik) 175
Julij Nardin (Jože Povšič) 176

Šola

Šolski žleb hidrotehničnega odseka univerze v Ljubljani (Janko Bleiweis) 27
Nekaj neuvoženih nalog za našo srednjo šolo (Ivan Kuščer) 36
Srednješolski tečaj za matematiko (Stanko Uršič) 41
Delo aktiva matematikov in fizikov OLO Ljubljana v šolskih letih 1956-57 in 1957-58 (Francè Šušteršič) 90
Osnutek predmetnika in učnega načrta matematike za gimnazije (Francè Ahlin) 177
Kaj si želimo od novega srednješolskega učnega programa za fiziko? (Ivan Kuščer) 181
O predlogu plana i programa fizike za gimnazije 183

Odgovori 47, 96, 143, 188

Vprašanja 43, 187

Nove knjige 94, 141, 185

Utrinki 94, 73, 192

Dopisi 144

LETO VI 1957-58 OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO ŠTEV. 4 1. VI. 1959

O PROBLEMU DIMENZIJ

NIKO PRIJATELJ

(Oddelek za tehniško fiziko)

Je le vois, mais je ne le crois pas.
Cantor

I. UVOD

Pojem dimenzije ali razsežnosti izhaja prav gotovo iz neposrednega doživljanja sveta, v katerem živimo. Saj so izrazi, ki ta pojem implicirajo, kot »dolžina«, »širina«, »višina«, sestavni del najpreprostejšega človekovega besedišča. V matematiko je ta pojem »zašel« preko elementarne geometrije, ki je pač realnemu svetu najbližja. Tako najdemo že pri Evklidu prvo, rudimentarno povezavo intuitivnega pojma dimenzije z osnovnimi geometrijskimi pojmi: točka je brez razsežnosti, premica ima eno, ravnina dve in končno prostor tri dimenzije.

Šele analitična geometrija je kasneje omogočila, da je bil ta »kvalitativni« pojem dimenzije, ki je bil vse preveč vezan na idealizacijo podob iz realnega sveta, zamenjan s »kvantitativnim«. Dimenzijo prostora je namreč izrazila s š t e v i l o m koordinat, ki so potrebne za določitev lege poljubne točke v tem prostoru. Tako je torej premica enodimenzionalni prostor, ker je poljubna točka na njej določena že z eno koordinato. Iz enakih razlogov ima ravnina dve dimenziji, prostor v navadnem smislu te besede pa je tri-dimenzionalen. V matematiki je navada, da označujemo te prostore po vrsti z R_1, R_2 in R_3.

Brž ko je bil tako pojem dimenzije »aritmetiziran«, je že postalo očito, da je omejitev na R_1, R_2 in R_3, ki nam jo vsiljuje nazornost, brez slehernega matematičnega razloga. Zato je bila na dlani razširjava na R_n, torej na n-dimenzionalni prostor, v katerem je pač lega poljubne točke določena z n-torico koordinat $(x_1, x_2, \ldots x_n)$. Ker imamo pri tem ves čas v mislih, da so ustrezne koordinate realna števila, govorimo o n-dimenzionalnem realnem aritmetičnem ali Evklidovem prostoru. Seveda pa tudi ta omejitev ni potrebna. Koordinate kake točke morejo biti tudi poljubna kompleksna števila. V tem primeru govorimo o n-dimenzionalnem kompleksnem aritmetičnem ali Evklidovem prostoru in ga označujemo s C_n. Končno je pognal Hilbert n tudi v neskončnost. Točka tega neskočno dimenzionalnega realnega ali kompleksnega Hilbertovega prostora je vsako neskončno zaporedje realnih ali kompleksnih števil $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, ki ima konvergentno vsoto kvadratov absolutnih vrednosti posameznih koordinat, torej $|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots < \infty$.

Naj mimogrede omenimo, da je dala povod za tako razširjavo pojma dimenzije preko nazorno evidentnega R_3 tudi fizika. V teoretični mehaniki je namreč navada, da združimo koordinate lege (x, y, z) in koordinate impulza (p_x, p_y, p_z) dane materialne točke, ter jih smatramo kot kartezične koordinate (x, y, z, p_x, p_y, p_z) te točke v tako imenovanem f a z n e m prostoru, ki je potemtakem 6-dimenzionalen. Gibanje materialne točke v faznem prostoru

poteka, podobno kakor v navadnem prostoru, po nekem tiru, ki ga imenujemo fazni tir. Pravi tir točke dobimo potem tako, da poiščemo projekcijo faznega tira v tridimenzionalnem podprostoru, ki vsebuje le koordinate (x, y, z). Ustrezno lahko priredimo sistemu n materialnih točk $6n$-dimenzionalni fazni prostor.

Tako »aritmetizirani« pojem dimenzije pa je trčil na dve resni težavi. Le-ti si bomo ogledali malo natančneje v naslednjem.

II. CANTORJEV 1 : 1

Teorija množic, ki je postala temeljni kamen moderne matematike, je poskrbela za prenekatero presenečenje. V ozki zvezi s problemom dimenzij pa je tale njena, na prvi pogled paradoksna trditev:

Vse točke kakega kvadrata moremo povratno-enolično preslikati v točke kake daljice. To pomeni, da moremo najti tako p r a v i l o, ki preslika vsako točko danega kvadrata v eno samo točko dane daljice in je obratno vsaka točka dane daljice slika ene same točke danega kvadrata. Poskusimo se prepričati o pravilnosti te trditve!

Vzemimo v ta namen kar kvadrat $OABC$, ki ima za stranico enoto dolžine, in ga postavimo v koordinatni sistem tako, kakor kaže slika 1. Označimo z M množico vseh tistih točk, katerih koordinati ustrezata pogojema $0 < x \leqq 1$ in $0 < y \leqq 1$. Množica M vsebuje potemtakem naslednje točke:

1. vse notranje točke kvadrata $OABC$,
2. vse notranje točke stranic AB in BC,
3. oglišče B.

Za daljico pa izberimo kar stranico OA danega kvadrata in naj bo N množica vseh notranjih točk te daljice in krajišča A! V množici N so torej vse točke abscisne osi, katerih abscisa u izpolnjuje pogoj $0 < u \leqq 1$.

Naj bo zdaj točka T poljubna točka iz množice M! Ker sta njeni koordinati x in y pozitivni realni števili, ne večji od 1, lahko vsako od njiju zapišemo na en sam način v obliki neskončnega decimalnega števila

$$x = 0, x_1 x_2 \ldots x_n \ldots \quad \text{in} \quad y = 0, y_1 y_2 \ldots y_n \ldots$$

V primeru, da je kakšna koordinata le končno decimalno število, torej oblike $0, x_1 x_2 \ldots x_m$, pri čemer je potem seveda $x_m \neq 0$, jo bomo pač zapisali v obliki $0, x_1 x_2 \ldots (x_m - 1)\, 999 \ldots$ Tako bomo torej pisali namesto 0,5 raje 0,499 ..., namesto 1 raje 0,999 ... itd.

Iz teh dveh neskončnih decimalnih števil, ki enolično določata točko T iz množice M, sestavimo novo neskončno decimalno število u na takle način: za decimalno vejico pišemo najprej po vrsti

$$0, x_1 x_2 \ldots x_a$$

do prve decimalke x_a, ki je različna od 0. Če je torej že $x_1 \neq 0$, zapišemo le x_1, če je $x_1 = 0, x_2 \neq 0$, zapišemo le $x_1 x_2$, itd. Potem pripisujemo zaporedne decimalke števila y, torej

$$0, x_1 x_2 \ldots x_a y_1 y_2 \ldots y_b$$

zopet do prve decimalke y_b, ki je različna od 0. Za temi slede zopet nadaljnje decimalke števila x, do prve naslednje, ki je različna od 0, pa zopet nadaljnje

decimalke števila y itd. Na ta način konstruiramo eno samo neskončno decimalno število

$$u = 0, x_1 x_2 \ldots x_a y_1 y_2 \ldots y_b x_{a+1} \ldots x_{a+c} y_{b+1} \ldots y_{b+d} \ldots$$

ki je torej s koordinatama x in y enolično določeno, hkrati pa pozitivno in ne večje od 1. Zato pa določa to število eno samo točko T' na daljici OA! Tako torej lahko res priredimo vsaki točki T iz množice M eno samo točko T' iz množice N. [Postavimo, da ima točka T koordinati $x = 0{,}103103103\ldots$ *in* $y = 0{,}4999\ldots$ Prirejena točka T' je potemtakem določena z absciso $u = 0{,}1403919039\ldots$]

Seveda pa velja tudi obratno. Vsaki točki T' iz množice N ustreza namreč neko pozitivno neskončno decimalno število u, ki ni večje od 1

$$u = 0, u_1 u_2 \ldots u_m \ldots$$

Zdaj pa lahko po istem pravilu enolično razstavimo to število u v dve pozitivni neskončni decimalni števili x in y, ki nista večji od 1. To storimo tako, da jemljemo izmenoma za decimalke števila x oziroma števila y zaporedne decimalke števila u in sicer vsakokrat do naslednje prve decimalke števila u, ki je različna od 0. Tako dobljena x in y pa zopet enolično določata ustrezno točko T iz množice M. [Pri zgornjem zgledu dobimo na ta način iz koordinate točke T', $u = 0{,}1403919039\ldots$, res koordinati $x = 0{,}103103\ldots$ in $y = 0{,}499\ldots$ prvotne točke T nazaj.]

Z opisanim pravilom smo potemtakem res povratno-enolično preslikali množico M na množico N.

Iz tega osnovnega dejstva pa je mogoče kaj hitro pokazati, da lahko tudi vse točke ravnine, torej prostora R_2, povratno-enolično preslikamo v točke kake premice, torej v točke prostora R_1. Še celo več! Pokazati je mogoče, da lahko vse točke prostora R_n in celo vse točke Hilbertovega prostora povratno-enolično preslikamo v točke prostora R_1. Potemtakem pa moremo lego poljubne točke v prostoru R_2, R_n ali v Hilbertovemu prostoru določiti z lego ustrezne točke v prostoru R_1, torej z e n o s a m o koordinato, ki le-tej pripada.

To spoznanje, ob katerem je Cantor očitno povsem upravičeno izrekel svoj »vidim, pa ne verjamem«, postavlja v uvodu aritmetizirani pojem dimenzije v nedvoumno zadrego. In s to zadrego se šele začenja pravi problem dimenzij.

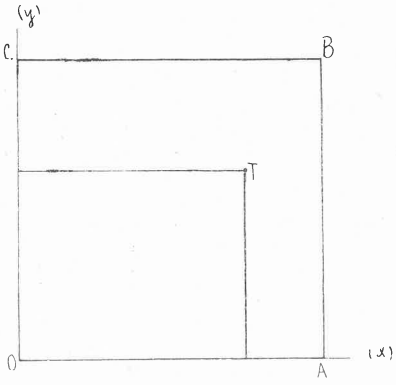
III. PEANOVA KRIVULJA

Opisana Cantorjeva povratno-enolična preslikava je pokazala na srečo neko »slabo« lastnost, ki je obetala izhod iz te zadrege. Ta preslikava namreč n i z v e z n a. Medtem ko teče točka T' po premici ves čas v istem smislu — pripominja slikovito M. Fréchet — izvaja ustrezna točka T v ravnini nori ples, preskakujoč nenadoma od ene točke ravnine k drugi, ki je o d d a l j e n a od prve. Ravnina je pri tej preslikavi povsem premešana. To ni več ravnina, to je le še zmešnjava točk.

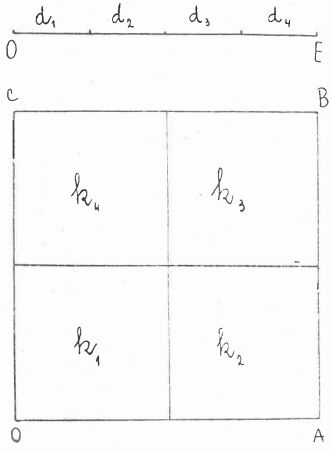
Ta ugotovitev je vodila do naslednjega vprašanja: Ali eksistira kaka z v e z n a preslikava premice v ravnino? Oziroma, če postavimo vprašanje splošneje: Ali moremo z v e z n o preslikati prostor R_n v prostor R_m, če $m \neq n$? Ako bi se to pokazalo kot nemogoče, potem bi mogli kaj hitro »rehabilitirati«

pojem dimenzije. V tem primeru bi preprosto rekli, da je dimenzija prostora določena z najmanjšim številom zveznih parametrov, ki so potrebni za opis tega prostora. Toda tudi ta domneva je razočarala. Italijanskemu matematiku Peanu se je namreč posrečilo zvezno preslikati točke dane daljice v točke danega kvadrata. To pomeni: ko preteče točka T' dano daljico ves čas v istem smislu, preteče ustrezna točka T neko zvezno krivuljo, ki vsebuje vse točke danega kvadrata. Oglejmo si to Peanovo krivuljo malo natančneje!

Vzemimo zopet kvadrat $OABC$, ki ima za stranico enoto dolžine, za daljico pa prav tako kar dolžinsko enoto OE, kakor kaže slika 2.



Slika 1



Slika 2

Razdelimo hkrati daljico OE in kvadrat $OABC$ na štiri enake dele, kakor ponazarja slika 2. Nastale štiri delne daljice oziroma delne kvadrate označimo z d_1, d_2, d_3, d_4 oziroma s k_1, k_2, k_3, k_4. Vendar naj bo označba taka, da bo veljalo: Če imata dve delni daljici eno skupno krajišče, potem imata tudi kvadrata z istima indeksoma skupno eno stranico. Nato razdelimo zopet naprej vsako daljico d_i in vsak kvadrat k_i na štiri enake dele! Po tej drugi razdelitvi dobimo vsega 4^2 delnih daljic in prav toliko delnih kvadratov. Nove daljice, ki smo jih dobili z delitvijo daljic d_i, bomo označili z $d_{i1}, d_{i2}, d_{i3}, d_{i4}$ in analogno bomo označili s $k_{i1}, k_{i2}, k_{i3}, k_{i4}$ kvadrate, ki so nastali z delitvijo kvadrata k_i. Kvadrate bomo zopet označili tako, da bo veljalo: Če imata dve daljici eno krajišče skupno, potem imata tudi kvadrata z istima dvojnima indeksoma skupno eno stranico. Ta delilni postopek moremo očitno poljubno nadaljevati. Po n-ti razdelitvi imamo torej 4^n delnih daljic $d_{i1\,i2\ldots i_n}$ in prav toliko delnih kvadratov $k_{i_1\,i_2\ldots i_n}$, pri čemer more zavzeti vsak indeks i_k vrednosti 1, 2, 3 ali 4. Če smo se glede označbe kvadratov ves čas držali zgoraj omenjenega pravila, potem velja pri vsaki razdelitvi: Brž ko imata dve daljici eno krajišče skupno, imata tudi kvadrata z istima skupinama indeksov skupno eno stranico. Seveda pa ne velja vedno tudi obratno! Dva kvadrata moreta imeti skupno eno stranico, ne da bi zato imeli tudi daljici z istima skupinama indeksov skupno krajišče. To je razvidno že pri prvi razdelitvi na sliki 2: Kvadrata k_1 in k_4

imata skupno stranico, daljici d_1 in d_4 pa nimata skupnega krajišča. Poleg tega je iz načina konstrukcije in označbe neposredno razvidno, da vsebuje daljica $d_{i_1 i_2 . i_n}$ daljico $d_{i_1 . i_n i_{n+1}}$ in da vsebuje prav tako kvadrat $k_{i_1 i_2 . i_n}$ kvadrat $k_{i_1 . i_n i_{n+1}}$. Prav tako je očitno, da je po n-ti razdelitvi dolžina vsake delne daljice le še 4^{-n}, dolžina diagonale vsakega delnega kvadrata pa je le še $\sqrt{2} . 2^{-n}$. Če vzamemo torej n dovolj velik, postanejo dolžine delnih daljic kakor tudi dolžine diagonal delnih kvadratov majhne, kakor želimo.

Zdaj pa pokažimo naslednje:

1. Vsaki točki T' daljice OE ustreza na osnovi tega delilnega postopka ena sama točka T kvadrata $OABC$.

Vzemimo najprej primer, da pade točka T' pri v s a k i razdelitvi v notranjost kake delne daljice. Naj torej pade pri prvi razdelitvi v d_{i_1}, pri drugi razdelitvi v $d_{i_1 i_2}$, itd. Tvorimo zaporedje teh daljic: d_{i_1}, $d_{i_1 i_2}$, $d_{i_1 i_2 i_3}, \ldots$ Ker vsebuje vsaka izmed daljic tega zaporedja vse nadaljnje in gre dolžina zaporednih daljic proti nič, je z njimi točka T' enolično določena. Toda vsaki daljici zaporedja moremo prirediti kvadrat, ki ima isto skupino indeksov. Zaporedju daljic torej lahko priredimo zaporedje ustreznih kvadratov: k_{i_1}, $k_{i_1 i_2}$, $k_{i_1 i_2 i_3}, \ldots$ Tudi pri tem zaporedju vsebuje vsak delni kvadrat vse nadaljnje, medtem ko gre dolžina diagonale teh kvadratov proti nič. Potemtakem definira tudi to zaporedje ustreznih kvadratov eno samo točko T kvadrata $OABC$.

Obračunajmo še s primerom, če sovpade točka T' po nekaj razdelitvah s krajiščem kake delne daljice! V tem primeru pa združimo obe delni daljici, ki imata v T' skupno krajišče, in delamo s to »dvojno« daljico naprej prav tako kakor zgoraj. Seveda ustrezajo tem »dvojnim« daljicam »dvojni« kvadrati s skupnimi stranicami, ki pa zopet konvergirajo proti eni sami točki T kvadrata $OABC$.

2. Vsaki točki T kvadrata $OABC$ ustreza v s a j ena točka T' daljice OE.

Naj bo najprej T taka točka kvadrata $OABC$, ki pade pri v s a k i razdelitvi v notranjost kakega delnega kvadrata. Zaporedje teh delnih kvadratov, kakor že vemo, enolično določa točko T. Zaporedje ustreznih delnih daljic, torej daljic z istimi skupinami indeksov, pa določa eno samo točko T' daljice OE. Kajti vsaka delna daljica zaporedja vsebuje vse ostale, njihove dolžine pa postanejo majhne, kakor želimo.

Kaj pa, če pade točka T po nekaj razdelitvah na stranico ali v oglišče kakega delnega kvadrata? V tem primeru se lahko zgodi, da ustrezajo točki T dve ali celo tri r a z l i č n e točke T' daljice OE! Ta stranica oziroma to oglišče more biti namreč skupna stranica oziroma skupno oglišče dveh oziroma treh takih delnih kvadratov, katerih ustrezne daljice na OE n i m a j o skupnih krajišč. Potem pa lahko tvorimo, izhajajoč iz teh različnih delnih kvadratov, dve oziroma tri različna zaporedja delnih kvadratov, ki določajo isto točko T. Toda ustrezna zaporedja delnih daljic ležijo potemtakem na dveh oziroma treh l o č e n i h delnih daljicah daljice OE in definirajo zato dve oziroma tri r a z l i č n e točke T'.

Naš delitveni postopek priredi torej vsaki točki T kvadrata $OABC$ eno, dve ali celo tri točke T' daljice OE. Preslikava torej, za razliko od Cantorjeve, n i povratno-enolična!

3. Delitveni postopek preslika daljico OE zvezno v kvadrat $OABC$.

To pomeni: Če izberemo na daljici OE dve točki T_1' *in* T_2' dovolj blizu, potem sta ustrezni točki T_1 in T_2 v kvadratu $OABC$ blizu, kakor želimo.

O tem se prav zlahka prepričamo. Pri še tako pozni razdelitvi padeta točki T_1' in T_2', če sta le dovolj blizu, v isto delno daljico ali v dve sosednji. Torej padeta tudi ustrezni točki T_1 in T_2 v isti ustrezni delni kvadrat ali v dva ustrezna kvadrata z eno skupno stranico. Toda če je razdelitev dovolj pozna, je diagonala ali sta diagonali delnih kvadratov majhni, kakor želimo. Potemtakem sta tudi točki T_1 in T_2 blizu, kakor želimo.

Po vsem tem torej lahko rečemo: Če preteče točka T' daljico OE ves čas v istem smislu, preteče točka T, ki jo priredi naš delitveni postopek, zvezno krivuljo v kvadratu $OABC$. Ta krivulja gre skozi vsako točko kvadrata, skozi nekatere celo večkrat. To je tako imenovana Peanova krivulja.

IV. LÜROTHOV DOKAZ

Takoj po Cantorjevem in še pred Peanovim odkritjem pa je Lürothu uspelo pokazati, da ni mogoče združiti obeh »dobrih« lastnosti teh dveh preslikav, vsaj kar zadeva premico in ravnino. To se pravi, da ne eksistira nobena povratno-enolična preslikava premice na ravnino, ki bi bila hkrati tudi zvezna v obeh smereh. Oglejmo si ta dokaz!

Če bi bila taka preslikava mogoča, bi to pomenilo, da eksistira neka zvezna funkcija dveh neodvisnih spremenljivk $z = f(x, y)$, ki priredi povratno-enoličnо vsakemu urejenemu paru realnih števil (x, y) neko realno število z. Videli bomo, da take funkcije ni, ker nas že sama domneva njene eksistence vodi do protislovja.

Zatecimo se torej k indirektnemu dokazu in recimo, da taka funkcija $z = f(x, y)$ eksistira. Če postavimo $y = 0$, dobimo zvezno funkcijo spremenljivke x, namreč $f(x, 0)$, ki jo bomo pisali kratko kar $p(x)$. Denimo, da je $p(-1) = a$ in $p(1) = b$. Ker je funkcija f po privzetku povratno-enolična, mora biti $a \neq b$. Ker pa je funkcija $p(x)$ zvezna, zavzame, kakor vemo, vse vrednosti med a in b, brž ko preteče x vse vrednosti med -1 in 1. To pa zopet pomeni, zaradi povratne enoličnosti funkcije f, da funkcija $z = f(x, y)$ ne sme zavzeti nobene vrednosti v intervalu $a \leqq z \leqq b$, brž ko je $y \neq 0$.

Naj bo torej $x = c$ tista vrednost v intervalu med -1 in 1, za katero je $p(c) = f(c, 0) = (a + b)/2$. Seveda je tudi $f(c, y)$ zvezna funkcija spremenljivke y. Pisali jo bomo na kratko $q(y)$, pri čemer torej vemo, da je $q(0) = (a + b)/2$. Toda zaradi zveznosti funkcije $q(y)$ moremo najti po absolutni vrednosti dovolj majhne y-e, ki pa so različni od nič, tako, da se njim ustrezne vrednosti funkcije $q(y)$ razlikujejo od vrednosti $(a + b)/2$ za tako malo, kolikor želimo. Te vrednosti torej očitno lahko ležijo v intervalu $a \leqq z \leqq b$, čeprav je $y \neq 0$, kar je v nasprotju z zgornjo trditvijo.

Enak rezultat je dobil kasneje Lüroth tudi za odnos med ravnino in prostorom. In naposled se je Brouwerju, po mnogih težavah, posrečilo dokazati čisto splošno: Prostora R_n ni mogoče preslikati povratno-enolično in v obe smeri zvezno v prostor R_m, če $m \neq n$. Dimenzija poljubnega Evklidovega prostora je torej invariantna pri vseh povratno-enoličnih in v obe smeri zveznih preslikavah. S tem spoznanjem je bil storjen prvi korak v moderno teorijo dimenzij.

V. TOPOLOŠKA DEFINICIJA DIMENZIJE

Brouwerjev dokaz samo ugotavlja, da je dimenzija Evklidovega prostora R_n invarianta povratno-enoličnih in v obe smeri zveznih preslikav. Ne odkriva pa nam nobenih enostavnih lastnosti, ki so razlog za to invarianco in ki bi nam hkrati tudi pojasnile, v čem se prostor R_n razlikuje od prostora R_m, če $m \neq n$. Razen tega se omejuje le na Evklidove prostore R_n. Teorija množic pa je matematični pojem prostora tako zelo razširila, da so Evklidovi prostori postali le poseben »primerek« tega pojma. Zato je bila povsem razumljiva zahteva, da bi se, vzporedno z razširjavo pojma prostora, izoblikovala tudi taka definicija dimenzije, ki bi zmogla smiselno prirediti vsakemu prostoru neko število kot njegovo dimenzijo in ki bi hkrati ustrezala naši intuitivni predstavi tega pojma. Teorija dimenzij, ki je zrasla iz te zahteve, je utegnila doslej rešiti ta problem za veliko skupino tako imenovanih metričnih separabilnih prostorov, medtem ko je pri splošnejših prostorih še dosti nerešenih težav. Za »avtorja« te teorije veljata Avstrijec Menger in Rus Urysohn, čeprav pripisuje ruski matematik P. S. Aleksandrov levji delež zaslug izključno svojemu rojaku Urysohnu. V naslednjem si hočemo ogledati le osnovne definicije dimenzije, kakor jih formulira teorija dimenzij. Te definicije se nanašajo seveda na poljubne metrične, separabilne prostore. Zato so izražene v jeziku topologije, to se pravi s pomočjo pojma »okolice« kake točke danega prostora. Ker pa sta pojma splošnega topološkega prostora in okolice nasploh le malo znana, bomo poskusili pojasniti definicije dimenzije kar z razmerami v Evklidovih prostorih.

Osnovno idejo, ki predstavlja geometrijsko nazorno ozadje pojma dimenzije, je jasno opredelil že H. Poincaré. Če hočemo namreč razdeliti eno-dimenzionalni prostor R_1 na več delov, lahko to storimo tako, da razmejimo te dele s posameznimi točkami, ki so, kakor vemo, brez dimenzije. Dele ravnine, torej prostora R_2, pa moremo razmejiti s črtami, ki imajo eno dimenzijo. In analogno je mogoče razdeliti prostor R_3 na več delov s ploskvami, ki imajo dve dimenziji. Meje kakega dela danega prostora imajo torej nasploh nižjo dimenzijo, kot pa prostor sam. Na tej enostavni lastnosti »nazornih« prostorov R_1, R_2 in R_3 sloni tudi splošna definicija dimenzije.

Ker prireja splošna definicija dimenzijo danega prostora v vsaki njegovi točki, moramo pojasniti še pojem okolice kake točke. Tudi to bomo storili le za Evklidove prostore. Okolica kake točke prostora R_1 je vsak odprti interval, ki vsebuje to točko. Sferično okolico kake točke prostora R_2 oziroma R_3 tvorijo vse tiste točke ustreznega prostora, ki ležijo znotraj krožnice oziroma krogle, s središčem v dani točki in polmerom r, pri čemer je r poljubno realno število. Analogno definiramo tudi sferično okolico kake točke v prostoru R_n kot množico točk, ki ležijo znotraj n-dimenzionalne krogle, katere središče je v dani točki, njen polmer pa poljubno realno število. To pomeni po analogiji z R_2 in R_3: Če ima dana točka koordinate $(a_1, a_2, \ldots a_n)$, potem tvorijo njeno sferično okolico S_r vse točke prostora R_n, katerih koordinate $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ ustrezajo neenačbi $(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2 < r^2$. Krajišči intervala oziroma točke, ki ležijo na krožnici ali na krogli, ki omejuje okolico kake točke, tvorijo rob te okolice. To so sferične okolice. Splošno je okolica točke $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ vsaka množica točk prostora R_n, ki vsebuje kako sferično okolico S_r te točke.

Zdaj pa si oglejmo definicije dimenzije!

Dimenzija 0

Prostor M ima v točki p dimenzijo 0, če ima točka p poljubno majhne okolice s praznim robom. To se pravi, da lahko najdemo za vsako okolico O točke p neko tako okolico O_1 te toćke, da velja hkrati

$$O_1 \subset O \quad \text{in} \quad \text{rob } O_1 \text{ ne vsebuje nobene točke prostora } M.$$

Prostor M ima dimenzijo 0, kar zapišemo

$$\dim M = 0$$

če ima v vsaki svoji točki dimenzijo 0.

Kot zgled dokažimo tole dejstvo:

Vsaka neprazna množica M, ki vsebuje le končno ali števno mnogo točk, ima dimenzijo 0.

Naj bo p poljubna točka te množice! Če je O dana okolica te točke, naj bo $S_r(p)$ sferična okolica, za katero velja $S_r(p) \subset O$. Ker je ta množica števna, lahko zapišemo njene točke v obliki zaporedja: $p_1, p_2, p_3, \ldots$ Prav tako pa moremo zapisati tudi razdalje od točke p: $d(p_1, p)$, $d(p_2, p)$, $d(p_3, p) \ldots$ Ker pa realna števila niso števna, moremo potemtakem najti neko pozitivno realno število r' ki je manjše od r pa različno od vseh $d(p_i, p)$. Sferična okolica $S_{r'}(p)$ ima torej gotovo prazen rob in je vsebovana v okolici O.

Ker je množica vseh racionalnih števil števna, sledi iz pravkar dokazanega, da ima dimenzijo 0. Podobno bi lahko pokazali, da je tudi neštevna množica vseh iracionalnih števil dimenzije 0.

Dimenzija n

Edino prazna množica ima dimenzijo -1.

Prostor M ima v točki p dimenzijo $\leqq n$, če ima točka p poljubno majhne okolice, katerih robovi imajo dimenzijo $\leqq n-1$.

Prostor M ima dimenzijo $\leqq n$, torej

$$\dim M \leqq n$$

če ima v vsaki svoji točki dimenzijo $\leqq n$.

Prostor M ima v neki svoji točki dimenzijo n, če ima v tej točki dimenzijo $\leqq n$, nima pa v tej točki dimenzije $\leqq n-1$.

Prostor M ima dimenzijo n, če velja hkrati

$$\dim M \leqq n \quad \text{in} \quad \dim M \text{ ni} \leqq n-1.$$

Prostor M ima dimenzijo ∞, če za noben n ne velja

$$\dim M \leqq n$$

Iz te rekurzivne definicije neposredno sledi:

Realna os, torej prostor R_1, ima dimenzijo 1.

Še tako majhna okolica poljubne točke p prostora R_1 je namreč odprti interval. Le-ta pa ima za rob obe svoji krajišči. Kakor pa že vemo, je dimenzija dveh točk enaka 0.

Dokaz, da ima na osnovi te definicije tudi prostor R_n dimenzijo n, pa je mnogo bolj zapleten.

O TRANSCENDENTNIH ŠTEVILIH

JOŽE GRASSELLI

(Oddelek za tehniško fiziko)

Raziskovanje transcendentnih števil se je doslej v glavnem razvijalo okrog vprašanj njihove konstrukcije, klasifikacije, algebrajske neodvisnosti in aproksimacije z algebrajskimi števili. Nekaj doseženih rezultatov obravnavajo naslednje vrste.

1. Kompleksno število je transcendentno, ako ne ustreza nobeni enačbi

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + x_{n-1} x + a_n = 0 \tag{1}$$

ki ima za koeficiente $a_0 > 0$, $a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ cela racionalna števila, za eksponent n pa naravno število. Ker se imenujejo koreni enačb oblike (1) algebrajska števila, je možno tudi reči, da je transcendentno vsako tisto število, ki ni algebrajsko.

Navedena definicija ima smisel le, če transcendentna števila res so. Zato se je treba prepričati o njihovem obstoju.

Priredimo vsaki enačbi (1) kot indeks s vsoto njene stopnje in absolutno vzetih koeficientov! Torej

$$s = n + a_0 + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}| + |a_n| \tag{2}$$

Indeks s je očitno naravno število večje od 1. Če je število s dano, je mogoče rešiti enačbo (2) v celih številih le na končno različnih načinov. Kajti $n < s$ in je zato koeficientov $a_0, a_1, \ldots, a_n$ manj od s. Vsak izmed njih je celo število in absolutno manjši od s. Zato je vseh možnih kombinacij končno število. Vsakemu indeksu pripada torej samo končno mnogo enačb. Vzemimo najprej $s = 2$, poiščimo vse pripadajoče enačbe in zapišimo njihove korene v nekakšnem redu! Enako napravimo pri $s = 3, 4, 5, \ldots$ V zaporedju, ki ga tako tvorimo, bo sčasoma upoštevano vsako algebrajsko število, saj pride na vrsto vsaka enačba (1). To pa pomeni, da je algebrajskih števil največ števno mnogo.

Odvzemimo iz množice kompleksnih števil, ki ima moč kontinuuma, algebrajska števila! Ostanek sestavljajo ravno transcendentna števila, moč tega ostanka je pa kontinuum. Transcendentna števila torej eksistirajo in jih je kotinuum mnogo.

Gornji dokaz izvira od J. Cantorja. Pomemben je, ker kaže, da je skoraj vsako kompleksno število transcendentno. Da velja ta ugotovitev tudi za realna števila, je razvidno iz poteka razmotrivanja.

Seveda se zdaj takoj postavlja naloga najti kakšne primere transcendentnih števil.

2. Oglejmo si najprej, kako se dajo transcendentna števila konstruirati! Glavna opora pri tem nam bo spoznanje, da algebrajskih števil v nekem smislu ni mogoče poljubno natančno aproksimirati z ulomki. Razložimo podrobneje to stvar!

Naj bo n naravno število! Rekli bomo, da ima realno število ξ racionalne aproksimacije reda n, ako se da dobiti pozitivna konstanta A tako, da ustreza nešteto različnih ulomkov p/q neenačbi

$$|\xi - p/q| < Aq^{-n} \tag{3}$$

Pri tem naj bodo imenovalci q pozitivni!

Da ima vsako realno iracionalno število ξ racionalne aproksimacije prvega reda, lahko hitro doženemo. Če ga zapišemo kot neskončno decimalno število

$$\xi = c_0 + c_{-1} \cdot 10^{-1} + c_{-2} \cdot 10^{-2} + c_{-3} \cdot 10^{-3} + \ldots$$

je c_0 celo število, $c_{-1}, c_{-2}, c_{-3}, \ldots$ so pa zaporedne decimalke, med katerimi je nešteto različnih od nič. Ulomki

$$c_0, c_0 + c_{-1} \cdot 10^{-1}, c_0 + c_{-1} \cdot 10^{-1} + c_{-2} \cdot 10^{-2}, \ldots$$

očitno ustrezajo pogoju (3) pri $A = 1$, $n = 1$ in jih je tudi nešteto različnih.

Nadalje se vidi, da ima število racionalne aproksimacije redov $n - 1, \ldots, 2, 1$, če premore racionalne aproksimacije reda n. Saj z znižanjem eksponenta n ni prizadeta veljavnost neenačbe (3).

Dokažimo zdaj tole trditev: Realno algebrajsko število stopnje n nima racionalnih aproksimacij reda $n + 1$.

Algebrajsko število ima stopnjo n, ako je koren vsaj ene enačbe (1) stopnje n s celimi koeficienti, ne ustreza pa nobeni taki enačbi (1) s stopnjo $n - 1$. Racionalna števila so očitno algebrajska prve stopnje. Začnimo pri njih z dokazom! Naj bo a/b neko racionalno število. Zmeraj se da doseči, da bo imenovalec b pozitiven. Če trditev ne drži, eksistira takšna pozitivna konstanta A, da ustreza nešteto različnih ulomkov $p/q \neq a/b$ pogoju

$$|a/b - p/q| < Aq^{-2}$$

Za vsak tak ulomek p/q je pa razlika $aq - bp$ od nič različno celo število in tedaj je:

$$|a/b - p/q| = |aq - bp| (bq)^{-1} \geqq (bq)^{-1}$$

Iz obeh neenačb sledi, da je $q < bA$. Vsi imenovalci q, ki jih je nešteto različnih in so cela pozitivna števila, bi morali biti manjši od produkta bA. To pa ni mogoče za noben končen A.

Preverimo trditev še za primer, ko je $\xi = \alpha$ in je α realno algebrajsko število stopnje $n \geqq 2$! Če bi število α imelo racionalne aproksimacije reda $n + 1$, bi pri neki pozitivni konstanti A obstajalo nešteto različnih ulomkov p/q, ustrezajočih zahtevi

$$|\alpha - p/q| < Aq^{-n-1} \tag{4}$$

Število α zadošča neki enačbi (1) stopnje n, ki nima racionalnih korenov. Naj pomeni $f(x)$ levo stran te enačbe! Za vsak ulomek p/q je tedaj vrednost $f(p/q)$ različna od nič, $f(p/q)\, q^n$ pa celo število. Ker je polinom $f(x)$ povsod

odvedljiva funkcija, velja v vsakem intervalu s krajiščema α in p/q po Lagrangevem stavku izražava

$$-f(p/q) = f(\alpha) - f(p/q) = (\alpha - p/q)\, f'(x^*) \tag{5}$$

x^* je neka vrednost med p/q in α. Po pogoju (4) leže vsi ulomki p/q na intervalu $(\alpha - A,\ \alpha + A)$. Odvod $f'(x)$ je na tem intervalu zvezen in je zato omejen. Njegova absolutna vrednost $|f'(x)|$ je torej pod nekim pozitivnim številom M. Z upoštevanjem teh dejstev dobimo na podlagi izraza (5)

$$|\alpha - p/q| = |f(p/q)| : |f'(x^*)| > |f(p/q)| : M = |f(p/q) \cdot q^n| : Mq^n \geqq M^{-1} q^{-n} \tag{6}$$

Ta ocena velja za vsak ulomek p/q.

Iz neenačb (4) in (6) sledi, da ustrezajo vsi imenovalci q ulomkov p/q neenačbi $q < MA$. Spet smo v protislovju z dejstvom, da je pod vsakim pozitivnim številom le končno mnogo celih pozitivnih števil.

Ker algebrajsko število stopnje n nima racionalnih aproksimacij reda $n + 1$, tudi aproksimacije višjega reda kot $n + 1$ ne morejo nastopati. Saj bi iz njihovega obstoja takoj sledila eksistenca aproksimacij reda $n + 1$.

Zdaj nam je že odprta neka pot do transcendentnih števil. Možno je namreč najti števila, pri katerih obstajajo racionalne aproksimacije vsakega reda n in ki zavoljo tega ne morejo biti algebrajska. Števila te vrste imenujemo Liouvillova.

Pokažimo, da je vsota ξ_0 konvergentne vrste

$$\sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!} = 0{,}1100010\ldots = \xi_0$$

Liouvillovo število! m-ta delna vsota te vrste je ulomek p_m/q_m z imenovalcem $q_m = 10^{m!}$ in drži ocena

$$\xi_0 - p_m/q_m = 10^{-(m+1)!} + 10^{-(m+2)!} + \ldots < 2 \cdot 10^{-(m+1)!} < (10^{m!})^{-m} = (q_m)^{-m}$$

Za vse $m > n$ torej velja

$$|\xi_0 - p_m/q_m| < (q_m)^{-m} < (q_m)^{-n}$$

Pri tem je n poljubno izbrano naravno število. Ker je ulomkov p_m/q_m z indeksom, večjim od n, nešteto in so vsi različni, ima število ξ_0 res racionalne aproksimacije vsakega še tako visokega reda.

Naštejmo še nekaj zgledov Liouvillovih števil! Naj bo $c_1, c_2, c_3, \ldots$ takšno zaporedje števil 0, 1, da je nešteto členov enakih 1! Vseh možnih zaporedij s to lastnostjo je kontinuum mnogo. Vsakemu številu intervala (0, 1) se da namreč prirediti eno samo tako zaporedje in narobe. Z vsakim teh zaporedij tvorimo število $\Sigma\, c_k\, 10^{-k!}$, kjer seštevamo na k od $k = 1$ do $k = \infty$. Kakor pri ξ_0 ugotovimo tudi sedaj, da so to sama Liouvillova števila. Torej so vsa transcendentna.

Z drugačnimi konstrukcijskimi predpisi se da priti še do obilice drugih primerov za Liouvillova števila. Ti predpisi se deloma naslanjajo na močnejše izreke o aproksimaciji algebrajskih števil z racionalnimi. Tukaj uporabljeni izrek pravi, da algebrajsko število stopnje n nima racionalne aproksimacije

reda $n + 1$, nič pa ne pove, kako je z aproksimacijami redov $n, n - 1, \ldots, 2$. V tej smeri je bil leta 1955 dosežen dokončen odgovor, ko je Roth dokazal tole trditev: Ako je α iracionalno algebrajsko število in eksistira nešteto različnih ulomkov p/q, ki izpolnjujejo pogoj

$$|\alpha - p/q| < q^{-r}$$

je $r \leqq 2$. Nobeno algebrajsko število nima torej racionalnih aproksimacij več ko drugega reda. V oceni za r enačaja ne smemo izpustiti, ker se dajo za vsako iracionalno število dobiti racionalne aproksimacije drugega reda.

Vsiljuje se zdaj še vprašanje, ali je vsako transcendentno število Liouvillovo. To ne bi bilo nemogoče, saj je moč množice Liouvillovih števil kontinuum. Vprašanje je bilo rešeno s konstrukcijo transcendentnih števil, ki niso Liouvillova. Tako sodi v to zvrst število 0,1234567891011 . . ., ki nastane, če si mislimo za decimalno vejico po vrsti zapisana vsa naravna števila. Mahler je namreč dokazal (1937) zanimivo dejstvo: Če je $f(x)$ tak polinom s celimi koeficienti, da zavzame za $x \geqq 1$ samo pozitivne vrednosti in pišemo za decimalno vejico zapored vrednosti $f(1), f(2), f(3), \ldots$, je dobljeno število transcendentno, toda ne Liouvillovo. Za $f(x) = x$ dobimo ravno omenjeni zgled.

3. Do transcendentnih števil je možno priti še drugače kot s konstrukcijo. Vsaka limita konvergentnega zaporedja je neko število, prav tako pa tudi vsaka funkcijska vrednost. Pri vsakem, tako dobljenem številu nastane vprašanje, ali je algebrajsko ali transcendentno. Razen trivialnih primerov, ko gre očitno za algebrajska števila, je to kar težko odločiti in je odgovor znan le v nekaterih primerih. Med prve dosežke te vrste spadata Hermitov dokaz, da je število e transcendentno (1873), in Lindemannov dokaz, da velja isto za število π (1882). Te ugotovitvi nista ostali osamljeni. Danes je že marsikaj znanega o transcendentnih vrednostih nekaterih funkcij (eksponentne, logaritemske, eliptičnih, funkcij beta in gama) za algebrajske argumente. Nekaj teh rezultatov nam daje splošni Lidemannov izrek. Preden pa kaj več o njem povemo, naj omenimo nekaj pojmov, ki jih bomo potrebovali.

Skupnost števil tvori obseg, če je vsota, razlika, produkt in kvocient dveh poljubnih števil iz te skupnosti spet neko število iz te skupnosti. Izvzeto je le deljenje z nič. Vsa racionalna števila že tvorijo obseg. Označujemo ga z R in je sploh najmanjši obseg. Mnoge naloge v obsegu R niso izvedljive. Tako n. pr. v njem ni rešljiva vsaka kvadratna enačba. Da moremo to in podobne naloge rešiti, je treba obseg R razširiti. Razširitev dosežemo takole: Naj bo α_1 kakšno iracionalno algebrajsko število. Skupnost števil, ki nastane, če k obsegu R privzamemo α_1 in vsa števila, ki se izražajo z α_1 in racionalnimi števili s pomočjo štirih osnovnih operacij, uporabljenih končnokrat, je spet obseg. Za ta razširjeni obseg bomo uporabljali oznako $R(\alpha_1)$. Če je α_2 algebrajsko število, ki ga ni v $R(\alpha_1)$, moremo na podoben način priti do še večjega obsega $R(\alpha_1, \alpha_2)$. V njem so vsa števila, ki se izražajo z α_2 in s števili iz obsega $R(\alpha_1)$ z uporabo štirih osnovnih operacij. Če pridružimo obsegu $R(\alpha_1, \alpha_2)$ zaporedoma še števila $\alpha_3, \ldots, \alpha_n$, dobimo obseg, ki ga zaznamujmo z $R(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Posebno važen primer obsega je normalni ali Galoisov obseg. Označevali ga bomo z $R(\vartheta)$. Značilna lastnost normalnega obsega $R(\vartheta)$ je v tem, da ima vsaka v obsegu R nerazcepna enačba, ki ima en koren v $R(\vartheta)$, vse korene v $R(\vartheta)$. Ako so $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ poljubna algebrajska števila, se da vedno najti takšno algebrajsko število ϑ, da je obseg $R(\vartheta)$ normalen in vsebuje vsa števila

obsega $R(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Stopnja normalnega obsega je stopnja algebrajskega števila ϑ. Vsako število ω normalnega obsega $R(\vartheta)$ stopnje n se takole enolično izraža s ϑ:

$$\omega = r_0 + r_1 \vartheta + \ldots + r_{n-1} \vartheta^{n-1} \tag{7}$$

pri čemer so $r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}$ racionalna števila. Število ϑ zadošča neki nerazcepni enačbi stopnje n. Naj bodo njeni koreni $\vartheta = \vartheta^{(1)}, \vartheta^{(2)}, \ldots, \vartheta^{(n)}$. Ako pišemo v izražavi (7) namesto ϑ po vrsti vse korene $\vartheta = \vartheta^{(1)}, \vartheta^{(2)}, \ldots, \vartheta^{(n)}$, dobimo sama števila iz normalnega obsega $R(\vartheta)$. Imenujemo jih konjugirana števila in jih označujemo z $\omega = \omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \ldots, \omega^{(n)}$. Vsaka skupina n konjugiranih števil iz $R(\vartheta)$ ustreza neki enačbi (1) stopnje n.

Naj bo danih m različnih algebrajskih števil $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$. Lindemannov izrek trdi, da so števila $\exp \alpha_1$,* $\exp \alpha_2, \ldots, \exp \alpha_m$ v obsegu algebrajskih števil linearno neodvisna, t. j., ni mogoče dobiti algebrajskih števil $a_1, a_2, \ldots, a_m$, ki niso vsa enaka nič, da bi veljala enačba:

$$a_1 \exp \alpha_1 + a_2 \exp \alpha_2 + \ldots + a_m \exp \alpha_m = 0 \tag{8}$$

Dokazali bomo nekoliko ožjo trditev, da so namreč števila $\exp \alpha_1$, $\exp \alpha_2, \ldots, \exp \alpha_m$ v obsegu R linearno neodvisna. Ako to ne bi bilo res, bi veljala vsaj v enem primeru enačba (8). Pri tem bi bila $a_1, \ldots, a_m$ racionalna števila in ne vsa enaka nič. Če enačbo (8) s primernim celim številom množimo in člene s koeficienti nič izpustimo, dobimo spet enačbo takšne oblike, toda s celimi od nič različnimi koeficienti. Vzeti smemo, da ima že kar enačba (8) to lastnost.

Dokaz za Lindemannovo trditev je precej dolg. Razdelili ga bomo na dva dela. V prvem delu bomo iz enačbe (8) izpeljali eksistenco nekih polinomov. S pomočjo teh polinomov bomo v drugem delu prišli do protislovja in tako ovrgli nasprotno trditev, da Lindemannov izrek v obsegu racionalnih števil ne drži.

Poiščimo številom $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ normalni obseg $R(\vartheta)$. Ako je njegova stopnja n, se v njem $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ izražajo z racionalnimi koeficienti $r_{10}, \ldots, r_{mn-1}$ na enoličen način takole:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= r_{10} + r_{11} \vartheta + \ldots + r_{1n-1} \vartheta^{n-1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_m &= r_{mo} + r_{m1} \vartheta + \ldots + r_{mn-1} \vartheta^{n-1} \end{aligned} \tag{9}$$

Postavimo v ta sistem namesto $\vartheta = \vartheta^{(1)}$ kak drug koren $\vartheta^{(k)}$! Dobimo števila $\alpha_1^{(k)}, \ldots, \alpha_m^{(k)}$, ki so vsa med sabo različna. Zakaj $\vartheta^{(k)}$ je algebrajsko število stopnje n in zato dva α ne moreta biti enaka, ker bi sicer $\vartheta^{(k)}$ ustrezal neki enačbi stopnje $n - 1$. V vseh koeficientih se pa očitno dve vrstici v sistemu (9) tudi ne moreta ujemati. To zamenjavo lahko napravimo n-krat in pridemo tako do mn števil

$$\alpha_1 = \alpha^{(1)}, \ldots, \alpha_m = \alpha_m^{(1)}, \alpha_1^{(2)}, \ldots, \alpha_m^{(2)}, \ldots, \alpha_1^{(n)}, \ldots \alpha_m^{(n)}$$

iz obsega $R(\vartheta)$.

---

* Tu pomeni $\exp \alpha = e^{\alpha}$.

Tvorimo z dobljenimi števili izraz

$$(a_1 \exp \alpha_1^{(1)} + \ldots + a_m \exp \alpha_m^{(1)}) \ldots (a_1 \exp \alpha_1^{(n)} + \ldots + a_m \exp \alpha_m^{(n)}) \quad (10)$$

Ker je prvi faktor enak izrazu (8), je ta produkt nič. Po zmnožitvi in skrčenju se izraz (10) glasi

$$c_0 \exp \beta_0 + \ldots + c_r \exp \beta_r = 0 \quad (11)$$

Koeficienti $c_0, \ldots, c_r$ so nastali s seštevanjem produktov koeficientov $a_1, \ldots, a_m$ in so tedaj cela števila. Možno je tudi ugotoviti, da je vsaj eden med njimi različen od nič. Naj bo kar $c_0 \neq 0$. Ker se leva stran v (11) ne da več skrčiti, so eksponenti $\beta_0, \ldots, \beta_r$ med sabo različni. Lahko si jih mislimo vse izražene s ϑ, saj so vsi iz obsega $R(\vartheta)$. Pri zamenjavi korena ϑ s korenom $\vartheta^{(k)}$ preidejo eksponenti $\beta_0, \ldots, \beta_r$ v med sabo različna števila $\beta_0^{(k)}, \ldots, \beta_r^{(k)}$ in izraz $c_0 \exp \beta_0 + \ldots + c_r \exp \beta_r$ v izraz $c_0 \exp \beta_0^{(k)} + \ldots + c_r \exp \beta_r^{(k)}$. Vsaka taka substitucija pa v produktu (10) samo premeša faktorje in torej njegove vrednosti ne spemeni. Zatorej velja zaradi povezave med (10) in (11)

$$c_0 \exp \beta_0^{(1)} + \ldots + c_r \exp \beta_r^{(1)} = \ldots = c_0 \exp \beta_0^{(n)} + \\ + \ldots + c_r \exp \beta_r^{(n)} = 0 \quad (12)$$

Delimo vsako teh enačb s faktorjem pri c_0! Dobimo

$$c_0 + c_1 \exp y_1^{(1)} + \ldots + c_r \exp y_r^{(1)} = \ldots = \\ = c_0 + c_1 \exp y_1^{(n)} + \ldots + c_r \exp y_r^{(n)} = 0 \quad (13)$$

Z $y_i^{(k)}$ smo označili razliko $\beta_i^{(k)} - \beta_0^{(k)}$; pri tem se k spreminja po naravnih številih od 1 do n, i pa od 1 do r. Noben $y_i^{(k)}$ ni nič, ker so vsi β, ki jih odštevamo, različni med seboj. Števila $y_i^{(1)}, y_i^{(2)}, \ldots, y_i^{(n)}$ so očitno za vsak i konjugirana in so zato ničle nekega polinoma s celimi racionalnimi koeficienti

$$g_i(z) = b_i (z - y_i^{(1)}) (z - y_i^{(2)}) \ldots (z - y_i^{(n)}) \quad (14)$$

Takih polinomov je r. Ker noben $y_i^{(k)}$ ni nič, je $g_i(0)$ celo število. Za konstanto b_i smemo vzeti, da je pozitivna.

Če je $f(z)$ kak polinom kompleksne spremenljivke z, je funkcija

$$F(z) = f(z) + f'(z) + f''(z) + \ldots$$

polinom iste stopnje kakor $f(z)$. Funkciji $F(z) \exp(-z)$ in $f(z) \exp(-z)$ sta za vsak z regularni. Nadalje se hitro prepričamo, da je

$$[F(z) \exp(-z)]' = -f(z) \exp(-z)$$

Če integriramo tu na obeh stxaneh od 0 do b, dobimo

$$F(b) - F(0) \exp b = -\exp b \int_0^b f(z) \exp(-z)\, dz \quad (15)$$

Vzemimo za b vrednosti od $y_1^{(1)}$ do $y_r^{(n)}$. Dobimo nr enačb oblike (15). Pomnožimo vsako prvih n enaču s c_1, vsako drugih n enačb s $c_2, \ldots$, vsako zadnjih n enačb s c_r. Če vse tako dobljene izraze seštejemo in upoštevamo (13), imamo

$$\Sigma\, c_i\, \Sigma\, F\,(y_i^{(k)}) + nc_0\, F\,(o) = -\Sigma\, c_i\, \Sigma \exp y_i^{(k)} \int_o^{y_i^{(k)}} f\,(z) \exp\,(-z)\, dz \qquad (16)$$

Tu je treba seštevati po i od 1 do r, po k pa od 1 do n.*

Polinom $f\,(z)$, ki nastopa pod integralom, sestavimo iz polinomov (14) takole:

$$f\,(z) = \frac{1}{(p-1)!}\,(b_1\, b_2 \ldots b_r)^{prn}\, z^{p-1}\, [g_1\,(z)\, g_2\,(z) \ldots g_r\,(z)]^p \qquad (17)$$

p naj bo praštevilo, ki ga bomo kmalu še natančneje predpisali. Naš cilj je, ovreči enačbo (16). Če uspemo, bo Lindemannov izrek dokazan.

Ker je $z = 0$ $(p-1)$-kratna ničla za polinom $f\,(z)$, so odvodi $f'\,(z), f''\,(z), \ldots, f^{(p-2)}\,(z)$ pri $z = 0$ enaki 0. Odvod $f^{(p-1)}\,(z)$ ima pri $z = 0$ vrednost

$$f^{(p-1)}\,(0) = (b_1\, b_2 \ldots b_r)^{pnr}\, [g_1\,(0)\, g_2\,(0) \ldots g_r\,(0)]^p$$

ki je od nič različno celo število, saj so vsi nastopajoči faktorji celi in nobeden ni nič. Izberimo za p kakšno praštevilo, večje od vrednosti $b_1, b_2, \ldots, b_r$, $|g_1\,(0)|, \ldots |g_r\,(0)|, n, |c_0|$. S tem dosežemo, da število $f^{(p-1)}\,(0)$ ni deljivo s p. Za $t \geqq p$ je vrednost odvoda $f^{(t)}\,(0)$ vedno celoštevilčen večkratnik od p. V izrazu $f\,(z)$ stoji namreč kot faktor pri ulomku $\frac{1}{(p-1)!}$ polinom stopnje $nrp + p - 1$ s celimi koeficienti. Pri p-tem odvodu se vsak koeficient pomnoži z večkratnikom števila $p!$ In če upoštevamo ulomek spredaj, je $f^{(t)}\,(z)$ enak p-kratniku nekega polinoma s celimi koeficienti. Tudi pri nadaljnjih odvodih ta faktor p ostane. Vsoto $F\,(0) = f^{(p-1)}\,(0) + f^{(p)}\,(0) + \ldots$ sestavljajo tako sama cela števila; eno je tuje proti p, vsa ostala so pa s p deljiva. Od tod sledi, da celo število $F\,(0)$ ni deljivo s p. Ker praštevilo p presega tudi obe vrednosti n in $|c_0|$, celo število $nc_0\, F\,(o)$ nima delitelja p.

Oglejmo si sedaj še prvi sumand na levi strani v izrazu (16). Iz oblike polinoma $f\,(z)$ vidimo, da je vsak $y_i^{(k)}$ njegova p-kratna ničla. Zato so odvodi $f'\,(z), f''\,(z), \ldots, f^{(p-1)}\,(z)$ pri $z = y_1^{(1)}, \ldots, y_r^{(n)}$ enaki nič. Ugotovili smo že tudi, da ima vsak nadaljnji odvod $f^{(t)}\,(z)$ pri $t \geqq p$ kot faktor praštevilo p. Zapišemo ga lahko v obliki $f^{(t)}\,(z) = p\,(b_1\, b_2 \ldots b_r)^{prn}\, G_t\,(z)$, pri čemer je $G_t\,(z)$ polinom s celimi koeficienti stopnje kvečjemu $prn - 1$. Trdimo, da je izraz $\Sigma\, F\,(y_i^{(k)})$ celoštevilčen večkratnik od p. Po definiciji funkcije $F\,(z)$ se ta izraz glasi:

$$\Sigma\, F\,(y_i^{(k)}) = \Sigma\, f\,(y_i^{(k)}) + \Sigma\, f'\,(y_i^{(k)}) + \ldots$$

---

* Na levi smo upoštevali, da ustrezajo $y_i^{(k)}$ enačbam (13).

Seštevamo povsod na k od 1 do n. Prvih p vsot na desni je enakih nič, ker je vsak $y_i^{(k)}$ p-kratna ničla polinoma $f(z)$. Poglejmo sedaj še kakšno poznejšo vsoto $\Sigma f^{(t)}(y_i^{(k)})$. Če upoštevamo izražavo za odvod $f^{(t)}(z)$, dobimo

$$\sum_{k=1}^{n} f^{(t)}(y_i^{(k)}) = p\,(b_1\, b_2 \ldots b_r)^{prn} \sum_{k=1}^{n} G_t\,(y_i^{(k)})$$

Dokažimo, da je izraz pri p celo število! Vsota, ki tam nastopa, ima člene oblike

$$a\,[y_i^{(1)}]^j + a\,[y_i^{(2)}]^j + \ldots + a\,[y_i^{(n)}]^j$$

kjer je a celo število, j pa naravno število, ne večje od $prn - 1$. Vse to sledi iz lastnosti polinoma $G_t(z)$. Vsak tak člen je pa simetrična funkcija korenov $y_i^{(1)}, \ldots, y_i^{(n)}$ enačbe $g_i(z) = 0$ in se izraža z njenimi koeficienti kot ulomek, katerega imenovalec ne presega vrednosti b_i^{prn-1}. Ta imenovalec se krajša z izrazom $(b_1\, b_2 \ldots b_r)^{prn}$ in nam tako res ostane celoštevilčen večkratnik od p. Ker so koeficienti c_i celi, je očitno tedaj prvi sumand na levi strani v izrazu (16) večkratnik praštevila p.

Leva stran enačbe (16)) je torej vsota dveh celih števil, katerih prvo je večkratnik praštevila p, drugo pa tuje proti p. Njena vrednost je tedaj od nič različna in celo število. Tako velja ocena

$$1 \leqq \left| \sum_{i=1}^{r} c_i \sum_{k=1}^{n} \exp y_i^{(k)} \int_0^{y_i^{(k)}} f(z) \exp(-z)\, dz \right| \tag{18}$$

Ker je funkcija pod integralom povsod v končnem regularna, smemo za integracijsko pot od izhodišča do točke $y_i^{(k)}$ na kompleksni ravnini vzeti kar premočrtno zveznico med njima. Naj bo zdaj pozitivno število M tako veliko, da presega vse vrednosti

$$|c_1|, \ldots, |c_r|, |\exp y_1^{(1)}|, \ldots, |\exp y_r^{(n)}|, |y_1^{(1)}|, \ldots, |y_r^{(n)}|$$

Obenem naj bo M večji od vsake absolutnih vrednosti funkcij $g_1(z), \ldots, g_r(z)$, $\exp(-z)$ na izbranih integracijskih poteh. Tak M je zaradi regularnosti nastopajočih funkcij gotovo možno najti. Če upoštevamo definicijo (17) funkcije $f(z)$, dobimo iz (18) oceno

$$1 < rn\,(b_1\, b_2 \ldots b_r\, M)^{prn}\, M^{p+3}/(p-1)!$$

za vsa praštevila p, ki so nad nekim končnim številom. To je pa protislovje. Pri dovolj velikem p pade namreč vrednost izraza na desni pod 1. To protislovje dokazuje pravilnost Lindemannovega izreka.

Lindemannov izrek je resničen tudi v tisti širši formulaciji, ki smo jo najprej omenili. Ako namreč vzamemo, da so števila $\exp \alpha_1, \exp \alpha_2, \ldots, \exp \alpha_m$ linearno odvisna v obsegu algebrajskih števil, moremo dokazati, da so tedaj linearno odvisna tudi v obsegu racionalnih števil.

Poglejmo zdaj, kako nam Lindemannov izrek omogoča spoznati transcendentnost nekaterih števil.

Najprej lahko ugotovimo, da je število e transcendentno. Če vzamemo $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1, \ldots, \alpha_m = m - 1$, nam Lindemannov izrek ravno pove, da e ne ustreza nobeni enačbi oblike (1). Podobno doženemo, da je za algebrajski $\alpha \neq 0$

število e^{α} transcendentno. Zdaj pa tudi transcendentni značaj števila π hitro spoznamo. Recimo, da bi bilo π algebrajsko število. Kot produkt dveh algebrajskih števil bi bilo potem tudi $i\pi$ algebrajsko število in zato $e^{i\pi}$ transcendentno število. Toda $e^{i\pi} = -1$ je celo število. Torej π ni algebrajsko, temveč transcendentno število.

Podoben sklep nas prepriča, da je vrednost funkcije $\sin x$ pri od nič različnih algebrajskih kotih x transcendentno število. Naj bo dano neko algebrajsko število $\alpha \neq 0$. Števili $i\alpha$ in $-i\alpha$ sta tedaj algebrajski. Ker enačbe $e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} - 2i\,e^{0} \sin\alpha = 0$, ki očitno velja, z algebrajskimi koeficienti ni moč izpolniti, je torej $\sin\alpha$ transcendentno število. Enako dokažemo, da zavzamejo tudi ostale trigonometrične funkcije in hiperbolične funkcije transcendentne vrednosti za algebrajske argumente neenake nič.

Naj bo α spet algebrajsko število in sicer različno od 0 in od 1. Iz enačbe $\alpha = e^{\log\alpha}$ takoj sledi, da je $\log\alpha$ transcendenten. Algebrajsko število namreč ne more biti, saj bi to pomenilo, da je algebrajsko število α enako transcendentnemu številu $e^{\log\alpha}$. Tudi inverzne funkcije k trigonometričnim in hiperboličnim funkcijam imajo za algebrajski argument, ki ni enak 0 ali 1, trancendentno vrednost. To ugotovimo ravno tako kot pri logaritemski funkciji.

4. Videli smo, da ima eksponentna funkcija e^{x} za algebrajske eksponente $x \neq 0$ trancendentno vrednost. Ali velja kaj sličnega, če vzamemo namesto e za osnovo kakšno algebrajsko število? Tako vprašanje postavlja sedmi Hilbertov problem, ki zahteva rešitev tele naloge: Kakšne narave je število α^{β}, če sta α in β algebrajski števili ter je α različen od 0 in 1, β pa ni racionalen? Da je vsako število te oblike transcendentno, sta leta 1934 vsak na svoj način dokazala ruski matematik Gelfond in nemški matematik Schneider. Ker je potenca α^{β} mnogolična, pripominjamo, da je transcendentna vsaka njena vrednost. Po tej ugotovitvi so n. pr. števila 3^{i}, $3^{\sqrt{2}}$, 2^{1-i}, i^{-2i} transcendentna. Zadnji zgled nam da posebej transcendentnost števila e^{π}.

Gelfond-Schneiderjevega izreka tukaj ne bi dokazovali. Omenimo pa naj, da ga moremo formulirati tudi takole. Ako sta α in y od 0 različni algebrajski števili in α ni 1, je kvocient $(\log y) : (\log\alpha)$ ali racionalen ali transcendenten. Če označimo ta kvocient z β, je $y = \alpha^{\beta}$. Po prvi formulaciji pri algebrajskih α in y eksponent β ne more biti iracionalen algebrajski, ker bi bil tedaj y trancendenten. Torej iz prve formulacije res sledi druga. Če izhajamo iz druge formulacije, pa vidimo, da za algebrajski α in iracionalni algebrajski β ne more y biti algebrajski. To je pa ravno vsebina prve formulacije.

Dekadični logaritem števila r se z naravnimi logaritmi izraža na način

$$\log_{10} r = (\log r) : (\log 10)$$

in je torej ali racionalno ali transcendentno število. Omejimo se na pozitivne racionalne r! Če r ni celoštevilčna potenca od 10, $\log_{10} r$ ni racionalen. Dekadični logaritmi racionalnih števil, ki niso celoštevilčne potence osnove 10, so torej transcendentna števila.

Literatura:

I. Niven: Irrational Numbers. The Mathematical Association of America. 1956.
Th. Schneider: Einführung in die transzendenten Zahlen. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1957.
C. L. Siegel: Transcendental Numbers. Princeton 1949.

MAGNETOSTRIKCIJA

ZVONIMIR OGORELEC

(Fizički institut univerziteta, Zagreb)

1. UVOD

Magnetostrikcijom nazivamo u fizici pojavu stezanja ili rastezanja krutih feromagnetskih tvari pod djelovanjem vanjskog magnetskog polja. Prema međusobnom odnosu polja i položaja uzorka, koji se ispituje, kao i načina ispitivanja, razlikujemo brojne pojave, nazvane zajedničkim imenom — magnetomehanički efekti.

Još u prvoj polovini prošlog stoljeća otkriven je Joule-ov efekt ili longitudinalna magnetostrikcija, koja se očituje u promjeni dužine feromagnetskih štapova, kad na njih djeluje magnetsko polje (Joule 1842). U isto vrijeme i po istom autoru otkrivena je promjena dimenzije i u smjeru presjeka štapa, kad se nalazi u magnetskom polju. Taj se efekt naziva transverzalna magnetostrikcija. Promjene u dužini i presjeku štapa su po svojoj veličini takove, da kod magnetskih polja ispod 1 000 Oe volumen ispitivanog uzorka ostaje nepromjenjen. Kod jačih magnetskih polja ova se simetrija narušava, pa govorimo o trećem magnetomehaničkom efektu — o volumnoj magnetostrikciji ili promjeni volumena feromagnetskih uzoraka u vanjskom magnetskom polju.

Nadalje se spominje Guillemin efekt ili pojava ispravljanja savinutih ili tordiranih feromagnetskih štapova u magnetskom polju (Guillemin 1846), Wiedemann efekt ili uvrtanje slobodnog kraja feromagnetske šipke, kad duž njene velike osi teče jaka struja, a istovremeno na nju djeluje magnetsko polje smera te osi (Wiedemann 1883, Pigeon 1819), i tako zvani ΔE efekt, koji pokazuje da i elastična svojstva feromagnetskih tvari ovise o stanju njihove magnetizacije.

Svi nam magnetomehanički efekti dakle pokazuju, da između promjena stanja neke krute materije u mehaničkom smislu, t. j. stezanja, rastezanja, savijanja i torzije, i promjena stanja te materije u magnetskom smislu, t. j. promjena indukcije i magnetizacije, postoji čvrsta uzajamna veza. U tijelu, podvrgnutom magnetizaciji, pojavit će se dosledno prirodnom principu najmanjeg nasilja* (Henry Le Chatelier 1884) sila, koja će se protiviti promjeni stanja i koja će na tijelu, ukoliko je ono slobodno, izazvati promjene u dimenzijama i obliku. U obrnutom slučaju, kad je tijelo podvrgnuto mehaničkim naprezanjima, pokazivat će ono promjene u stanju svoje magnetizacije. Kada magnetsko polje izaziva mehaničke deformacije, pojave nazivamo direktnim efektima, a kada mehanička naprezanja mjenjaju magnetizaciju uzorka, pojave nazivamo inverznim efektima.

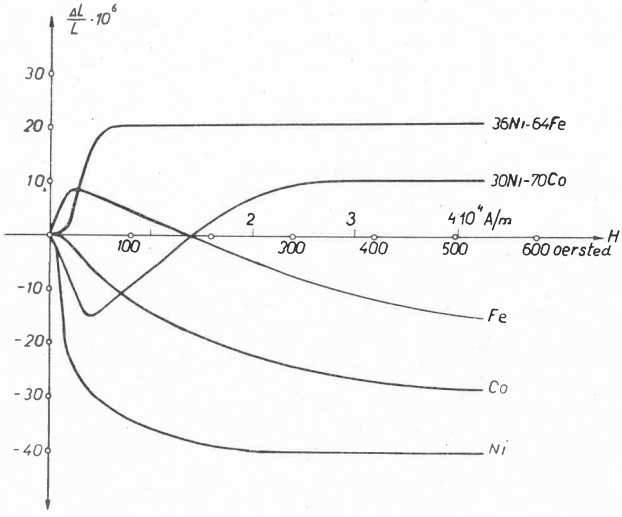
2. LONGITUDINALNA MAGNETOSTRIKCIJA

Iako smo u uvodu terminom magnetostrikcija označili tri efekta, ipak se u običajnom govoru pod izrazom magnetostrikcija podrazumijeva isključivo Joule-ov ili longitudinalni efekt. Zbog toga što je taj efekt našao najviše pri-

* Ta princip je pravzaprav le kvalitativna verzija entropijskega zakona. Op. ur.

mjena u tehnici i tako postao najznačajniji, dalja izlaganja bit će posvećena samo tom efektu.

Veličina i smjer promjene u dužini feromagnetskog štapa u magnetskom polju ovisi prvenstveno o materijalu uzorka. Neki feromagnetski materijali pokazuju razstezanje u magnetskom polju, pa govorimo o pozitivnoj magnetostrikciji, a neki pak stezanje, što označavamo negativnom magnetostrikcijom. Predznak te promjene u duljini ne ovisi o smjeru magnetskog polja. Ako smo opazili skraćivanje uzorka kod jednog smjera polja, isto skraćivanje opazit ćemo i kod magnetskog polja suprotnog smjera. Kao mjera za veličinu longi-



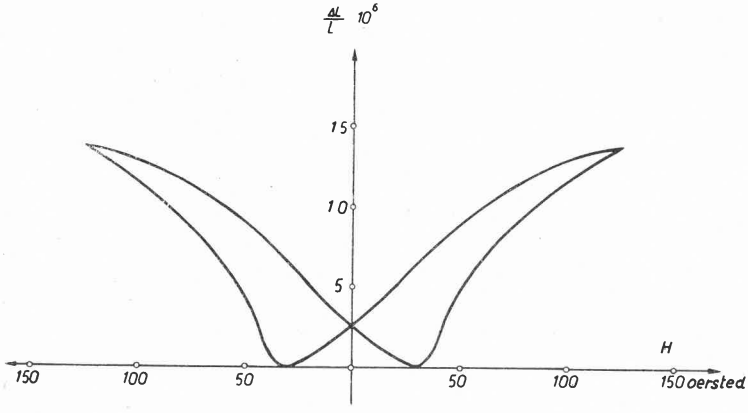
Sl. 1. Longitudinalna magnetostrikcija nekih feromagnetskih materijala

tudinalne magnetostrikcije uzima se relativna promjena dužine uzorka ($\Delta L/L$), koja je funkcija jakosti magnetskog polja. Za neke feromagnetske materijale ta je funkcijska veza prikazana na sl. 1. Izrazito negativnu magnetostrikciju pokazuju čisti nikalj i kobalt, dok se velikom pozitivnom magnetostrikcijom ističe legura niklja i željeza. Zanimljive pojave pokazuju čisto željezo i legura niklja i kobalta. Željezo kod malih jakosti magnetskog polja pokazuje rastezanje, a kod jačih se polja počinje stezati. Istu pojavu, ali suprotnog predznaka, pokazuje legura nikalj-kobalt.

Longitudinalna magnetostrikcija, slično kao i magnetska indukcija, pokazuje pojavu histereze. Nanesu li se na apscisu koordinatnog sistema jakosti magnetskog polja, a na ordinatu pripadna relativna produženja, onda će kod jedne cikličke magnetizacije magnetostrikcija opisati leptirastu krivulju, zvanu magnetostriktivna histereza. Na sl. 2 ona je prikazana za hladno valjani nikalj.

Potpuno teorijsko objašnjenje i kvantitativni proračun magnetostrikcije zbog svoje opširnosti izlazi iz okvira ovog prikaza. Spomenut ćemo samo neke autore i njihova dostignuća.

Na temelju starije teorije feromagnetizma (Weiss 1907) magnetostrikciju kubičnih monokristala (željezo, nikalj) proučavali su Becker 1930, Kapitza 1931 i Döring 1934. Magnetostrikciju heksagonskih kristala (kobalt i legure) proučavao je Bitter 1937. Polikristaličnim feromagnetskim tvarima i njihovom magnetostrikcijom bavio se mnogo Vladimirsky 1943, a u novije vrijeme Dyakov 1951 i Lee 1954. Rezultati tih istraživanja pokazuju, da je veličina magnetostrikcije općenito neka kvadratna funkcija magnetskog polja i nakon izvjesnih jakosti magnetskog polja postiže zasićenje, koje karakterizira veličina lim $(\Delta L/L)$, nazvana totalna ili zasićena magnetostrikcija. Ta veličina iznosi za nikalj $-34 \cdot 10^{-6}$, za željezo samo $-7 \cdot 10^{-6}$.



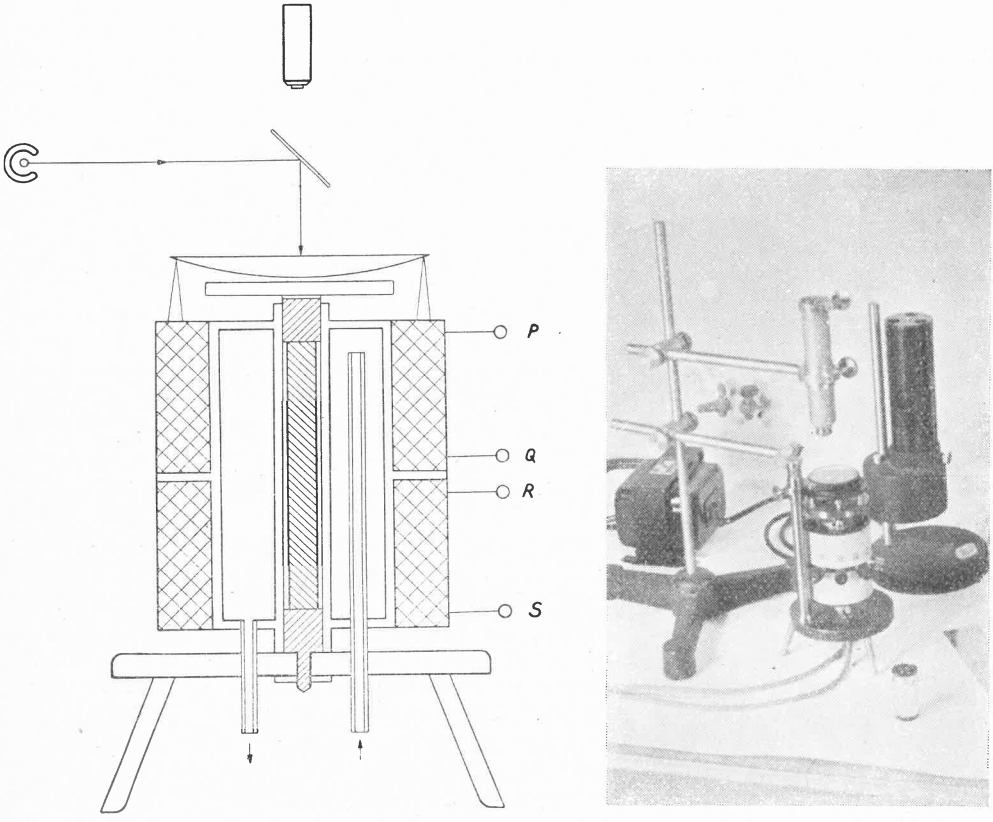
Sl. 2. Magnetostriktivna histereza

3. MJERENJE LONGITUDINALNE MAGNETOSTRIKCIJE

Magnetostrikcija se obično mjeri kao funkcija jakosti magnetskog polja. Zbog njene vanredno male veličine odmah se kod mjerenja mogu pretpostaviti velike eksperimentalne poteškoće. Jedna je od glavnih toplinsko rastezanje uzorka, koje po intenzitetu može premašiti samu magnetostrikciju. Prvi je dakle uvjet za točnost mjerenja — konstantna temperatura. I sam uzorak zahtijeva prije mjerenja izvjesnu obradu. Priprema se sastoji u tome, da se uzorak oslobodi svih unutarnjih mehaničkih naprezanja i da se potpuno demagnetizira. Jedno i drugo postiže se zagrijavanjem do približno 800 °C i polaganim hlađenjem. Uzorak se može demagnetizirati i izmjeničnom strujom sve manjih i manjih jakosti.

Postoji više metoda mjerenja magnetostrikcije. Autor ovog prikaza dobio je u zadatak ostvariti jednu mjernu metodu kao vježbu u okviru Višeg fizičkog praktikuma na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Budući da su neki djelovi potrebne aparature već postojali, izbor je pao na optičku metodu mjerenja. Slika 3 a prikazuje presjek kroz upotrebljenu aparaturu. Uzorak kome se mjeri magnetostrikcija smješten je u centru mjedenog cilindra, kroz koji tokom mjerenja teče voda konstantne temperature. Na taj rashladni cilindar namotane su dvije potpuno jednake zavojnice, čiji krajevi su označeni sa

P, *Q*, *R* i *S*, a spajaju se sa akumulatorskom baterijom preko ampermetra, promjenljivog otpora i komutatora. Uzorak stoji između dva mjedena valjčića, od kojih je donji učvršćen u podlogu, a gornji nosi staklenu planparalelnu ploču. Iznad te ploče na posebnim šiljcima stoji plankonveksna leća velikog radiusa zakrivljenosti. Leća i ploča osvjetljene su monohromatskom svjetlošću pomoću natrijeve lampe i staklene ploče, smještene pod 45^0 prema smjeru



a b

Sl. 3. Uređaj za mjerenje magnetostrikcije

b. Na desni strani fotografije se vidi natrijeva lampa sa pripadnim transformatorom (lijevo). Ispred nje nalaze se zavojnica, leća i mikroskop sa stalkom.

dolazeće svjetlosti. U sistemu plankonveksna leća planparalelna ploča nastati će Newtonovi kolobari, koji se promatraju mikroskopom malog povećanja. U slučaju bilo kakve promjene u dužini uzorka, doći će do smanjivanja ili povećavanja razmaka između leće i ploče, a time i do pomicanja čitavog sistema Newtonovih kolobara. Ako se uzorak ukapčanjem struje u zavojnici, t. j. stvaranjem magnetskog polja skraćuje, razmak između leće i ploče se povećava, pa će se i kolobari skupljati. Kod produžavanja uzorka, Newtonovi kolobari se šire. Između promjene u dužini uzorka i pomaka kolobara postoji izvjesna

veza i mjerenjem pomaka jednog kolobara možemo izračunati veličinu magnetostrikcije.

Prije samog mjerenja kroz uređaj se propušta vodovodna voda približno 15 minuta. Nakon tog vremena pretpostavljamo da se uzorak nalazi na konstantnoj temperaturi, što možemo kontrolirati promatrajući kolobare. Da se osiguramo i od promjene temperature uslijed zagrijavanja zavojnice, kontrolu vršimo i onda, dok zavojnicom teče struja. U tu svrhu komutatorom spojimo obe zavojnice u opoziciju. Smjerovi magnetskih polja pojedinih zavojnica su tada suprotni, pa se ukupno polje duž osi uzorka poništava. Magnetostrikcije u tom slučaju nema i svako pomicanje kolobara biti će znak toplinske neuravnoteženosti. Ako nema nikakvog pomicanja kolobara, nema ni toplinskog rastezanja uzorka. Mjerenje magnetostrikcije može dakle početi. Komutatorom K obe se zavojnice spoje u seriju. Njihova polja duž osi uzorka se zbrajaju i pomak kolobara označava tada čistu magnetostrikciju. Promjenljivim otpornikom možemo regulirati struju u zavojnici, a time i jakost polja, što omogućuje mjerenje magnetostrikcije u ovisnosti o magnetskom polju.

Dugujem zahvalnost prof. dr. M. Paiću i dr. M. Varićaku za njihovo kontinuirano interesovanje za moj rad i za njihovu dragocjenu pomoć i sugestije.

Literatura:

R. M. Bozorth: Ferromagnetism. Van Nostrand, New York 1951.

R. Becker — W. Döring: Ferromagnetismus. J. Springer Verlag, Berlin 1939.

Worsnop — Flint: Advanced Practical Physics For Students. Methuen & Co., Ltd., London 1954.

Dr. Ing. M. Paić: Fizička mjerenja II. Školska knjiga, Zagreb 1951.

E. W. Lee; Rep. Progr. Phys., **18** (1955), 184.

J. E. Goldman: Phys. Rev., **72** (1947), 529.

»Kadar poučujemo otroka, si moramo prizadevati, da polagoma združimo tisto, kar zna, s tistim, kar zmore. Med vsemi znanostmi je — se zdi — matematika edina, ki more temu končnemu smotru najbolje zadostiti.«

IMMANUEL KANT

*

»Slišal sem, da me obtožujejo, češ da sem nasprotnik, sploh sovražnik matematike, vendar pa jo nihče ne more bolj ceniti od mene, ker izvršuje prav to, kar meni nikakor ni bilo dano doseči.«

J. W. GOETHE

*

Ako naj na splošno izjavim kaj o pedagogiki, je prav, če začnem z naslednjim razmišljanjem: pedagoški problem lahko formuliramo matematično, če vpeljemo za individualne kvalitete učitelja in n njegovih učencev prav toliko neznank in nato terjamo, da bodi funkcija z (1 + n) spremenljivkami

$$F(x_0, x_1, \ldots x_n)$$

pri danih stranskih pogojih maksimum. Ko bi bilo moči lepega dne ta problem neposredno matematično obdelati v skladu z dotlej doseženim napredkom psihologije, bi bila odslej (praktična) pedagogika znanost, — dokler pa se to ne posreči, nam velja za umetnost.

FELIX KLEIN

NOVICE

O 13. HILBERTOVEM PROBLEMU

Zadnja leta se je vrsta ruskih matematikov ukvarjala z reševanjem 13. Hilbertovega problema. Kako se glasi ta problem? Če hočemo odgovoriti na to vprašanje, moramo najprej uvesti pojem superpozicije funkcij.

Vzemimo funkciji dveh spremenljivk $u(x, y)$ in $v(x, y)$! Oglejmo si še novo funkcijo dveh spremenljivk $w(u, v)$! Namensto argumentov u in v vstavimo vanjo oni dve funkciji. Tako dobimo funkcijo $w[u(x, y), v(y, z)]$, ki je odvisna od treh spremenljivk x, y in z. To funkcijo smo dobili z enkratno superpozicijo; sestavljena je iz treh funkcij dveh spremenljivk. Vse njene lastnosti so določene že s tremi funkcijami dveh spremenljivk $u(x, y)$, $v(y, z)$ in $w(u, v)$.

V zvezi s tem je nastalo vprašanje, ali eksistira funkcija treh spremenljivk. Drugače povedano, ali eksistirajo funkcije treh spremenljivk, ki se ne dajo izraziti s superpozicijami funkcij dveh spremenljivk. Če smejo biti funkcije $u(x, y)$, $v(y, z)$ in $w(u, v)$ nezvezne, je odgovor negativen: Vsaka funkcija treh spremenljivk $f(x, y, z)$ se da zapisati v obliki $f(x, y, z) = w[u(x, y), v(y, z)]$. Ostane nam torej vprašanje, ali lahko izrazimo vse zvezne funkcije treh spremenljivk tudi s superpozicijami zveznih funkcij dveh spremenljivk. Preproste funkcije treh spremenljivk prav lahko izrazimo s superpozicijami zveznih funkcij dveh spremenljivk. N. pr. funkcijo $F = xy + yz$ izrazimo takole: $F = w[u(x, y), v(y, z)]$, kjer je $w = u + v$, $u = xy$ in $v = yz$. Da lahko izrazimo bolj komplicirane funkcije treh spremenljivk s funkcijami dveh spremenljivk, ni več zadosti enkratna superpozicija, ampak moramo uporabiti večkratne superpozicije.

Vse racionalne funkcije več spremenljivk lahko dobimo z večkratnimi superpozicijami funkcij dveh spremenljivk. Kajti taka funkcija nastane s seštevanjem, množenjem in deljenjem. Te osnovne operacije pa so funkcije dveh spremenljivk: $u = x + y$, $v = xy$ in $w = x/y$. Vse elementarne funkcije se dado izraziti s superpozicijami racionalnih funkcij in še z nekaterimi posebnimi funkcijami ene spremenljivke, kot $= \sqrt[n]{x}$, e^x, $\log x$, $\cos x$, . . .itd.

Koreni algebraičnih enačb 1., 2., 3. in 4. stopnje se izražajo z elementarnimi funkcijami koeficientov. Enačbe 5. in višjih stopenj pa niso rešljive v splošnem samo s koreni. Vendar se dado enačbe 5. in 6. stopnje transformirati v tako obliko, kjer so koeficienti odvisni le od dveh parametrov. Tako transformacijo določimo samo s korenjenjem. Ni se pa posrečilo izraziti korenov enačbe 7. stopnje s superpozicijami primernih funkcij. Splošno enačbo 7. stopnje

$$x^7 + a_1 x^6 + a_2 x^5 + a_3 x^4 + a_4 x^3 + a_5 x^2 + a_6 x + a_7 = 0$$

lahko prevedemo v enačbo

$$x^7 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$$

kjer so koeficienti a, b, c algebraične funkcije koeficientov $a_1, a_2 \ldots a_7$ prejšnje enačbe in se izražajo v obliki superpozicij funkcij dveh spremenljivk.

Med 23 Hilbertovimi problemi se zdaj trinajsti glasi: Ali lahko izrazimo korene enačbe

$$x^7 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$$

s superpozicijami zveznih funkcij dveh spremenljivk?

Hilbert je domneval, da to ni mogoče. Problem je zanimiv predvsem zato, ker je del splošnejšega vprašanja, namreč vprašanja, ali se vse funkcije treh spremenljivk izražajo s superpozicijami funkcij dveh spremenljivk. Prve rezultate pri reševanju tega problema so dobili pri pogojih, da imajo superpozicije kakšno posebno lastnost. Če zahtevamo samo enkratno superpozicijo, je odgovor na zgornje vprašanje negativen. A. G. Vituškin je sestavil tak polinom, ki se ne da sestaviti z enkratno superpozicijo zveznih funkcij dveh spremenljivk. Vendar je l. 1956. A. N. Kolmogorov dokazal, da se vsaka zvezna funkcija, ki je definirana na n-dimenzijski kocki ($n \geqq 4$), izraža s superpozicijami zveznih funkcij treh spremenljivk. Poljubno funkcijo n spremenljivk lahko izrazimo kot vsoto n funkcij. Vsak sumand je superpozicija neke funkcije treh spremenljivk in dveh funkcij $n - 1$ spremeljivk:

$$f(x_1, x_2 \ldots x_n) = \Sigma f^r [u^r (x_1, \ldots x_{n-1}), v^r (x_1, \ldots x_{n-1}), x_n] \tag{1}$$

kjer sumiramo na r od 1 do n.

Pred nedavnim so dokazali, da se prejšnji rezultati dado še izboljšati. Tako se v posebnem primeru vsaka funkcija treh spremenljivk izraža z vsoto devetih funkcij in vsaka od teh je le enkratna superpozicija funkcij dveh spremenljivk:

$$f(x, y, z) = \Sigma [\varphi^r (u^r (x, y), z) + \psi^r (v^r (x, y), z) + \chi^r (w^r (x, y), z)], \; r = 1, 2, 3 \tag{2}$$

To je pa že odgovor na Hilbertovo vprašanje. Vidimo torej, da ni funkcije treh spremenljivk, ki se ne bi dala izraziti s superpozicijami funkcij dveh spremenljiv. Vse lastnosti funkcij treh spremenljivk se izražajo s funkcijami dveh spremenljivk, to je z devetimi funkcijami u^r, v^r, w^r in devetimi funkcijami $\varphi^r, \psi^r, \chi^r$ ($r = 1, 2, 3$).

Zdaj se lahko vprašamo, ali eksistirajo funkcije dveh spremenljivk. Superpozicija poljubnega števila funkcij ene spremenljivke da vedno le funkcijo ene spremenljivke. Če privzamemo še kako »standardno« funkcijo dveh spremenljivk, po navadi funkcijo $g = x + y$, potem dajo superpozicije te funkcije g in funkcije ene spremenljivke že funkcije poljubnega števila spremenljivk. Nastane pa vprašanje, ali lahko vse zvezne funkcije dveh spremenljivk izrazimo s takimi superpozicijami.

Ko je Kolmogorov poskušal poenostaviti metode, s katerimi je dobil izraza (1) in (2), se mu je posrečilo na razmeroma preprost način pokazati tole:

Vsaka zvezna funkcija $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, definirana na kocki enote n-dimenzionalnega prostora E_n, se da izraziti v obliki:

$$f = \Sigma h_q [\Sigma u_q^p (x_p)] \quad (q = 1, 2, \ldots 2n + 1; \; p = 1, 2, \ldots n) \tag{3}$$

kjer so funkcije $h_q(u)$ zvezne, a funkcije $u_q^p(x_p)$ še standardne, to se pravi neodvisne od izbire funkcije f.

V posebnem primeru se da funkcija treh spremenljivk izraziti v obliki:

$$f = \Sigma\, h_q\, [u_q\,(x) + v_q\,(y) + w_q\,(z)] = \Sigma\, F_q\, [g_q\,(x, y), z], \quad q = 1, 2, \ldots 7$$

kjer predstavlja $F_q = h_q\, [t + w_q\,(z)]$, $g_q = u_q\,(x) + v_q\,(y)$.

Ta izraz je boljši, ker je prvič funkcija treh spremenljivk izražena že s sedmimi enkratnimi superpozicijami funkcij dveh spremenljivk in ker so drugič te funkcije dveh spremenljivk posebno preproste: funkcije g_q in w_q so celo standardne. Funkcija dveh spremenljivk se po (3) lahko izrazi takole:

$$f = \Sigma\, h_q\, [u_q\,(x) + v_q\,(y)], \quad q = 1, 2, \ldots 5$$

Dokaz, da res lahko na ta način izrazimo funkcijo dveh spremenljivk, ni težak, vendar je nekoliko zapleten.

Tu se odpira še vrsta vprašanj: ali se ne da morda izraz (3) še izboljšati, ali se ne da funkcija h še na kak drug način izbrati, ali so kakšne metode, da bi odvedljive funkcije izrazili s superpozicijami odvedljivih funkcij itd. Na nekaj teh vprašanj je negativno odgovoril A. G. Vituškin.

Literatura:

V. I. Arnold, O predstavlenii funkcij neskolkih peremennyh, Matematičeskoe prosveščenie, Moskva, 1958.

A. G. Vituškin, O mnogomernyh variacijah, Moskva 1955.

Gabrijel Tomšič

ZANIMIVOSTI PO SVETU

Cena naravnega urana. Mednarodna agencija za atomsko energijo je zbrala iz raznih dežel ponudbe za dobavo naravnega urana. Za dobavo 3 tisoč kilogramov naravnega urana Japonski je na podlagi ponudb določila ceno 35 dolarjev za kilogram.

Ameriška reaktorska produkcija v letu 1958. Po poročilu Atomske industrijske zbornice so ZDA leta 1958 zgradile doma in po svetu 37 reaktorjev in so začele gradnjo 45 novih.

Sredstva za znanost v Angliji v prihodnjih 5 letih. Angleški Svet za znanstvene in industrijske raziskave bo dal na razpolago za raziskovalno delo v naslednjih 5 letih približno 61 milijonov funtov. Za primerjavo je vredno omeniti, da je imel Svet v preteklih 5 letih 36 milijonov funtov sredstev.

Siemens si gradi svoj reaktor. Tvrdka Siemens-Schuckert se je začela baviti z razvojem jedrskih reaktorjev in si gradi za raziskave majhen lastni reaktor s toplotno močjo okrog 100 wattov. Konstrukcija reaktorja je podobna ameriškemu reaktorju vrste Argonavt (obogačeni uran in lahka voda), ki je bil na ogled v obratu lani na Ženevski atomski razstavi. Reaktor bo postavljen v Münchenu-Garchingu poleg 1000 kW reaktorja fizikalnega inštituta tehniške visoke šole. Siemens bo zgradil ta reaktor v celoti iz domačega materiala nekako do srede leta 1959.

Produkcija urana v Kanadi. Po objavljenih uradnih podatkih je leta 1958 pridelala največ urana Kanada, in sicer 13 537 ton. Na drugem mestu so ZDA z 12 560 tonami, na tretjem pa Južna Afrika s 6 200 tonami. Sovjetska zveza doslej še ni objavila podatkov.

Protonski sinhrotroni za energije nad 1 GeV. Za reševanje osnovnih problemov jedrske fizike so sedaj potrebni že curki delcev z energijami v območju GeV (= gigaelektronvolt = 10^9 eV). Zato število pospeševalnikov za to območje kljub velikim cenam razmeroma hitro raste. Sedaj dela že 6 protonskih sinhrotronov za energije nad 1 GeV in sicer: v Birminghamu (Anglija) za 1 GeV, v Delftu (Nizozemska) za 1 GeV, v Uptonu (ZDA) »bevatron« za 3 GeV, v Aif-sur-Yvette v laboratoriju francoske Atomske komisije za 3 GeV, v Berkeley (ZDA) »kozmotron« za 6,2 GeV in v Dubni pri Moskvi za 10 GeV. V gradnji pa je še 11 proton-

skih sinhrotronov za to območje. Največji se gradijo v laboratoriju CERN v Genevi za 25 GeV, v državnem laboratoriju v Brookhavenu za 30 GeV, v Leningradu za 50 GeV. Dokončani bodo do leta 1961. Predvideni stroški znašajo povprečno po milijon dolarjev na GeV.

Koliko reaktorjev je na svetu. Ob koncu leta 1958 je bilo po objavljenih podatkih na svetu 176 reaktorjev. Tu so všteti vsi reaktorji, tako raziskovalni kakor tudi reaktorji za produkcijo energije in produkcijo plutonija. V gradnji pa je bilo ob istem času na svetu 242 reaktorjev.

Tretji center za jedrske raziskave v Franciji. Konec januarja je bil odprt v Grenoblu nov center za jedrske raziskave. Center je ustanovila francoska atomska komisija, ki je zadnje čase začela decentralizirati raziskovalne možnosti. Center tesno sodeluje z grenobelsko univerzo in ima za svojega direktorja profesorja Louisa Neela. Zgrajen je bil v dveh letih in ima med drugim 1200 kW raziskovalni bazenski reaktor, imenovan Melusine (uran, obogaten na 20 %). Poleg tega ima generator hitrih nevtronov in 4 elektrostatične pospeševalnike za napetosti do 1,4 MV (dva za ione, dva za elektrone). Pospeševalniki imajo to posebnost, da dajo zelo velike tokove in sicer 4 mA pri 1,4 MV. Center ima sedaj 300 raziskovalcev in tehnikov.

Budžet CERN za leto 1959. Svet CERN je odobril prispevke, ki jih bo plačalo 12 držav članic v letošnji budžet, ki znaša 13 milijonov dolarjev. (Tudi naša država je članica CERN.) Center ima sedaj protonski sinhrociklotron za 600 MeV, ki je začel delati avgusta 1956, in gradi protonski sinhrotron za 25 GeV, ki bo dokončan prihodnje leto.

Produkcija U^{235} v Franciji. V Franciji so ustanovili družbo USSI (Société pour la Construction d'une Usine de Séparation Isotopique). Sestavljena je iz državnih in privatnih družb in bo v bližini reaktorskega središča Marcoule zgradila tovarno za pridobivanje U^{235}. Tovarna naj bi na osnovi plinske difuzije predelala letno 350 ton urana do obogatitve 3 %.

Petletni plan stroškov CNRN (Comitato Nazionale Ricerche Nucleare) sestavlja 50 milijard lir: za dograditev 3,5 milijard, za osnovne raziskave 12,5, uporabne raziskave 18,5, radiobiologijo 3,0, surovine 4,5, obratovalne stroške CNRN 5,0, za mednarodne organizacije pa 3,0.

Reaktor v Siamu. Siamska vlada je kupila od družbe Curtiss Wright Corporation (USA) 1 MW bazenski reaktor za namene univerze v Bankoku. Za postavitev reaktorja in usposobljenje osebja so predvideli dve leti.

Investicije ameriške atomske komisije. Ameriška atomska komisija (USAEC) je dosedaj vložila v svoje obrate 7,1 milijard dolarjev, od tega za plinsko difuzijo 2,3, za produkcijske reaktorje 1,6, za izdelavo in skladiščenje orožja 0,8, 1,0 milijard dolarjev pa za eksperimentalne in raziskovalne reaktorje. Obratovalni stroški so znašali 1,4 milijard dolarjev.

Prvi privatni reaktor. General Electrics Co. (USA) je v Kaliforniji dogradil raziskovalni reaktor GETR z močjo 30 MW, ki bo služil za raziskavo materialov in gorilnih elementov. To je prvi veliki raziskovalni reaktor, ki ga je samostojno finansirala privatna družba; stal je 4 milijone dolarjev.

Letni proračun ameriške atomske komisije za l. 1959 znaša 2443 milijone dolarjev: 697 milij. za surovine, 561 milijonov za posebne jedrske materiale, 542 milijonov za orožje, 372 milij. za razvoj reaktorjev, 129 milijonov za fizikalne raziskave, 43 milijonov za biologijo in medicino, 15 milijonov za vzgojo kadrov in tisk, 3 milijone za uporabo izotopov, 49 milijonov za vodstvo programa in administracijo, 7 milijonov za varnost ter 25 milijonov dolarjev za ostalo.

372 milijonov dolarjev za reaktorje je razdeljeno takole: 4,5 za pogon ladij, 8 za vojaške energijske reaktorje, 90,9 za podmornice, 68,5 za letalski pogon, 22,8 za pogon raket, 7 za energijske izvore satelitov ter 88,6 milijonov dolarjev za civilne energijske reaktorje.

»Atomska« baterija. Družba Martin Co. je v okviru atomske komisije (USA) izdelala projekt za uporabo radioaktivnosti Sr^{90}. 100 W baterija naj bi delala polnih 10 let brez obnavljanja, pri čemer bo rabila več kot 200 kC Sr^{90}. Računajo, da bo do l. 1975 na razpolago dovolj radioaktivnih odpadkov (Sr^{90}), da bodo lahko zgradili baterijo (generator) za 50 MW termične, oziroma 2,5 MW električne moči.

Jedrski inštitut v Južni Koreji. V bližini Seula so zgradili inštitut z letnim proračunom 1,36 milijonov dolarjev. Lanskega novembra so kupili 100 kW reaktor TRIGA. Skupina strokovnjakov družbe General Dynamics pomaga pri ureditvi inštituta.

D_2O v Egiptu. Nemška družba Kima Chemical & Fertilizer Co. bo skupaj z egiptovsko atomsko komisijo postavila tovarno za produkcijo težke vode. Tovarna bo zgrajena l. 1960 in bo dajala 20 ton D_2O na leto.

DOMAČE VESTI

DIPLOMSKA DELA NA ODDELKU ZA TEHNIŠKO FIZIKO V LJUBLJANI

Na Oddelku za tehniško fiziko, ki je bil odprt jeseni l. 1950, je do danes diplomiralo že 30 inženirjev fizike. Tako kot na drugih oddelkih tehniških fakultet je tudi tu obvezno diplomsko delo. Pri tem delu, ki je po navadi eksperimentalno, mora kandidat pregledati literaturo, pripraviti merilno aparaturo, opraviti meritev in prikazati ter tolmačiti rezultate. Ker bodo bralci morda hoteli kaj več vedeti o vsebini teh del, objavljamo v naslednjem njihov seznam. Večina je bila opravljena na Institutu Jožefa Stefana, ki je v Ljubljani skoraj edini dovolj opremljen za taka dela.

Ime diplomanta	Tema
1. Milan Osredkar	Števec na osnovi efekta Čerenkova
2. Marko Vakselj	Umeritev energijske skale betatrona in kontrola stabilnosti energije
3. Vekoslav Ramšak	Penningov ionski izvor za 140 kV nevtronski generator
4. Bruno Ravnikar	Monokromator z upognjenim kristalom
5. Ivan Zupančič	Jedrska magnetna resonanca na vodiku in merjenje relaksacijskih časov
6. Savo Poberaj	Sedimentacija v nehomogenem električnem polju
7. Bogdan Povh	Reakcija O^{17} (d, n) F^{18}
8. Zdravko Gabrovšek	Raziskava tehničnih pogojev pri raziskovanju kristalov z elektronsko interferenco
9. Rudolf Kladnik	Dvogrupni preračun homogenih reaktorskih sistemov
10. Nikolaj Bezić	Analiza magnetnih spektrometrov za težke delce
11. Leopold Debevec	Termični ionski izvor za Nierov masni spektrometer
12. Pero Horvat	Priprava in analiza merilnih metod za uporabo radioaktivnega joda pri diagnostiki ščitnice
13. Janez Strnad	Dvogrupna aproksimacija pri difuziji nevtronov v reflektorju
14. Zdenko Milavc	Meritev reakcije ^{31}P (γ, n) ^{30}P
15. Uroš Miklavžič	Meritev spektra žarkov gama betatrona s comptonskim spektrometrom
16. Alojz Kline	Merjenje nekaterih radioaktivnih primesi v ozračju
17. Franc Herman	Albedo in prepustnost nehomogenih enogrupnih nevtronskih tokov v reflektorju
18. Robert Blinc	Infrardeči spektri in oblika potencialne funkcije vodikove vezi KH_2PO_4 in KD_2PO_4 v neferoelektrični in feroelektrični fazi

Ime diplomanta	Tema
19. Jože Pahor	Merjenje debelin z radioaktivnimi izotopi
20. Sergej Pahor	Pretočni proporcionalni števec za trdne izvore in proporcionalni števec za plinske izvore
21. Stanislav Zazula	Konstrukcija mikrofotomera za fotometriranje Debye-Scherrerjevih diagramov
22. Đorđe Bugarinović	Optične lastnosti comptonskega spektrometra
23. Primož Cevc	Elektronsko stabiliziran svetlobni izvor
24. Franc Cvelbar	Predelava nevtronskega generatorja in umeritev pridelka nevtronov
25. Vukašin Radovanović	Merjenje življenjske dobe elektronov in vrzeli na kristalu Ge
26. Božidar Jordan	Vrelni reaktor EBWR
27. Silvester Šterbal	Meritev pragov reakcij ^{63}Cu (γ, n) ^{62}Cu, ^{16}O (γ, n) ^{15}O in ^{16}O (γ, 2 n) ^{14}O
28. Gvido Pregl	Meritev totalnega preseka za fotonuklearno absorpcijo pri Al^{27}
29. Gabrijel Kernel	Jedrska absorpcija žarkov gama. (Meritev pri siliciju. Ocena napak zaradi sipanja v absorberju in kolimatorju)
30. Jože Dolničar	Umeritev elektrostatičnega pospeševalnika

TEKMOVANJE MLADIH MATEMATIKOV

V letošnjem šolskem letu je Društvo matematikov in fizikov LRS priredilo v republiškem merilu tekmovanje mladih matematikov. Poslali smo dopis vsem šolam v Sloveniji, ki so se tudi odzvale in prijavile različno število udeležencev. Odziv je bil največji v Ljubljani (121); to je tudi razumljivo, ker je tu največ različnih srednjih šol in udeležba ni bila v zvezi s stroški. Iz ostalih krajev so se prijavili: Ravne (14), Maribor (11), Kranj (7), Murska Sobota (6), Koper (4), Trbovlje (4), Novo mesto (4), Ptuj (4), Stična (3), Jesenice (3), Kočevje (2), Idrija (2), Kamnik (1), Tolmin (1) in Celje (1).

Enemu udeležencu iz vsake šole je povrnil stroške Svet za šolstvo LRS, ostalim pa okraji ali šola.

V nedeljo, 5. aprila so prijavljenci zasedli svoja mesta po razredih. Manjkalo je le nekaj ljubljanskih srednješolcev, ker so bili zaposleni drugje. Vse tekmovalce smo porazdelili v štiri skupine, in sicer po razredih, kjer so prejeli naslednje naloge:

Za I. razred.

1. Določi koeficienta a in b tako, da bo polinom $ax^5 + bx + 4$ deljiv z izrazom $(x - 1)^2$!

2. Avtomobilist, ki se je po eni uri vožnje zamudil 40 minut s popravilom avtomobila in nadaljeval pot le še s tričetrtinsko prejšnjo hitrostjo, je prispel v namembni kraj z dvourno zamudo. Če pa bi se avto pokvaril 80 km dalje od

odhodne postaje, bi prispel na cilj pod istimi pogoji z zamudo 1 ure in 40 minut. Kolika je bila hitrost avtomobila in kako dolga je bila pot?

3. Konstruiraj enakokraki trapez, če je kot med diagonalo in krakom 120^0, osnovnica $a = 7$ cm, krajišči osnovnice c pa sta od središča osnovnice a oddaljeni po 2,5 cm!

4. Iz lesene krogle s polmerom R izrežeš enakostranični valj (in sicer največjega mogočega). Koliko odstotkov lesa gre v izgubo?

Za II. razred.

1. Kako se glasi kvadratna enačba, ki ima za korena kvadrat vsote in kvadrat razlike korenov enačbe

$$2x^2 + 2(m + n)x + m^2 + n^2 = 0$$

2. Število ε ustreza enačbi $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$. Izračunaj y iz enačbe

$$\frac{y - i}{y + i} = \varepsilon \frac{x - i}{x + i}$$

i je tu imaginarna enota, x pa neka konstanta.

3. Pokončna tristranična prizma ima stranske ploskve $S_1 = 65$ cm^2, $S_2 = 70$ cm^2 in $S_3 = 75$ cm^2, osnovna ploskev pa meri $O = 84$ cm^2. Nad krogom, ki je včrtan osnovni ploskvi, se dviga poševen valj, katerega stranica meri 15 cm. Izračunaj naklonski kot valjeve stranice, če je njegova višina enaka višini prizme.

4. Trikotniku z osnovnico a in višino v včrtamo pravokotnik tako, da leži ena njegova stranica na osnovnici trikotnika. Izračunaj stranice tega pravokotnika, če znaša njegova ploščina p % ploščine trikotnika. Koliko % ploščine trikotnika more največ pokriti včrtani pravokotnik?

Za III. razred.

1. Za katere vrednosti konstante a je sistem neenačb

$$-3 < \frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} < 2$$

izpolnjen pri vseh realnih vrednostih spremenljivke x?

2. V pravilni četverostranični piramidi je kot med sosednjima stranskima ploskvama enak 120^0. Ugotovi, ali leži središče tej piramidi očrtane krogle v notranjosti ali zunaj piramide! Izračunaj naklonski kot stranskega roba proti osnovni ploskvi!

3. Če v enačbi

$$x^3 + ax^2 + ax + 1 = 0$$

koeficienta a podvojimo, se vsota kvadratov vseh treh korenov poveča za 1. Določi koeficient a in napravi preizkus!

4. Kolika sta ostra kota v pravokotnem trikotniku, v katerem je vsota katet štirikrat večja kakor višina na hipotenuzo?

Za IV. razred.

1. Razlika med predzadnjim in prvim členom aritmetičnega zaporedja je 24. Vsota vseh členov je 102, diferenca zaporedja pa je trikratni prvi člen. Katero je to zaporedje?

2. Načrtaj na osnovi diagrama kvadratne funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$ diagram funkcije

$$y = \frac{1}{ax^2 + bx + c}$$

za primere, da je $a > 0$ in diskriminanta $D > 0$, nato tudi $D = 0$ in $D < 0$! Izvajanja utemelji! Kako se spremene rezultati, če je $a < 0$? (Za načrtovanje si lahko sam izbereš ustrezne posebne vrednosti za koeficiente a, b, c).

3. Osnovna ploskev poševne tristrane prizme z znanim stranskim robom s je trikotnik z znano stranico b in z znanim polmerom r očrtanega kroga. Robovi, ki se stikajo v oglišču A osnovne ploskve, tvorijo enakostrani trirob z znanim kotom α med dvema roboma. Izračunaj prostornino prizme!

4. Katerim pogojem morajo ustrezati koeficienti enačbe krožnice

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

da bo krožnica presekala abscisno in ordinatno os? Kdaj je koordinatno izhodišče zunaj in kdaj v notranjosti kroga? Zamisli si premičje s središčem v koordinatnem izhodišču! Izračunaj produkt odsekov, ki ju napravi krožnica na vsaki premici premičja, ki jo preseka. Kolik je ta produkt? Kateri izrek si s tem dokazal?

Od 95 oddanih nalog je komisija pod vodstvom univ. prof. dr. Vidava podelila naslednje nagrade:

eno prvo nagrado Janezu Lesjaku iz III. razreda gimnazije v Kočevju, ki je prejel kvalitetno zbirko šestil in dve knjigi; *štiri druge nagrade:* Borutu Gogali iz III. razreda I. gimn. v Ljubljani, Karlu Vukoviču iz II. razreda gimn. v Trbovljah, Mladenu Grosu iz IV. razreda IV. gimn. v Ljubljani in Janezu Kramerju iz IV. razreda gimn. v Novem mestu, ki so dobili garnituro »Pelikan« ali uro ali zbirko šestil in Adlešičevo knjigo »Svet svetlobe in barv«; *pet tretjih nagrad*: Valentinu Kalanu iz II. razreda gimn. v Kranju, Jožetu Vrabcu iz IV. razreda IV. gimn. v Ljubljani, Ranku Todoroviču iz II. razreda gimnazije v Kranju, Primožu Bradaču iz II. razreda I. gimn. v Ljubljani in Egonu Zakrajšku iz III. razreda gimnazije na Jesenicah, ki so prejeli nalivna peresa ali računala in eno knjigo. 15 udeležencev je dobilo *knjižne nagrade:* Mitja Kovačič, Anton Vračko, Jože Stupica, Vera Petrišičeva, Jože Bevk, Andrej Čadaž, Ivan Šantl, Andrej Kmet in Sveto Polič, vsi iz Ljubljane; Marjan Boravšek in Anton Zorec, oba iz Ptuja; Edvard Košnjek in Ignac Ahačič, oba iz Kranja; Anton Primožič iz Idrije; Štefan Vučak iz Murske Sobote.

Najmanj nagrajencev — samo dve knjižni nagradi — je bilo v I. razredu. Naloge prvošolcev niso bile sorazmerno nič težje od ostalih. Morda niso še navajeni samostojno misliti? Ali je naša šola postala manj zahtevna? Kje je vzrok?

Med nagrajenci smo srečali veliko število tistih, katerih imena smo že večkrat videli med reševalci nalog v Matematičko-fizičkem listu. Vidi se, da so ti bolj izvežbani in da se tudi v svojem prostem času bavijo z matematiko.

Dobro bi bilo, da bi v prihodnjem šolskem letu ponovno organizirali tako tekmovanje. Prav gotovo bomo na ta način vzbudili zanimanje do eksaktnih ved in dijakom vcepili veselje in ljubezen do matematike. Morda bi najprej izvedli izbirno tekmovanje po posameznih krajih in šele nato končno tekmovanje v Ljubljani. Ali bi bilo smotrno tako tekmovanje tudi v zveznem merilu? Za izvedbo krožkov in tekmovanja, ki ga je organiziralo društvo v letošnjem šolskem letu, se moramo zahvaliti za vsestransko pomoč, ki so nam jo nudili Naravoslovna fakulteta v Ljubljani, Svet za kulturo, prosveto in znanost LRS, Svet za šolstvo LRS in Tajništvo za šolstvo OLO Ljubljana.

Stanko Uršič

FIZIKALNI TEČAJ ZA SREDNJEŠOLCE

Ko smo na zadnjem občnem zboru Društva matematikov in fizikov LRS v oktobru razpravljali o tem, ali naj organiziramo matematičnim krožkom podobne krožke tudi za fiziko, so mnogi smatrali, da tega pri nas sploh ne bo mogoče izvesti. Glede udeležbe si sicer nismo belili glave, mislili pa smo, da bo zelo težko najti predavatelje, ki bi se hoteli lotiti te metodično dokaj težavne naloge.

Posebni odbor, ki je imel nalogo sestaviti program za tečaj, je bil mnenja, naj se srednješolcem posreduje to, za kar so iz objektivnih razlogov na lastnih zavodih prikrajšani, to je serije poskusov iz posameznih poglavij fizike z najnujnejšo razlago. Predavanja je bilo treba prirediti tako, da bi bila razumljiva in obenem zanimiva za dijake vseh razredov gimnazij in njim sorodnih šol. Osnovno znanje, s katerim je smel predavatelj računati, je bila osnovnošolska fizika. To so bile vsekakor hude zahteve, ki so terjale precejšnje priprave, razen tega pa tudi ni bilo nobenih izkušenj.

Tečaj je pričel z delom konec februarja. Led je prebil dr. A. Moljk z dvema predavanjema o radioaktivnosti in požel pri približno 300 udeležencih obilo priznanj za razlago vzorno pripravljenih poskusov iz radioaktivnosti in demonstracijo meritev v jedrski fiziki.

Naslednji predavatelj, prof. F. Ahlin, je z obilico lepih poskusov razložil nihanje, valovanje in akustiko.

Dr. I. Kuščer je v svojih predavanjih s temo Svetloba je valovanje s poskusi razložil interferenco, uklon in polarizacijo svetlobe, zaradi nazornosti je vključil v svoja predavanja tudi druga valovna območja, pokazal pa je tudi nekaj takih preprostih poskusov, ki so jih naredili udeleženci sami z minimalnimi sredstvi, ki so jih prinesli s seboj.

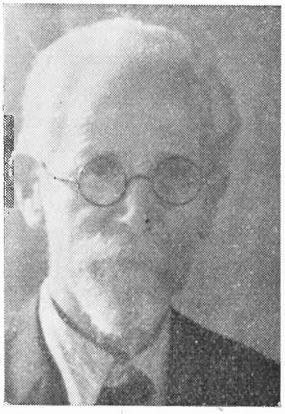
Tomislav Skubic je po uvodnih poskusih iz električnega in magnetnega polja na originalen način kvantitativno pojasnil indukcijski zakon.

Celoten uspeh tečaja je razveseljiv. Število udeležencev se je po prvih predavanjih sicer nekoliko zmanjšalo, povprečno pa jih je bilo še vedno okrog 200 na vsakem predavanju. Pri osmih predavanjih so videli preko 150 izbranih poskusov z ustrezno razlago. Po končanem tečaju je bilo splošno mnenje, da je treba v prihodnjem šolskem letu s tem delom nadaljevati.

Največje zasluge za uspešno izvedbo tečaja ima pa vsekakor vodstvo fizikalnega inštituta univerze, ki je dalo na razpolago vse potrebne instrumente in prostore.

Franc Plevnik

JULIJ NARDIN



Dne 17. marca letos smo se na Žalah za vedno poslovili od našega učitelja, fizika, profesorja Julija Nardina.

Rodil se je 28. decembra 1877 v Gorici kot sin revnih staršev. Že v rani mladosti je izgubil očeta, tako da je za vso družino morala skrbeti mati. Njegova mladost je bila trda in šolal se je v pomanjkanju. V Gorici je obiskoval osnovno šolo, nižjo gimnazijo in višjo realko. Na realko je šel zato, ker je prvotno nameraval študirati tehniko. Po maturi l. 1898 pa se je odločil za študij fizike in matematike ter je odšel najprej v Gradec, nato pa na Dunaj. Diplomiral je na dunajski univerzi pri Stefanovem nasledniku, znamenitem fiziku Ludviku Boltzmannu. Po dovršenem študiju je nastopil v šolskem letu 1904/05 brezplačno službo kot poskusni profesorski kandidat na gimnaziji v Gorici. Potem je služboval sedem let na realki v Idriji ter osem let na klasični gimnaziji v Ljubljani, dokler ni prišel l. 1920 na TSŠ, kjer je učil nepretrgoma do leta 1941, ko je bil iz zdravstvenih razlogov upokojen. Takoj po osvoboditvi ga je naša ljudska oblast reaktivirala. Poučeval je na TSŠ še dve leti, nato pa je dokončno odšel v pokoj. Od leta 1922 dalje je poučeval kot honorarni profesor fiziko na ljubljanski medicinski fakulteti, nekaj časa pa tudi na tehniški in filozofski fakulteti. Več let je bil predstojnik fizikalnega inštituta medicinske fakultete.

Ti suhi podatki o njegovem službovanju seveda ne morejo pokazati obširnega pokojnikovega dela. Profesor Nardin je bil priznan šolnik in odličen fizikalni praktik. Imel je izreden dar za opazovanje naravnih pojavov in je znal svoje učence navdušiti za fiziko in naravo ter jih je stalno vzpodbujal k samostojnemu razmišljanju. Ne verjeti, ampak razumeti, to je bilo njegovo geslo.

Za fizikalne poskuse je bil mojster, kakršni so redki. Med dijaki je bilo znano, da se mu noben poskus ne ponesreči. Pri tem je znal preprosta sredstva čudovito izkoristiti za nazorno demonstriranje fizikalnih zakonov. Njegovi žepi so bili polni raznovrstnih predmetov, koristnih pri poskusih, ki jih je včasih kar med razgovorom pokazal. Včasih je kar v žepu prinesel vse, kar je potreboval za poskuse pri predavanjih, čeprav poskusov ni bilo malo, saj je bil velik sovražnik poučevanja fizike s kredo na tabli.

Na TSŠ je zgledno izpopolnil fizikalno zbirko učil. Veliko se je ukvarjal s takratnimi problemi eksperimentalne fizike in je sledil naglemu razvoju novih področij. Bil je med pionirji naše radiotehnike. Kljub obsežnemu strokovnemu znanju pa je bil skoraj pretirano skromen in v tem je vzrok, da je ostal marsikateri njegov poskus neopisan in poskusna naprava skrita ter da nam ni zapustil kakega večjega dela. V času svojega bivanja v Idriji je v Izvestjih tamkajšnje realke priobčil naslednje razprave: Nekaj fizikalnih poizkusov (1906), Donesek k vprašanju o koncu sveta (1908), Poljudna razlaga induktivnega toka (1909), Nekaj novih poizkusov iz fizike (1910), Izpopolnjeno samodelno električno menjalo (1911), Fizikalne drobtine (1912). Objavljal je tudi poljudnoznanstvene članke, kjer je bilo le mogoče: v Zvončku, Vodnikovi pratiki, Domačem prijatelju, Naši radosti, Odmevih, itd. V Zvončku so izšli naslednji članki: Kako je Jurček odkril nekaj že davno znanega (1909), Motor

na milo (1929), Natega (1929), Ozmoza (1929), Pokazati ti hočem nekaj zanimivega (1930), Pogovor o molekularnih silah (1931). V Vodnikovi pratiki: Nikola Tesla (1927), Perpetuum mobile (1928), Vrtinci (1930). V Domačem prijatelju: Rešitelj (1929) in Kako se je Jurček povražil (1929). Ta dela kažejo, da je profesor Nardin izkoristil vse skromne možnosti, ki so mu bile dane za objavljanje fizikalnih člankov, saj si je pri svojem delu vedno prizadeval, da bi ljudje razumeli pojave, ne pa slepo verjeli. Profesorju Reisnerju je pri njegovem pisanju Fizike bistveno pomagal s tem, da mu jo je pregledal in popravil.

Tudi prvi začetki letalstva pri nas so povezani z njegovim imenom. Eden prvih slovenskih letalcev, Goričan Edvard Rusjan, je bil v stalnih stikih s profesorjem Nardinom in je hodil k njemu v Idrijo po strokovne nasvete. Znano je, da je prof. Nardin v Idriji po lastni zamisli izdelal brezmotorno letalo. Značilno za njegovo razgibanost v stroki je bilo tudi v tem, da je v Idriji leta 1908 zgradil na svoje stroške zelo dobro opremljen seizmograf.

Profesor Nardin je bil človek, ki je fiziko temeljito poznal in mu je kot stroka pomenila življenje. Svoje navdušenje za fiziko je znal posredovati tudi drugim bodisi pri predavanjih bodisi v razgovorih. Ta njegova lastnost nam bo ostala vedno v spominu, saj niso pogostni ljudje, ki jim je stroka vse. Kako bi še vedno potrebovali profesorja Nardina, da bi nas učil in navduševal za eksperimentalno fiziko, ki ima danes veliko lepše pogoje in možnosti razvoja kot prejšnje čase.

Profesorja Nardina so vsi spoštovali in cenili zaradi njegovega obsežnega znanja, široke razgledanosti, duhovitosti ter izredno naprednih nazorov. Med profesorji je veljal za odličnega in odkritega tovariša. Vsi, ki smo ga poznali, se ga bomo spominjali s hvaležnostjo in s spoštovanjem.

Jože Povšič

ŠOLA

OSNUTEK PREDMETNIKA IN UČNEGA NAČRTA MATEMATIKE ZA GIMNAZIJE

Zvezni zavod za proučevanje šolstva in prosvetnih vprašanj je sestavil osnutke Dokumenta o gimnaziji, predmetnika in učnih načrtov za posamezne predmete bodoče reformirane gimnazije.

V Dokumentu določa položaj gimnazije v novem šolstvu, njen značaj in naloge, organizacijo pouka, vzgojno-izobrazbena področja, predmetnik in učne načrte, organizacijo notranjega življenja in dela, njeno povezavo z družbenim okoljem ter kadrovske in materialno-tehnične pogoje.

Pouk bo organiziran v treh komponentah: v splošnem pouku, izbirnem pouku in svobodnih aktivnostih.

Splošni, za vse dijake obvezni pouk zajema predmete in snov, ki naj bi bila skupna svojina vseh bodočih absolventov gimnazije.

Izbirni pouk pa omogoča in nalaga vsakemu dijaku določeno orientacijo v skupino družbenih ved, jezikov, v matematično ali biološko skupino in mu obenem predpisuje v dveh ali treh predmetih dopolnilne ure in dopolnilni program. Ta pouk bi se na večjih šolah združil s splošnim poukom na ta način, da bi se dijaki vsakega razreda združili v oddelke po svojih interesih, na manjših šolah pa bi bil izbirni pouk posebej v ustreznih skupinah.

Programi splošnega pouka vsebujejo po mnenju sestavljalcev tisto snov, ki ima največji vzgojni in izobrazbeni pomen za mladega človeka, ne obremenjujejo pa ga s snovjo izbirnega pouka, ki jo bodo potrebovali le oni, katerih nadaljnji študij bo vezan s predmeti v izbirnem pouku.

Matematika je v splošnem pouku predvidena v vseh štirih letnikih s po tremi urami na teden, v izbirnem pouku pa samo v matematični skupini še s po tremi urami na teden. »Samo« je rečeno zato, ker bi bilo gotovo primerno, da bi bila matematika v neki meri zastopana tudi v biološki skupini, morda vsaj z eno uro na teden, ki jo ima ta skupina manj od drugih skupin. V biološki skupini sta namreč tudi fizika in kemija, katerih temeljitejše obravnavanje bo s skromnim obsegom matematike iz splošnega pouka gotovo zelo oteženo.

V načelih pouka matematike je poudarjena njena kulturna in praktična vrednost za napredek človeštva v vseh časih, zlasti pa dandanes, razen tega pa tudi zasluge matematike za vzgojo svojstvenega stila mišljenja, ki je potreben vsakomur, posebno pa tistemu, ki je znanstveno in tehnično aktiven.

Kot vzgojno (morda bi bilo bolje reči vzgojno-izobrazbeno) nalogo matematike poudarja osnutek gojitev oblik logičnega mišljenja, racionalnosti v izražanju misli, opazovalne in predstavljalne sposobnosti za konkretno in abstraktno, koncentracije, samostojnosti, vztrajnosti, urejenosti dela in kritičnosti.

Praktične zahteve, ki jih omenja Načrt za pouk matematike, pa so: uporabnost pridobljenega znanja za tehnično, gospodarsko in socialno družbeno življenje ter za uspešno nadaljevanje študija na univerzi.

Snov za splošni pouk naj opravi svojo vzgojno vlogo, tu pridobljeno znanje pa bo zadostno za navadno praktično življenje in za tak nadaljnji študij, kjer matematika ni pomožna veda.

Snov za izbirni pouk pa naj pripravi dijake za študij matematike same in tistih ved, ki jim je matematika pomožni predmet. Pri izbirnem pouku naj se doseže taka raven, da bo prehod na visokošolski pouk neoviran v metodičnem in vsebinskem pogledu. Program naj bo primerno moderniziran.

Osnutek programa je orientiran bolj na numerično analizo in grafične metode; to dvoje je bilo v dosedanjih programih premalo upoštevano. V pouku analitične geometrije je manj poudarka na stožernicah, več pa na bistvu analitične metode. Moderniziran je tudi pouk planimetrije in stereometrije.

Program za splošni pouk je v primeri z dosedanjimi programi precej skrajšan. Reducirano je razstavljanje polinomov na faktorje, operacije z algebrajskimi ulomki, korenjenje, trigonometrične transformacije, popolnoma pa so opuščene diskusije enačb in sistemov enačb; izpuščeni so tudi neki tipi enačb, logaritmi trigonometričnih funkcij in analitična geometrija kot posebna disciplina. Namesto tega pa je v algebri bolj poudarjena grafična metoda.

Program za izbirni pouk pa je širši od dosedanjega programa matematike. V njem so osnove infinitezimalne metode in opisne geometrije (pri nas je bilo sicer to že sedaj). Na novo so prišle v program tudi osnove kombinatorike (pri nas tudi že doslej), ciklometrične funkcije, nekateri pojmi iz teorije polinomov in enačb, grafično reševanje enačb tretje in četrte stopnje. Analitične geometrije v današnjem smislu besede ni niti tu več, zato pa sta poudarjeni grafična in analitična metoda v geometriji.

V algebri je zajeta snov iz aritmetike, algebre in analize. V prvem razredu so poudarjene lastnosti operacij z namenom, da se na teh zasnujejo operacije z monomi in polinomi. Potenciranje, korenjenje in logaritmiranje je razdeljeno na prve tri razrede.

Po fuzionističnem načelu sta algebra in geometrija povezani čim tesneje z grafično metodo v algebri in analitično v geometriji. Precejšen poudarek je na grafičnem predstavljanju funkcij in grafičnem reševanju enačb.

Le v izbirnem programu je detajlno analitično obravnavanje premice in krožnice, pri poglavju o geometrijskih mestih pa so poudarjene glavne lastnosti elipse, hiperbole in parabole. Sestavljalci mislijo, da bi na ta način absolvent gimnazije le dobil v dovoljni meri vpogled v metodo koordinat.

V infinitezimalnem računu sega program le tako daleč, da dobi dijak vpogled v limitno metodo in spozna še pojem odvoda in določenega integrala kot ploščine.

V programu geometrije je izvršena fuzija planimetrije in stereometrije, da se tako po mnenju sestavljalcev omogoči pouk na osnovi (Kleinove) transformacijske metode že v srednji šoli.

*

Gotovo je težko delo izbrati in tako sestaviti program iz matematike, da bi v vseh ozirih ustrezal potrebam, ki jih naša sodobnost s stremljenjem po hitrem tehničnem razvoju in socialističnem družbenem gospodarstvu postavlja na pouk matematike. Tem težja je ta naloga, ker naj bo izbor gradiva seveda tudi tak, da bo pouk matematike čim bolje odigral svojo vzgojno in izobrazbeno vlogo.

Ideja razdelitve pouka matematike na splošni in izbirni pouk je posebna oblika realizacije predlogov, ki so jih matematiki sami večkrat dajali na svojih kongresih, da bi se 7. in 8. razred bivše gimnazije razvejila vsaj v prirodoslovno in humanistično vejo. Razvejitev je sedaj pestrejša, razen tega pa tudi izredno zgodnja, ker pada v dobo, ko večina dijakov še ne kaže določne orientacije.

Predloženi program bo moral najprej pokazati v praksi, ali je v načrtu splošnega pouka zbrano ravno tisto gradivo, ki je za vzgojno-izobrazbeno vlogo matematike najvažnejše in obenem najbolj koristno in potrebno za vsakdanjo prakso splošnega izobraženca. Pri tem pa je seveda važno, da je program koordiniran s predmeti, ki matematiko potrebujejo kot pomoč.

Dobro je prav gotovo, da je v prvem razredu več poudarka na lastnostih računskih operacij, ki so se sicer obravnavale že na nižji stopnji, kjer pa dijaki zanje še nimajo pravega smisla. Sedaj bodo pa bolje spoznali logično naravo aritmetičnih operacij, morda ravno v tisti meri, ki ustreza potrebam splošne izobrazbe. Lastnosti pa naj bi se obravnavale širše, za racionalna števila.

Škoda je, da je v geometriji odpadla delno aksiomatična metoda obravnavanja, čeprav je dijakom le približno pokazala naravo geometrije kot aksiomatične vede. Predlagana metoda transformacij pravzaprav temelji na njej in daje organsko višji pogled na geometrijo le v tem primeru, če ima človek že primeren pogled na geometrijo kot aksiomatično vedo. Poleg tega pa je tudi transformacijsko metodo možno izvesti v srednji šoli le še bolj okrnjeno kot aksiomatično. Zato je zelo dvomno, ali bo uvedena novost v korist splošno-izobrazbeni funkciji geometrije.

Fuzija planimetrije in stereometrije je pač lepa stara ideja, prinaša pa, kot je že dolgo znano, tudi težave. Podobnost, ki je že zgodaj potrebna v matematiki, fiziki in geografiji, je odrinjena na drugi razred. To gotovo ne bo v korist koordinacije pouka teh predmetov. Vprašanje je, ali odtehtajo metodične prednosti fuzije metodične težave, ki jih prinaša.

Dvomno je, da bo razcepitev operacij potenciranja, korenjenja in logaritmiranja na tri razrede prinesla koristi k boljšemu razumevanju tega gradiva. Prepozno obravnavanje logaritmiranja bo odrinilo to metodo računanja, kakor tudi razumno uvedbo logaritmičnega računala na tretji razred, kar bo gotovo prekasno.

Odpor zoper bolj sistematično obravnavanje stožernic ni umesten, saj spadajo te zaradi svojega pomena v fiziki in praksi nedvomno v splošno izobrazbo. Ni verjetno, da bi dijaki o teh krivuljah lahko dobili kake solidnejše pojme, če se bodo obravnavale kar iz enačbe $ax^2 + by^2 = c$, kjer parabola niti zajeta ni. Smiselno je neko skrčenje in neka preobrazba današnje šolske analitične geometrije, vendar bo ostala sistematika pri stožernicah še vedno važna. Morda bi se lahko to gradivo obravnavalo sintetično v okviru planimetrije in stereometrije. Po drugi strani pa res ni potrebno, da bi se v splošnem pouku obravnavale tude degenerirane stožernice. Saj bi takó nastalo pretirano sistematično obravnavanje stožernic s središčem, pa še na preveč splošni in abstraktni, za dijake manj umevni osnovi.

Pojmi limite, odvoda in določenega integrala so v načrtu obravnavani tako na kratko, da ni mogoče, da bi to prineslo dijakom kako znatno razumevanje teh težkih pojmov in s tem s pridom opravilo svojo izobrazbeno nalogo. Brez neke osnovne uporabe teh pojmov, ki pa v načrtu ni nakazana, pouk ne bo imel pravega smisla.

Ali je res pametno odpraviti iz splošnega pouka vse naloge z diskusijami? Saj je matematika v šoli tista veda, ki naj da dijaku največji delež pri logičnem šolanju in mu v znatni meri izoblikuje sposobnost analiziranja.

Neke osnove iz opisne geometrije naj bi bile tudi v splošnem programu. Saj je zelo važno, da si vsak absolvent gimnazije pridobi dober prostorski pogled in se obenem seznanil z metodo, ki se večkrat uporablja v osnovah tudi v praksi.

V izbirnem programu je najprej napaka v tem, da bi se pri infinitezimalnem računu obravnavali le osnovni pojmi brez uporabe. Uporaba je tisto, kar napravi končno vsako metodo dijaku zanimivo; pri tej metodi je še posebno učinkovita njena moč, ki pa jo je mogoče spoznati le z uporabo. Sami pojmi brez uporabe visijo za dijaka v zraku. Ni odveč poudariti, da tudi nastanek in razvoj te metode slonita na nekaterih perečih matematičnih nalogah, ki so klicale po rešitvi. Primerno bi bilo, da bi se od mnogostranskih uporab obravnavalo vsaj raziskovanje funkcij, posebej še ekstremi, pa tudi nekatere ploščine, prostornine, težišča in vztrajnostni momenti.

V trigonometriji je razveseljivo, da program predvideva uporabo elementov vektorske algebre. K pripravi za adicijske teoreme pa spada poleg projekcije vektorja na os tudi projekcija orientirane daljice z ene osi na drugo os.

Ko ima komisija namen modernizirati pouk matematike, ne bi bilo odveč, če bi se v geometriji obravnavale tudi osnove vektorske algebre in osnovni pojmi prostorske analitične geometrije. Tudi teme kot predočanje diagramov v logaritemskih skalah, diagrami v polarnem koordinatnem sistemu, splošna obravnava diagramov $f(x) + c$, $a \cdot f(x)$, $f(x + m)$, $f(kx)$, $a \cdot f(kx + m) + c$ iz znanega diagrama $f(x)$ bi bile primerne za izbirni pouk. Za to potrebni čas bi se dobil, če bi skrajšali obravnavanje analitične geometrije v ravnini in njeno modernizacijo z vektorsko algebro in morda tudi s kakimi redukcijami pri enačbah.

Znano je, da je Zvezni prosvetni svet obravnavani osnutek vrnil komisiji v predelavo. Zato se nismo pomudili ob njem na ta način, da bi hoteli sistematično obdelati vse njegove vrline in pomanjkljivosti. Naše pripombe naj le opozore, da je opisani osnutek tudi v strokovnem pogledu še precej oddaljen od smotrov, ki se stavljajo na pouk matematike in ki bi z ostalimi faktorji vred mogli znatno zboljšati rezultate matematičnega pouka pri nas.

Francè Ahlin

KAJ SI ŽELIMO OD NOVEGA SREDNJEŠOLSKEGA UČNEGA PROGRAMA ZA FIZIKO?

Zadnji objavljeni osnutki srednješolskih učnih programov (Beograd, Zvezni zavod za proučevanje šolskih in prosvetnih vprašanj, 1958) kažejo, da pri nobenem predmetu ni toliko negotovosti in tavanja kot pri fiziki. Deloma se da to opravičiti z dejstvom, da imamo v poučevanju tega predmeta le malo tradicije in doslej kaj malo uspehov. Kljub temu pa se zdi, da bi bilo negotovosti in zgrešenih korakov nekoliko manj, če bi pri sestavljanju osnutkov porabili, kar je bilo že v dosedanjih učnih programih dobrega, namesto da bi po vsej sili hoteli iznajti nekaj fundamentalno novega.

Izmed dosedanjih učnih programov za fiziko je načrt za Slovenijo, ki ga je l. 1954 izdelala komisija pod vodstvom prof. F. Ahlina, gotovo vreden vsega upoštevanja (Učni načrt za višje razrede gimnazij, Ljubljana, DZS, 1955, str. 116—121). Z revizijo tega programa bi lahko prišli do dobrega novega osnutka, v katerem ne bi bilo toliko spodrsljajev, kakršne upravičeno kritizira prof. Šljivić v svojem članku. Naslednje spremembe bi pa bržčas koristile:

V obveznem delu programa bi bilo treba črtati nekatera manj pomembna in nekatera težja poglavja, kot so na primer proste osi togega telesa, del hidrodinamike, polarizacijo svetlobe, kroglasti kondenzator. Izpadle naj bi tudi razne drobnarije kot n. pr. škripčevje, destilacija, planparalelna plošča ter instrument na mehko železo, ki niso vredne, da bi bile imenovane v programu. Kar se tiče razporeda snovi, pa bi bil tu in tam potreben kak manjši popravek.

Neizprosno je treba paziti na koordinacijo programov iz matematike in fizike. Dosedanji program je tej zahtevi še nekako zadoščal. Edino pri osnovnih pojmih infinitezimalnega računa je program vztrajal pri tradicionalni diskrepanci: Dve leti prej, preden sliši dijak senco tega (v zadnjem razredu), se osnovni pojmi infinitezimalnega računa — čeprav včasih v prikriti obliki — že uporabljajo pri pouku fizike.

Spričo razširjenega prepričanja, da osnovni pojmi infinitezimalnega računa ne spadajo k splošni izobrazbi, se v tem pogledu verjetno še nekaj desetletij ne bo nič spremenilo. Zato pa vsaj ne oropajmo pouka fizike še drugih bistveno potrebnih matematičnih pripomočkov! Ena najhujših napak objavljenega osnutka je ta, da se fizika začenja že v prvem razredu. Dijakom tedaj pojem funkcije še ni domač; o ločnem merilu in o kotnih funkcijah niso še nič slišali. Pri takih pogojih se mehanika poučuje lahko le na nivoju osemletke. Na vsak način je torej treba zahtevati, da se fizika razporedi v 2., 3. in 4. razred (n. pr. 3 + 2 + 3 ure ali raje 3 + 3 + 3, kot je bilo doslej). Za kompenzacijo se kaka ura matematike lahko pomakne v 1. razred.

Tretja in najbolj pereča reforma je redukcija snovi. Vse dosedanje knjige in vsi dosedanji programi so naleteli na soglasen očitek vseh prizadetih in neprizadetih, da je zahtevna snov tako obsežna, da se je povprečen dijak nikakor ne more naučiti, še manj pa, da bi ob koncu zadnjega leta imel pregled čez vso snov. Logični zaključek je ta, da fizike pač ni treba znati. Kdo izmed profesorjev fizike si upa od vseh svojih dijakov na koncu pred maturo zahtevati pregled čez vso predpisano snov?

Nadaljujmo s to logiko! Če fizika povprečnemu dijaku ne daje trajnega pregleda, pouk tega predmeta nima pomena. Torej, odpravimo ga! (Upajmo, da ta predlog ne bo prodrl!)

Zmernejša varianta bi bila, da bi se učna snov toliko zreducirala, da bi jo večina dijakov lahko v resnici odvladala. To naj seveda ne pomeni samo, da bi dijak znal pripovedovati o aparatih ali drdrati izreke, ampak da bi znal v tem reduciranem okviru tudi zanesljivo in samostojno reševati osnovne računske fizikalne naloge. (Brezgojno naj se vpeljejo tudi šolske naloge!) Kakšen bi lahko bil ta reducirani obseg, se vidi na primer iz programa za sprejemni izpit, ki je bil predložen na eni izmed naših tehniških fakultet:

Kandidat naj pozna Newtonove zakone mehanike, energijski zakon, Ohmov zakon, osnovne zakone geometrijske optike, osnove o nihanju in valovanju. Pozna naj najpomembnejše fizikalne količine in enote zanje (tudi enote v sistemu kg-m-sek-A), zlasti naslednje količine: dolžino, ploščino, prostornino, čas, frekvenco, hitrost, pospešek, maso, gostoto, silo, težo, tlak, vrtilni moment, delo, moč, energijo, toploto, temperaturo, specifično toploto, talilno in izparilno toploto, napetost, tok, električno delo, upor. Kandidat mora znati zanesljivo reševati računske naloge z navedenimi količinami.

Tako reducirani program obsega le majhen del tega, kar je n. pr. v Kvaternikovem učbeniku. Izpuščeno je: vrtenje, celotna hidrodinamika, valovna optika, fotometrija, električno in magnetno polje ter celotna atomika, vštevši elektroniko. Ali si kdo upa zagovarjati, da se sme vse to pri obveznem pouku izpustiti? Saj mora danes tudi o atomiki vsak učenec nekaj slišati in ne samo tisti, ki se priglasi k dodatnim specialnim uram iz fizike.

Edina rešitev, pri kateri bi bil volk sit in koza cela, je ta, da se snov, ki jo vsebuje splošno obvezni program, razdeli v dve kategoriji. Manjši del, ki je bistvenega pomena, mora vsak učenec zanesljivo in trajno obvladati, tako kot n. pr. pri matematiki odpiranje oklepajev. Sem spada nemara približno tisto, kar je navedeno v zgornjem predlogu za sprejemni izpit. To znanje naj predstavlja ob vsakem času pogoj za pozitivni uspeh. Vse ostalo, torej hidrodinamika, akustika, velik del optike in elektrike ter vsa atomika, pa spada v drugo kategorijo. To se sicer tudi poučuje in sprašuje (zlasti za boljše ocene), toda nobeno izmed teh poglavij naj ne bi bilo pogoj za biti ali ne biti ob koncu leta.

Kolikor sem informiran, bo v bodoče Svet za prosveto FLRJ določil učni program samo okvirno, medtem ko bodo podrobnosti prepuščene republikam. Iz neznanih razlogov pa je ostalo pri tem, da se bo pouk fizike začel že v prvem razredu. Ali ne bi kazalo to vprašanje in vsebino programa še enkrat temeljito pretresti, in to ob sodelovanju širšega kroga sodelavcev iz vseh republik, preden bi bila sprejeta kaka prenagljena odločitev?

Ivan Kuščer

O PREDLOGU PLANA I PROGRAMA FIZIKE ZA GIMNAZIJE

Z dovoljenjem prof. S. Šljivića, predsednika Društva matematičara i fizičara NR Srbije, objavljamo pripombe Uprave tega Društva k predlogu predmetnika in učnega načrta fizike za gimnazije.

S obzirom na ogromni značaj fizike za današnju civilizaciju i njenu presudnu ulogu u formiranju materijalističkog pogleda na svet i s obzirom na njen karakter koji je uslovljen i time što je ona osnovna nauka za sve prirodne nauke i tehniku, nastavi fizike u reformisanoj srednjoj školi treba dati mesto koje odgovara njezinom značaju. Sadašnje stanje ove nastave svakako iziskuje izvesnu reformu, naročito u pogledu primene nastavnih metoda i materijalne opreme. Medjutim, predloženi plan i program ne samo da ne ide na ruku otklanjanju dosadašnjih nedostataka, nego po našem mišljenju pretstavlja korak u nazad u odnosu na postojeće stanje iz ovih razloga:

1) U predloženom planu reformisane škole u glavnom se vodilo računa o tome da fizika bude zastopljena u svima razredima, pa makar i sa minimalnim brojem časova, a to znači po cenu njezinog svodjenja na rang deskriptivnog, odnosno verbalnog nastavnog predmeta što čini iluzornom i praktično svodi na običnu deklaraciju sugestiju o laboratoriskim vežbama. Svakako pridržavanje ovoga principa pri izradi projekta programa reformisane srednje škole dovelo je do nerealne proporcije pri dodeljivanju broja časova pojedinim predmetima, proporcije, koja nije u skladu sa proporcijom njihovog značaja. Naprimer, odnos broja časova fizike prema broju časova hemije u gimnaziji, koja iznosi 8 : 7, gotovo nigde u svetu nije takav, jer ničim nije opravdan. Nije slučajna tvrdnja niza fizičara novijeg doba da je hemija »fizika atomskog grupisanja«, a to je shvatanje i Engels izrazio.

2) Predloženim planom, usled razvlačenja fizike na sva četiri razreda gimnazije i dodeljivanjem nastavi fizike po dva časa nedeljno, praktično se dovodi u pitanje ne samo izvodjenje laboratoriskih vežbi, nego i primena drugih metoda važnih za nastavu fizike (rač. zadaci, grafički metod podešen zahtevima politehnizovane nastave i dr.). Što se tiče potrebnog predznanja iz fizike u odnosu na nastavu biologije, pri solidno izvodjenoj nastavi fizike u 8-god. školi, učenici će ga imati u potrebnoj meri s obzirom na stvarne zahteve koje biologija postavlja. Slično stvar stoji i u odnosu na geografiju. To se gledište može prihvatiti i u odnosu na nastavu hemije, tim pre, ako se ostane na tome da se hemija zadrži u tri najviša razreda, što praktično onemogućuje potrebnu koordinaciju.

3) Izborna nastava onako kako je postavljena u predlogu po našem mišljenju ne bi bila dovoljno efikasna, niti bi imala onog efekta koji se od nje očekuje, jer se pretežno svodi na proširivanje gradiva uz izlaganje nastavnika, a nedovoljno se aktiviraju učenici koji imaju posebno interesovanje za prirodne nauke.

4) Iz predloženog programa obavezne i izborne nastave vidi se da se fizika praktično ne tretira kao opšteobrazovni predmet, već više kao stručni predmet, jer predloženi program obavezne nastave ne pretstavlja zaokruženu celinu, niti obezbeđuje potrebnu količinu onog znanja ove nauke, koje neminovno mora da postane bitan elemenat kulture savremenog čoveka.

5) U predloženom programu nema konsekventnog sprovođenja pedagoških principa, pa ni princip koncentričnih krugova nije konsekventno sproveden, te su čitave oblasti (hidrostatika i aerostatika, geometriska optika) potpuno izostavljene.

6) Uzajamnim preplitanjem raznih grana fizike i njihovim rasparčavanjem (mehanika, toplota, elektromagnetizam) gubi se bitna karakteristika pojedinih formi kretanja i narušava unutrašnja logička struktura fizike, što nesumljivo smanjuje mogućnost formiranja jedinstvenog naučnog pogleda na svet kod učenika. Radi ilustracije slabosti predviđenog programa navodimo:

Nema u programu, kao što smo već napomenuli, hidromehanike i aeromehanike kao ni geometriske optike, mada je opšte poznat značaj ovih oblasti, kako za potpunije razumevanje, tako i za primenu (politehnizacija!). Mehanika i toplota su isprepletane i razvučene na dva razreda, a elektromagnetizam razbijen takođe na dva dela, od kojih se prvi uči sa mehanikom i toplotom.

U obaveznoj nastavi ne nalazi se, naprimer, jedan od osnovnih pojmova mehanike — rad, ni njegove jedinice, a u elektromagnetizmu treba obraditi rad struje! Ne nalazi se ni trenje, ni Hookov zakon, ni jednačina gasnog stanja. U elektrostatici nema Kulonovog zakona, ni jačine električnog polja, a u elektromagnetizmu se nalazi jačina magnetnog polja! Nema potencijala, a u pogramu je napon! Nema naboja elektrona, a nalazi se specijalni naboj elektrona! Brzina elektromagnetnih talasa nije u programu, kao ni boje tankih lističa! Zakoni zračenja crnog tela ne nalaze se u programu, a nalazi se Plankova teorija! Izvesno gradivo (neka pitanja iz elektronike i atomske fizike i tehnike) pretstavlja suviše usko stručno gradivo, a njega ne treba da bude u programu opšteobrazovne škole.

U pogledu plana i programa fizike Uprava našeg Društva predlaže:

1) Na osnovu naše prakse smatramo kao najcelishodnije da se fizika predaje u II., III. in IV. razredu najmanje sa po 3 časa nedeljno obavezne nastave i 2 časa nedeljno izborne nastave. Ovim predlogom obavezna nastava dobila bi jedan čas više i bila bi kondenzovana na tri razreda, čime bi se dobila dvostruka korist. Ovaj naš zahtev čak smanjuje ukupan broj časova obavezne i izborne nastave za 1 čas, ali smatramo da bi na ovaj način nastava bila efikasnija i da bi dala veći doprinos obrazovanju i vaspitanju učenika.

2) Smatramo da izborna nastava treba da se zasniva na sasvim drugoj osnovi, naime da ona ne treba da pretstavlja proširivanje programa obavezne nastave uz izlaganje nastavnika, već produbljivanje programa kroz seminare učenika, dopunske laboratoriske vežbe i kroz rešavanje zadataka iz fizike. Takvim načinom rada učenici bi bili ne samo jače aktivirani, nego i više upućeni na metode rada u fizici i na samostalno logičko razmišljanje i zaključivanje svojstveno ovom predmetu.

3) Program fizike koji prilažemo, po našem mišljenju treba da se zasniva na sledećim principima: a) zaokruženost i potpunost programa kao celine, b) dosledno sprovođenje jednog izgrađenog pedagoškog principa, c) prirodan redosled građe sa jačom logičkom strukturom, d) obavezna obrada računskih zadataka uz odgovarajuće partije i obavezne laboratoriske vežbe sa jednim od tri predvidjena časa nedeljno.

Na osnovu svega ovog smatramo da se predloženi plan i program ne bi mogao nikako da prihvati. Sa svoje strane predlažemo plan i program za koji smatramo da bi bio bolja osnova za diskusiju. Uz program predlažemo spisak laboratoriskih vežbi, odabranih tako da ne iziskuju preterane materijalne izdatke, a da zadovolje i potrebe politehnizovane nastave i s toga sasvim podesnih da se izvođenje može postaviti kao rigorozna obaveza. Ovakvim zahtevom stvara se obaveza za vse odgovorne faktore da se pobrinu za opremu, potrebnu za izvođenje ovih vežbi. Bez obaveznog uvođenja laboratoriskih vežbi smatramo da reforma neće doneti nikakvih bitnih promena u nastavi fizike.

NOVE KNJIGE

Fran Jeran-Oton Sajovic: Osnove opisne geometrije, 279 strani, 258 slik. Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1958.

Ko je bil pred tremi leti vpeljan v 5. in 6. (zdaj 1. in 2. l.) razred gimnazij pouk opisne geometrije, je bilo treba pristopiti k realizaciji dveh zahtev. Srednješolske zavode je bilo treba opremiti z nujno potrebnimi učili ter posredovati dijakom in profesorjem moderen učbenik s primerno zbirko sodobnemu pouku ustreznih vaj. Kajti naš prvi in do tedaj edini srednješolski učbenik osnov opisne geometrije (F. Jeran, Osnovni pojmi opisne geometrije, Ljubljana 1920) ni niti najmanj ustrezal novim zahtevam ter bil vrh tega že zdavnaj razprodan. K sreči je prof. Jeran v letih pred svojo dokaj prerano smrtjo malodane dokončal precej obsežen koncept osnov opisne geometrije za samouke, v katerega je organsko spojil obilico smotrnih in metodsko neoporečnih vaj. Ta koncept je bistveno skrajšal, preformuliral, dopolnil ter ga za šolo preoblikoval prof. Sajovic v učbenik, ki smo ga resnično veseli.

Delo obsega: pravokotno in poševno projekcijo geometričnih elementov in likov; točko, premico, ravnino, krog; prizmo, piramido, valj, stožec in kroglo z ustreznimi preseki in senčenjem pri vzporedni razsvetljavi. Posebna zasluga predelave je, da sta na primernem mestu vnesena v knjigo in nato vseskozi z besedilom spojena afiniteta in kolineacija.

Opisna geometrija ne goji le dandanes nujno potrebnega »mednarodnega jezika« tehnikov , temveč skrbi za višjo izobrazbo prostornega predstavljanja in s tem poglablja zlasti pouk geometrije. Zato je prav, da jo zlasti v osnovah obvlada sleherni inteligent. Z omenjeno knjigo, ki v nji pogrešam le dvoje kratkih poglavij o pravokotni aksonometriji in o perspektivi, smo dobili končno kolikor toliko celotne osnove opisne geometrije. Z njo bodo mogli profesorji na dokaj preprost in znanstveno neoporečen način vpeljati srednješolca v to lepo in zanimivo vedo. Saj je prav posebna odlika knjige njena metodičnost. Škoda le, da je za uporabljen papir knjige kakih pet klišejev premajhnih. Mimo te, mogli bi reči lepotne napake, je delo stvarno in jezikovno skrbno sestavljen učbenik, ki bo gotovo rodil v učencih del tiste velike ljubezni, ki sta ga avtorja vložila v delo.

Miroslav Adlešič

Prof. dr. Dragoslav S. Mitrinović: Zbornik matematičkih problema sa prilozima i numeričkim tablicama I in II. Nolit, Beograd, I. del 1957, II. del 1958.

Prvi del te izredno bogate zbirke matematičnih problemov obsega probleme in naloge iz različnih področij matematike. Po precejšnjem številu uvodnih problemov, ki spadajo v razna področja, podaja avtor probleme in naloge iz naslednjih poglavij: algebra, analitična geometrija, diferencialni in integralni račun, diferencialne enačbe, kompleksna števila in kompleksne funcije. V prilogi obravnava še nekatere teme: Vsote potenc prvih n naravnih števil, o nekih relacijah, ki se ohranjajo, če v njih permutiramo operatorje, o neki Diofantski enačbi, o Stirlingovih številih, o maksimalnih in minimalnih operacijah, o neki nedoločeni diferencialni enačbi, o neki parcialni enačbi s konstantnimi koeficienti, o neki determinanti Escherichovega tipa, o neki linearni parcialni diferencialni enačbi, ki ima lastnost Clairautove enačbe. Za zaključek prvega dela je dodan še skromen atlas krivulj in 13 numeričnih tabel elementarnih funkcij.

Drugi del zbirke obsega probleme in naloge iz naslednjih poglavij: determinante in matrice, vrste, kompleksna števila in teorija funkcij kompleksne spremenljivke, navadne in parcialne diferencialne enačbe. Kot zaključek zbirke nalog je dodal avtor nekatere rešene naloge iz raznih področij.

V šestih prilogah je obravnaval naslednje teme: o neki novi varianti integriranja diferencialnih enačb z integrirajočim faktorjem, asimptotična formula za Besselove funkcije, o neki nedoločeni diferencialni enačbi, o neki linearni diferencialni enačbi s konstantnimi koeficienti, ki ima lastnost Clairautove enačbe, karakteristični polinom in karakteristične vrednosti dane matrike.

Delu so dodane še zbirke nalog dveh drugih avtorjev. Dr. Dobrivoj Mihailović je prispeval zbirko nalog iz vektorske analize, prof. Jože Ulčar pa zbirko nalog iz diferencialne geometrije.

Numerične tabele obsegajo 12 neelementarnih funkcij.

Glede izbora nalog je zbirka zelo bogata in pestra ter je sestavljena z največjo skrbnostjo in tehtnostjo; tudi z matematičnega vidika je sestavljena povsem neoporečno. Zaradi teh lastnosti zasluži zbornik vse priznanje in pohvalo.

Ob izidu zbornika bi vendarle omenili neko okoliščino, ki se sicer ne tiče strokovne ocene dela, pač pa neke misli, ki jo je avtor izrazil v predgovoru II. dela in ki zadeva problematiko pouka matematike na tehniških fakultetah.

V predgovoru se izjavlja avtor takole: »Četudi je zbornik namenjen v prvi vrsti slušateljem tehniških fakultet, so v njem samo ‚čisti matematični problemi', ker morajo slušatelji tehniških fakultet v splošnih tečajih pridobiti potrebno matematično kulturo.«

Avtor omenja, da je tako stališče v skladu z modernimi naziranji o pomenu matematike na tehniških fakultetah. Pravilnost takega stališča pa je danes gotovo vsaj še sporna. Po našem mnenju ni priporočljivo tako načelno in čisto dosledno odklanjanje vsakršne povezave matematike s tehniškimi problemi v zbirki nalog, ki naj bo namenjena v prvi vrsti slušateljem tehniških fakultet.

Strinjamo se z avtorjem, da mora dati pouk matematike na tehniških fakultetah čim več matematične kulture; toda za tehnične fakultete je to premalo. Na teh fakultetah je treba tudi pokazati možnost uporabe matematike pri obravnavanju raznih tehniških problemov. Po našem mnenju so ravno dobri primeri in vaje tista vez, ki naj druži na tehniških fakultetah poznavanje teoretične matematike z njeno uporabo v tehniki. Na takih primerih in vajah utrjuje slušatelj na prvi strani svoje matematično znanje, na drugi strani pa ga že uporablja pri potrebah svoje stroke.

Alojzij Vadnal

Dr. Vladimir Vranić: Vjerojatnost i statistika. Tehnička knjiga. Zagreb 1958.

Delo je razdeljeno na štiri dele, med katerimi sta pa bistvena prva dva dela, in sicer verjetnostni račun in matematična statistika, medtem ko obsegata druga dva dela razne dodatke in dopolnitve.

V prvem delu začenja avtor z obravnavanjem verjetnostnega računa na kolikor mogoče enostaven in razumljiv način; pri tem obdela, izhajajoč iz apriorne in aposteriorne definicije verjetnosti, računanje verjetnosti sestavljenih dogodkov in pojem srednje vrednosti. Ta del snovi je podan elementarno in lahko razumljivo, ker je avtor odložil na poznejše obravnavanje vso teore-

tično problematiko v zvezi z osnovami verjetnostnega računa in v zvezi z njegovo uporabo v statistiki. To problematiko obravnava šele tedaj, ko si je pridobil bralec že nekoliko znanja o verjetnostnem računu in ko že lahko začuti potrebo po njegovi strožji utemeljitvi. Sredino prvega dela posveča torej avtor teoretični utemeljitvi verjetnostnega računa, kar mu omogoči v drugi polovici tega dela, da eksaktno razpravlja o verjetnosti ponavljajočih se dogodkov, o Gaussovem integralu, o geometriji verjetnosti in o slučajnih spremenljivkah.

V drugem delu obravnava avtor razna področja matematične statistike. Potem ko odpravi na kratko momente frekvenc, obdela zelo natančno in izčrpno naslednje distribucije: binomsko, normalno, Poissonovo, Pearsonove in gama. Vsako distribucijo obdela deloma zase samostojno, deloma pa s pomočjo karakterističnih funkcij. V poglavju o korelacijah navaja dovolj podrobno in izčrpno linearno, nelinearno, multiplo in parcialno korelacijo. V poglavju o teoriji vzorčenja obdela najprej znani centralni limitni teorem, nato pa naslednje teste: χ^2-test, Studentov test in Fisherjev z-test.

V tretjem delu podaja avtor na kratko kot dodatek kombinatoriko, metodo najmanjših kvadratov in teorijo pogreškov.

Četrti del je pravzaprav priloga k celotnemu delu. Tu so ponatisnjene tri avtorjeve razprave, ki so bile že priobčene v našem znanstvenem časopisju in sicer: »O pojmu verjetnosti«, »Statistične zakonitosti v naravi« in »O statističnih metodah«. V teh razpravah najde bralec obrazložena nekatera avtorjeva naziranja o osnovah verjetnostnega računa, zlasti pa poglavje o njegovi povezavi s statistiko. Avtor se sicer v uvodu opravičuje, da v teh dodatkih ponavlja nekaj misli iz prejšnjih delov, vendar pa tako ponavljanje ne moti, ker je po obliki, po stilu in po cilju podajanja bistveno različno od prejšnjega.

Delo je pisano z vso potrebno matematično natančnostjo, je pa vsaj na nekaterih mestih precej zahtevno glede matematičnega predznanja. V knjigi, ki je učbenik verjetnostnega računa in matematične statistike, bo našel bralec prvo zaokroženo sliko teh področij. Tekst bogato ilustrirajo številni primeri in zbirke nalog z rešitvami.

Delo je lep in neobhodno potreben doprinos k jugoslovanski matematični literaturi ter je pravzaprav prvo delo te vrste pri nas.

A. Vadnal

VPRAŠANJA

NALOGA ŠT. 3

Funkcija $f(x) = \cos x$ ustreza enačbi

$$f(2x) = 2f^2(x) - 1$$

Poišči vse enolične in zvezne rešitve te funkcionalne enačbe, ki so za $x = 0$ odvedljive!

4. IDEALNA ZVEZDA

Predstavljajmo si zvezdo, ki bi bila v celoti narejena iz idealnega plina! Plin naj miruje in naj ima ves enako temperaturo! Kako je porazdeljena masa zvezde? (Kako pojema gostota, če gremo od središča navzven?) Posebej izračunaj tisto rešitev problema, pri kateri je gostota v središču končna! Ali obstaja rešitev s končno celotno maso?

ODGOVORI

ODGOVOR NA VPRAŠANJE ŠT. 8 (V. ŠT. 4)

Naloga se glasi: Dokaži, da funkcija $\cos x\pi$ zavzame na intervalu $0 \leqq x \leqq 1$ racionalne vrednosti le za naslednje racionalne x-e: $0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1$.

Vzemimo, da je funkcija $\cos x\pi$ pri nekem racionalnem x-u, n. pr. pri $x = r$, racionalno število, torej ulomek $\frac{p}{q}$. Ta ulomek naj bo že okrajšan, kolikor se da. Tedaj sta p in q celi, tuji si števili. Lahko vzamemo, da je q pozitivno število. Ker je vrednost funkcije kosinus zmeraj absolutno pod 1, velja tudi $|p| \leqq q$. Torej

$$\cos r\pi = \frac{p}{q} \tag{1}$$

Izračunajmo sedaj $\cos 2r\pi$!

$$\cos 2r\pi = 2\cos^2 r\pi - 1$$

Če upoštevamo enačbo (1), dobimo

$$\cos 2r\pi = \frac{2p^2}{q^2} - 1 \tag{2}$$

Iz te enačbe vidimo, da je $\cos x\pi$ pri $x = 2r$ tudi ulomek, ki pa ima večji imenovalec, razen če ni $q = 1$ ali $q = 2$. Če ta primera izvzamemo, sledi iz enačbe (2), da je tudi $\cos 2^k r\pi$ ulomek ($k = 2, 3, 4, \ldots$), ki ima pri večjem k večji imenovalec. Ker pa je r ulomek, n. pr. $\frac{m}{n}$, zavzame $\cos 2^k \frac{m}{n}\pi$ kvečjemu $2n$ med seboj različnih vrednosti, saj je kosinus periodična funkcija s periodo 2π. To pa je v nasprotju s prejšnjo ugotovitvijo, da se imenovalci z naraščajočim k stalno večajo.

Če je $q = 1$, je $p = \pm 1$. To velja pri $r = 0$ in $r = 1$. Če pa je $q = 2$, je tudi $p = \pm 1$. Tem vrednostim pa ustrezajo $r = \frac{1}{3}$ in $r = \frac{2}{3}$. Ostane nam še zadnja izjema, ko je $p = 0$. Tedaj je q lahko poljuben in $r = \frac{1}{2}$.

Drugih racionalnih vrednosti funkcija $\cos x\pi$ pri racionalnem x ne more zavzeti.

Tudi funkcija $\sin x\pi$ ima pri racionalnem x le nekaj racionalnih vrednosti. Dobimo jih iz enačbe $\sin r\pi = \cos(r - \frac{1}{2})\pi$.

Zvonimir Bohte

ODGOVOR NA VPRAŠANJE ŠT. 3 (LETNIK V)

Tvrdnju ne bi bilo teško dokazati direktno integracijom. Međutim, bit će ljepše, ako dokaz provedemo elementarnijim sredstvima. To ćemo učiniti u nekoliko koraka:

1. Uočimo najprije, da je srednja vrijednost ploštine ortogonalne projekcije ravnog lika proporcionalna ploštini tog lika. (Ovo je geometrijski evidentno, a može se lako i strogo dokazati prekrivanjem lika sve finijom kvadratnom mrežom i graničnim prijelazom.) Odatle izlazi, da je omjer ploštine ravnog lika i srednje vrijednosti ploštine njegove ortogonalne projekcije konstantan broj $\varkappa$.

2. Razmatramo li zatvoreni konveksni poliedar i računamo li ploštinu njegove ortogonalne projekcije dvostruko, bit će ova jednaka zbroju ploština projekcija njegovih pobočaka. (Uoči, da ovdje bitno iskorištavamo pretpostavku o konveksnosti poliedra!) Srednja vrijednost tog zbroja mora u ovome slučaju očito biti jednaka zbroju srednjih vrijednosti sumanada (koje su prema 1. jednake ploštini odgovarajuće pobočke, podijeljenoj s $\varkappa$), pa je omjer oplošja poliedra i dvostruko uzete srednje vrijednosti njegove ortogonalne projekcije jednak $\varkappa$. Znači:

$$\lambda = \frac{\text{oplošje poliedra}}{\text{srednja vrijednost proj.}} = 2\varkappa.$$

3. Bilo koje (omeđeno) konveksno tijelo možemo po volji točno aproksimirati opisanim tangencijalnim poliedrom. Graničnim prijelazom odatle izlazi, da je za sva konveksna tijela λ isti broj, dakle jednak 4, jer je toliko kod kugle.

Generalizacija. Posve analognim zaključivanjem uviđamo, da vrijedi ovaj općenitiji teorem:

Ako je O_n $(n-1)$-dimenzionalno oplošje n-dimenzionalnog konveksnog tijela T_n, a V_{n-1} srednja vrijednost $(n-1)$-dimenzionalne ortogonalne projekcije od T_n na $(n-1)$-dimenzionalnu hiperravninu, bit će $\lambda_n = O_n : V_{n-1}$ konstanta za sve n-dimenzionalne T_n.

Vrijednost od λ_n dobivamo najlakše računajući ga za n-dimenzionalnu jediničnu hipersferu S_n. Poznate formule ili jednostavni račun (siječemo li S_n paralelnim $(n-1)$-dimenzionalnim hiperravninama, izlazi

$$V_n = 2\, V_{n-1} \int_0^{\pi/2} \cos^n \vartheta \, d\vartheta$$

dok u drugu ruku rastav od S_n na koncentrične ljuske vodi do $V_n = O_n/n$) daju

$$\lambda_n = 2\, n \int_0^{\pi/2} \cos^n \vartheta \, d\vartheta$$

Prema tome je za parno n, $\lambda_n = (n-1)!\,\pi/2^{n-2}\,[(\frac{1}{2}n-1)!]^2$, a za neparno n, $\lambda_n = 2^n\{[\frac{1}{2}(n-1)]!\}^2/(n-1)!$ Posebno je $\lambda_2 = \pi$, $\lambda_3 = 4$, $\lambda_4 = \frac{3}{2}\pi$.

Napomena. Iz dokazanog teorema neposredno slijede Barbierovi stavci za konveksne likove:

I. Konveksni lik konstantne širine b ima opseg $b\pi$.

II. Ako svi pravokutnici, opisani konveksnom liku, imaju isti opseg s, opseg lika iznosi $\frac{1}{4}s\pi$.

Vladimir Devide, Zagreb

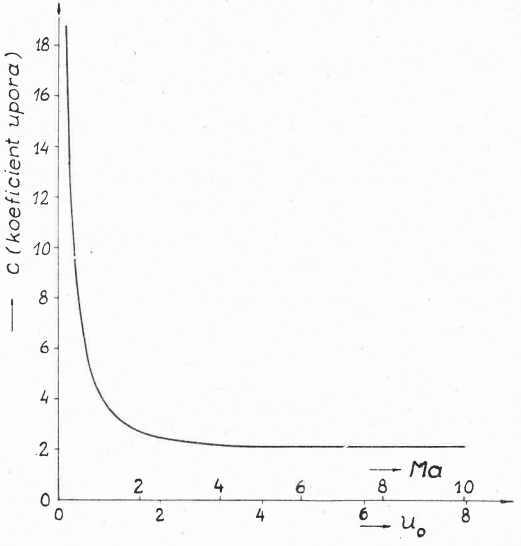
UPOR SATELITA

(Še en odgovor na vprašanje št. 1 iz VI. letnika)

Kolikšen je upor kroglastega satelita v zelo razredčenem zraku? Gostota zraka naj bo tako majhna, da je prosta pot molekul velika v primeri s premerom satelita.

Vzemimo, da je površina satelita idealno gladka, tako da se molekule elastično odbijajo! Nadalje predpostavimo, da je porazdelitev hitrosti molekul po smereh izotropna! Gibanje slatelita te porazdelitve ne pokvari, saj je prosta pot molekul velika v primeri z razsežnostjo krogle.

Na prostorninsko enoto imamo n molekul z maso m. Polmer satelita označimo z r, njegovo hitrost pa z $\mathbf{v}_0$. Iščemo celotno gibalno količino, ki jo molekule, ki trčijo ob satelit, oddajo temu na enoto časa. Koordinatni sistem (x, y, z) naj se giblje s kroglo! Orientiramo ga tako, da kaže os z v smeri



gibanja satelita. Vzemimo na satelitu ploskovni element $dS = r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$, pri čemer je ϑ polarni kot proti osi z! Izračunajmo silo, s katero deluje plin na ploskev dS!

Za opazovalca, ki miruje v plinu, ima neka molekula hitrost $\mathbf{v}$. Relativna hitrost glede na satelit je $\mathbf{v} - \mathbf{v}_0$. Če trči ta molekula ob omenjeno ploskvico, se spremeni samo pravokotna komponenta gibalne količine. Potrebujemo torej projekcijo relativne hitrosti na ploskvino normalo, to je $v' + v_0 \cos \vartheta$, če je v' projekcija »absolutne« hitrosti $\mathbf{v}$. Projekcijo v' štejmo kot pozitivno, če je obrnjena proti krogli!

Najprej vzemimo, da imajo vse molekule enake hitrosti, in izračunajmo, kolikšno gibalno količino na enoto časa dobi satelit zaradi prožnih trkov z molekulami zraka! Na ploskvico dS prileti v enoti časa $ndS\,(v' + v_0 \cos \vartheta)$ molekul, ki oddajo tej ploskvici gibalno količino $2\,nmdS\,(v' + v_0 \cos \vartheta)^2$. Seveda

velja to samo, če je $v' + v_0 \cos \vartheta$ pozitiven, kajti drugače molekula sploh ne trči, ampak uide krogli. Projekcija tako izračunane sile na smer gibanja satelita je

$$dF = 2\, nmdS\, (v' + v_0 \cos \vartheta)^2 \cos \vartheta \tag{1}$$

Sedaj upoštevajmo, da imajo molekule še različne hitrosti! Verjetnost, da ima komponenta v' vrednost med v' in $v' + dv'$, je:

$$w\,(v')\, dv' = (m/\, 2\, \pi\, kT)^{\frac{1}{2}} \exp\, (-\, mv'^2/2\, kT)\, dv' \tag{2}$$

pri čemer je k Boltzmannova konstanta in T absolutna temperatura. Da dobimo celotno silo (to je upor), moramo pomnožiti izraz (1) z verjetnostjo (2) in integrirati najprej po intervalu hitrosti $-v_0 \cos \vartheta < v' < \infty$ in potem po vsej krogli. Kot diferencial ploskve vzamemo krogelni pas med ϑ in $\vartheta + d\vartheta$, torej $dS = 2\, \pi\, r^2\, d\, (\cos \vartheta)$. Zaradi krajše pisave vpeljemo $(mv'^2/2\, kT)^{\frac{1}{2}} = u$ in $(mv_0^2/2\, kT)^{\frac{1}{2}} = u_0$ ter $4\, \pi\, nmr^2\, (m/2\, \pi\, kT)^2 = b$. Sila upora je torej enaka:

$$F = b \int_{-1}^{+1} [\int_{-u_0 \cos \vartheta}^{\infty} (u + u_0 \cos \vartheta)^2 \exp\, (-u^2)\, du]\, \cos \vartheta\, d\, (\cos \vartheta) \tag{3}$$

Vpeljimo še $\cos \vartheta = x$ ter razrešimo oklepaje v enačbi (3)! Enostaven račun da:

$$F = \frac{b}{2u_0^2} \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, \Phi\, (u_0) - u_0 \exp\, (-\, u_0^2) \right\} + b\, \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^1 \Phi\, (u_0\, x)\, x dx\, +$$

$$+ \sqrt{\pi}\, bu_0^2 \int_0^1 \Phi\, (u_0\, x)\, x^3\, dx \tag{4}$$

pri čemer smo uporabili običajno zaznambo za Gaussov integral:

$$\Phi\, (t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^t \exp\, (-\, u^2)\, du.$$

Z integracijo per partes dobimo končno

$$F = c \cdot \tfrac{1}{2}\, \varrho\, v_0^2 \cdot \pi\, r^2 \tag{5}$$

pri čemer je c koeficient upora:

$$c = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{u_0^4} \left\{ (2\, u_0^4 + 2\, u_0^2 - \tfrac{1}{2})\, \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, \Phi\, (u_0) + (u_0^3 + \tfrac{1}{2}\, u_0) \exp\, (-\, u_0^2) \right\} \tag{6}$$

Posebej si oglejmo dva limitna primera! V primeru, da je hitrost satelita zelo velika, limitira Gaussov integral $\Phi\, (u_0)$ proti 1, $\exp\, (-\, u_0^2)$ pa proti 0:

$$\lim_{u_0 \to \infty} c = \lim_{u_0 \to \infty} \frac{1}{u_0^4}\, (2\, u_0^4 + 2\, u_0^2 - \tfrac{1}{2}) = 2 \tag{7}$$

V nasprotnem primeru, ko je hitrost satelita majhna, pa razvijemo Gaussov integral in eksponentno funkcijo v vrsto. Dobimo:

$$c = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{8}{3} \frac{1}{u_0} + \frac{8}{15} u_0 - \frac{23}{840} u_0^3 + \ldots \right) \tag{8}$$

Kot vidimo, je za majhne hitrosti koeficient upora približno sorazmeren $1/u_0$, za velike hitrosti pa limitira proti vrednosti 2. Odvisnost koeficienta upora od u_0, oziroma Machovega števila je podana na sliki. (Machovo število, to je kvocient satelitove in zvočne hitrosti, je enako $u_0 \cdot \sqrt{2/\varkappa}$. Pri zraku, ki ima $\varkappa = 1,4$, je to enako $1,2\, u_0$.)

Boris Ponikvar

UTRINKI

MIKSER, BIKSER, LUKSER (PRIMER ČASNIKARSKE ETIMOLOGIJE)

Posebnost predora je tudi razsvetljava, ki... doseže 300 lukserjev svetilnosti. Ob straneh.... bo čez dan svetila z močjo 25 lukserjev, ponoči pa z 12,5 lukserji.

»Delo«, 9. maja 1959, str. 8

ALI RES MERIMO MOČ V RENTGENIH?

— Samci zgube oplodilno sposobnost šele potem, ko je bila moč sevanja med 400 in 1000 rentgeni.

»Delo«, 20. junija 1959, rubrika »Znanost in tehnika«

OBVESTILO

S sodelovanjem Društva matematikov in fizikov LR Slovenije je založba Mladinska knjiga v Ljubljani pričela z izdajo nove, matematične knjižne zbirke SIGMA. Pravkar je izšla prva knjiga te zbirke:

Dr. Ivan Vidav:

Rešeni in nerešeni problemi matematike

Knjiga obravnava: Problem o zlatnikih — O praštevilih — Pitagorejska števila in Fermatov problem — Izoperimetrični problem — Podvojitev kocke. Trisekcija kota. Kvadratura kroga — O množicah. Problem kontinua.

Iščemo fizike!

Sprejmemo več fizikov za delo v razvojnih laboratorijih in proizvodnji v redno ali honorarno zaposlitev, s polnim ali s skrajšanim delovnim časom. V poštev pridejo tudi študentje zadnjih letnikov in absolventi. Plača po dogovoru.

Delovna področja: Proizvodnja GM števcev, razvoj polvodnikov, razvoj magnetnih materialov, električne in fizikalne meritve na radijskih sestavnih delih, razvoj visokofrekvenčne keramike itd.

Zaradi dogovora se čimprej zglasite v Razvojnem sektorju Industrije za elektrozveze, Ljubljana, Vegova 2, tel. 22-675!

INDUSTRIJA ZA ELEKTROZVEZE LJUBLJANA

UREDNIŠTVO JE PREJELO V ZAMENO

Bulletin of the institute of nuclear sciences, Belgrade, March 1959, Vol. 9.
Bulletin de la Sociétè mathematique de France, Paris 1958, T. 86.
Elektrotehniški vestnik, Ljubljana 1958, št. 9—10, 11—12.
Farmacevtski vestnik, Ljubljana 1958, št. 7—12.
Fotokemijska industrija, Zagreb 1959, št. 1.
Geologija, Ljubljana 1958, št. 4.
Glasnik mat.-fiz. i astr., Zagreb 1958, T. 13, No. 4.
Gospodarski vestnik, Ljubljana 1959, št. 16—42.
Idrijski razgledi, Idrija 1958, št. 4; 1959, št. 1.
Journal of the optical Society of Amerika 1958.
Matematičko fizički list, Zagreb 1958-59, št. 3, 4.
Le Courier, Paris, Fevrier 1959.
Nastava matematike i fizike, Beograd 1958, št. 1.
Publikacije elektrotehn. fak., Beograd 1958, No. 16, 17, 18, 19, 20, 21.
Philip's Technische Rundschau, Eindhoven 1958/59, No. 7, 8.
Physics Today, New York 1958, Vol. 11, No. 8, 11.
Proteus, Ljubljana 1958-59, št. 6, 7, 8, 9/10.
Sodobna pedagogika, Ljubljana 1959, št. 1, 2.
Trudij astr. observatorii, Leningrad 1958, No. 273.
Ukrajinskij matematičeskij žurnal, Kijev 1958, T. X, No. 4.
Uspehi matematičeskih nauk, Moskva 1959, T. XIV, Vyp. 1.
Varilna tehnika, Ljubljana 1958, št. 3—4.
Vestnik Moskovskogo Universiteta, Moskva 1958, No. 3, 4, 5, 6.
Vestnik Leningradskogo universiteta, Leningrad 1958, No. 10.
Zdravstveni vestnik, Ljubljana 1959, št. 1, 2—3.
Žurnal eksp. in teor. fiziki, Moskva 1958, T. 34.

Zveza Društev matematikov in fizikov FLRJ izdaja časopis:

Nastava matematike i fizike

Naročnina je za člane vseh republiških društev matematikov in fizikov 300 din, za ostale naročnike, šole in biblioteke 400 din. Naročila in naročnino pošiljajte na žiro-račun Nastave 101-701-5-1262 z oznako »za Nastavu«.

Društvo matematikov in fizikov NRS izdaja

Vesnik Društva matematičara i fizičara NRS

Letno izide v dveh dvojnih številkah, letna naročnina je 400 din. Naročnino pošiljajte na ček. račun 101-707-3-119 Društvu matematičara i fizičara NRS pod označbo »Za Vestnik«. Dopise pošiljajte na naslov društva Beograd pošt. fah 791.

Društvo matematikov in fizikov NRH izdaja za vso državo

MATEMATIČKO FIZIČKI LIST

za učence srednjih šol. Letnik ima 4 številke, med počitnicami ne izhaja. Letna naročnina je 240 din, posamezna številka 60 din.

Profesorji srednjih šol, priporočajte list dijakom! Naročila in naročnino pošiljajte na naslov:

Matematičko-fizički list, Zagreb, Ilica 16/III, p. p. 165 ali na čekovni račun št. 400-73-5-1884.

Društvo matematikov in fizikov LR Hrvatske izdaja časopis

Glasnik matematičko-fizički i astronomski

Naročnina za leto 1958 znaša 480 din. Časopis naročite pri administraciji Glasnika: Hrvatsko prirodoslovno društvo, Zagreb, Ilica št. 16-III. Čekovni račun 400-73-3-1077 za Društvo matematičara i fizičara NRH.

Obzornik za matematiko in fiziko izhaja vsak tretji mesec. Izdaja ga Društvo matematikov in fizikov LRS. Urejujejo ga: A. Kuhelj, I. Kuščer, A. Moljk, N. Prijatelj, I. Vidav. Odgovorni in tehnični urednik: I. Štalec. Upravo vodi T. Skubic. — Tiska tiskarna ČZP »Ljudska pravica« v Ljubljani. — Naročnina je 250 din, za podjetja in ustanove, ki plačajo po računu in za naročnike, ki plačajo po terjatvi 280 din. Posamezna številka 100 din. Naročnino nakažite na naš čekovni račun $\frac{600-70}{3-207}$. Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov:

Obzornik za matematiko in fiziko, Ljubljana, poštni predal 253, tel. št. 23-304