OBZORNIK
ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

MATEMATIČNA KNJIŽNICA
Ljubljana

LJUBLJANA
1957-58
VI. št. 2

VSEBINA

Članki: Stran

Verige in procesi Markova (Rajko Jamnik) 49
Stieltjesov integral (J. Grasselli) 56
Izoperimetrične neenačbe in njih uporaba v fiziki (Anton Suhadolc) . 61
Merjenje debelin z radioaktivnimi izotopi (Jože Pahor) 66

Novice:

Reševanje enačb z iteracijo (Sergej Pahor) 74
Število π na deset tisoč decimalk (I. V.) 77
Jurij Vega v luči sovjetskih zgodovinsko-matematičnih raziskav (Jože Povšič) 78
Sanjarjenje z odprtimi očmi (Rudi Kladnik) 80
Zborovanje mednarodne unije za fiziko (N. P.) 83
Mednarodni seminar študentov matematike v Varšavi (Gabrijel Tomšič) 83

Poskusi:

Merjenje tokovnih in napetostnih sunkov v šoli (Ivan Kuščer in Tomislav Skubic) 85

Šola:

Delo aktiva matematikov in fizikov OLO Ljubljana v šolskih letih 1956-57 in 1957-58 (Francè Šušteršič) 90

Nove knjige 94

Odgovori 96

Utrinki 73

CONTENTS

Articles: Page

On Markov Chains and Processes (Rajko Jamnik) 49
Stietljes Integral (J. Grasselli) 56
Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics (Anton Suhadolc) . 61
Thickness Measurement with β and γ Rays (Jože Pahor) 66

News:

Solution of Equations by Iteration (Sergej Pahor) 74
The Number π Known up to 10000 Significant Figures (I. V.) 77
Jurij Vega (Jože Povšič) 78
The Idea of a Uranium Plasma Reactor (Rudi Kladnik) 80
International Seminary of Students of Mathematics in Warsaw (Gabrijel Tomšič) 83

Experiments:

School Experiments with Ballistic Galvanometers (Ivan Kuščer and Tomislav Skubic) 85

School:

The Work of Mathematics and Physics Teachers in Ljubljana (Francè Šušteršič) 90

New Books 94

Answers 96

LETO VI 1957-58 OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO ŠTEV. 2 1. X. 1958

VERIGE IN PROCESI MARKOVA

RAJKO JAMNIK

Shema markovskih verig spada med novejše probleme verjetnostnega računa. Prve dosežke na tem področju je objavil leta 1907 ruski matematik A. Markov in tako je dobil problem po njem tudi ime. Od tedaj naprej so markovske verige predmet živahnega proučevanja. O tem priča velika množica revialne in monografske literature, pri kateri imajo posebno velik delež M. Fréchet, A. N. Kolmogorov, V. I. Romanovski in T. A. Sarymsakov. Tako je nastala obsežna teorija, ki se še vedno razvija.

1. Markovske verige

Markovska veriga je neposredno posplošenje zaporedja neodvisnih poskusov. Pri le-tem gre za naslednji problem: Napravimo n poskusov! V vsakem od njih lahko nastopi eden izmed dogodkov $A_1, A_2, \ldots, A_k$, ki so edino možni in so si med seboj tuji. Verjetnost, da nastopi dogodek A_i, naj bo p_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$! Te verjetnosti so pri vseh poskusih enake in neodvisne od tega, kakšni dogodki so nastopili pri že izvršenih poskusih. Razen tega je $p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1$, ker smo rekli, da so dogodki $A_1, A_2, \ldots, A_k$ edino možni in si med seboj tuji.

Preprost primer za zaporedje neodvisnih poskusov je metanje kocke. Če je kocka homogena, je enako verjetno, da bomo vrgli bodisi eno piko bodisi katero koli drugo število pik do šest. Opraviti imamo torej s šestimi edino možnimi in med seboj tujimi dogodki. Verjetnost, da nastopi kateri koli izmed njih, je 1/6 v vsakem poskusu, ne glede na to, kakšni so bili izidi v že izvršenih metih. V tem je ravno čar kockanja.

Pri markovski verigi pa je zadeva takale: Spet imamo opraviti z zaporedjem poskusov. V vsakem izmed njih lahko nastopi samo eden izmed možnih in med seboj tujih dogodkov $A_1^{(s)}, A_2^{(s)}, \ldots, A_k^{(s)}$, pri čemer označuje število s indeks poskusa. Verjetnost, da v poskusu z indeksom $s + 1$ nastopi dogodek $A_i^{(s+1)}$, pa je tu odvisna od tega, kakšen dogodek je nastopil v poskusu z indeksom s. Od izidov v poskusih z manjšim indeksom verjetnost ni odvisna. V seriji poskusov je tako vsak poskus odvisen le od neposredno pred njim stoječega; povezanost je verižna, zato imenujemo tako zaporedje poskusov markovska veriga, oziroma natančneje: navadna markovska veriga.

Markovsko verigo lahko opredelimo še na drug način. Dan naj bo fizikalni sistem S, ki je lahko v enem izmed stanj $A_1, A_2, \ldots, A_k$! Prehod iz enega stanja v drugo je možen le v predpisanih trenutkih $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ Pri markovski verigi je verjetnost, da bo sistem S v času τ $(t_s < \tau < t_{s+1})$ v katerem koli izmed stanj A_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$, odvisna le od tega, v kakšnem stanju je sistem v času t $(t_{s-1} < t < t_s)$.

Oglejmo si tako verigo še na primeru! Na premici naj se giblje delec pod vplivom slučajnih trkov, ki nastopijo v trenutkih $t_1, t_2, t_3, \ldots$ Delec je lahko le v točkah s celoštevilskimi koordinatami $a, a + 1, a + 2, \ldots, a + k = b$.

V točkah a in b sta steni, ki delec odbijata. Če delec ni ob steni, ga vsak trk prestavi za enoto na desno z verjetnostjo p ali za enoto na levo z verjetnostjo $q = 1 - p$. Če pa je delec ob steni, ga vsak trk prestavi za enoto v notranjost prostora med stenama.

Navedeni primer je zelo shematičen. Treba pa je pomisliti, da smo pri sistemu S dovolili le končno število možnih stanj in prehode iz enega stanja v drugo samo v diskretnih trenutkih. Oboje pa je za naravni pojav huda omejitev.

Oglejmo si sedaj podrobneje spremembo sistema S, če se čas spremeni od t do τ, torej za en korak! Sistem lahko ostane v istem stanju ali pa preide v katerega izmed ostalih. Za vsako izmed teh možnosti eksistira določena verjetnost. Ker je bil v času t sistem lahko v vsakem izmed k možnih stanj, nam vedenje sistema v tem časovnem razmaku določa k^2 števil $P(A_j/A_i) = p_{ij}$, kjer pomeni p_{ij} verjetnost, da preide sistem S iz stanja A_i v času t v stanje A_j v času τ. Ta števila imenujemo prehodne verjetnosti. Očitno tvorijo te verjetnosti kvadratno matriko

$$P_1 = \| p_{ij} \| = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kk} \end{vmatrix}$$

Imenujemo jo prehodna matrika ali zakon markovske verige.

Prehodna matrika markovske verige, ki smo jo navedli za primer, je

$$P_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \ldots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Elementi prehodne matrike so verjetnosti. Zato je za vsak i in j

$$0 \leq p_{ij} \leq 1$$

Prehodna matrika spada torej med nenegativne matrike. Ker so dogodki A_i ($i = 1, 2, \ldots, k$) edino možni in si med seboj tuji, je nadalje

$$\sum_{j=1}^{k} p_{ij} = 1 \; ; \; i = 1, 2, \ldots, k \tag{1}$$

Vsota elementov v vsaki vrsti matrike je torej enaka 1.

Matrika P_1 karakterizira vedenje sistema S, če gremo v markovski verigi za en korak naprej. V splošnem seveda ni vseeno, od katerega člena verige ta korak napravimo. Ker smo v drugi interpretaciji potek verige označili s parametrom t, lahko tudi rečemo, da je prehodna matrika v splošnem funkcija časa t. Najbolj preproste in proučevanju najbolj dostopne pa so take markovske verige, pri katerih je prehodna matrika konstantna. Take verige imenujemo homogene. V nadaljnjem bomo govorili le o homogenih verigah.

Pri homogeni verigi smemo zahtevati, da nima prehodna matrika v nobenem stolpcu samih ničel. To bi namreč pomenilo, da je v sistemu S stanje, v katerem more biti sistem edino na začetku verige, pozneje pa sploh ne več. Tako stanje pa je za verigo povsem brez pomena in lahko vzamemo, da ga v sistemu možnih stanj ni.

Doslej smo govorili le o prehodnih verjetnostih za primer, da gremo v verigi za en korak naprej. Pri homogenih verigah pa lahko določimo tudi verjetnosti, da preide sistem iz danega stanja po n korakih v kako drugo stanje. Verjetnost, da preide sistem S iz stanja A_i v poskusu z indeksom s v stanje A_j v poskusu z indeksom $s + n$, bomo označili z znakom $P_{ij}(n)$.

Da določimo te verjetnosti, si oglejmo kakšen poskus z indeksom $s + m$ $(m < n)$! V tem poskusu nastopi eden izmed dogodkov A_r $(r = 1, 2, \ldots, k)$. Verjetnost prehoda iz stanja A_i v poskusu s v stanje A_r v poskusu $s + m$ je v naših oznakah enaka $P_{ir}(m)$; verjetnost, da preide sistem iz tega stanja v stanje A_j v poskusu $s + n$, pa je $P_{rj}(n - m)$. Torej je $P_{ir}(m)\, P_{jr}(n - m)$ verjetnost, da preide sistem S iz stanja A_i najprej v stanje A_r in od tod v A_j. Ker more priti S iz stanja A_i v stanje A_j preko katerega koli stanja A_r, imamo končno

$$P_{ij}(n) = \sum_{r=1}^{k} P_{ir}(m)\, P_{rj}(n - m) \tag{2}$$

Verjetnosti $P_{ij}(n)$ spet tvorijo kvadratno matriko, in sicer prehodno matriko čez n korakov

$$P_n = \| P_{ij}(n) \| = \begin{vmatrix} P_{11}(n) & P_{12}(n) \ldots P_{1k}(n) \\ P_{21}(n) & P_{22}(n) \ldots P_{2k}(n) \\ \ldots & \ldots \\ P_{k1}(n) & P_{k2}(n) \ldots P_{kk}(n) \end{vmatrix}$$

V formuli (2) imamo na desni strani produkt i-te vrstice matrike P_m z j-tim stolpcem matrike P_{n-m}. Tako je torej

$$P_n = P_m \cdot P_{n-m}$$

Če je $n = 2$, ima ta relacija obliko $P_2 = P_1 \cdot P_1 = P_1^2$, pri $n = 3$ je $P_3 = P_1^3$ in pri poljubnem n

$$P_n = P_1^n$$

Po tej formuli je mogoče matriko P_n direktno izračunati. Kot vidimo, je ta matrika odvisna le od zakona markovske verige P_1 in od tega, za koliko korakov gremo v verigi naprej. Popolnoma vseeno pa je, od katerega poskusa gremo za n korakov naprej in v kakšnih stanjih je sistem S v vmesnih poskusih.

Druga zanimiva ugotovitev pri homogenih verigah pa je naslednja: Sistem S bodi tak, da je kaka prehodna matrika P_n pozitivna, to se pravi, da so vsi njeni elementi večji od nič. Tedaj se da dokazati, da največja izmed verjetnosti $P_{ij}(n)$ z rastočim n ne narašča, najmanjša pa ne pada. Opraviti imamo torej z dvema monotonima zaporedjema, ki sta obe omejeni; zato eksistirata

$$\lim \max P_{ij}(n) = \overline{p}_j\,; \quad l \leq i \leq k, \quad n \to \infty$$

$$\lim \min P_{ij}(n) = \overline{p}_j\,; \quad l \leq i \leq k, \quad n \to \infty$$

Razen tega je mogoče ugotoviti, da gre z rastočim n tudi maksimum razlike $P_{ij}(n) - P_{lj}(n)$ $(i, l = 1, 2, \ldots, k)$ proti nič. Zato je

$$\overline{p}_j = \underline{p}_j = p_j$$

Tako torej eksistirajo taka števila p_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$, da je neodvisno od indeksa i

$$p_j = \lim P_{ij}(n) \quad n \rightarrow \infty$$

Števila p_j imenujemo limitne prehodne verjetnosti, zakon markovske verige, pri kateri limitne verjetnosti eksistirajo, pa regularen.

Pri verigah z regularnim zakonom je torej vedenje sistema S v dovolj poznem trenutku skoraj neodvisno od njegovega stanja v začetnem trenutku in je skoraj enako vedenju sistema z neodvisnimi stanji A_j z ustreznimi verjetnostmi p_j.

Za primer si oglejmo prehodno matriko

$$P_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{Vmatrix}$$

Ta matrika še ni pozitivna, pač pa je tak njen kvadrat

$$P_2 = \begin{Vmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{Vmatrix}$$

Matrika je torej regularna, limitne prehodne verjetnosti eksistirajo, tako da je $p_1 = p_2 = p_3 = 1/3$.

Nadaljnje lastnosti homogenih markovskih verig in njihova klasifikacija so odvisne od strukture sistema S, oziroma od oblike prehodne matrike. Ker pa je oblika le-te odvisna od lastnosti sistema S, je dovolj, če si ogledamo le sistem.

Naj bo v sistemu S kako tako stanje A_i, da je mogoče najti v sistemu stanje A_j in tako naravno število k, da je $P_{ij}(k) > 0$, toda $P_{ji}(m) = 0$ za vsako naravno število m! Z drugimi besedami, stanje A_i je tako, da more sistem po končno mnogo korakih preiti v neko stanje, iz katerega se ne more več vrniti v stanje A_i. Od tu dalje se vede sistem S, kot da v njem stanja A_i sploh ni. Zato bomo imenovali taka stanja, kot je A_i, nebistvena, vsa ostala stanja pa bistvena.

Če sta stanji A_i in A_j bistveni in eksistira tak k, da je $P_{ij}(k) > 0$, mora eksistirati tudi tak m, da je $P_{ji}(m) > 0$. V tem primeru je mogoč prehod iz enega bistvenega stanja v drugo in nazaj. Taki stanji imenujemo zato med seboj povezani. Povezanost je očitno tranzitivna: če je mogoče preiti iz stanja A_i v stanje A_j in obratno, iz stanja A_j v A_k in obratno, je mogoč tudi prehod iz A_i v A_k in obratno.

Na ta način razpadejo vsa bistvena stanja sistema S na razrede

$$B_1, B_2, \ldots, B_k \tag{3}$$

tako, da so stanja istega razreda povezana med seboj, stanja različnih razredov pa ne. Pri končnem sistemu S je seveda število razredov končno.

Razredi (3) v splošnem še ne obsegajo vseh stanj sistema S, saj so v njem lahko tudi nebistvena stanja. Če ta eksistirajo, jih je tudi mogoče razstaviti v razrede

$$B_{k+1},\ B_{k+2},\ \ldots,\ B_{k+m} \tag{4}$$

Sistem iz razredov B_{k+h} $(h = 1, 2, \ldots, m)$ ne more preiti v nobenega izmed razredov $B_{k+h+1}, B_{k+h+2}, \ldots, B_{k+m}$, pač pa lahko ostane v istem razredu ali pa preide bodisi v kak razred B_{k+i} $(i = 1, 2, \ldots, h - 1)$ bodisi v katerega izmed razredov (3). Če je sistem enkrat v katerem izmed razredov (3), ostane v njem za vselej.

Razredi (3) vsebujejo le bistvena stanja sistema S, poleg tega pa iz takega razreda ni izhoda; zato imenujemo razrede (3) izolirane, razrede (4) pa iz analognih razlogov neizolirane. Očitno je gornji razpad stanj sistema S na izolirane in neizolirane razrede edin.

Oglejmo si zdaj kako bistveno stanje A_i sistema S! Množico vseh naravnih števil k, za katere je $P_{ii}(k) > 0$, označimo z $M(i)$. Ta množica gotovo ni prazna, ker je stanje A_i bistveno. Če sta k in m števili množice $M(i)$, spada vanjo tudi njuna vsota $k + m$; še več: tedaj je tudi

$$\alpha k + \beta m \varepsilon M(i) \tag{5}$$

kjer sta α in β poljubni naravni števili.

Naj bo d_i največji skupni delitelj števil iz množice $M(i)$! Dokazali bomo, da so v $M(i)$ tudi vsi dovolj veliki večkratniki delitelja d_i. Če je delitelj d_i sam element množice $M(i)$, sledi naša trditev neposredno iz relacije (5). V nasprotnem primeru pa sledi iz (5), da je mogoče v množici $M(i)$ najti taki števili $k = k_1 d_i$ in $m = m_1 d_i$, da sta si faktorja k_1 in m_1 med seboj tuja. Tedaj lahko vsako število N, večje od nekega določenega števila, odvisnega od k_1 in m_1, zapišemo v obliki

$$N = k_1 x + m_1 y\,,$$

kjer sta x in y dve naravni števili. Potem pa sledi naša trditev iz očitnih neenačb

$$P_{ii}(Nd_i) \geq P_{ii}(k_1 xd_i)\, P_{ii}(m_1 yd_i) = P_{ii}(kx)\, P_{ii}(my) \geq P_{ii}(k)\, P_{ii}(m) > 0$$

Število d_i imenujemo periodo stanja A_i. Izkazalo se bo, da imajo bistvena stanja, ki spadajo v isti razred B_g, enako periodo, ki jo imenujemo periodo razreda B_g in označimo z $d(g)$. Zares! Naj bosta A_i in A_j elementa istega izoliranega razreda, razen tega pa števili k in m taki, da je $P_{ij}(k) > 0$ in $P_{ji}(m) > 0$! Nadalje naj bosta d_i in d_j periodi stanja A_i oziroma A_j! Po prejšnjem je $P_{jj}(Nd_j) > 0$ za vsak dovolj velik N. Tedaj pa je

$$P_{ii}(Nd_j + k + m) \geq P_{ij}(k)\, P_{jj}(Nd_j)\, P_{ji}(m) > 0.$$

To se pravi, da so vsa števila $Nd_j + k + m$ v $M(i)$ in so zato deljiva z d_i. S tem številom pa je deljiva tudi vsota $k + m$. Torej mora biti tudi prvi sumand $N d_j$ deljiv z d_i. Ker je N poljubno dovolj veliko število, mora biti število d_j deljivo z d_i. Na enak način ugotovimo, da mora biti tudi d_i deljivo z d_j in zato $d_i = d_j$. Ker sta bili A_i in A_j poljubni stanji razreda B_g, je s tem naša trditev dokazana.

Iz zgoraj povedanega je razvidno, da je za stanji A_i in A_j iz razreda B_g istočasno

$$P_{ij}(k) > 0 \quad \text{in} \quad P_{ji}(m) > 0$$

le tedaj, kadar je $k + m$ deljivo z $d(g)$. Imejmo zdaj dano stanje $A_i \varepsilon B_g$! Za poljubno nadaljnje stanje A_j iz istega razreda eksistira tedaj tak h med števili $1, 2, \ldots, d(g)$, da je $P_{ij}(k) > 0$ samo tedaj, če je $k - h$ deljivo z $d(g)$. Tako razpadejo vsa stanja razreda B_g na $d(g)$ podrazredov B_{gh}, od katerih je vsak prirejen dani vrednosti h.

V splošnem bi se zdelo mogoče, da je kateri izmed podrazredov B_{gh} prazen. Izkaže pa se, da eksistira za vsak h izmed števil, $1, 2, \ldots, d(g)$ vsaj eno tako stanje A_j, da je $P_{ij}(k) > 0$, če je le $k - h$ deljivo z $d(g)$. Zares, naj bo $k - h = k_1 d(g)$, število N pa tako veliko, da je deljivo z $d(g)$, kvocient $N/d(g) > k_1$ in $P_{ii}(N) > 0$! Izrazimo ga v obliki

$$N = k_1 d(g) + h + m_1 d(g) - h$$

kjer je $m_1 = N/d(g) - k_1 > 0$ in zato tudi $m_1 d(g) - h > 0$, Zapišimo identiteto

$$P_{ii}(N) = \sum_j P_{ij}(k_1 d(g) + h) P_{ji}(m_1 d(g) - h)$$

Iz nje je razvidno, da je $P_{ii}(N) > 0$ samo tedaj, če eksistira vsaj en tak j, da je

$$P_{ij}(k_1 d(g) + h) > 0 \quad \text{in} \quad P_{ji}(m_1 d(g) - h) > 0$$

Ker je $k_1 d(g) + h = k$, velja res $P_{ij}(k) > 0$. S tem je gornja trditev dokazana. Tako smo ugotovili, da razpade izolirani razred B_g natančno na $d(g)$ nepraznih podrazredov B_{gh}, kjer je $d(g)$ perioda razreda B_g. Vsak izmed podrazredov je sestavljen iz takih stanj A_j, da je $P_{ij}(k) > 0$, če je $k - h$ deljivo z $d(g)$. Izkaže se, da razcep razreda B_g na podrazrede ni odvisen od tega, iz katerega stanja A_i smo izhajali.

Oglejmo si še, kako prehaja sistem iz enega podrazreda v drugega! Naj bo sistem v danem trenutku v podrazredu B_{gh}, kar pomeni, da je $k - h$ deljivo z $d(g)$. Z naslednjim korakom se k poveča za eno; zato se mora za eno povečati tudi h, da bo razlika ostala deljiva z $d(g)$. To pomeni, da se je sistem preselil v podrazred $B_{g\,h+1}$. Po naslednjem koraku je sistem v podrazredu $B_{g\,h\,2}$. Tako potuje sistem do končnega podrazreda $B_{gd\,(g)}$, iz katerega preide v začetni razred B_{g1}. Sistem se torej ciklično seli po podrazredih.

Izolirani razred ima lahko tudi periodo enako 1. Tak razred ima en sam podrazred, oziroma sploh ne razpade na podrazrede. Da se dokazati, da v tem primeru eksistira tako naravno število k_0, da velja za vsako celo število $k > k_0$ in za poljubni stanji A_i in A_j iz tega razreda neenačba $P_{ij}(k) > 0$.

Na podlagi zgornje teorije o vedenju sistema možnih stanj, ki jo je dal A. N. Kolmogorov leta 1937, je mogoče markovske verige takole razdeliti:

I. Nerazcepne verige; te nimajo neizoliranih razredov, marveč en sam izolirani razred. Ta tip verig razpade na dva podtipa:

a) Aciklične verige, ki imajo en sam podrazred.

b) Ciklične verige; pri teh ima edini izolirani razred več podrazredov.

II. Razcepne verige; te imajo ali več izoliranih razredov ali poleg izoliranih tudi neizolirane. Tudi pri teh verigah je možnih več podtipov, ki so po svojih lastnostih podobni ali podtipu I a ali podtipu I b.

2. Markovski procesi

Na primeru smo videli, da je shema markovske verige precej ozka in zato za uporabo ne preveč primerna. Če upoštevamo, kako mnogoštevilna so do-

gajanja v naravi, podvržena markovskemu zakonu, se izkaže potreba po razširitvi markovske sheme zelo nujna. Ta potreba se tiče tako časa kakor množice možnih stanj. V celoti imamo tako naslednje možnosti:

I. Sheme z diskretnim časom. Množica možnih stanj je lahko pri tem:

a) končna;
b) števna;
c) zvezna.

II. Sheme z zveznim časom. Tudi tu je lahko množica možnih stanj:

a) končna;
b) števna;
c) zvezna.

Shema I a je navadna markovska veriga, I b pa posplošena markovska veriga; za ostale primere se je udomačilo ime markovski procesi. Zgled za II b je n. pr. Bohrov atomski model, za II c pa Brownovo gibanje.

A. N. Kolmogorov je pokazal, da spadajo markovski procesi v naslednji splošni okvir.

Naj bo E množica možnih stanj sistema S, F pa razdelitvena funkcija verjetnosti v E! Tedaj eksistira za vsak časovni interval od trenutka s do trenutka $t > s$ linearni in unitarni operator,

$$H_{st}(F) = F_1 ,$$

s katerim je mogoče določiti razdelitveno funkcijo F_1 v trenutku t, če poznamo razdelitveno funkcijo F v trenutku s. Operator H_{st} zadošča za vsak $s < u < t$ enačbi

$$H_{st} = H_{ut} H_{su} \tag{6}$$

To je osnovna enačba slučajnega markovskega procesa.

Kakor pri navadnih markovskih verigah je tudi tu najvažnejši in najbolje raziskan primer, kjer je operator H_{st} homogen glede na čas, to se pravi, da je $H_{st} = H_{t-s}$. Operator H_{st} zdaj ni več odvisen od trenutkov s in t, ampak le od njune razlike $t - s$. Enačba (6) ima tu obliko

$$S_{s+t} = H_s H_t ,$$

pri navadnih markovskih verigah pa preide (6) v (2).

Med osnovne naloge v teoriji markovskih procesov spada predvsem proučitev vedenja razdelitvene funkcije F_1, če raste $t - s$ preko vsake meje. V zvezi s to nalogo je treba tudi proučiti splošno rešitev enačbe (6). In končno je treba ugotoviti, kako se razširijo na markovske procese osnovni zakoni verjetnostnega računa, ki veljajo za zaporedje slučajnih količin. Teh obsežnih nalog pa se v našem okviru ne moremo lotiti.

Literatura

B. V. Gnedenko, Kurs teorii verojatnostej, Moskva 1954.
V. I. Romanovski, Diskretnye cepi Markova, Moskva 1949.
T. A. Sarymsakov, Osnovy teorii processov Markova, Moskva 1954.

STIELTJESOV INTEGRAL

J. GRASSELLI

Definicijo integrala zvezne funkcije so matematiki razširjali v raznih smereh. Te razširitve so znatno povečale družino integrabilnih funkcij ali pa vedle do novih pojmov, kot je n. pr. Stieltjesov integral. V naslednjem si hočemo nekoliko ogledati Stieltjesov integral, omejili pa se bomo pri tem na prostor ene razsežnosti.

1. Omenimo najprej nekaj za nadaljnje obravnavanje važnih lastnosti monotono naraščajočih funkcij.

Funkcija $g(x)$, definirana na zaprtem intervalu $[a, b]$, je monotono naraščajoča, ako z naraščajočim x njena vrednost narašča ali se vsaj ne manjša; če sta tedaj x_1 in x_2 dve števili iz tega intervala in je $x_1 < x_2$, je tudi $g(x_1) \leqq g(x_2)$.

Omejena naraščajoča funkcija more biti ponekod nezvezna. Toda tudi v točkah nezveznosti se obnaša dokaj pravilno. Tako se da hitro ugotoviti, da v vsaki točki c obstajata leva limita $g(c-0)$ in desna limita $g(c+0)$. Naj bo namreč $h_1 > h_2 > h_3 > \ldots$ padajoče zaporedje pozitivnih števil z limito nič; iz $c-h_1 < c-h_2 < c-h_3 < \ldots$ dobimo naraščajoče zaporedje

$$g(c-h_1) \leqq g(c-h_2) \leqq g(c-h_3) \leqq \ldots \leqq g(c)$$

Ker je naraščajoče, navzgor omejeno zaporedje vedno konvergentno, je s tem obstoj leve limite $g(c-0)$ zagotovljen. Podobno ugotovimo obstoj desne limite $g(c+0)$. Razlika $g(c) - g(c-0)$ pove velikost levega skoka, razlika $g(c+0) - g(c-0)$ pa velikost celotnega skoka v točki c. Če je funkcija $g(x)$ v tej točki $x = c$ zvezna, je seveda $g(c-0) = g(c+0) = g(c)$. Noben skok ni večji od $g(b) - g(a)$. Ta razlika je zaradi omejenosti funkcije končna.

Ugotovimo še, da ima omejena naraščajoča funkcija $g(x)$ kvečjemu števno mnogo točk nezveznosti. Ker je razlika $g(b) - g(a)$ celoten prirastek funkcije $g(x)$ na intervalu $[a, b]$, funkcija pa nikjer ne pada, je število skokov večjih od $1/n$ največ $n[g(b) - g(a)]$ in torej pri vsakem naravnem številu n končno. Vzemimo po vrsti $n = 1, = 2, = 3, \ldots$ Najprej numerirajmo skoke večje od 1, nato nadaljujmo numeracijo pri skokih večjih od 1/2, 1/3 itd. Sčasoma bodo prišli vsi skoki oziroma vse točke nezveznosti na vrsto. Možnost numeriranja skokov dokazuje, da je skokov in tedaj tudi točk nezveznosti največ števno mnogo.

Če je x kakšna točka z intervala $[a, b]$, je tudi od a do x največ števno mnogo skokov in je zato možno tvoriti vsoto

$$g^*(x) = g(a+0) - g(a) + \sum_{a < c_k < x} [g(c_k+0) - g(c_k-0)] + g(x) - g(x-0)$$

Le-ta zajame vse skoke funkcije $g(x)$ na intervalu $[a, x]$, v krajiščih pa desni oziroma levi skok. Funkcija $g^{**}(x) = g(x) - g^*(x)$ je brez skokov in je torej zvezna in monotono naraščajoča, Od tod imamo

$$g(x) = g^*(x) + g^{**}(x)$$

Ta enačba pove, da se da omejena naraščajoča funkcija $g(x)$ izraziti kot vsota zvezne naraščajoče funkcije $g^{**}(x)$ in naraščajoče funkcije skokov $g^{*}(x)$.

Podobne lastnosti kot omejene naraščajoče funkcije imajo funkcije z omejenim razmahom. Te funkcije se dajo pisati kot razlika dveh omejenih naraščajočih funkcij. Naj ima funkcija $g(x)$ na intervalu $[a, b]$ omejen totalni razmah. Potem je

$$g(x) = g_1(x) - g_2(x)$$

pri čemer sta $g_1(x)$ in $g_2(x)$ naraščajoči funkciji.

2. Vzemimo zvezno funkcijo $f(x)$ in funkcijo z omejenim razmahom $g(x)$. Obe naj bosta definirani na intervalu $[a, b]$. Razdelimo ta interval s točkami

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

na podintervale in tvorimo vsoto

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{k=n} f(\xi_k)\,[g(x_k) - g(x_{k-1})]$$

kjer je ξ_k točka k-tega podintervala: $x_{k-1} \leqq \xi_k \leqq x_k$. Naj narašča število delilnih točk x_k preko vsake meje in gre obenem dolžina $\delta_k = x_k - x_{k-1}$ vsakega podintervala proti nič. Vemo, da v primeru, ko je $g(x) = x$, vsote σ_n konvergirajo proti neki limiti — namreč ravno proti Riemannovemu integralu funkcije $f(x)$. Enak preudarek nam pokaže, da tudi v našem splošnejšem primeru vsote σ_n konvergirajo in sicer vedno proti isti limiti, kakor koli izbiramo delilne točke v skladu z gornjim predpisom. To limito imenujemo Stieltjesov integral funkcije $f(x)$ po funkciji $g(x)$ na intervalu $[a, b]$ in zapišemo

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \lim_{\delta_k \to 0} \sum f(\xi_k)\,[g(x_k) - g(x_{k-1})] \tag{1}$$

Mnogi izreki, ki veljajo za Riemannov integral, se dajo dokazati tudi za Stieltjesov integral. Prav tako moremo vpeljati nedoločeni integral. Tu bi posebej omenili le dve lastnosti Stieltjesovega integrala.

Vsoto σ_n lahko zapišemo v obliki

$$\sum f(\xi_k)\,[g(x_k) - g(x_{k-1})] = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) - \sum g(x_k)\,[f(\xi_k) - f(\xi_{k-1})]$$

Ker limitira vsota na levi, ko gredo $\delta_k \to 0$, proti integralu (1), limitira seveda tudi vsota na desni. Njena limita pa ni nič drugega kakor Stieltjesov integral funkcije $g(x)$ po funkciji $f(x)$. Torej je

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = [f(x)\,g(x)]_a^b - \int_a^b g(x)\,df(x)$$

kar pomeni, da smemo tudi pri Stieltjesovem integralu integrirati po delih in da je funkcija z omejenim razmahom vedno integrabilna po zvezni funkciji.

Podobno se dokaže, da velja za zvezno funkcijo $f(x)$ ter za funkciji $g_1(x)$ in $g_2(x)$ z omejenim razmahom pravilo

$$\int_a^b f(x)\, d\,[g_1(x) + g_2(x)] = \int_a^b f(x)\, dg_1(x) + \int_a^b f(x)\, dg_2(x)$$

Poglejmo zdaj, kako izračunamo Stieltjesov integral zvezne funkcije po funkciji z omejenim totalnim razmahom.

Naj bo najprej $g(x)$ odvedljiva funkcija z zveznim odvodom $g'(x)$. Tedaj je $dg(x) = g'(x)\, dx$ in zato

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx$$

Stieltjesov integral preide v navadni integral zvezne funkcije $f(x)\, g'(x)$.

Vzemimo nadalje, da je funkcija $g(x)$ zvezna in strogo naraščajoča, to se pravi: za $x_1 < x_2$ je tudi vedno $g(x_1) < g(x_2)$. Ko gre x od a do b, zavzame funkcija $\xi = g(x)$ vsako vrednost med $g(a)$ in $g(b)$ enkrat in le enkrat. Zato lahko iz enačbe $g(x) = \xi$ izračunamo x in dobimo, da je $x = x(\xi)$ zvezna naraščajoča funkcija spremenljivke ξ. Torej lahko uvedemo novo spremenljivko $\xi = g(x)$ v Stieltjesov integral in dobimo

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = \int_{g(a)}^{g(b)} h(\xi)\, d\,\xi$$

kjer je $h(\xi) = f[x(\xi)]$. Ker je funkcija $h(\xi)$ zvezna, smo spet prišli na navadni integral zvezne funkcije.

Ako je funkcija $g(x)$ zvezna pa ne strogo naraščajoča, upoštevamo, da jo je možno kot funkcijo z omejenim totalnim razmahom izraziti kot razliko dveh naraščajočih zveznih funkcij: $g(x) = g_1(x) - g_2(x)$. Kadar funkciji $g_1(x)$ in $g_2(x)$ še nista obe strogo naraščajoči, vzamemo izražavo

$$g(x) = [g_1(x) + x] - [g_2(x) + x]$$

kjer sta na desni funkciji v oklepajih obe strogo naraščajoči. Zdaj postavimo $\xi = g_1(x) + x$, $\eta = g_2(x) + x$. V funkciji $f(x)$ izrazimo spremenljivko x enkrat s ξ in drugič z η, tako da je $f(x) = h_1(\xi) = h_2(\eta)$. S tem prevedemo Stieltjesov integral na razliko navadnih integralov zveznih funkcij

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = \int_{g_1(a)+a}^{g_1(b)+b} h_1(\xi)\, d\,\xi - \int_{g_2(a)+a}^{g_2(b)+b} h_2(\eta)\, d\,\eta$$

Poiščimo še Stieltjesov integral zvezne funkcije $f(x)$ po naraščajoči funkciji skokov

$$g^*(x) = g(a+0) - g(a) + \sum_{a < c_k < x} [g(c_k + 0) - g(c_k - 0)] + g(x) - g(x - 0)$$

Bodi najprej število točk nezveznosti c_k enako N! Interval $[a, b]$ razdelimo na podintervale tako, da vsebuje vsak podinterval kvečjemu eno točko nezveznosti,

nobena delilna točka pa naj ne bo točka nezveznosti razen krajišč a in b, če sta to točki nezveznosti. Oglejmo si za tako delitev vsoto $\sigma_n = \Sigma f(\xi_k)[g^*(x_k) - g^*(x_{k-1})]$. V njej so od nič različni le tisti sumandi, ki se nanašajo na podintervale, kjer je točka nezveznosti c_k. Ko gre dolžina podintervalov proti nič, je vsaka točka nezveznosti ograjena z zmeraj manjšim intervalom. Točki c_k pripadajoči sumand gornje vsote, namreč $f(\xi_k)[g^*(x_k) - g^*(x_{k-1})]$, gre proti vrednosti $f(c_k)[g^*(c_k + 0) - g^*(c_k - 0)]$. V tem primeru je torej

$$\int_a^b f(x)\, dg^*(x) = \sum_{k=1}^{k=N} f(c_k)[g^*(c_k + 0) - g^*(c_k - 0)]$$

Veljavnost te formule pa se da raztegniti tudi na splošni primer, ko ima funkcija $g^*(x)$ števno mnogo točk nezveznosti. Vrednost integrala je tedaj

$$\int_a^b f(x)\, dg^*(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f(c_k)[g^*(c_k + 0) - g^*(c_k - 0)]$$

kjer vzamemo skoke kar po velikosti.

Ker se da naraščajoča funkcija $g(x)$ izraziti z vsoto zvezne naraščajoče funkcije $g^{**}(x)$ in funkcije skokov $g^*(x)$, preide Stieltjesov integral v vsoto navadnega integrala zvezne funkcije in kovergentne vrste:

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = \int_a^b f(x)\, dg^{**}(x) + \int_a^b f(x)\, dg^*(x) = \int_{a_1}^{b_1} h(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \Sigma f(c_k)[g(c_k + 0) - g(c_k - 0)]$$

Podobno izražavo dobimo, kadar je $g(x)$ poljubna funkcija z omejenim totalnim razmahom.

Tako smo prišli do spoznanja, da je Stieltjesov integral zvezne funkcije po funkciji z omejenim razmahom v vsakem primeru izrazljiv z navadnimi integrali in z vrstami.

3. Navedimo še neki pomemben izrek o funkcionalih prostora zveznih funkcij, ki se naslanja na pojem Stieltjesovega integrala.

Množico vseh zveznih funkcij, definiranih na intervalu $[a, b]$, imenujemo prostor zveznih funkcij in ga zaznamujemo s C. Kakor so elementi navadnega prostora točke, tako so elementi prostora C posamezne zvezne funkcije, definirane na intervalu $[a, b]$.

Pravilo, s katerim moremo prirediti vsaki funkciji $f(x)$ iz C neko realno število, imenujemo funkcional v prostoru C. Primeri funkcionalov so

$$\int_a^b f(x)\, dx, \qquad \int_a^b f^2(x)\, dx, \qquad f[\tfrac{1}{2}(a + b)]$$

V vseh teh primerih pripada res vsakemu elementu iz C, to je vsaki zvezni funkciji $f(x)$, neko natančno določeno število.

Vzemimo zvezni funkciji $f_1(x)$ in $f_2(x)$ ter realni števili c_1 in c_2; očitno so funkcije $c_1 f_1(x)$, $c_2 f_2(x)$, $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ zvezne in so zato v prostoru C. Funkcional Φ je distributiven, ako velja zanj

$$\Phi[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)] = c_1 \Phi[f_1(x)] + c_2 \Phi[f_2(x)]$$

pri poljubnih zveznih funkcijah $f_1(x)$, $f_2(x)$ in pri poljubnih realnih številih c_1, c_2. Iz distributivnosti za dva sumanda sledi distributivnost za poljubno število sumandov. Funkcional Φ je omejen, če se da dobiti tako pozitivno število N, da je za vsako funkcijo $f(x)$ iz C izpolnjena neenačba

$$|\Phi[f(x)]| \leqq N \cdot \text{maks.} |f(x)|$$

Distributiven in omejen funkcional je linearen.

Vzemimo kakšno funkcijo $g(x)$ z omejenim razmahom na intervalu $[a, b]$. Vsako funkcijo $f(x)$ iz prostora C moremo integrirati po tej funkciji $g(x)$. Na ta način je vsaki funkciji $f(x)$ prirejeno neko realno število, namreč

$$\Phi[f(x)] = \int_a^b f(x)\, dg(x)$$

Ker je

$$\int_a^b [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)]\, dg(x) = c_1 \int_a^b f_1(x)\, dg(x) + c_2 \int_a^b f_2(x)\, dg(x)$$

in nadalje

$$\left| \int_a^b f(x) dg(x) \right| \leqq A \cdot \text{maks.} |f(x)|$$

sledi od tod:

$$\Phi(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \Phi(f_1) + c_2 \Phi(f_2)$$

in

$$|\Phi[f(x)]| \leqq A \cdot \text{maks.} |f(x)|$$

Torej je Stieltjesov integral za vsako funkcijo $g(x)$ z omejenim razmahom linearni funkcional Φ v prostoru C zveznih funkcij.

Toda Stieltjesov integral ni le kak poseben primer linearnega funkcionala v tem prostoru, temveč ima tu osrednji pomen: Kajti vsakemu omejenemu linearnemu funkcionalu iz prostora C pripada neka funkcija $g(x)$ z omejenim totalnim razmahom, tako da je vrednost funkcionala $\Phi[f(x)]$ kar enaka Stieltjesovemu integralu funkcije $f(x)$ po funkciji $g(x)$:

$$\Phi[f(x)] = \int_a^b f(x)\, dg(x)$$

To je znameniti Rieszov izrek.

Literatura:

I. V. Smirnov: Kurs vysšej matematiki. V. Moskva 1947.

H. Lebesgue: Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives. Paris 1950.

J. Karamata: Teorija i praksa Stieltjesova integrala. Beograd 1949.

IZOPERIMETRIČNE NEENAČBE IN NJIH UPORABA V FIZIKI

ANTON SUHADOLC

Izoperimetrične neenačbe so neenačbe. ki veljajo med nekaterimi geometričnimi in fizikalnimi količinami: n. pr. med obsegom in ploščino lika, med površino in prostornino telesa itd. V teh neenačbah je enačaj le pri določenem liku ali telesu. Pri tistem liku doseže ena izmed količin, ki so v neenačbi, ekstremno vrednost, če so dane druge količine, ki so tudi v neenačbi.

Študij izoperimetričnih neenačb ni zanimiv samo za matematika, temveč tudi za fizika in celo inženirja v praksi, kot bodo pokazali zgledi. Večina navedenih podatkov je vzetih iz knjige 'Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics', ki sta jo napisala G. Polya in G. Szegö.

Izoperimetrični problemi so že stari: Eden izmed prvih je tale: Med vsemi sklenjenimi krivuljami z danim obsegom o je treba najti tisto, ki ograja največjo ploščino p. Odgovor na ta problem so poznali že Grki: Ta krivulja je krog. Nadalje je znana tudi kvantitativna relacija med obsegom in ploščino ravninskega lika:

$$o^2 \leqq 4 \pi p$$

To je izoperimetrična neenačba, ki ustreza temu problemu. Enakost je v njej le pri krogu.

Podoben problem si moremo staviti tudi v prostoru: od vseh teles z dano površino P iščemo tisto, ki ima največjo prostornino V. Odgovor se glasi: To telo je krogla. Ustrezna izoperimetrična neenačba pa ima obliko

$$P^3 - 36 \pi V^2 \leqq 0$$

Ta zveza med povšino in prostornino velja za vsa telesa.

Poleg teh dveh 'velikih' izoperimetričnih problemov poznamo še enostavnejše, 'male': n. pr. med vsemi pravokotniki oziroma trikotniki z danim obsegom iščemo tistega, ki ima največjo ploščino.

Pozneje, posebno v 19. in 20. stoletju, so se pojavili še novi izoperimetrični problemi in izreki. Francoski mehanik de Saint-Venant je postavil l. 1856 domnevo, da ima od vseh palic z dano ploščino pravokotnega prereza največjo direkcijsko konstanto okrogla palica; to tudi pomeni, da je okrogla palica v nekem smislu najbolj odporna proti obremenitvi na torzijo. Lord Rayleigh je l. 1887 postavil domnevo, da ima od vseh ploščnih kondenzatorjev z dano ploščino krožni kondenzator najmanjšo kapaciteto; od vseh ploskih membran z dano ploščino pa ima okrogla membrana najnižjo osnovno frekvenco.

Nadalje je H. Poincaré l. 1903 postavil in delno dokazal trditev, da ima med vsemi telesi z dano prostornino krogla najmanjšo elektrostatično kapaciteto. Vse naštete domneve so bile v preteklih desetletjih res dokazane; postavljenih in dokazanih pa je bilo še mnogo drugih.

Geometrijske in nekatere fizikalne količine so odvisne le od oblike in velikosti lika: n. pr. obseg, ploščina, vztrajnostni moment homogene plošče

okoli težišča, direkcijska konstanta preseka homogenega stebriča, osnovna frekvenca membrane, katere prosti rob je dana sklenjena krivulja, elektrostatična kapaciteta ploščnega kondenzatorja in še druge količine. Podobne so razmere pri prostorskih telesih. Pri konveksnih telesih je važen tudi pojem »povprečna debelina telesa«, ki jo je uvedel H. Minkovski in jo bomo označili z M. Intuitivno je ta pojem jasen. Strogo pa ga moremo definirati za konveksno telo takole:

$$M = \frac{1}{2\pi} \int H \, dS$$

pri čemer pomeni H povprečno ukrivljenost mejne ploskve, dS pa element površine. Integriramo po vsej površini telesa. Pri krogli je povprečna debelina enaka $M = 2r$.

Vse pravkar omenjene fizikalne količine moremo smatrati kot geometrične: postanejo namreč take, če privzamemo, da je specifična gostota snovi, iz katere je telo, enaka 1. Vztrajnostni moment homogene plošče je n. pr. definiran z integralom $J' = \varrho \iint r^2 \, dp$; tu pomeni ϱ ploskovno gostoto, r razdaljo točke od težišča, dp pa element ploščine. Če v tej definiciji postavimo $\varrho = 1$, dobimo nov vztrajnostni moment J, ki je čisto geometrična količina z dimenzijo, ki je četrta potenca dolžine. Podobno moremo napraviti z drugimi količinami. Tako dobi n. pr. kapaciteta dimenzijo dolžine, osnovna frekvenca pa ima dimenzijo dolžina na ekspoment -1. Na ta način definirane količine bomo imenovali izoperimetrične. Med njimi eksistirajo izoperimetrične neenačbe. Najstarejša je, kakor smo že omenili, $o^2 \geqq 4\pi p$. Spoznali jih bomo še več.

Količine kot obseg o, ploščina p, površina P, prostornina V, povprečna debelina M in vztrajnostni moment J, moremo smatrati v nekem smislu za elementarne, saj jih dobimo tako, da izračunamo enojne ali dvojne integrale. Drugačne pa so količine: kapaciteta C, osnovna frekvenca Λ in direkcijska konstanta D. Le-te niso elementarne, ker so to konstante, ki jih dobimo pri reševanju parcialnih diferencialnih enačb 2. reda v 2. ali 3. dimenzijah s primernimi robnimi pogoji. Le pri posebno enostavnih oblikah teles oziroma plošč jih znamo eksplicitno izračunati. Z aproksimativnimi metodami dobimo vrednosti, za katere navadno ne moremo določiti velikost napake. Tu pa nam pomagajo izoperimetrične neenačbe: te nam namreč omogočajo oceniti težko izračunljive količine z laže izračunljivimi.

Oglejmo si primer! Dokazati se da naslednji izoperimetrični izrek: Od vseh trikotnih membran z dano ploščino ima membrana v obliki enakostraničnega trikotnika najnižjo osnovno frekvenco. Pri enakostraničnem trikotniku imamo eksplicitno formulo za osnovno frekvenco. Za splošen trikotnik take formule ne poznamo. Torej nam more služiti gornji izrek za oceno osnovne frekvence trikotne membrane. Taka ocena ni brez praktične vrednosti. Zato so izoperimetrične neenačbe zanimive tudi za inženirja praktika.

V naslednjem si bomo ogledali nekaj važnejših primerov izopermetričnih neenačb ter metod, kako do takih neenačb pridemo.

Ena najvažnejših metod je simetrizacija. To geometrično operacijo je uvedel J. Steiner. Simetrizacija glede na dano ravnino Σ spremeni telo T v telo T' s temile lastnostmi:

1. Telo T' leži simetrično na ravnino Σ.

2. Pravokotnica na ravnino Σ, ki seče telo T, seče tudi telo T'; obe presečni daljici sta enako dolgi.

3. Presek pravokotnice s telesom T' sestoji iz ene same daljice ali točke.

Nazorno si lahko predstavljamo, da pridemo do simetričnega telesa T' takole: Mislimo si, da smo razrezali telo T na same vzporedne paličice, ki so vse pravokotne na ravnino Σ. Vsako od teh paličic premaknimo vzporedno samo s seboj, tako da pride njeno središče na ravnino Σ. Vse premaknjene palice skupaj tvorijo telo T', ki leži simetrično glede na ravnino Σ. Očitno je njegova prostornina ista kakor prostornina telesa T, saj se prostornina paličic ni spremenila med vzporednim premikanjem. Dokazati se da, da je površina telesa T' manjša od površine telesa T, če ni T' samo vzporedno premaknjeno telo T. Kot primer vzemimo polkroglo. Če jo simetriziramo glede na mejno ravnino, dobimo podolgovat rotacijski elipsoid.

Podobno moremo definirati simetrazacijo ravninskega lika glede na dano premico. Če seče pravokotnica na dano premico lik L, seče tudi lik L'. Obe presečni daljici imata isto dolžino. Ploščina lika L' je enaka ploščini lika L.

Velik pomen pri študiju izoperimetričnih neenačb ima naslednji izrek o simetrizaciji:

Simetrizacija telesa ohrani prostornino nespremenjeno; površina telesa, povprečna debelina in kapaciteta pa se zmanjšajo. Simetrizacija ravninskega lika ohranja ploščino. Zmanjšajo se obseg, težiščni vztrajnostni moment, kapaciteta in osnovna frekvenca (ploščo si mislimo kot membrano); zveča pa se direkcijska konstranta.

Trditve o prostornini, površini, ploščini in obsegu je dokazal že J. Steiner sam. Druge trditve sta dokazala G. Polya in G. Szegö.

Kot zgled za uporabo tega izreka si oglejmo naslednji problem: Treba je izračunati kapaciteto ploščnega kondenzatorja, ki ima obliko polkroga.

Polkrog, simetriziran glede na mejni premer, se spremeni v elipso z osema r in $2r$. Kapaciteta te elipse se da eksplicitno izračunati: dobimo vrednost $C = 0.464\,r$. Ta vrednost nam more služiti kot ocena za kapaciteto polkroga. G. Polya in G. Szegö menita, da je praktično skoraj nemogoče dobiti boljšo oceno za kapaciteto polkroga.

Krogla je simetrična glede na vsako ravnino, ki gre skozi središče. Simetrizacija pa pretvori telo T v tako telo T', ki ima vsaj eno ravnino simetrije. Po večkratni simetrizaciji na primerno izbrane ravnine preide telo T v telo, ki se malo razlikuje od krogle. V limiti dobimo res kroglo z enako prostornino kakor prvotno telo. Podobno nam simetrizacija, izvršena zaporedoma na neskončno mnogo primerno izbranih premicah, prevede prvotni lik v krog z enako ploščino. Med tem procesom se količine P, C, A, D itd. spreminjajo vedno v isto smer: bodisi se manjšajo, bodisi se večajo v skladu z izrekom o simetrizaciji. Za kroglo moremo vse te količine izračunati, prav tako za krog. Enostavna posledica izreka o simetrizaciji so zato naslednje neenačbe

(1) $$P^3 \geqq 36\,\pi\,V^2\,, \qquad C^3 \geqq 3\,V/4\,\pi$$

za prostorska telesa ter

(2) $$o^2 \geqq 4\,\pi\,p\,, \qquad J \geqq p^2/2\,\pi\,, \qquad C^2 \geqq 4\,p/\pi^3$$
$$\Lambda^2 \geqq j^2\,\pi/p\,, \qquad D \leqq p^2/2\,\pi$$

za ravninske like. Tu pomeni $j = 2{,}4048\ldots$ prvi koren transcendentne enačbe $J_0(x) = 0$, pri čemer je $J_0(x)$ Besselova funkcija. V neenačbah (1) nastopi enakost le pri krogli, v neenačbah (2) pa pri krogu.

Če se omejimo na konveksna telesa, moremo dobiti še nekaj neenačb

(3) $$(3\,V/4\,\pi)^{\frac{1}{3}} \leqq (P/4\,\pi)^{\frac{1}{2}} \leqq M/4\,\pi$$

ter

(4) $$(3\,V/4\,\pi)^{\frac{1}{3}} \leqq C \leqq M/4\,\pi$$

V vseh štirih primerih nastopa enakost le pri krogli.

Za ravninske like se dasta dobiti naslednji verigi neenačb

(5) $$D/4\,\pi \leqq (p/\pi)^2 \leqq (2\,J/\pi) \leqq (o/2\,\pi)^4$$

in

(6) $$(j/\Lambda)^2 \leqq (p/\pi) \leqq (\pi\,C/2)^2$$

Več podobnih neenačb pa še ni dokazanih. Kot primer navajata G. Polya in G. Szegö zelo verjetno neenačbo

$$C^2 \geqq 2\,\pi^{-3}\,P$$

ki naj bi veljala za konveksna telesa. Ta neenačba je gotovo zelo praktična, saj bi mogli z njo oceniti spodnjo mejo za kapaciteto telesa skoraj brez računa. Površine telesa namreč navadno ni težko izračunati ali vsaj izmeriti.

Kot praktična uporaba izoperimetričnih neenačb nam bo služil naslednji zgled: Treba je določiti osnovno frekvenco rombske membrane. Eksplicitno ne znamo izračunati osnovne frekvence za romb. Približne metode so v toliko pomanjkljive, ker je pri njih težko določiti velikost napravljene napake. S simetrizacijo in izoperimetričnimi neenačbami pa dobimo ocene za osnovno frekvenco. Če romb simetriziramo glede na premico, ki je pravokotna na osnovnico, preide romb v pravokotnik. Osnovno frekvenco pravokotne membrane znamo izračunati in je enaka $\pi\,d^{-1}\,(1 + \sin^2\delta)^{\frac{1}{2}}/\cos\frac{1}{2}\,\delta$. Pri tem pomeni d diagonalo in δ kot ob osnovnici. Ker se pri simetrizaciji osnovna frekvenca zmanjša, sledi od tod ocena

$$\Lambda > \pi\,d^{-1}\,(1 + \sin^2\delta)^{\frac{1}{2}}/\cos\tfrac{1}{2}\,\delta$$

Iz izoperimetričnih neenačb se da izpeljati še neka zgornja meja za Λ. Od tod dobimo tele ocene ($d = \pi$):

$$\delta = 90^0 \qquad 2\,000 = \Lambda$$
$$\delta = 88^0 \qquad 1\,965 < \Lambda < 1\,973$$
$$\delta = 85^0 \qquad 1\,915 < \Lambda < 1\,924$$
$$\delta = 80^0 \qquad 1\,832 < \Lambda < 1\,849$$
$$\delta = 75^0 \qquad 1\,753 < \Lambda < 1\,781$$
$$\delta = 60^0 \qquad 1\,527 < \Lambda < 1\,610$$

Če je δ med 75^0 in 90^0, lahko od tod izračunamo osnovno frekvenco do natančnosti 1 %.

Večina neenačb za D, C in Λ je bila dobljena s pomočjo variacijskih metod. Med temi tremi količinami eksistira precejšnja analogija. V vseh treh primerih moremo izraziti potencialno energijo fizikalnega problema kot prostorski ali ploskovni integral kvadrata gradienta. Potencialna energija mora doseči minimum pri pogojih, ki jih določa fizikalni problem. Tako pridemo do problemov iz variacijskega računa in diferencialnih enačb, ki so v vsakem primeru sicer različne, vendar zelo sorodne druga drugi. Oglejmo si kot primer osnovno frekvenco membrane:

Membrano si mislimo v ravnini (xy). Njen rob naj bo krivulja K. Rob K ograja polje Λ. Vzemimo na polju Λ zvezno odvedljivo funkcijo $f(x, y)$, ki je na robu K enaka nič in ustreza enačbi

$$\iint f^2\, dx\, dy = 1 \tag{7}$$

Za vsako tako funkcijo velja

$$\iint (f_x^2 + f_y^2)\, dx\, dy \geqq \Lambda^2 \tag{8}$$

pri čemer pomeni Λ osnovno frekvenco membrane. Integral (8) doseže namreč ekstrem, če ustreza funkcija $f(x, y)$ diferencialni enačbi

$$f_{xx} + f_{yy} + \Lambda^2 f = 0$$

in tem-le robnim pogojem

$$f(x, y) = 0 \quad \text{na robu } K \quad \text{in} \quad f(x, y) > 0 \text{ v notranjosti}$$

Od tod sledi, da je funkcija $f(x, y)$ sorazmerna odmiku nihajoče membrane od mirovne lege.

Iz te formulacije je razvidno, da nam da vsaka zvezna funkcija $f(x, y)$, ki je na robu K enaka nič in ustreza pogoju (7), že neko zgornjo mejo za Λ. Podobno velja za druge količine C, D, itd.

Za dokazovanje nekaterih izoperimetričnih neenačb so potrebne posebne metode. V skoraj vseh primerih pa so dokazi silno dolgi in težki.

Literatura:

G. Polya — G. Szegö: Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics. Annals of Math. Studies. Princeton, 1951.

MERJENJE DEBELIN Z RADIOAKTIVNIMI IZOTOPI

JOŽE PAHOR

I. UVOD

Princip meritve debelin z radioaktivnimi izotopi je v kratkem tale: Med radioaktivni izvor in detektor postavimo preiskovalno ploščo ali plast. Zaradi absorpcije v plošči se del delcev, ki jih oddaja izvor, izgubi in zadene detektor le oslabljen curek. Če imamo opravka s ploščami iz iste snovi, lahko iz oslabitve sklepamo na debelino. Ta način meritve je posebno ugoden, ker noben del merilne aparature ne prihaja v dotik z merjencem. Zato z njim uspešno merimo debeline celo tedaj, ko se vzorec (n. pr. papir v tovarni papirja) z veliko hitrostjo pomika mimo merilne glave.

Mehanski načini merjenja (taki, kjer spremlja ročica površino vzorca) hitrim spremembam debeline ne bi mogli slediti, dostikrat pa niso niti izvedljivi (n. pr. za merjenje vroče valjane pločevine). Nekateri starejši nekontaktni načini meritve so se sicer že uporabljali, vendar so bili dokaj nezanesljivi. Debelino papirja so ugotavljali tako, da so merili kapaciteto kondenzatorja, skozi katerega je tekel papirni trak; žal pa je spremenljiv delež vlage v papirju rezultate zelo kvaril. Podobno določamo lahko debelino železa iz njegovih magnetnih lastnosti. Vsi ti načini so omejeni le na nekatere primere.

Kljub vsem prednostim se je merjenje debelin z izotopi uveljavilo razmeroma kasno. Omogočeno je bilo šele tedaj, ko so reaktorji začeli proizvajati celo vrsto umetno radioaktivnih izotopov. Z vrsto različnih izvorov pa lahko merimo najrazličnejše materiale, od najtanjšega papirja do 5 cm debelih železnih plošč.

Primerjava med avtomatsko in s starejšimi metodami kontroliranimi izdelki kaže, da je pri prvih natančnost obdelave vsaj trikrat boljša, kar gotovo opravičuje uporabo nove metode.

2. MERJENJE S PRESEVANJEM

Kadar je merjenec med radioaktivnim izvorom in detektorjem, govorimo o merjenju s presevanjem. Izvori so lahko sevalci β ali γ; ker je detekcija delcev β (elektronov) lažja, imamo te rajši. Za delce β iz nekega izotopa je značilna njihova povprečna energija. Če hočemo meriti debelejše kose in gostejše materiale, moramo vzeti sevalce β dovolj visokih energij, da delci še prodro skozi material. Ugodni so izvori s čim daljšo življenjsko dobo, da se izognemo njihovi prepogosti menjavi. Industrijsko važne izvore in območja njihove uporabnosti za materiale različnih debelin kaže naslednja tabela.

Izvor in razpolovni čas	Koristno območje v milimetrih		
	Papir, lepenka, kavčuk, polivinil	Azbest, aluminij, steklo	Železo, baker, medenina
^{35}S (87 dni)	0,02—0,06	0,01—0,03	0,003—0,01
^{147}Pm (2,6 let)	0,06—0,20	0,03—0,10	0,01—0,03
^{204}Tl (4 leta)	0,30—1,5	0,1 —0,8	0,03—0,20
^{90}Sr (20 let)	3—10	1—4	0,2 —1,0
^{106}Ru (1 leto)	4—20	2—8	0,4 —2

Meriti moramo fluks delcev β, ki prehaja skozi preiskovano plast. Najenostavneje napravimo to z ionizacijsko celico, s katero ne štejemo posameznih delcev, ampak merimo nesamostojni tok, ki teče skoznjo zaradi ionizacije vpadajočih delcev. Ker je povprečna energija, potrebna za ionski par, 30 eV, ustvari delec β iz ^{90}Sr (+ ^{90}Y) s povprečno energijo 600 keV v celici lahko $2 \cdot 10^4$ ionskih parov. Izvor 1 mC (= $3{,}7 \cdot 10^7$ razpadov na sekundo) daje $7{,}4 \cdot 10^{11}$ ionskih parov v sekundi, kar pomeni tok 10^{-7} A skozi celico. Dejansko je tok še manjši, saj celica ne zajame vseh delcev pa tudi delci ne porabijo v njej vse svoje energije, ker njihov doseg v zraku ni majhen v primeri s premerom celice (pri energiji $E = 0{,}6$ MeV je doseg elektronov v zraku enak 18 cm). Kljub temu pa ta tok lahko merimo. Saj daje še tisočkrat manjši tok na delovnem uporu 10^9 Ω napetost 0,1 V, ki je še lepo merljiva s cevnim voltmetrom. Meritev tokov navzdol do 10^{-12} A ne dela nobenih težav, če uporabljamo elektrometrske elektronke (elektronke z zelo majhnim mrežnim tokom, $I_g = 10^{-14}$ do 10^{-15} A). — Za delce γ pa se celica ne obnese, ker ti le slabo ionizirajo. Zato so pri tem načinu potrebni izvori do 500 mC in nastopajo težave, kako zaščititi ljudi pred žarki. Zato je v tem primeru bolj pripraven scintilacijski števec (glej § 3).

Druga slaba lastnost celic je še njihova velikost; saj volumen 5 litrov ni nobena redkost. S tolikšno celico preiskujemo lahko le velike ploskve materiala, tako da daje meritev le povprečne lastnosti te ploskve. Precejšnji lokalni odmiki povprečno vrednost le malo spremene in ostanejo neopaženi, čeprav lahko močno kvarijo mehanske lastnosti preiskovanega kosa.

Ionizacijsko celico večkrat uporabljamo v kompenzacijski vezavi. Dve enaki celici, med katerima je izvor na sredi, dajeta na izhodu enaki napetosti; razlika teh napetosti je enaka nič. Če postavimo med izvor in prvo celico merjenec, med drugo in izvor pa standardni vzorec, dobimo na izhodu neko napetost le tedaj, če se merjenec razlikuje od standarda. Spremembe temperature, zračnega pritiska in pojemanje aktivnosti izvora čutita obe celici enako, tako da vse to na meritev nič ne vpliva.

Kadar hočemo meriti kovinske plošče, debelejše od 2 mm, vzamemo izvor γ. Delci γ iz ^{137}Cs (E = 0,66 MeV) in ^{60}Co (E = 1,33 in 1,17 MeV) so mnogo bolj prodorni in lahko oba izvora uporabljamo s pridom tudi do debelin 5 cm železa. Namesto ionizacijske celice pa moramo vzeti scintilacijski števec, ki je za te delce mnogo bolj občutljiv. Kristal NaJ(Tl) debeline 30 mm ima pri energiji 1 MeV izkoristek približno 50 % in zaradi tega lahko delamo z zelo šibkimi, nenevarnimi izvori (približno 10 μC). Ker je mogoče s scintilacijskimi števci meriti tudi zelo majhne ploskve, kaže, da bodo ti sčasoma sploh izpodrinili ionizacijske celice, kljub svoji višji ceni.

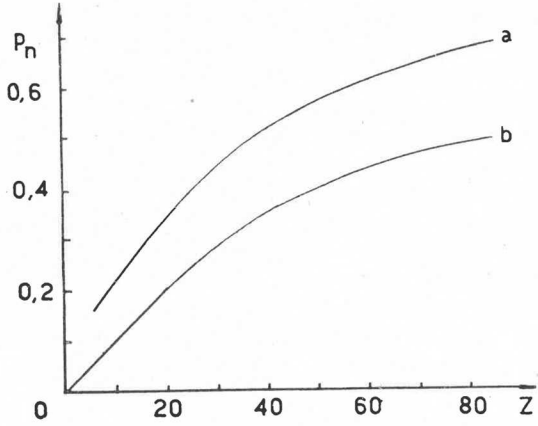
Geigerski števci pri meritvah debelin niso uporabni zaradi majhne števne hitrosti (do nekaj 1000 v sekundi) in omejene življenjske dobe (preštejejo le do 10^9 sunkov).

3. MERJENJE S POVRATNIM SIPANJEM

Pri meritvah te vrste postavimo izvor in detektor na isto stran merjenca in ju ločimo s svinčeno steno. Tako dosežejo detektor le tisti delci, ki se sipljejo na merjencu. K sipanju prispevajo vse plasti merjenca, če ta ni predebel. Gotovo velja neka zveza med številom delcev, ki jih detektor prešteje v sekundi, in med debelino merjenca. Če to zvezo s poskusom ugotovimo, lahko tudi tako merimo debeline. Ta način uporabljamo tedaj, ko nam nista dostopni obe

strani merjenca, tako na primer pri merjenju debeline sten cevi ali zaščitnih premazov na raznih kovinah.

Poglejmo si pojave, ki nam omogočajo merjenje debelin s povratnim sipanjem delcev β! Razmerje med odbitim in vpadajočim fluksom, ki je odvisno od debeline sipalnega materiala, imenujemo koeficient povratnega sipanja p. Ta rase z debelino. Vrednost, ki jo v limiti doseže, imenujemo koeficient nasičenega povratnega sipanja p_n. Le-ta je odvisen od vrstnega števila (Z) sipalca, kot kaže sl. 1. Na sl. 2 pa vidimo, kako debele plošče materiala so potrebne, da dosežemo nasičeno povratno sipanje. Z nekim izvorom lahko dobro merimo le debeline, ki ne presegajo polovice debeline nasičenega povratnega sipanja. Ker je p_n za različne snovi različen, lahko to izkoristimo za merjenje prevleke snovi A na podlagi B, če sta Z_A in Z_B med seboj dovolj



Sl. 1. Odvisnost koeficienta nasičenega povratnega sipanja od Z sipalca. Krivulja a je za difuzen, b pa za paralelen vpad delcev (1)

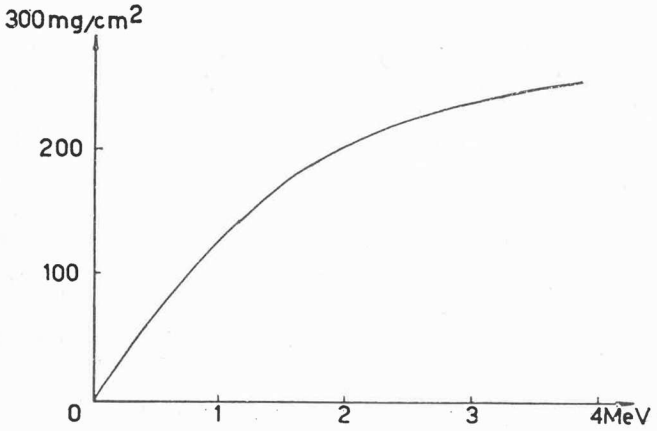
različna. Na plošči iz snovi B se namreč odbije $\Phi_0\, p_{nB}$ delcev v sekundi; če pa ploščo pokrijemo s tanko prevleko snovi A, se bo število odbitih delcev zvišalo in bo pri zelo debeli plasti A doseglo vrednost $\Phi_0\, p_{nA}$. Meritev prevlek bo tem lažja, čim bolj se razlikujeta koeficienta nasičenega povratnega sipanja za oba materiala. Za dobro meritev tudi ne sme biti prevleka debelejša od polovične debeline nasičenega povratnega sipanja. Tako n. pr. s ^{204}Tl (E_{max} = 0,87 MeV) merimo lahko 2 do 30 mg/cm^2 barve na železni pločevini s ^{90}Sr pa 10 do 150 mg/cm^2. Ugodni sta še naslednji kombinaciji, ki sta v praksi pomembni: Sn na Fe (pokositrena pločevina) in Se na Al (selenski usmerniki).

Sl. 3 kaže v prerezu merilno glavo, ki sem jo uporabljal za te vrste meritev.* V plastičnem scintilatorju je luknja z izvorom ^{204}Tl v svinčeni posodici. Pod scintilatorjem je fotopomnoževalka, vse skupaj pa varuje pred zunanjo svetlobo valj, pokrit s tankim aluminijastim okencem (d = 4 mg/cm^2). Električne sunke, ki jih daje fotopomnoževalka, najprej ojačujemo, nato pa jih vodimo

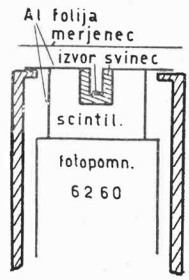
* Diplomsko delo pod vodstvom doc. Moljka, opravljeno v Inštitutu Jožefa Stefana leta 1957/58.

v pogostnostni merilnik (ratemeter), kjer debelino neposredno odčitavamo. Delovno napetost na fotopomnoževalki moramo imeti dobro stabilizirano, sicer meritve ne bi bile zanesljive. Izkoristek plastičnega scintilatorja za delce β je zelo visok, geometrija pa ugodna; saj zajamemo skoraj vse odbite delce. Oboje nam omogoči uporabo šibkih, nenevarnih izvorov, saj že 20 do 30 μC popolnoma zadostuje.

Debelin preko 200 mg/cm^2 (0,3 mm železa) pa s sevalci β žal ne moremo meriti, ker se bližamo debelini nasičenega povratnega sipanja tudi za energijsko najviše stoječe izvore. Lahko pa delamo z isto napravo, če vzamemo izvor γ, na primer ^{60}Co, ter kristal NaJ(Tl) namesto plastičnega scintilatorja. Zaradi večje prodornosti delcev γ se sicer zdi, da potrebujemo zelo močno svinčeno



S. 2. Debelina nasičenega povratnega sipanja v odvisnosti maksimalne energije sevalca β (1)

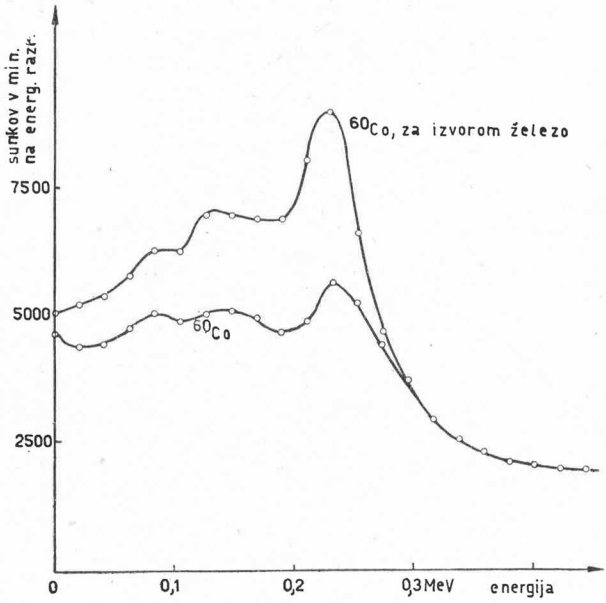


Sl. 3. Merilna glava za merjenje povratno sipanih delcev β

zaščito med izvorom in scintilatorjem, za kar pa ni prostora. Tej težavi se pa k sreči lahko izognemo s tem, da sipane žarke spektralno analiziramo.

Posnemimo kobaltov spekter s kristalom NaJ(Tl)! Kljub temu, da seva kobalt le delce z energijama $E_1 = 1{,}32$ MeV in $E_2 = 1{,}17$ MeV, dobimo zaradi različnih efektov v kristalu zvezen spekter sunkov. Če postavimo tik za izvor ploščo iz poljubnega materiala, se pa spekter spremeni; posebno zrase število delcev v energijskih razredih okoli 200 keV, manj pa v višjih in nižjih. Če izberemo za štetje le sunke, ki ustrezajo energiji fotona okoli 200 keV (to napravimo z enokanalnim analizatorjem), nas direktni fotoni (1,32 MeV, 1,17 MeV) razmeroma malo motijo. Oba spektra, posneta s kristalom NaJ(Tl) dimenzij $2\,r = 14$ mm kaže sl. 4. Tudi tukaj so potrebni le šibki izvori (20 μC), ker so kristali NaJ(Tl) za delce γ zelo občutljivi. Izkoristek našega kristala je za energijo 0,2 MeV enak 70 %, za energijo 1 MeV pa le 30 %. Vidimo, da je debelina kristala ravno primerno izbrana. Saj z večanjem debeline izkoristek za fotone z energijo 1 MeV (ki jih nočemo zaznavati) hitreje narašča kot pa za 0,2 MeV; po drugi strani pa sta pri tanjšem kristalu oba izkoristka približno sorazmerna z debelino, tako da ostane razmerje nespremenjeno.

Pri meritvi izvor merjencu vedno čim bolj približamo. Iz dela materiala tik nad izvorom pridejo tedaj v scintilator le fotoni, ki so se odbili pod velikimi koti; iz okolice pa tisti, ki so se odbili pod manjšimi koti. Te fotone pa lahko pri štetju v precejšnji meri izločimo, ker imajo višje energije. Tako lahko brez kolimacije ugotavljamo v materialu še majhne lokalne napake. Poskusi (2) so pokazali, da je še mogoče najti 3 mm globoko in 3 mm široko luknjo v 6 mm debeli steni.



Sl. 4. Spekter ^{60}Co, posnet s kristalom NaJ(Tl). Višja krivulja kaže prisotnost materiala tik za izvorom. Razredi okoli 200 keV so najgosteje zasedeni

4. UPORABNOST RAZLIČNIH IZVOROV

Gotovo je, da niso vsi izvori za merjenje neke debeline enako uporabni. Delci β s prenizko energijo se premočno absorbirajo, tako da z njimi ne moremo meriti. Nasprotno pa curek delcev β z visoko energijo pri prehodu skozi tanko ploščo premalo oslabi, da bi mogli oslabitev dobro meriti. Da ne bomo navezani le na občutek, ki pogosto vara, si bomo poiskali računsko oceno za uporabnost različnih izvorov. Poglejmo, kolikšno relativno napako napravimo pri meritvi ob danih pogojih! Če napravimo pri enaki meritvi z drugim izvorom manjšo napako, je ta izvor gotovo za ta primer ugodnejši.

Pojemanje curka delcev β ali γ se da pri prehodu skozi snov dovolj dobro opisati s funkcijo:

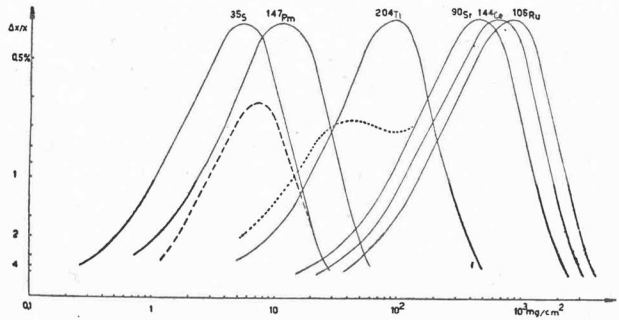
$$\Phi = \Phi_0 \, e^{-\mu x}$$

kjer pomeni Φ_0 vstopajoči fluks (število delcev na sekundo), Φ fluks v plošči v globini x, μ pa absorpcijski koeficient, ki je odvisen od energije delcev in od materiala, skozi katerega delci prehajajo. Z logaritmiranjem in odvajanjem te funkcije dobimo: $d\Phi/\Phi = -\mu \, dx$. Ker je število delcev, ki jih preštejemo

v času t, enako $N = \Phi t$, je $\Delta\Phi/\Phi = \Delta N/N$. Če nadomestimo diferenciale s končnimi spremembami, dobimo (približno): $\Delta N/N = -\mu \Delta x$. Napako Δx pri meritvi debeline x naredimo zaradi nenatančnega preštevanja razpadov, za katere velja Poissonova porazdelitev. Pri njej je relativna efektivna (standardna) napaka $\Delta N/N = 1/\sqrt{N}$. Ko upoštevamo še, da $N = N_0 e^{-\mu x}$, dobimo končno relativno efektivno napako izmerjene debeline:

$$\Delta x/x = -e^{-\mu x/2}/\mu x \sqrt{N_0} \qquad (1)$$

Absorpcijski koeficienti za različne izvore so znani (3), tako da lahko izračunamo relativno napako meritve v odvisnosti od debeline. Rezultate teh računov kažejo krivulje na sliki 5. Debelino poiščemo na vodoravni osi. Čim više sega na tem mestu krivulja, tem ugodnejši je ta izotop za meritev plošč z izbrano debelino.



Sl. 5. Napaka, ki jo napravimo, če merimo debeline snovi z absorpcijo delcev β različnih izvorov. N_0 je 10^5. Krivulja ^{90}Sr pripada dejansko ^{90}Y, ki je s ^{90}Sr v ravnotežju in seva delce β večjih energij. Pikčasta črta je posledica prisotnosti ^{90}Sr. Pri nizkoenergijskih izvorih se koristno območje zaradi debeline okenca na detektorju zoži, kar kaže črtkana črta za ^{35}S in debelino okenca 3 mg/cm²

5. KAKO MOČAN IZVOR POTREBUJEMO?

Delo z radioaktivnimi izotopi je vedno zvezano z neko nevarnostjo zaradi sevanja. Močni izvori, tudi če so dobro zaščiteni, nam gotovo delajo težave pri zamenjavi. Zaradi tega nikoli ne jemljemo močnejšega izvora, kot je za meritev s predpisano natančnostjo potreben. Zanima nas torej najmanjša potrebna jakost izvora, če so podani vsi pogoji meritve.

Kadar iščemo debelino nekega kosa, ki v merilniku miruje, štejemo sunke toliko časa, da dosežemo zahtevano natančnost meritve. Če imamo predpisan tudi čas meritve ,moramo vzeti dovolj močan izvor. Iz naše enačbe (1) dobimo potrebno število N_0, ki jih mora prešteti števec, če ni vzorca:

$$N_0 = e^{\mu x}/[\Delta x/x)^2 \mu^2 x^2] \qquad (2)$$

iz tega pa potrebno aktivnost izvora I (to je število razpadov na sekundo), če upoštevamo še izkoristek števca in prostorski kot Ω, pod katerim se vidi števec iz izvora:

$$I = 4 \pi e^{\mu x}/[\Delta x/x)^2 \mu^2 x^2 t \Omega \eta] \qquad (3)$$

Aktivnost lahko izrazimo z običajno enoto milicurie, če upoštevamo, da je $1\,\mathrm{mC} = 37 \cdot 10^6$ razpadov na sekundo.

Pri praktični uporabi navadno ne delamo z mirujočim vzorcem, ampak hočemo ugotoviti vsak odmik od neke predpisane vrednosti pri traku materiala, ki se premika med izvorom in detektorjem s hitrostjo v. Če se nam debelina na razdalji L lahko že občutno spremeni in če hočemo to spremembo ugotoviti, mora biti časovna konstanta pogostnostnega merilnika nekajkrat manjša od razmerja L/v.* Izhodna napetost pogostnostnega merilnika uravnava avtomatsko razmak med valji, med katerimi teče material. Da držimo vrednost ves čas na $\Delta x/x$ natančno, morajo valji čutiti le spremembo debeline materiala, ne pa tudi statističnega kolebanja sunkov. Gornja enačba ni več uporabna, saj je tam precejšen del odšitkov bolj zmoten, kot je to dopustno. Pisali smo namreč $\Delta N/N = 1/\sqrt{N}$, kar pomeni, da smo pri približni tretjini vseh meritev debeline dobili rezultate z večjo relativno napako, kot je izračunani efektivni $\Delta x/x$. V tej tretjini primerov bi se vedno sprožil mehanizem za korekturo debeline kljub nespremenjenemu merjencu. Očitno tukaj ne smemo predpisati $\Delta N/N = 1/\sqrt{\bar{N}}$, ker dobimo v tretjini primerov rezultat bolj zmoten, kot si to želimo. Vedeti hočemo, koliko razpadov moramo prešteti, da bo samo še skrajno malo verjetno, da bi bila napaka večja, kot jo po predpisih dopustimo.

Zaradi lažjega računanja nadomestimo Poissonovo porazdelitev z najbližjo Gaussovo. Verjetnost, da leži število sunkov pri meritvi, kjer jih pričakujemo N, med vrednostima N in $N + dN$, je približno enako

$$w(N)\,dN = (1/\sqrt{2\pi\bar{N}})\exp[-(N-\bar{N})^2/2\bar{N}].$$

Verjetnost za rezultat, ki bo bolj zmoten kot za $\Delta N/N$, pa je:

$$W(\Delta N) = 2/\sqrt{2\pi\bar{N}}\int_{\bar{N}+\Delta N}^{\infty} e^{-(N-\bar{N})^2/2\bar{N}}\,dN$$

Zahtevajmo na primer, da naj bo $W = 0{,}001$! Število sunkov, ki jih moramo za to prešteti, dobimo iz enačbe: $\Phi(\Delta N/\sqrt{2\bar{N}}) = 0{,}999$, kjer je $\Phi(x)$ Gaussov integral.** Iz tabel dobimo: $4\,N/\sqrt{2\bar{N}} = 2{,}3$. Torej

$$\Delta N/N = \sqrt{10{,}6/\bar{N}}.$$

Če zahtevamo še manjšo verjetnost, $W = 0{,}0001$ (to pomeni, da bo le vsak desettisoči odčitek zmoten za več kot za $\Delta N/N$), pa mora biti

$$\Delta N/N = \sqrt{14{,}5\,\bar{N}}.$$

---

* Dokazati se da (4), da je efektivna napaka posameznih vrednosti, ki jih pokaže pogostnostni merilnik s časovno konstanto $\tau = RC$, enaka, kot če bi prešteli posamezne sunke v času 2τ.

** $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-x^2}\,dx$. Glej n. pr. E. Whitakker, Robinson: Tečaj num. mat., str. 165.

Vidimo, da verjetnost za zmoten odčitek zelo naglo pada, če večamo aktivnost izvora. Ker je verjetnost 10^{-4} za prakso že dovolj majhna, zadostuje pri stalni avtomatični kontroli debeline približno 15-krat močnejši izvor, kot bi ga potrebovali pri enkratni meritvi z istimi pogoji.

Vsi ti računi veljajo le tedaj, kadar napako zakrivi samo statistična porazdelitev sunkov. Za industrijsko uporabo merjenja debelin to večinoma drži. Saj nas zanimajo podatki le za nekaj procentov natančno; na elektronske naprave pa se lahko zanesemo nekako do natančnosti 1 %. Šele če bi zahtevali natančnost rezultatov na blizu 1 % bi tudi nepopolnost teh naprav odločala o celotni napaki.

Literatura:

1. K. Siegbahn: Beta and Gamma-Ray Spectroscopy, Amsterdam, North-Holland publishing Comp. (1955), str. 7.
2. J. L. Putman in dr.: J. Sci. Instr., 32 (1955), 395.
3. C. E. Crompton, Geneva Conference on Peaceful Used of Atomic Energy (1955), Vol. 15., str. 121.
4. L. J. Schiff, R. D. Evans: Rev. Sci. Instr., 7 (1936), 456.
Pregled celotne literature o uporabi izotopov v industriji: Geneva Conference on Peaceful Uses of Atomic Enery (1955), Vol. 7, str. 53.

THICKNESS MEASUREMENT WITH β AND γ RAYS

(Summary)

The general principles of thickness measurements with beta and gamma rays are presented and the accuracy of the method discussed. The required activity, if the standard error in thickness is prescribed, is given by Eq. (1). (Only errors due to statistical fluctuations are assumed to be present.) If the activity is increased about 15 times, the probability, that the error would exceed the same prescribed limit, is reduced to about 10^{-4}, as shown in § 5. This is important for continuous control by a ratemeter.

The backscattering method has been applied to measure the thickness of lacquer or tin coatings upon iron. A measuring head, shown by Fig. 3, with a ^{204}Tl beta source, a plastic scintillator, and a EMI type 6260 photomultiplier have been used.

UTRINKI

Kje neki je ta planet? — Shapley pravi, da živijo ljudem podobna bitja na tretjem planetu iz družine rumenkaste zvezde na zunanjem robu značilne galaktike, kakršnih je v vesolju mnogo. *Ljudska pravica, 1. 9. 1958*

Antirevmatično perilo, narejeno iz rovilona (registrirana znamka). Trenje med vlakni tega edinstvenega, volni podobnega materiala proizvaja statični električni naboj, ki neprestano električno učinkuje na kožo. Ugodna strokovna mnenja francoskih zdravniških avtoritet. Pišite za podrobnosti in cenik (poceni). Lycenter Ltd., Wisbech. *Oglas v »Sunday Times, 31. 8. 1958.*

Vsako znanstveno odkritje začenja kot krivoverstvo in neha kot praznoverje. *Prosto po J. Huxleyu*

NOVICE

REŠEVANJE ENAČB Z ITERACIJO

Enačbe in sisteme enačb večkrat najhitreje rešujemo z iteracijo. Če iščemo koren X enačbe $y(x) = 0$, potrebujemo takšno funkcijo $G(x)$, da zaporedje približkov x_n, ki je definirano z iteracijsko formulo

$$x_{n+1} = G(x_n) \tag{1}$$

limitira vsaj pri dovolj dobro izbranem začetnem približku x_0 proti korenu X. Potem velja $G(X) = X$. Naj bo napaka n-tega približka ε_n. Iz iteracijske formule dobimo

$$x_{n+1} = X + \varepsilon_{n+1} = G(X + \varepsilon_n) = G(X) + G'(X)\,\varepsilon_n + \tfrac{1}{2}\,G''(X)\,\varepsilon_n^2 +$$

iz tega pa

$$\varepsilon_{n+1} = G'(X)\,\varepsilon_n + \tfrac{1}{2}\,G''(X)\,\varepsilon_n^2 + \ldots \tag{2}$$

Zaporedje približkov x_n konvergira tem hitreje proti korenu X, čim več začetnih odvodov funkcije $G(x)$ je v točki X enako nič.

Če $G'(X)$ ni nič, je ε_{n+1} približno sorazmeren ε_n. O takšni iteraciji pravimo, da je prvega reda.[1] Primer za to je iteracija po spirali oziroma po stopnicah[2] (glej sliko).

Naj bo $G'(X) = 0$, $G''(X)$ pa različen od nič. Potem je ε_{n+1} približno sorazmeren ε_n^2. Takšno iteracijo imenujemo iteracijo drugega reda. Primer za to je iteracija po znani Newton-Raphsonovi formuli:[3]

$$x_{n+1} = G(x_n) = x_n - y(x_n)/y'(x_n) \tag{3}$$

Pri tem je x_{n+1} presečišče tangente v točki (x_n, y_n) z osjo x. Drugi dovod $G''(X) = [y''(X)/y'(X)]^2$ je po navadi različen od nič. Čim manjši je $y''(X)$, tem hitreje bo ta iteracija konvergirala. Vzemimo namesto funkcije $y(x)$ funkcijo[4]

$$z(x) = y(x)/\sqrt{y'(x)} \tag{4}$$

Ta funkcija ima iste ničle kot $y(x)$, poleg tega pa je tudi $z''(X)$ enak nič. Zato je iteracija po formuli

$$x_{n+1} = x_n - \frac{z(x_n)}{z'(x_n)} = x_n - \frac{2\,y'(x_n)\,y(x_n)}{2\,y'^2(x_n) - y(x_n)\,y''(x_n)} \tag{5}$$

tretjega reda.

Podobno iteracijsko formulo tretjega reda dobimo, če skozi točko (x_n, y_n) potegnemo pritisnjeni krog ali parabolo in vzamemo za nov približek presečišče tega kroga oziroma parabole z osjo x.

Iteracijsko formulo poljubnega reda pa dobimo, če razvijemo x po potencah y.* Dobimo

$$X = x_n - \frac{y_n}{y'_n} - \frac{y''_n}{2y'_n}\left(\frac{y_n}{y'_n}\right)^2 - \frac{3\,y_n''^2 - y_n'\,y_n'''}{6\,y_n'^2}\left(\frac{y_n}{y'_n}\right)^3 - \ldots \tag{6}$$

Namesto $y\,(x_n)$ smo pisali y_n in enako za odvode. Če prenehamo vrsto s členom, ki ima potenco $(y_n/y_n')^N$, je iteracija $(N + 1)$-tega reda.

V vseh teh iteracijskih formulah nastopajo ulomki. Ti so pri računanju z računskimi stroji večkrat nezaželeni. Za reševanje algebraičnih enačb pa lahko dobimo iteracijske formule brez ulomkov.[5] Naj bo

$$G\,(x) = x - P\,(x)\,y\,(x) \tag{7}$$

kjer sta $P\,(x)$ in $y\,(x)$ polinoma. Polinom $y\,(x)$ naj ima samo enojne ničle, $P\,(x)$ pa je še poljuben. Če je X koren enačbe $y\,(x) = 0$, je pogoju $G\,(X) = X$ zadoščeno. Če hočemo, da bo gornja iteracijska formula drugega reda, mora veljati

$$G'\,(X) = 1 - P\,(X)\,y'\,(X) = 0.$$

Temu pogoju ustrežemo tako, da postavimo

$$1 - P\,(x)\,y'\,(x) = Q\,(x)\,y\,(x)$$

oziroma

$$P\,(x)\,y'\,(x) + Q\,(x)\,y\,(x) = 1 \tag{8}$$

kjer je $Q\,(x)$ zopet neki polinom.

Ker sta si polinoma $y\,(x)$ in $y'\,(x)$ tuja, lahko vedno dobimo dva taka polinoma $P_1\,(x)$ in $Q_1\,(x)$, da je pogoju (8) zadoščeno. Kako določimo $P_1\,(x)$ in $Q_1\,(x)$, si oglejmo na primeru enačbe $y\,(x) = x^4 - x - 1$. Iz (8) dobimo

$$P_1\,(x) = \frac{1 - (x^4 - x - 1)\,Q_1\,(x)}{4\,x^3 - 1} = -\tfrac{1}{4}\,x Q_1\,(x) + \frac{1 + (\tfrac{3}{4}\,x + 1)\,Q_1\,(x)}{4\,x^3 - 1}$$

Ker sta $P_1\,(x)$ in $Q_1\,(x)$ polinoma, mora biti tudi ulomek na desni strani polinom. Označimo ga z $R\,(x)$. Na isti način kot za $P_1\,(x)$ dobimo za $Q_1\,(x)$

$$Q_1\,(x) = \frac{(4\,x^3 - 1)\,R\,(x) - 1}{\tfrac{3}{4}\,x + 1} = \frac{16}{3}\left(x^2 - \frac{4}{3}\,x + \frac{16}{9}\right) R\,(x) - \frac{(283/27)\,R\,(x) + 1}{\tfrac{3}{4}\,x + 1}$$

Sedaj lahko postavimo $R\,(x) = -27/283$ in dobimo:

$$Q_1\,(x) = -\frac{144}{283}\left(x^2 - \frac{4}{3}\,x + \frac{16}{9}\right), \quad P_1\,(x) = \frac{9}{283}\left(4\,x^3 - \frac{16}{3}\,x^2 + \frac{64}{9}\,x - 3\right)$$

---

* Najprej poiščemo inverzno funkcijo $x = x\,(y)$, potem razvijemo $x\,(y_n + h)$ po Taylorjevi vrsti. Za $h = -y_n$ dobimo $x\,(0) = X$, $x\,(y_n) = x_n$ in iz tega formulo (6).

Tako dobimo iteracijsko formulo drugega reda

$$G(x) = x - \frac{9}{283}\left(4x^3 - \frac{16}{3}x^2 + \frac{64}{9}x - 3\right)(x^4 - x - 1) \tag{9}$$

Namesto tako določenih $P_1(x)$ in $Q_1(x)$ lahko vzamemo

$$P(x) = P_1(x) + R(x)\,y(x) \text{ in } Q(x) = Q_1(x) - R(x)\,y'(x)$$

pri čemer je $R(x)$ neki polinom. Tega sedaj lahko določimo tako, da je iteracijska formula

$$G(x) = x - P_1(x)\,y(x) - R(x)\,y(x)^2$$

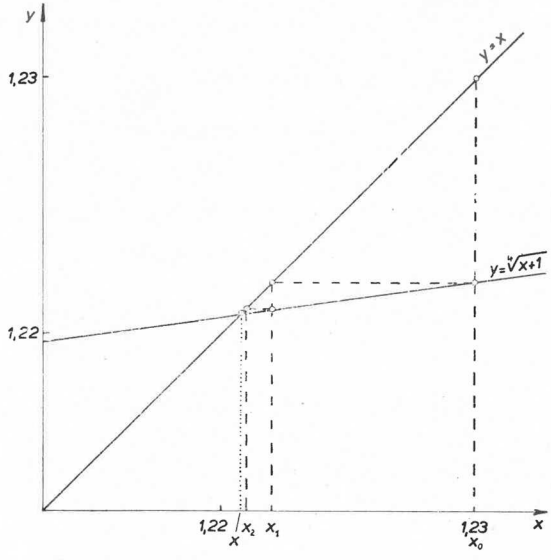
tretjega reda. Pogoju $G'(X) = 0$ je že zadoščeno. Pogoj $G''(X) = 0$ pa nam dá

$$P_1(X)\,y''(X) - 2\,P_1(X)\,y'(X) - 2\,R(X)\,y'^2(X) = 0$$

Kot prej zadostimo temu pogoju tako, da postavimo

$$P_1(x)\,y''(x) - 2\,P_1'(x)\,y'(x) - 2\,P_2(x)\,y'^2(x) = Q_2(x)\,y(x)$$

kjer smo namesto $R(x)$ pisali $P_2(x)$, $Q_2(x)$ pa je zopet neki polinom. $P_2(x)$ in $Q_2(x)$ določimo podobno kot $P_1(x)$ in $Q_1(x)$. Na ta način lahko dobimo iteracijske formule poljubnega reda.



Kot zgled[3] izračunajmo pozitivni koren enačbe $x^4 - x - 1 = 0$. S poskušanjem na logaritmičnem računalu hitro dobimo, da je koren približno 1,23. Za iteracijo po stopnicah napišemo enačbo v obliki $x = \sqrt[4]{x+1}$. Pri začetni vrednosti $x' = 1{,}23$ dobimo naslednje vrednosti približkov: $x_1 = 1{,}222$, $x_2 = 1{,}221$. Z vsakim korakom dobimo približno eno novo pravilno decimalno mesto (glej sliko).

Z iteracijo po Newton-Raphsonovi formuli dobimo: $x_0 = 1{,}23$, $x_1 = 1{,}2209$, $x_2 = 1{,}220744$. Zadnji približek je že pravilen na šest decimalnih mest. Pri dovolj dobro izbrani začetni vrednosti x_0 lahko večkrat aproksimiramo $y_0' = y_n'$, ne da bi s tem kaj posebno poslabšali konvergenco približkov, računanje pa je precej krajše. Podobno dobimo z iteracijo po formuli (9): $x_0 = 1{,}23$, $x_1 = 1{,}2204$, $x_2 = 1{,}220744$. Z iteracijo po formuli (5) pa dobimo: $x_0 = 1{,}23$, $x_1 = 1{,}220745$. Ker je za ta primer $\varepsilon_{n+1} = 1{,}25\,\varepsilon_n^3$ dobimo iz $\varepsilon_0 \cong x_0 - x_1 = 9{,}25 \cdot 10^{-3}$ za $\varepsilon_1 = 0{,}99 \cdot 10^{-6}$, za ε_2 pa $1{,}2 \cdot 10^{-18}$. Druga iteracija po formuli (5) bi nam dala koren, pravilen na praktično osemnajst decimalnih mest.

V večini primerov se zadovoljimo s približki, ki so pravilni na nekaj decimalnih mest. Takrat računamo z iteracijo po stopnicah oziroma spirali ali ponavadi bolje po Newton-Raphsonovi iteracijski formuli. Kadar pa želimo dobiti veliko natančnost v čim manj korakih, računamo z iteracijskimi formulami višjih redov. Iteriranje po formuli (9) se izplača le pri rutinskem delu, ko imamo na primer opravka z računanjem ničel polinoma za različne vrednosti koeficientov.

Sergej Pahor

Literatura

1. D R Hartree: Notes on Iterative Processes. Cambridge Phil. Soc., Proc., **45**, (1949), str. 230.
2. E. Whittaker in G. Robinson: Tečaj numeričke matematike, str. 76.
3. I. Vidav: Višja matematika, I. del, str. 512—515.
4. W. B. Jordan: An Iterative Process. Mathematical Tables and other Aids to Computation 1951, str. 183.
5. C. Domb: On Iterative Solutions of Algebraic Equation. Cambridge Phil. Soc., Proc., **45** (1949), str. 237.

ŠTEVILO π NA DESET TISOČ DECIMALK

Pred kratkim je G. E. Felton izračunal število π na 10 000 decimalk natančno. Seveda ni računal samo s svinčnikom in papirjem, temveč z elektronskim računskim strojem srednje velikosti Ferranti Pegasus. Stroj je vsega skupaj delal 33 ur. Z navadnim računskim strojem bi potrebovali za to delo okoli 100 let. Že l. 1949 so s strojem ENIAC določili π na 2035 decimalk, leta 1955 pa s strojem NORC na 3089 decimalk in sicer v 13 minutah. Z računskimi stroji, ki so zdaj v načrtu, bo mogoče v manj kakor eni uri izračunati število π na deset tisoč decimalk. Domnevajo, da je število π normalno, to se pravi, da je ena desetina njegovih decimalk enaka 0, ena desetina enaka 1 itd. Feltonov približek bo lahko to domnevo le podkrepil.

I. V.

JURIJ VEGA V LUČI SOVJETSKIH ZGODOVINSKO-MATEMATIČNIH RAZISKAV

Številnim domačim in tujim Vegovim biografom se je v novejšem času pridružil še I. J. Depman iz Sovjetske zveze. Ta je l. 1953 v šestem zvezku *Istoriko-matematičeskie issledovanija,* ki jih izdaja *Gosudarstvennoje izdatel'stvo tehniko-teoretičeskoj literaturi* v Moskvi, napisal razpravo z naslovom *Zamečatel'nye slavjanskye vyčisliteli G. Vega i I. F. Kulik.* V njej je življenjepisu Vege odmerjenih 21 strani. Poleg besedila prinaša med ilustracijami še Vegov portret, naslovni strani prve in druge izdaje najstarejših ruskih logaritemskih tablic, naslovno stran prvega Vegovega logaritmovnika in latinsko naslovno stran Thesaurusa. Spis je razdeljen na življenjepisne podatke, na vojaške uspehe, na označbo Predavanj in logaritemskih tablic ter na znanstveno delovanje; konča pa se s kratko oznako Vegovega značaja.

Ugotoviti moramo, da je to ena najobsežnejših in najboljših tujih Vegovih biografij, čeprav se pisec opira le na Kaučiča, Cantora, Doehlemanna in Vrečka. Takoj v uvodnem odstavku ugotavlja, da je po svetu od tistih, ki uporabljajo tablice »barona Vege«, malo takih, ki hkrati vedo, da je bil njihov avtor Slovan ter da je dobil baronski naziv šele v 46. letu svoje starosti zaradi znanstvenih in vojaških zaslug. Navaja pravilen rojstni datum in opozarja na zmedo, ki jo je vnesel Poggendorff v skoraj vse tuje biografije z navedbo napačne letnice.[1] Videti je, da je vestno in skrbno preveril vse podatke in navedbe drugih biografij. Spretno se je tudi izognil nekaterim netočnostim, ki so pri Kaučiču in pri Vrečku. Dodal pa je izsledke svojih preučevanj, zlasti še podatke o razširjenosti Vegovega logaritmovnika v ruščini. Ti rezultati pa so novi in za nas zanimivi.

Da bi dognal, kako se je razširil Vegov sedem-decimalni priročnik v ruskem prevodu, je Depman preiskal biblioteke v Leningradu in Moskvi. Ugotovil je, da je v njih sedemnajst raznih izdaj v ruščini, ki so vse izšle v založbi Weidmann v Berlinu v letih od 1859 do 1911 in ki jih je ta knjigarna pošiljala v Rusijo. Razen teh so Vegove tablice, popolnoma enake berlinskim izdajam, izšle še v letih 1879, 1882, 1885 in 1889 v založbi književnega magazina V. Dumnova v Moskvi ter v letih 1896 in 1910 v založbi M. O. Wolfa v Petrogradu in Moskvi, vse s predgovorom A. F. Malinina. — Kakor je znano, so Vegov logaritmovnik začeli prirejati v raznih prevodih šele po letu 1856, ko ga je Bremiker izpopolnil. V ruščini pa je izšel prvi prevod že prej, in sicer leta 1835 v Petrogradu, toda skrajšan za šolsko uporabo. Priredil ga je F. I. Busse (1794—1859). Naslednje izdaje so nato izšle v letih 1846, 1855 ter še šestkrat do leta 1885. — V sovjetski dobi je izšla popolna izdaja Vegovega priročnika do leta 1949 štirikrat v Moskvi, Leningradu in Novosibirsku. Priredil jo je in z razlagami k tablicam opremil profesor V. Visocki. — K vsem tem ugotovitvam pripominja Depman: »Ta seznam izdaj pa ni popoln. Če pri tem upoštevamo, da mnogo drugih ruskih izdaj logaritemskih tablic v devetnajstem in dvajsetem stoletju temelji v glavnem na Vegovih tablicah, potem nam šele postane jasen pomen dela tega slovanskega matematika za rusko šolo.«

Depman tudi precej obširneje kakor drugi biografi razlaga Vegove razprave. Do sedaj smo vedeli, da je Vega o številu π, ki ga je izračunal na

---

[1] Poggendorff, zvezek II, 1863, navaja napačno in zanika pravo rojstno letnico takole: geb. 1756 (nicht 1754). — Isto napačno letnico ima tudi Velika sovjetska enciklopedija iz l. 1951.

140 decimalk, izdal leta 1795 poseben spis v časopisu petrograjske Akademije. Depman nam sedaj podaja o tem spisu obširno pojasnilo. Delo je bilo predloženo Akademiji 20. avgusta 1789. V časopisu pa so natisnili šest let pozneje le izvleček iz tega dela s pripombo, da se Akademiji ne zdi primerno, da bi tiskala v celoti Vegove dolge in utrudljive račune. Omejila se bo le na objavo razvrstitve za π, ki jo je avtor uporabil. V opombi uredništvo opozarja, da vrsti, s katerima je tu izražen π, sicer konvergirata zelo hitro, vendar so števci in imenovalci, ki nastopajo v ulomkih, zelo neprikladni za numerično računanje. Pravi, da je Euler izrazil π z drugima dvema vrstama[2], ki sicer ne konvergirata tako hitro kakor Vegovi, vendar imata strukturo, ki je bolj pregledna in prikladna za numerično računanje. Depmanov zaključek je po smislu tale: Primerjanje 140 decimalk, ki jih je dobil Vega, in 127 decimalk, ki so jih do takrat izračunali razni avtorji z nedvomno točnimi vrednostmi za π našega časa, nam pokaže, da je Vega s tem računom popravil napake prejšnjih avtorjev in prvi izračunal π na 140 decimalk. — Nadalje navaja Depman Vegove kritične opazke glede francoskega republikanskega koledarja in mu izraža priznanje, da je propagiral metrski sistem.

Vse pa kaže, da avtor te biografije ni dognal Vegove prave domovine: Ljubljano imenuje dosledno »Ljubljanice«. Za »Vego« — pravilneje »Veho« — pravi, da je »slovinskoje slovo« (slovinska beseda). Trikrat je napisal, da je bil Vega iz družine oziroma sin »slovinskogo krestjanina« (slovinskega kmeta), enkrat pa celo, da so bili njegovi starši in sorodniki revni »rusinskije krestjane« (rusinski kmetje). Tako bo bralec sklepal, da je bil Vega nekakšen severni Slovan. Saj žive Slovinci na Poljskem, tako imenovani Rusini pa v Ukrajinski SSR. — Na te naše pripombe je I. J. Depman odpisal med drugim naslednje: »Moj članek o Vegi je bil prvi o njem v ruščini. Predvsem sem hotel seznaniti naše bralce s tem znamenitim matematikom; zato so mnoga druga vprašanja o njem ostala ob strani. Napake, do katerih je prišlo, bom skušal popraviti ob prvi priložnosti.« — Upoštevati moramo tudi, da je avtor črpal biografske podatke iz gradiva, ki mu je bilo dostopno, to pa je bilo spisano v stari Avstriji, ko so pisci rod ozir. narodnost ali zamolčali ali pa skopo in nejasno navedli.

Kako uspešno se Depman poglablja v zgodovinsko-matematične raziskave, dokazujejo naslednje njegove knjige in razprave zadnjih let:

Mery i metričeskaja sistema. Detgiz, Moskva-Leningrad 1953.

Rasskazy o matematike. Detgiz, Leningrad 1954.

O merah i metričeskoj sisteme. Znanije, Moskva 1955.

Vozniknovenije sistemy mer i sposobov izmerenija veličin. Učpedgiz, Moskva 1956.

»Geometrija praktika«. Ist.-mat. issledovanija VIII, Moskva 1955.

Pervyj russkij doktor matematičeskih nauk parižskogo universiteta. Prav tam.

J. A. Littrov — učitel' N. J. Lobačevskogo. Ist.-mat. issledovanija IX, Moskva 1956.

K. F. Gauss i Derptsko-jurjevskij universitet. Voprosy istoriji jestestvoznanija i tehniki, Moskva 1956.

Pobeditel' čisla π — Ferdinand Lindemann. Učenyje zapiski leningradskogo gosudarstvennogo pedagogičeskogo instituta. Fiz.-mat. fakultet, T. XVII, vyp. 2.

Vosstanovlenije prioriteta B. Bolzano. Prav tam.

Jože Povšič

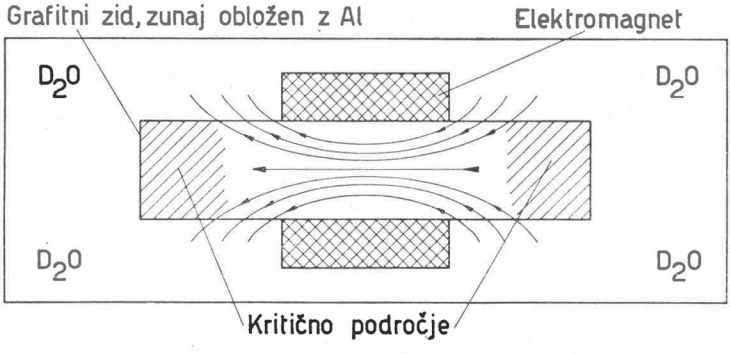
---

[2] Euler je predložil zadevni spis isti Akademiji že leta 1779, objavila ga je pa šele l. 1798.

SANJARJENJE Z ODPRTIMI OČMI?

Dandanes se izkorišča jedrska energija le preko toplotnih strojev, ki črpajo toploto iz jedrskih reaktorjev. Pri tem je precej težav. Sredstvo, ki toploto odvaja, je večkrat močno radioaktivno in zato ne sme priti v neposreden stik s toplotnim strojem. Potreben je torej vmesni toplotni izmenjevalec, ki prejema toploto od reaktorskega hladilnega sredstva (voda, CO_2, zrak, tekoče kovine) in jo predaja toplotnemu stroju. Toplotni stroji (kotel s paro in turbina) so že sami po sebi okorni, toliko bolj pa, če pride zraven še zaščita proti radioaktivnosti ter toplotni izmenjevalec. Reaktorsko hladilno sredstvo moti delovanje reaktorja in zahteva dodatno povečanje njegove velikosti ter množine goriva. Vsi ti problemi dajejo jedrski energiji skoraj neeleganten videz. Zato se ne smemo čuditi prizadevanjem, kako bi jedrsko energijo izkoriščali bolj neposredno in bolj učinkovito.

Lansko leto so fiziki s kalifornijske univerze objavili preliminarne račune za reaktor s plazmo, ki naj bi neposredno dajal električno energijo. Ideja sama je zanimiva, čeprav je do praktične izvedbe še zelo daleč.



Shema reaktorja na nihajočo plazmo

Sredica tega reaktorja ima obliko podolgovatega valja, ki je polnjen s plinastim U^{235} pri visoki temperaturi (glej sliko). Valj je obdan s težkovodnim reflektorjem, ki obenem služi za hlajenje. Gostota uranskega plina v posodi naj bo tolikšna, da je sistem nekoliko podkritičen, če je plin enakomerno porazdeljen po vsej posodi. Le pri neenakomerno porazdeljenem plinu se lahko zgodi, da postane del reaktorja (tam, kjer je gostota večja) kritičen ali celo nadkritičen (to pomeni, da se tam nevtroni razmnožujejo). Največ možnosti za nadkritično reakcijo imata področji na konceh, kjer je posoda popolnoma obdana z reflektorjem. Srednji del posode je glede tega v slabšem položaju, zlasti še zaradi absorpcije nevtronov v tuljavah (glej spodaj).

Če torej na kak način uranski plin na eni strani posode dovolj zgostimo, pride tam do nadkritične verižne reakcije. Če se pri tem sprosti dovolj toplote, še preden se plin v kritičnem področju utegne raztegniti zaradi povišane temperature, nastane eksplozijski val, ki potuje z veliko hitrostjo proti drugemu koncu posode. Zaradi vala se plin na drugem koncu posode stisne do nadkritičnosti, nakar se igra ponovi v obratni smeri. Dobimo torej stoječe valovanje (podobno kot v zaprti piščali), ki je lahko nedušeno, če je sistem pravilno dimenzioniran; lahko pa celo amplituda narašča.

Energijo tega valovanja lahko izkoristimo za električno delo. To je možno zato, ker je plin zaradi visoke temperature skoraj popolnoma ioniziran (tak plin imenujemo plazmo) in zato električno prevoden. Na sredi valjaste posode ustvarimo z elektromagneti stalno vzdolžno magnetno polje. Val plazme »reže« silnice tega polja le ob vstopu in izstopu iz polja. Pri tem se v plazmi inducira tok, ki je ob vstopu v polje (po Lenzovem pravilu) antiparalelen s tokom, ki napaja magnet, pri izstopu pa paralelen. Inducirani tok ustvari dodatno magnetno polje, ki je zaradi nihanja plazme izmenično. To izmenično polje nam v zunanji tuljavi inducira izmenično napetost, ki jo lahko izkoristimo za delo. Na ta način se torej del kinetične energije, ki jo ima plazma, izkoristi za električno delo. Kinetična energija se ustrezno zmanjša (magnetno zaviranje). Izkoristek pa ni popoln zaradi upora plazme (del električne energije preide v Joulovo toploto).

Takšna je ideja. Kako pa je s praktično izvedbo?

Učinek bo tem večji, čim višja bo temperatura uranskega plina; višji temperaturi ustreza večja hitrost plazme med ekspanzijo in tudi višja stopnja ionizacije. V vsakem primeru mora biti temperatura plina višja od 3900 °K (vrelišče plina pri 1 atm). Pri takšnih pogojih je lahko stena posode le iz grafita, ki prenese temperaturo tudi čez 3500 °K. Seveda še ni jasno, ali bo grafit zadostil tudi ostalim, zlasti kemičnim pogojem. Središčna temperatura uranskega plina bi potem bila blizu 6500 °K, če predpostavimo, da oddaja plin toploto le s sevanjem in da seva kot črno telo (povprečna prosta pot fotonov v plinu je mnogo manjša kot dimenzija kritičnega področja). Pri tem računamo z gostoto toplotnega toka blizu 1 kW/cm^2. Grafitni zid naj bi od zunaj hladili s težko vodo. Zato mora biti debel okrog 1,3 cm. (Toplotna prevodnost grafita pri visokih temperaturah je približno 0,1 kal/cm st sek ali 24 W/m st.) Zaradi krhkosti grafitnega zidu so izbrali 1 atm kot najprimernejši tlak.

Doslej še ni nobenega natančnejšega projekta, ampak so bili narejeni le približni računi, katerih rezultati podajajo le velikostno stopnjo posameznih količin. Predpostavili so, da se plin po prihodu vala stisne na približno dvakratno gostoto. Zaradi nenadnega povečanja temperature bo del plina izletel iz kritičnega področja s hitrostjo, ki je približno enaka dvakratni hitrosti zvoka v »hladnem«, to je nestisnjenem plinu. Opisanim razmeram ustreza maksimalna hitrost plazme nekako 1600 m/sek. Ustrezajoča stopnja ionizacije bi bila okrog 87 % in električna prevodnost 26 $(\Omega\,\mathrm{cm})^{-1}$ (prevodnost bakra je pa $5 \cdot 10^5\ \Omega^{-1}\,\mathrm{cm}^{-1}$). Nadalje so vzeli, da se pri prehodu magnetnega polja z gostoto 0,3 Vs/m^2 zmanjša hitrost plazme na polovico začetne hitrosti. Torej naj plazma izgubi okrog 75 % svoje kinetične energije. Del te energije se uporabi v plazmi sami v obliki Joulove toplote, preostali del pa je na razpolago za koristno električno delo. Procent izgubljene energije bo tem manjši, čim večji bodo hitrost plazme, stopnja ionizacije ter polmer valja.* Če izberemo 70 %-ni izkoristek kot najprimernejši, bi moral valj imeti polmer okrog 4 m! Oddana električna moč pa bi dosegla okrog 480 MW.

---

* Bežen račun pokaže, da ima v plazmi inducirani tok I enako stopnjo velikosti kot produkt $v\,B_0\,\sigma\,r^2$ (B_0 = gostota stalnega magnetnega polja, r = polmer valja, σ = prevodnost plazme). Dodatno magnetno polje, ki ga povzroči ta tok, ima v območju tuljav gostoto s stopnjo velikosti $B \sim \mu_0\,I/r$. Energija, ki jo odda prostorninska enota plazme pri enkratnem prehodu skozi polje magneta, je približno tolikšna kot gostota energije omenjenega dodatnega polja, to je $B^2/2\,\mu_0 \sim \frac{1}{2}\,\mu_0\,v^2\,B_0^2\,\sigma^2\,r^2$. Po drugi strani ima v enoti volumna proizvedena Joulova toplota enako velikostno stopnjo kot $v\,B_0^2\,\sigma\,r$, če računamo, da meri čas vstopanja v polje nekako r/v. Kvocient Joulove toplote in izkoriščene energije bi imel potemtakem stopnjo velikosti $(\frac{1}{2}\,\mu_0\,v\,\sigma\,r)^{-1}$.

Pri izbiri gostote uranskega plina in dolžine valjaste posode se moramo ravnati po verižni reakciji, ki naj da potrebno energijo v dovolj kratkem času, da bo nastal eksplozijski val. Če računamo, kot da ima kritično območje uranskega plina obliko krogle s polmerom valja in če si mislimo, da prihaja val od nasprotne strani valja, se mora energija sprostiti v času, ki ga rabi val, da po odboju od stene posode zapusti kritično področje (to je približno v času, ki ga zvok rabi za prehod dvakratnega premera posode). V našem primeru se mora energija sprostiti v času do 0,01 sek. Če naj v tem času nastaneta recimo dve generaciji nevtronov, mora biti v vsakem kubičnem centimetru vsaj $5 \cdot 10^{17}$ atomov U^{235}. Zaradi svoje majhne gostote je uranski plin za nevtrone skoraj prozoren. Posoda pa je obdana z odličnim reflektorjem, ki nevtrone zavira in jih vrača v plinasto sredico. S tem se povečuje število cepitev. Nevtroni, ki so po povratku iz reflektorja že termični, še večkrat preletijo uranski plin, preden v njem doživijo trk. To je tudi vzrok, zakaj ostane večina nevtronov v kritičnem področju tudi potem, ko precejšen del plina odide z eksplozijskim valom. Nevtroni, ki so odšli z valom, bodo imeli na poti do nasprotnega kritičnega področja dovolj priložnosti, da se izgube ali absorbirajo. Medtem se v kritičnem področju zaradi manjše mase občutno poveča optična propustnost, tako da se lahko plin dovoljno ohladi še pred povratkom vala. Približna ocena zahteva skoraj 50 m dolg valj (6 premerov). Pri tej dolžini bi bila frekvenca nihanja okrog 20 Hz. Upajo, da bo mogoče na ta način obdržati povprečno temperaturo in povprečni nevtronski fluks na stalnem nivoju.

Poglejmo še, kolikšen skupni izkoristek so napovedali. Val naj bi odnesel okrog 80 % z razcepi uranovih atomov nastale energije, od tega 50 % v obliki kinetične energije, ostalo kot sevalno energijo. 75 % kinetične energije odvzame magnetno polje; 70 % te odvzete energije bi lahko opravljalo delo. Torej bi bil skupni izkoristek konec koncev le okrog $0{,}80 \cdot 0{,}50 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}70 = 0{,}2 = 20\,\%$. Seveda so aproksimacije pri določitvi posameznih količin hude in imajo objavljene številke pomen le v okviru velikostnega reda.

O dobrih in slabih lastnostih predlaganega stroja bi se dalo povedati naslednje: Novi reaktor nima gibljivih mehanskih delov (črpalk); tlak v posodi ni velik, tako da je nevarnost ob eventualni eksploziji manjša; električno energijo daje neposredno. Verjamejo, da bodo dvignili celokupni izkoristek na 30 do 40 %. Današnji reaktorji za moč (n. pr. Calder Hall in podobni) pa bodo lahko dosegli kvečjemu 30 %.

Seveda je odprto vprašanje, kako preprečiti, da uranski plin pri tako visokih temperaturah (do 6500 °K) ne bi kemično napadal grafitnega zidu. Najslabše pa je, da so že najmanjše potrebne dimenzije tako velike, da ne moremo delati predhodnih poskusov v manjšem merilu. Že posoda sama je velika (8 × 50 m), debelina težkovodnega reflektorja (1—2 m) in potrebne zaščite pa razširi reaktor preko dimenzij običajnih reaktorjev. Poseben problem predstavlja še stabilnost nihanja plazme, ki tudi še ni raziskana.

Prav lahko se zgodi, da bo opisana ideja ostala le ideja, torej — sanjarjenje z odprtimi očmi.

Rudi Kladnik

Literatura: S. A. COLGATE, R. L. AAMODT: Plasma Reactor Promises Direct Electrical Power. Nucleonics, **15**, No. 8, 50 (1957).

ZBOROVANJE MEDNARODNE UNIJE ZA FIZIKO

(Izvleček iz poročila)

Mednarodna zveza za čisto in uporabno fiziko, ki je bila ustanovljena leta 1922, je imela v Rimu od 17. do 20. septembra 1957 svojo deveto generalno zborovanje. Le-to je potrdilo sprejem novih članov, to je odborov za fiziko ZSSR, Avstrije in Bolgarije. S tem se je število držav, ki sodelujejo pri uniji in med katerimi je tudi Jugoslavija, povečalo na 30.

Izvršni odbor Zveze za obdobje 1957—1960 so sestavili takole: predsednik: E. Amaldi (Rim), prejšnja predsednika: N. F. Mott (Cambridge, Anglija) in M. Siegbahn (Stockholm); podpredsedniki: J. de Boer (Amsterdam), R. B. Brode (Berkeley), M. Kotani (Tokio), J. H. Van Vleck (Cambridge, Mass.), G. Herzberg (Ottawa). A. Joffe (Leningrad), E. Rasmussen (Kopenhagen), H. Staub (Bern), F. C. A. Trendelenburg (Erlangen) in J. Weyssenhoff (Krakov); generalni tajnik — P. Fleury (Paris).

Osem specialnih komisij ima nalogo, da razvijajo mednarodno sodelovanje na naslednjih področjih: simboli, enote, nomenklatura; termodinamika in statistična mehanika; kozmični žarki; zelo nizke temperature; publikacije; akustika; fizika trdnih snovi (A. splošne raziskave, B. polprevodniki, C. magnetizem); fizika visokih energij. Ali naj se ustanovi komisija za jedrsko fiziko (nizke energije) in morda tudi komisija za elektroniko, o tem si še niso na jasnem. Poleg omenjenih komisij obstaja tudi Mednarodna komisija za optiko, ki je članica Unije za fiziko. Zveza je zastopana v Mednarodnem svètu znanstvenih zvez in v mešanih komisijah tega Svèta za spektroskopijo, za uporabo radioaktivnosti in ionosfero.

Na zborovanju je bilo sklenjeno, da prevzame Zveza pokroviteljstvo nad naslednjimi sestanki (kolokviji), ki so predvideni za leto 1958: »Optika v metrologiji« (od 6. do 9. maja 1958 v Bruslju), »Mehanske lastnosti nekovinskih trdnih snovi« (od 19. do 26. maja v Leningradu), »Fizika trdnega stanja in njena uporaba v elektroniki in pri telekomunikacijah« (od 2. do 7. junija v Bruslju), »Zelo nizke temperature« (od 23. do 28. junija v Leidenu), »Jedrska fizika visokih energij« (od 30. junija do 5. julija v Ženevi), »Feri in antiferomagnetizem« (od 2. do 5. julija v Grenoblu), »Radioaktivnost in jedrska fizika« (od 7. do 12. julija v Parizu), »Kromatična diskriminacija« (skupaj z Zvezami za biologijo, fiziologijo in biokemijo (od 25. do 29. julija v Parizu), »Polprevodniki« (od 18. do 22. avgusta v Rochestru), »Elektronske lastnosti kovin pri nizkih temperaturah« (od 25. do 29. avgusta v Genevi, N. Y.).

Generalna skupščina je obravnavala vprašanje, kako naj bi pomagali manj razvitim deželam pri napredku v fiziki.

Uredništvo našega lista more nuditi interesentom naslove predstavnikov zgoraj naštetih komisij in organizatorjev navedenih sestankov. Če želijo natančnejše informacije, naj se obračajo kar na predstavnike komisij, v stvareh, ki zadevajo splošno delo Unije, pa na njeno tajništvo: 3, Boulevard Pasteur, Paris 15^0.

Prevedel N. P.

MEDNARODNI SEMINAR ŠTUDENTOV MATEMATIKE V VARŠAVI

Letos meseca maja je varšavska univerza praznovala 140-letnico svojega obstanka. Ob tej priložnosti so bile v Varšavi velike slovesnosti, ki se jih je udeležilo tudi okoli 25 rektorjev iz vzhodne in zahodne Evrope, Amerike in

Azije, med njimi so bili navzoči tudi rektorji jugoslovanskih univerz. V okviru teh proslav je univerzitetni odbor Zveze poljskih študentov v Varšavi skupaj z rektorjem varšavske univerze, ki je letos matematik profesor dr. S. Turski, organiziral mednarodni seminar študentov matematike. Ta seminar je trajal od 16. do 20. maja. Udeležili so se ga poleg študentov z vseh poljskih univerz tudi gostje iz tujine: dva študenta iz Londona, eden iz Helsinkija, eden iz Bruslja, dva iz Prage, eden iz Sofije, eden iz Lvova in dva iz Jugoslavije (iz Ljubljane in iz Novega Sada). Seminar je bil v prostorih matematičnega inštituta varšavske univerze v Palači kulture in znanosti.

Po prvotnem načrtu naj bi seminar potekal v 3 sekcijah, in sicer: 1. matematična logika, algebra in teorija števil, 2. matematična analiza, 3. geometrija in topologija. Na žalost pa so bili pozneje zaradi premajhnega števila udeležencev vse tri sekcije strnjene v eno. Seminar je začel rektor prof. dr. S. Turski, prvo predavanje pa je imel znani poljski matematik prof. dr. W. Sierpinski. Govoril je o varšavski matematični šoli in nekaterih nerešenih problemih aritmetike. Od znanih matematikov je predaval še prof. dr. K. Borsuk o problemu klasifikacije topoloških prostorov. Druge referate so imeli asistentje varšavske in poznanjske univerze in nekateri domači in tuji študentje izmed udeležencev. Od spredaj omenjenih skupin sta bili najbolj zastopani topologija in funkcionalna analiza, zavzeli sta polovico referatov. Predavanja iz matematične logike pa so skoraj popolnoma izpadla.

Na zaključku seminarja je bila še razprava o študiju matematike v različnih državah. Tu smo udeleženci poročali o organizaciji študija, o učnih načrtih in drugih problemih. Zanimivo je, da skoraj v vseh državah primanjkuje učnega kadra za srednjo šolo in tudi denarja za »gospodarsko neproduktivne« vede. Dolžina študija matematike je precej različna. V mnogih državah, predvsem zahodnih, je študijski sistem svoboden in ni vezan s posebnimi izpitnimi pogoji. V Angliji traja študij le tri leta, povsod drugod pa od 4 do 6 let. Na Poljskem traja študij pet let, ne glede na to, da so tam študijske razmere neprimerno boljše kot pri nas. Pri njih ni opaziti kakšnega občutnejšega pomanjkanja predavateljskega in pomožnega kadra na univerzi, saj ima n. pr. matematični inštitut varšavske univerze 10 profesorjev, približno 20 asistentov in okoli 200 študentov. Na drugih poljskih univerzah je podobno stanje. Poleg tega so študentom na razpolago učbeniki, pisani v domačem jeziku, in posebne knjižnice ter posebni prostori za študij v knjižnicah. Matematični inštitut univerze v Varšavi ima tudi poseben oddelek za računske stroje. Za zdaj delajo z analognimi računskimi stroji, konstruirajo pa tudi že digitalne.

Organizatorji seminarja so poskrbeli za stike med udeleženci in poljskimi profesorji matematike. Seminar je bil skrbno pripravljen in udeleženci smo bili povsod nadvse toplo sprejeti. Pokazalo se je, da so takšni seminarji pomembni ne samo zaradi strokovnega dela, ampak tudi zaradi navezave stikov med študenti iz različnih držav in zaradi spoznavanja organizacije in problemov študija matematike drugod po svetu.

Poljskemu matematičnemu društvu v Varšavi sem prinesel od Društva matematikov in fizikov v Ljubljani vse letnike Obzornika za matematiko in fiziko. Poljski kolegi so pokazali veliko zanimanje in voljo za sodelovanje z našim društvom in nam v zameno pošiljajo svojo publikacijo Olimpiada matematyczna. S tem so storjeni prvi koraki za nadaljnjo poglobitev stikov med poljskim in slovenskim matematičnim društvom.

Gabrijel Tomšič

POSKUSI

MERJENJE TOKOVNIH IN NAPETOSTNIH SUNKOV V ŠOLI

1. Uvod

Indukcijski zakon povemo v srednji šoli navadno v diferencialni obliki, torej takole: *V zanki inducirana napetost je enaka hitrosti spreminjanja objetega magnetnega pretoka* ($U_i = d\Phi/dt$). Precej težko pa je s poskusom neposredno preveriti pravilnost te trditve. Pretok bi morali dalj časa linearno spreminjati, da bi na tuljavo priključeni voltmeter mogel pokazati, kolikšna je inducirana napetost. Če pretok prepočasi spreminjamo, je inducirana napetost navadno tako majhna, da voltmeter nič ne pokaže. Če pa ga spreminjamo prehitro, je spreminjanja prekmalu konec. Vidimo, da je res laže poučevati samo s kredo kot pa s poskusi. Poteza s kredo zlahka nadomesti najbolj težavno meritev ali celo takšno, ki se sploh ne da izvesti. Razloček pa je tudi ta, da od same krede dijaki navadno nimajo dosti koristi.

Da bomo mogli indukcijski zakon preveriti s poskusi, ga moramo povedati še v integralni obliki: *V zanki inducirani napetostni sunek je enak spremembi objetega magnetnega pretoka* ($\int U_i\, dt = \Delta\Phi$; če se učenci plašijo integralskega znamenja, pišemo lahko $U_i\, t = \Delta\Phi$ ali bolje $U_i\, dt = d\Phi$ in z besedami dodamo potrebno opravičilo).* V tej obliki zakona ni težko preizkusiti z eksperimentom. Sedaj namreč ni treba nič paziti na linearno spreminjanje. Sprememba naj bo le dovolj hitra, da lahko pravilno izmerimo napetostni sunek. Dijakom moramo pokazati, da je dobljeni sunek ravno tolikšen kot sprememba pretoka. To spremembo poznamo, če smo pretok ustvarili z električnim tokom v prazni dolgi tuljavi.

Indukcija ni edino poglavje, pri katerem smo v šoli prisiljeni, da merimo električne sunke. Pri obravnavanju kapacitete smo postavljeni pred podobno nalogo. Dijakom moramo pokazati, da velja sorazmernost $e = CU$. Na kondenzator damo različne napetosti in vsakokrat izmerimo tokovni sunek, to je pretočeni naboj ($e = \int I dt$), bodisi pri poljenju ali pri praznjenju. S tem tudi določimo kapaciteto kondenzatorja ($C = e/U$).

Za merjenje tokovnih in napetostnih sunkov rabimo instrumente, ki niso v načelu nič drugačni kot navadni ampermetri in voltmetri, le da ne smejo imeti prekratkega nihajnega časa. Pač pa je način merjenja drugačen. Tok ali napetost merimo *statično*; to pomeni, da vselej počakamo, da se kazalec umiri. Sunek pa merimo *balistično*; to pomeni, da pogledamo, kako daleč zamahne kazalec zaradi sunka; preberemo torej prvo amplitudo. Pri ampermetru ali voltmetru z linearno skalo je ta amplituda sorazmerna tokovnemu (napetostnemu) sunku, če je bil sunek dovolj kratek v primeri z nihajnim časom instrumenta. Skala za sunke (v ampersekundah ali voltsekundah) pa je seveda drugačna kot skala za tok ali napetost (v amperih ali voltih). Za balistične meritve moramo torej instrument posebej umeriti. Naprodaj pa se dobijo instrumenti, ki so nalašč izdelani ali celo umerjeni za ta namen; to so tako imenovani *balistični galvanometri*. Ker se po navadi zahteva precejšnja občutljivost, so ti galvano-

---

* Primerjaj izrek o gibalni količini, ki ga dijaki poznajo iz mehanike. Tam smo iz Newtonovega zakona $F = ma$ ali $F = dG/dt$ izpeljali izrek $Fdt = dG$ ali splošno $\int Fdt = \triangle G$ (sunek sile je enak spremembi gibalne količine).

metri izdelani kot zrcalni. Naravno je, da so precej dragi (cena se vrti okoli 100 dolarjev ali kaj takega).

S tem pridemo v hudo zagato. Balističnim meritvam se pri pouku fizike nikakor ne moremo odpovedati, razen če se zadovoljimo s čisto kvalitativnimi poskusi, ki ne pokažejo drugega kot obstoj inducirane napetosti in kvečjemu še njen predznak (ves poudarek pri pouku tega poglavja se potem prevali na zloglasna pravila z rokami in palci in na opisovanje strojev). Poglavje o indukciji pa je dovolj pomembno, da ga ne bi smeli tako ponižati. Pisanje zakonov na tablo nima dosti pomena, če ni nobenega poskusa, ki bi vsaj približno potrdil njihovo veljavnost. Po drugi strani pa ni mogoče zahtevati, da bi vsaka srednja šola za drage devize kupila pravi balistični galvanometer. Tak instrument v šoli najbrž tudi ne bi dolgo živel.

Iz te zagate se rešimo na ta način, da se zadovoljimo s slabšim instrumentom. Boljši so malo natančni poskusi kot pa sploh nobeni. Saj se že tako moramo pri večini demonstracijskih poskusov zadovoljiti z natančnostjo na 10 % ali kaj takega. Vzemimo torej za balistične meritve navaden milivoltmeter in mikroampermeter, kakršne izdeluje na primer naša Iskra! Oba instrumenta sta za šolske balistične meritve prav dobra, zlasti če jima je nihajni čas z majhno obtežitvijo podaljšan na nekaj sekund (5 s gotovo zadošča). Odlično pa služita seveda tudi za merjenje majhnih napetosti in tokov. (V zvezi s termočlenom, ki si ga sami sestavimo iz bakrene in konstantanske žice, rabimo milivoltmeter tudi za merjenje temperaturnih diferenc; za demonstracijske poskuse je tak termometer bolj pripraven kot živosrebrni.) Dobro je, če sta oba instrumenta izdelana kot projekcijska, tako da s primernim projektorjem lahko predvajamo poskuse tudi večjemu razredu. Cena takega instrumenta (okrog 12 000 din) je v primeri s prej navedeno malenkostna. Oba instrumenta skupaj s projektorjem, ki je lahko uporaben tudi za diapozitive in še za druge namene, staneta komaj kaj več kot 40 000 din.

Za šolske poskuse je dobro, da ima instrument ničlo v sredini. Mikroampermeter naj ima na primer območje od -20 do $+20\ \mu A$, milivoltmeter pa od -5 do $+5$ mV. Upor prvega instrumenta meri nekako 2000 ohmov, drugega pa 10 ohmov. Najbolje je seveda, da sta kupljena instrumenta že tudi balistično umerjena in imata tudi napisani ustrezni skali. S primerno obtežitvijo sistema ali pa s shuntom oz. predupornikom, ki ju vključujemo samo pri balističnih meritvah, se da celo doseči, da velja ena sama skala za obojne meritve. Če pa tovarna instrumenta ni balistično umerila, moramo to izvesti sami. To ni nič hudega, ker predstavlja umeritev že sama zase mikaven in poučen šolski poskus.

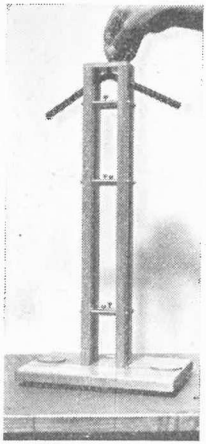
V nadaljnjem bomo videli, kako se da umeritev izvesti v šoli; potem pa bo sledil opis nekaterih poskusov.

2. Balistična umeritev

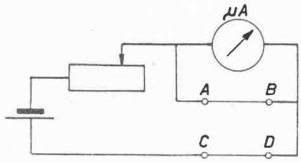
Za balistično umeritev galvanometrov obstaja več načinov. Pri prvem imamo kondenzator z znano kapaciteto, ki ga napolnimo z izmerjeno napetostjo, potem pa ga (preko upora) izpraznimo skozi instrument. Pri drugem načinu izkoriščamo indukcijo; v precizno dimenzionirani tuljavi ustvarimo s tokom znan magnetni pretok. Pri prekinitvi toka se v merilni tuljavici, ki je nasajena na vrh prejšnje, inducira sunek, ki ga občuti priključeni instrument. Pri tretjem načinu pa rabimo stoparico z električnim kontaktom. Preko te ure pritisnemo na instrument za odmerjen dovolj kratek čas znano napetost (ali pa vključimo znan tok), tako da vnaprej vemo, kolikšen je sunek Ut (ali It).

Prva dva načina iz metodičnih razlogov ne prihajata v poštev. Saj ne smemo pri umeritvi računati s količinami (n. pr. s kapaciteto), ki jih učenec še ne pozna, ter se sklicevati na zakona, ki ju bomo ravno s tema instrumentoma šele verificirali. Tretji način pa ima to slabost, da je uporaben samo pri galvanometrih z zelo dolgimi nihajnimi časi. Nihajni čas omenjenih Iskrinih instrumentov ni večji kot nekaj sekund, tako da čas t ne sme biti daljši kot nekaj desetink sekunde. Tako kratkega časa pa s stoparico ne moremo zanesljivo odmeriti.

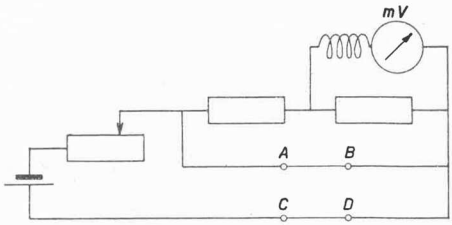
Stoparico lahko v šoli nadomestimo s padajočim telesom, ki preleti odmerjeno razdaljo. Čas, ki ga telo za to potrebuje, dijaki že znajo izračunati. Pripravo, ki služi za ta namen, kaže slika 1, električni vezavi pa sliki 2 in 3.



Sl. 1. Priprava, ki nadomešča kontaktno stoparico



Sl. 2. Vezava mikroampermetra



Sl. 3. Vezava milivoltmetra. Pri 2-voltnem členu naj ima drsni predupornik okrog 20 Ω, ostala dva upornika pa okoli 15 Ω in 0,05 Ω

Na stojalu sta druga nad drugo vpeti v vodoravni legi 0,2 mm debeli in nekaj centimetrov dolgi bakreni žici AB in CD. Na vrhu priprave je plošča z luknjo, v katero pride ročaj nekaj sto gramov težke ukrivljene palice z obliko Λ. Ko palico spustimo, pretrga ob padcu po vrsti obe žici, ne da bi bil padec zato kaj dosti oviran. Do prve žice prepotuje palica 4,9 cm, potem pa še razdaljo 14,7 cm med žicama. Hiter račun pokaže, da rabi palica za to razdaljo 0,1 sekunde. Po potrebi lahko podaljšamo ta čas na 0,2 sekunde, s tem da povečamo razmak na 39,2 cm.

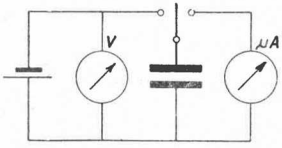
Obe žici vključimo v krog mikroampermetra, kot kaže slika 2. Dokler sta obe žici celi, ne teče skozi instrument skoraj nič toka, ker je upor žice malenkosten v primeri z uporom instrumenta. Tok skozi instrument steče šele, ko se pretrga žica AB, in spet preneha, ko se pretrga še druga žica. Vemo torej vnaprej, da bo tekel tok ravno 0,1 (ali 0,2) sekunde.

S predupornikom uravnamo tok tako, da kaže instrument 20 μA, če snamemo samo žico AB. Potem pritrdimo žico nazaj in spustimo palico. Kazalec zamahne na primer do znamenja za 2,2 μA. Pri poskusu s podvojenim časom dobimo podvojeno amplitudo. Ker poznamo naboj, ki je stekel skozi instrument (pri prvem poskusu $e = It = 20\ \mu\text{A} \cdot 0{,}1\ \text{s} = 2\ \mu\text{As}$), vemo zdaj tudi, kolikšnemu naboju ustreza enota skale. Za poln odklon je potreben naboj (tokovni sunek)

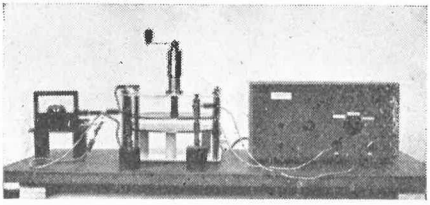
18 μAs. S shuntom 18 kΩ zaokrožimo to območje na 20 μAs, zato da si prihranimo vsakokratno preračunavanje z nevšečnim faktorjem 18 μAs/20 μA.

Mimogrede lahko pripomnimo, da je pravkar zapisano razmerje približno enako z 2π deljenemu nihajnemu času instrumenta. (Če ne bi bilo dušenja, bi to natančno veljalo; glej na primer R. W. Pohl, Einführung in die Mechanik, Akustik und Wärmelehre, 1947, str. 57—58.) Nihajni čas obravnavanega instrumenta meri torej okrog 5 sekund.

Za balistično umeritev milivoltmetra moramo vzeti drugačno vezavo kot za umeritev mikroampermetra. Mikroampermeter ima precej velik upor in zato ne kaže odklona, kadar je žica *AB* cela. Milivoltmeter pa bi v tem primeru pri enaki vezavi kazal odklon. Temu bi se lahko izognili s tem, da bi vzeli žico *AB* bolj debelo; potem pa ne bi mogli računati, kot da pada palica neovirano. Pomagamo si z delitvijo napetosti (sl. 4). Ker je dušenje instrumenta odvisno tudi od zunanjega upora, moramo milivoltmeter umeriti skupaj s ploščato merilno tuljavico, ki jo bomo kasneje rabili za poskuse.



Sl. 4. Shema poskusa za določitev kapacitete kondenzatorja



Sl. 5. Poskus za določitev influenčne konstante

3. Določitev kapacitete kondenzatorja

Zato da pokažemo, da je naboj kondenzatorja sorazmeren z napetostjo, potrebujemo baterijo ali usmernik, voltmeter, primeren kondenzator in končno galvanometer za merjenje naboja. Napetost spreminjamo v primernih stopnjah, in sicer bodisi z vključevanjem večjega ali manjšega števila členov baterije ali pa potenciometrično (z drsnim upornikom). Vsakokrat napolnimo kondenzator in ga potem, ko smo odklopili usmernik ali baterijo, izpraznimo preko instrumenta (slika 4). Odkloni galvanometra pokažejo na primer, da je pri napetostih $U = 2, 4, 6, 8$ V naboj kondenzatorja $e = 3, 6, 9, 12$ μAs. Vidimo, da je naboj sorazmeren z napetostjo $e = CU$. V našem primeru je $C = 1{,}5$ μF.

Pri ploščnem kondenzatorju lahko iz izmerjene kapacitete izračunamo influenčno konstanto ε_0; saj je $C = \varepsilon_0 S/l$. Za poskus potrebujemo natančen ploščni kondenzator, usmernik za napetost nekaj tisoč voltov, ustrezen voltmeter, galvanometer, dva Holtzova stativa in upornik 1 MΩ. Ozemljeni priključek usmernika zvežemo z eno ploščo kondenzatorja, drugi priključek pa s Holtzovim stativom. Podobno zvežemo en priključek galvanometra z ozemljeno ploščo kondenzatorja, drugega pa preko megaohmskega upornika z drugim Holtzovim stativom (slika 5). Druga plošča kondenzatorja, ki mora biti zelo dobro izolirana, ni zvezana nikamor. Kondenzator napolnimo tako, da se izolirane plošče dotaknemo z glavo prvega Holtzovega stativa. Stativ postavimo nazaj, nato se z drugim stativom dotaknemo iste plošče in tako kondenzator izpraznimo preko instrumenta. Kazalec opazno zaniha in pokaže, kolikšen naboj

je stekel skozi instrument. Pri kondenzatorju, katerega plošči imata premer 23 cm, tako da je $S = \pi r^2 = 4\ \mathrm{dm}^2$, in pri katerem je razmak med ploščama $l = 2$ mm, dobimo z napetostjo $U = 4000$ V tokovni sunek $e = 0{,}7\ \mu\mathrm{As}$. Iz tega izračunamo influenčno konstanto

$$\varepsilon_0 = C\,l/S = e\,l/US = 0{,}7\cdot 10^{-6}\ \mathrm{As}\cdot 0{,}002\ \mathrm{m}/4000\ \mathrm{V}\cdot 0{,}04\ \mathrm{m}^2 = 9\cdot 10^{-12}\ \mathrm{As/Vm}.$$

4. Indukcija

Poglavje o indukciji začnemo s kvalitativnimi poskusi. Žico premikamo po polju podkvastega magneta; priključeni milovoltmeter pokaže, da se inducira napetost. Tudi zemeljsko magnetno polje je dobro za tak poskus, če vzamemo nekaj metrov dolgo žico. Sorodni so poskusi s tuljavami. Tuljava počasi drsi povrh paličastega magneta ali pa se vrti v magnetnem polju. Vseeno je, če namesto žice ali tuljave premikamo magnet.

Kvantitativne poskuse izvedemo najlaže tako, da merimo inducirani napetostni sunek. Vse naštete poskuse lahko predelamo v tem smislu. Oglejmo si jih pa še nekaj!

Ploščato merilno tuljavico ($R = 3{,}7$ ohmov, $N = 60$ ovojev, $2\,r = 7{,}6$ cm, $S = 45{,}3\ \mathrm{cm}^2$), ki je priključena na milivoltmeter (ki smo ga prej balistično umerili), damo v homogeno polje večje tuljave ($l = 1$ m, $N_1 = 175$ ovojev). Z enosmernim tokom $I = 10$ amperjev ustvarimo magnetno polje z gostoto $B = \mu_0 N_1 I/l = 2{,}2\cdot 10^{-3}\ \mathrm{Vs/m}^2$. Če stoji os tuljavice v smeri silnic, je magnetni pretok skozi vsak ovoj: $\Phi = B\cdot S = 2{,}2\cdot 10^{-3}\ \mathrm{Vsm}^{-2}\cdot 45{,}3\cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^2 = 1{,}0\cdot 10^{-5}$ Vs. Ko potegnemo tuljavico hitro iz polja, pokaže instrument, da se je inducirali napetostni sunek 0,6 mVs, kakor zahteva indukcijski zakon $\int U_i\,dt = N\,\Delta\Phi$. Pretok skozi tuljavico se je namreč zmanjšal od vrednosti $N\,\Phi = 0{,}6$ mVs na nič. Če porinemo tuljavico nazaj v polje, zraste pretok od nič na 0,6 mVs; galvanometer pokaže nasprotno enak napetostni sunek kot prej. Če zavrtimo tuljavico v magnetnem polju za 90^0, tako da je potem os pravokotna na silnicah, pokaže galvanometer sunek 1,2 mVs. Samo polovičen odklon, to je 0,3 mVs, pa dobimo, če zavrtimo tuljavico za 60^0. Potem je namreč na koncu $\Phi = BS\cos\delta$, pri čemer je $\cos\delta = \frac{1}{2}$.

Ni nujno, da premikamo ploščato merilno tuljavico. Lahko jo pritrdimo na stojalo, veliko tuljavo pa hitro porinemo vstran, tako da pride ploščata tuljavica iz nje. Priključeni galvanometer pokaže ravno tolikšen napetostni sunek kot prej, to je 0,6 mVs, ker je sprememba pretoka skozi tuljavico ravno taka kot prej.

Magnetni pretok skozi ploščato tuljavico lahko spreminjamo tudi tako, da izključimo tok, s katerim smo napajali veliko tuljavo. Tudi v tem primeru pokaže galvanometer napetostni sunek 0,6 mVs. Če spet spustimo skozi veliko tuljavo enak tok kot prej (10 A), dobimo nasprotno enak napetostni sunek kot prej. Če je tuljavica zasukana za 90^0, pa z vkljapljanjem in izklapljanjem toka ne dobimo odklona na galvanometru, ker je v tem primeru magnetni pretok skozi tuljavico enak 0. Kadar je tuljavica zasukana za 60^0, pokaže galvanometer ob vklopitvi toka le polovičen sunek (0,3 mVs).

Oglejmo si še, kako vplivajo snovi na magnetno polje! V tuljavi ($N_1 = 250$ ovojev, $l = 20$ cm, $2\,r_1 = 6{,}4$ cm, $S_1 = 32{,}2\ \mathrm{cm}^2$) ustvarimo magnetno polje s tokom $I = 0{,}3$ A. Na to tuljavo nataknemo prej opisano ploščato merilno tuljavico, ki je zvezana z balistično umerjenim galvanometrom (milivoltmetrom),

in jo hitro snamemo s prve tuljave. Galvanometer pokaže napetostni sunek 0,09 mVs, kar bi lahko tudi vnaprej izračunali iz toka in podatkov za tuljavo. Tudi če damo v tuljavo palico iz lesa, bakra, aluminija (ali iz kake druge snovi, ki ni feromagnetna), dobimo enako velik napetostni sunek. Poskus pove, da neferomagnetna snov ne spremeni (natančneje: skoraj nič ne spremeni) magnetnega pretoka v tuljavi.

Čisto drugače pa je, če damo v tuljavo valj iz železa. Ko hitro snamemo merilno tuljavico s tuljave (v kateri je spet tok 0,3 A) z železnim jedrom, pokaže galvanometer sedaj sunek nekaj čez 1,5 mVs. To pomeni, da sta se magnetni pretok in magnetna poljska gostota prve tuljave okrog 17-krat povečala. Do več stokrat pa se povečata, če namesto železnega valja vzamemo sklenjeno jedro v obliki okvira.

Vzemimo železni valj iz tuljave in nataknimo nanj ploščato merilno tuljavico, ki je zvezana z galvanometrom! Če tuljavico hitro snamemo z valja, pokaže instrument inducirani napetostni sunek okrog 0,1 mVs. Če tuljavico hitro nataknemo na valj, dobimo približno — 0,1 mVs. Sunek je precej manjši kot prej. Vendar nam ta poskus lepo kaže, da ostane železo, ki smo ga imeli v magnetnem polju tuljave, še naprej magnetno.

Ivan Kuščer in Tomislav Skubic

ŠOLA

DELO AKTIVA MATEMATIKOV IN FIZIKOV OLO LJUBLJANA V ŠOLSKIH LETIH 1956–57 IN 1957–58

Delo našega aktiva, ki se je že nekako ustalilo po obliki in vsebini, je v zadnjih dveh letih, za kateri polagamo bežen obračun, dobilo novo pobudo in smer z dnevi prosvetnih delavcev in množičnimi poučnimi ekskurzijami.

Zaradi silne raztresenosti našega članstva po velikem ljubljanskem okraju tovariši iz oddaljenih krajev le težko spremljajo živahno delo v centru — Ljubljani. Prav dnevi prosvetnih delavcev in poučne ekskurzije aktiva pa kažejo, da si naši ljudje žele priti skupaj, ne le da bi se spoznali in skupno razvedrili, temveč zlasti zato, da bi si vzajemno pomagali, z lastnimi skušnjami in uspehi obogatili drug drugega in se kot ljudje z istimi poklicnimi dolžnostmi, enakimi interesi in težavami pogovorili o vseh učnih, vzgojnih, organizacijskih in materialnih problemih, ki jih ni malo. Delo in uspehi aktiva niso le opravičilo za obstoj aktiva in Komisije za strokovne aktive, temveč tudi izraz hotenja velikega dela našega članstva, ki mu aktiv ni le nujno zlo, ampak živa potreba. Saj mnogi naši tovariši navzlic obremenjenosti z delom v šoli, na znanstvenem področju ter v raznih kulturnih društvih in političnih organizacijah radi prihajajo na mesečne sestanke aktiva, kjer v lepem tovarištvu s tovariši z Višje pedagoške šole in univerze skušamo čim bolje izpolniti svojo nalogo. Žal pa so še danes — k sreči le redki — učitelji matematike in fizike, ki jim je delo v aktivu prav tako malo pri srcu kakor izpopolnitveni in poglobitveni tečaji, ki so namenjeni prav njim. V prihodnje bo treba v letni program aktiva vnesti čim več aktualnih tem, ki bodo dostopne vsakomur in bodo pritegnile v naš delokrog vse tovariše, ki čutijo količkaj odgovornosti za

svoje delo v šoli. Statistika neizpodbitno kaže, da še zlepa ne bo pouk matematike in fizike na nižji stopnji v rokah strokovnjakov. Ali ni naravnost ironija, da ne prihajajo na naše sestanke, kjer obravnavamo tako strokovne kot didaktične in pedagoške probleme, ljudje, ki so iz drugih strok morali presedlati na naše področje? Zdi se tudi, da bo treba strokovnim aktivom, ki so v prvih desetih letih po osvoboditvi nedvomno mnogo pripomogli, da se je pouk na naših šolah navzlic vsem težavam vendarle dvignil, dati novo obliko in vsebino, ki naj bi v prihodnjih letih pritegnila še več ljudi v naše skupno prizadevanje. Najbrž ne bo lahko takoj ubrati najboljšo in najustreznejšo pot, vendar lahko upamo, da bomo z dobro voljo in prizadevnostjo nas vseh gotovo

Profesorji-rudarji po šihtu...

našli marsikaj dobrega in koristnega. Kako zaslužno bi bilo, če bi nam tisti, ki tožijo, da je aktiv premalo aktiven, in oni, ki godrnjajo, da je preveč aktiven, sporočili svoje izboljševalne predloge in koristne nasvete! Tudi kritika je dobrodošla, če je le pravična in dobrohotna.

Problem povezave in sodelovanja z vsemi tovariši okraja — vseh nas je okrog 150 — bo zaradi velikih razdalj, finančnih težkoč, prezaposlenosti v šoli in izven nje ostal gotovo še naprej odprt. Morda ga bomo delno rešili s sektorskimi strokovnimi sestanki v manjših centrih našega okraja, z dobro pripravljenimi hospitacijami, s predavatelji iz centra, z matematično-fizikalno posvetovalnico (tudi pismeno), če bo mnogo dobre volje in vsaj nekaj denarja.

Eno pa drži: Naše delo v aktivu bo gotovo uspešno in plodno, če bo slednji učitelj matematike in fizike pripravljen pomagati po svojih močeh, kadar in kjer bo treba, pa če bosta Komisija za strokovne aktive ter Društvo

matematikov in fizikov LRS še naprej s tolikim zanimanjem in dobrohotnostjo spremljala našo pot kot doslej. V šolskem letu 1956-57 so predavali v aktivu: 1. Tov. Niko Prijatelj o Srednješolski algebri. Pokazal je na nekatere pomanjkljivosti v naših učbenikih ter predlagal nekaj novih prijemov v obdelavi te snovi, zlasti pri enačbah višjih stopenj in v kombinatoriki. 2. Ob priliki prvega dneva prosvetnih delavcev je imel referat o Pouku matematike in fizike na nižji stopnji tov. inšpektor Jože Žabkar. Osvetlil je napake pa tudi posrečene didaktične prijeme, ki jih je mogel registrirati v dolgoletnih inšpekcijah po vseh nižjih in višjih šolah naše republike. 3. Tov. sekretar Ludvik Gabrovšek je imel predavanje o Pouku matematike in fizike v ZDA in ga podprl s skioptičnimi slikami, grafikoni in originalnimi ameriškimi učbeniki. 4. Nevidno svetlobo je z mojstrskimi eksperimenti obravnaval tov. Evald Bračko. 5. Tov. dr. Alojz Vadnal nam je govoril o Merjenju verjetnosti v verjetnostnem računu. 6. Kot priprava na ekskurzijo po Primorski je bilo predavanje ing. Alberta Čebulja O elektrarnah na Soči. Predavatelj je segel preko ozkega naslova ter nam podal sliko in probleme celotne elektrifikacije naše republike in cele države. 7. Strokovnjak in zastopnik svetovno znanega podjetja Leiz-Wetzlar Georg Höhlmann nam je v kemičnem inštitutu opisal in demonstriral najmodernejše optične aparate, ki jih uporabljajo v šolah in znanstvenih zavodih kulturno in tehnično visoko stoječih zahodnih držav. 8. Tov. dr. Anton Moljk se je z Nekaj poskusi z jedrskimi števci lepo oddolžil številnim poslušalcem.

V šolskem letu 1957-58 pa sta na prvem sestanku govorila o popularizaciji matematike in o organizaciji centralnega krožka za matematiko tov. dr. Francè Križanič in Niko Prijatelj. Na drugem sestanku je tov. France Ahlin imel s številnimi poskusi podprto predavanje Obravnavanje toka v šoli. Astronom dr. Franjo Dominko je na naslednjem sestanku govoril o Našem astronomskem observatoriju na Golovcu. Končno sta profesorja Elektro-fakultete dr. Venče Koželj in dr. France Avčin razglabljala temo Kakšno znanje iz matematike in fizike prineso na fakulteto abiturienti in kaj naj bi prinesli.

Seveda smo na naših sestankih obravnavali še obilico drobnih vprašanj in aktualnih problemov pedagoške, didaktične in organizacijske vsebine, ki jih ne kaže posebej navajati.

Omeniti bi bilo še: 1. da so člani našega aktiva (Adlešič, Bračko, Breskvar, Povšič, Šušteršič, Vadnal in dr.) imeli pri Ljudski univerzi Radia-Ljubljana več popularnih predavanj iz matematike, fizike in astronomije, 2. da so člani našega aktiva skrbno pripravili in vodili več izpopolnitvenih počitniških tečajev za fiziko in matematiko ter 3. da 10 članov našega aktiva že dve leti pripravlja Zbirko eksperimentov, ki bo vsebovala več sto fizikalnih poskusov.

Končno še nekaj o naših dveh množičnih poučnih ekskurzijah na Primorsko in Štajersko. Pravijo, da je velike ekskurzije težko pripraviti in da se ne obnesejo. Pa ni res tako. Treba je le nekaj denarja, pa malo dobre volje in tovariške discipline.

Obe ekskurziji sta bili pripravljeni in srečno izpeljani po istem receptu. Najprej je treba — kakor poje narodna pesem »Kadar boš ti vandrat šel, pridi mi povedat« — poprositi tov. načelnika Tajništva za šolstvo, da ekskurzijo odobri. Nato je treba potrkati na usmiljeno srce Komisije za strokovne aktive, ki delovnim aktivom rada pomaga, če le ima. Seveda je treba obiskati še druge dobrotnike, ki vobče tudi radi primaknejo (samo iz najvzhodnejše

ljubljanske občine je prišel letos tako ganljivo odklonilen odgovor, da nam je bilo žal za nadlegovanje). Turist-biro prav rad in res solidno prevaža, menze in gostilne tudi rade prodajajo, še celo tovarne, elektrarne, rudniki in drugi zanimivi cilji naših ekskurzij z dobrohotno in spoštljivo uvidevnostjo odpirajo svoja vrata sicer malo simpatičnemu, pa v republiškem merilu precej dragocenemu tovoru, ki se vsipa iz velikih avtobusov. Še celo navihani Pavliha je lani zaskrbljeno vzkliknil: Kaj če bi se kam zakantali. Vse drugo pa gre samo od sebe. Če pojde še eno leto tako naprej, se bodo drugo leto vozili v treh velikih avtobusih vsi učitelji matematike in fizike iz našega okraja: lani 50, letos 100, vseh pa nas je 150.

Ko je bilo lani zasedenih vseh 50 polj v avtobusu, nas je veliko, a okretno vozilo potegnilo skozi zaspano Ljubljano in zasnežene gozdove proti Cerknu, kjer je pred rojstno hišo slavnega slovenskega matematika dr. Fr. Močnika spregovoril tov. Jože, naš ekspert za že pokojne matematike. Bolnišnica »Franja« je na vse izletnike napravila nepozaben vtis. Kmalu so nas zajeli topli južni vetrovi, naš tehnični vodja ing. A. Čebulj pa nam je z njemu lastno toplo besedo razkazal soške elektrarne. Šele ob treh popoldne smo v Desklah sedli za gostoljubno mizo. Skozi Novo Gorico smo se potegnili v Ajdovščino, kjer so nas pričakovali trije ajdovski mušketirji: gimn. ravnatelj David ter oba matematika Cene in France. Ob »pol litru vipavca« smo hitro pokopali formalizem in že čez dobre pol ure si ne bi nihče upal trditi, da so ta veseli in pojoči zbor — pusti matematiki. V precej pozni nočni uri je naše, z mogočnimi svetlobnimi tipalkami opremljeno vozilo, srečno pristalo v Ljubljani.

Letos pa smo jo šele junija mahnili na Štajersko. Po cestah se je smejalo sonce, na obeh straneh so nas pozdravljale cvetoče jablane, le kako bi mogli biti slabe volje! V Šempetru v Savinjski dolini smo se ob prelepih in monumentalnih izkopaninah pozdravili s 27 gorenjskimi matematiki, ki smo jih tudi povabili na to veliko ekskurzijo. V Velenju smo se razcepili na dve skupini: manjša je šla na »šiht« v rudnik lignita, 300 m pod zemljo, otroci sonca pa so si ogledali zunanje rudniške naprave, predvsem izvažalne in separacijo. Po srečno prestanem, 3 ure trajajočem šihtu nam je dobrotno sonce spet pobožalo oznojene in zamazane obraze. (Fotograf je to umazanijo po stari navadi retuširal!). Na pripombo, da so nam bile rudarske obleke nekaterim preozke, so nas poučili, da bi nam že po treh šihtih bile povsem prav. Moški smo morali precej časa čakati, da smo dočakali svoje tovarišice, ki so se sveže in pomlajene prismejale iz kopalnice. Po ogledu mogočne šoštanjske termocentrale smo se v menzi kar dobro podprli. In že so zabrneli motorji proti Solčavi. Mi smo uživali, šoferji so pa v navideznem miru drhteli, ko so dvakrat morali prav asimptotično spraviti velikanska vozila čez ozki in ukrivljeni most. V udobnem planinskem domu, ki ga upravljajo Celjani, smo menda uživali vsi: prvi ob pogledu na srebrno bele stene Solčavskih planin, drugi pa ob pogledu na vabljive steklenice črnega piva. Bilo je prav lepo, le čas je prehitro potekal. V prijetni družbi s Celjani, ki so nas prišli pozdravit (direktor Tine je dejal, da predstavlja 130 matematikov pravo velesilo), smo se navžili planinskih lepot in se odpočili za dolgo vožnjo nazaj, ki pa se nam ni zdela predolga. Ob uri duhov smo se zadovoljni in vedri že spet ustavili v Ljubljani na mestu, od koder smo v zgodnjem jutru odšli v veselem pričakovanju na daljno pot.

Francè Šušteršič

NOVE KNJIGE

GOSPODARSKA MATEMATIKA

Alojzij Vadnal: Gospodarska matematika. Izdal in založil ekonomski oddelek pravno-ekonomske fakultete Univerze v Ljubljani. Ljubljana, 1956. Str. IV + 450.

Knjiga obsega razen uvodnega osemnajst poglavij, na koncu pa so priložene razne mere in tabele. Namenjena je predvsem kot učbenik za študente ekonomske fakultete. Vsebina je zelo bogata in pestra. Uvodno poglavje daje kratek pregled formul iz elementarne matematike. V nadaljnjih poglavjih obravnava avtor najprej osnove infinitezimalnega računa: funkcije ene in več spremenljivk, pojem odvoda, določenega in nedoločenega integrala. Dve poglavji govorita celo o diferencialnih enačbah. Povsod se teorija prepleta z uporabo v gospodarski matematiki. Zadnji del knjige pa je posvečen verjetnostnemu računu z uporabo, teoriji determinant in vektorski algebri. Vsako poglavje se zaključuje z zbirko nalog, ki imajo namen utrditi obravnavano snov. Knjiga je napisana v pregledni in lahko razumljivi obliki. Zato bo dobro služila ne le študentom, temveč tudi vsem tistim, ki si žele pridobiti osnovno znanje iz infinitezimalnega in verjetnostnega računa.

Čeprav je knjiga, kakor omenjeno, lahko razumljiva, je kljub temu matematično neoporečna. Dovolil pa bi si glede vsebine te dve pripombi: V poglavju o zaporedjih in vrstah uvaja avtor pojem stekališča. Po mojem mnenju je pojem stekališča v taki knjigi odveč. Limita zaporedja se da namreč definirati brez njega. Avtor ga pravzaprav uporablja le pri dokazovanju, da je Cauchyjev pogoj zadosten za konvergenco zaporedja. To dejstvo bi mogel navesti brez dokaza, kakor je to storil pri Weierstrassovem izreku. To tem bolj, ker se pri omenjenem dokazovanju sklicuje na Weierstrassov izrek in zato dokaz ni popoln. Prav tako mi ni všeč definicija neskončno majhne in neskončno velike spremenljivke (str. 119). V smislu te definicije bi bila namreč neskončno majhna vsaka spremenljivka, pri kateri je nič eno krajišče definicijskega intervala.

Knjigo je tiskal in razmnožil Zavod za statistiko LRS. Tehnična oprema je dobra, le črke so na nekaterih mestih premalo jasne. Ker je ta način razmnoževanja veliko cenejši kakor v tiskarni, bi kazalo v tej obliki izdati tudi druge učbenike in skripta, posebno tiste, kjer je potrebna majhna naklada.

Ivan Vidav

FIZIKA

Weber, White, Manning: Physics for Science and Engineering. McGraw-Hill, London 1957, 618 strani, 8 $.

Snov obširne knjige je razdeljena na 50 poglavij: mehanika (18), toplota (4), valovanje (3), elektrika (14), svetloba (9), moderna fizika (2) in dodatek.

Vsako poglavje vsebuje fizikalna dejstva (eksperimente), definicije, razlago, zakone, količine, merske enote, računske primere, povzetek vseh pojmov, dejstev, enot in enačb v zgoščeni in pregledni obliki, vprašanja in računske naloge z rezultati.

Knjiga je namenjena študentom naravoslovja in tehnike, in sicer za osnovni tečaj. Zato so v njej natančno obdelane le osnove fizike, moderni fiziki je pa posvečenih manj strani. Namen knjige je, da bi dobil študent osnovno

znanje fizike in tako z lahkoto nadaljeval študij. Vsebina knjige ne presega kaj prida učnega načrta za naše srednje šole, predpostavlja pa, da dijak obvlada srednješolsko algebro, trigonometrijo ter osnove infinitezimalnega računa.

Posebno skrbno so obdelani merski sistemi in računanje z enotami. V mehaniki je poleg sestava fps (foot-pound-second) uporabljen še meter-kilogram-sekundni sestav, v elektriki pa dosledno m kg s A.

Izredno število debatnih vprašanj (786) na koncu poglavij ima namen utrditi znanje. 1593 računskih nalog z rezultati (poleg že izdelanih primerov) naj bi pa služilo za vajo v uporabljanju fizikalnih zakonov in za utrjevanje znanja.

Knjiga je tiskana na odličnem papirju. Tekst pojasnjuje obilica lepih in preglednih slik; v poglavju o optiki so tudi barvne priloge. Pri poskusih ni nobenih posebnih novosti; navedeni so samo standardni eksperimenti.

Knjiga bi dobro služila tudi našim študentom, posebno tistim, ki jim manjkajo osnovni pojmi fizike.

I. Š.

UVOD V VIŠJO ALGEBRO IN ALGEBRAJSKI NUMERIČNI RAČUN

L. Derwidué: Introduction a l'algèbre supérieure et au calcul numérique algébrique, Masson et Cie, 120, boulevard Saint-Germain, Paris et Sciences et lettres, 52, boulevard de la Constitution, Liège. 1957. Prix 6 600 fr.

Uporaba algebre v tehniki, fiziki in na drugih znanstvenih področjih zahteva dostikrat izvajanje zelo obsežnih numeričnih računov, ki jih je ponavadi prezamudno izvajati brez uporabe prikladnih računskih metod in brez pomoči računskih strojev. Študij algebre postane rad za človeka, ki jo študira bolj zaradi praktičnih potreb, sterilen, če pri tem ne polaga zadosti pažnje uporabni strani algebre.

Knjiga, ki jo odlikuje zlasti njena uporabna stran, je namenjena predvsem inženirjem, fizikom in vsem drugim, ki bi se radi spoznali z algebrajskimi računskimi metodami in z raznimi postopki pri numeričnem računanju.

S teoretičnega vidika je knjiga prav dober, toda običajen učbenik, ki podaja nekak prehod od elementarne v višjo algebro. Njena odlika pa je v tem, da dopolnjuje, kjer je to le mogoče, teoretična razglabljanja s številnimi praktičnimi metodami računske tehnike. Teoretično snov ilustrirajo številni in zelo izčrpni numerični primeri. Knjiga je tako bogato opremljena z numeričnimi primeri, da čitatelju, ki v numeričnem računanju še ni izvežban, ne bi bilo odveč, če bi jo čital ob računskem stroju.

Prvo poglavje posveti avtor izključno mehanizaciji računskih operacij z realnimi in kompleksnimi števili; pri tem se omeji na uporabo enostavnejših ročnih in električnih računskih strojev, s katerimi je mogoče opraviti vse štiri osnovne računske operacije.

V nadaljnjem obsega knjiga naslednja poglavja: determinante in sistemi linearnih enačb, splošna teorija polinomov in ulomljenih racionalnih funkcij ene neodvisne spremenljivke, eliminiranje in sistemi algebrajskih enačb, numerično razreševanje enačb, linearne substitucije, kvadratne forme in racionalne transformacije, matrični račun, enačbe, ki imajo rešitve na krogu ali na polravnini in kriteriji stabilnosti, pojem grupe in abstraktne algebre, Hurwitzove determinate in ločitev kompleksnih korenov enačb z realnimi koeficienti.

V knjigi je precej nalog, katerim pa avtor žal ni dodal rešitev. Kot dopolnilo knjigi navaja avtor razmeroma skromno bibliografijo.

A. Vadnal

ODGOVORI

ODGOVOR NA VPRAŠANJE ŠT. 3

(Vprašanje iz V. letnika, str. 95)

Funkcija $f(n)$ naj ustreza funkcionalni enačbi $f(mn) = f(m) + f(n)$, kjer sta m in n poljubni naravni števili. Pokazati je treba, da je $f(n) = C \log n$, če je $f(m) > f(n)$ pri $m > n$, C je konstanta.

Ta funkcionalna enačba velja tudi za končno mnogo argumentov

$$f(mn \ldots r) = f(m) + f(n) + \ldots + f(r)$$

Če so vsi faktorji enaki, sledi od tod $f(n^k) = kf(n)$. Vsako naravno število se da pisati kot produkt praštevil $n = p_1^{\alpha} p_2^{\beta} \ldots p_k^{\lambda}$. Potem je

$$f(n) = \alpha f(p_1) + \beta f(p_2) + \ldots + \lambda f(p^k) \tag{1}$$

Dalje naj bo $m = p_1^a p_2^b \ldots p^{k1}$. Ker je $mn = p_1^a p_1^{\alpha} p_2^b p_2^{\beta} \ldots p_k^1 p_k^{\lambda}$, velja

$$f(mn) = (a + \alpha) f(p_1) + (b + \beta) f(p_2) + \ldots + (l + \lambda) f(p_k)$$

Od tod vidimo, da za praštevila lahko funkcijske vrednosti poljubno izberemo. S samo funkcionalno enačbo funkcija $f(n)$ ni določena. Uporabimo zdaj pogoj, da mora biti $f(m) > f(n)$ pri $m > n$.

Izberemo si neko praštevilo p. Lahko dobimo dve taki naravni števili α in β, da je

$$p^{\alpha} > 2^{\beta} \text{ oziroma } \alpha \log p > \beta \log 2$$

Pri tem je β lahko poljubno velik. Kakor hitro velja to, velja tudi

$$\alpha f(p) > \beta f(2) \tag{2}$$

Od tod bomo dokazali, da je $f(p)/\log p = f(2)/\log 2$. Naj bo $f(p)/\log p = k$, $f(2)/\log 2 = k_1$ in $k_1/k = c$. Vzemimo, da bi bil $c > 1$. Iz neenačbe (2) dobimo

$$\alpha k \log p > \beta k_1 \log 2 \quad \text{oziroma} \quad \alpha \log p > \beta c \log 2 \tag{3}$$

Vsako iracionalno število lahko s poljubno natančnostjo aproksimiramo z ulomkom. Naj bo torej $\alpha/\beta = \log 2/\log p + \varepsilon$. Če α in β primerno izberemo, je ε pozitiven in poljubno majhen. Od tod izrazimo α in dobimo iz neenačbe (3)

$$\beta \log 2 + \varepsilon \beta \log p > c \beta \log 2 \quad \text{ali} \quad \varepsilon \log p > (c - 1) \log 2$$

Pri dovolj majhnem ε je ta neenačba protislovna.

Če bi bil $c < 1$, bi določili α in β tako, da je $p^{\alpha} < 2^{\beta}$ oziroma $\alpha \log p < \beta \log 2$. Po isti poti kakor prej bi tudi v tem primeru prišli do protislovja. Zato preostane edina možnost $c = 1$.

S tem je dokazano, da velja enakost $f(2)/\log 2 = f(p)/\log p = C$. Iz enačbe (1) pa zdaj sledi, da je $f(n) = C \log n$.

Gabrijel Tomšič

IZ UPRAVE

Na zalogi imamo še vse številke I., II., III. in IV. letnika razen 1. številke I. letnika. I. letnik stane 120 din, posamezna številka 50 din, II. letnik stane 250 din, posamezna številka 90 din, III. letnik stane 250 din, posamezna številka 90 din, IV. letnik 250 din, posamezna številka 100 din.

Iz 4. številke Obzornika 1951 smo ponatisnili tabelo *Osnove fizikalne konstante* na kartonu 32 × 33 cm. Dobite jih za ceno 20 din za kos pri prof. Štalcu Ivanu, Ljubljana, I. gimnazija, Vegova ul. 4. Prav tam lahko poravnate tudi naročnino za Obzornik.

UREDNIŠTVO JE PREJELO V ZAMENO

Bulletin scientifique, Zagreb 1958, Tome 4, No. 1.

Bulletin de la Société Mathematique de France, Paris 1957, Tome 85.

Bulletin, Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague-Bratislava, October-December 1957.

Elektrotehniški vestnik, Ljubljana 1958, št. 3-4, 5-6.

Farmacevtski vestnik, Ljubljana 1958, št. 3-4.

Fotokemijska industrija, Zagreb 1958, št. 5.

Glasnik mat.-fiz. i astr., Zagreb 1958, T. 13, No. 1.

Gospodarski vestnik, Ljubljana 1958, št. 41-83.

Idrijski razgledi, Idrija 1958, št. 2.

Izbrana sredstva linearne algebre za tehnike in fizike — F. Križanič, Institut J. Stefan, Ljubljana 1958.

Journal of the Optical Society of America, Lancaster 1958, Vol. 48, Num. 6.

Le Courrier, Unesco, Septembre 1958.

Matematičko fizički list, Zagreb 1958-59, št. 1.

Meteorološki zbornik, Ljubljana 1957.

Nastava matematike i fizike, Beograd 1957, VI. št. 3-4.

Nature, London-New York 1958, Vol. 182, No. 4629.

Philip's Technische Rundschau, Eindhoven 1957-58, No. 8-9, 10, 11, 12; 1958-59, No. 1.

Physics Today, New York 1957, Vol. 10, No. 8, 11, 12; 1958, Vol. 11, No. 1, 2.

Proteus, Ljubljana 1957-58, št. 10; 1958-59, št. 1.

Reports, Institut J. Stefan, Ljubljana 1957, vol. 4.

Sodobna pedagogika, Ljubljana 1958, št. 3-4, 5-7, 8.

Ukrajinskij matematičeskij žurnal, Kijev 1958, T. X, No. 1, 2.

Uspehi matematičeskih nauk, Moskva 1958, T. XIII, Vyp. 3, 4.

Varilna tehnika, Ljubljana 1957, št. 3-4.

Vestnik Leningradskogo Universiteta, Leningrad 1958, No. 10, V. 6.

Vestnik Moskovskogo Universiteta, Moskva 1957, No. 5, 6.

Zdravstveni vestnik, Ljubljana 1958, št. 3, 4, 5-6, 7-8.

Žurnal eksperimentalnoj i teoretičeskoj fiziki, Moskva 1958, Tom. 34, Vyp. 6.

Zveza Društev matematikov in fizikov FLRJ izdaja časopis:

Nastava matematike i fizike

Naročnina je za člane vseh republiških društev matematikov in fizikov 300 din, za ostale naročnike, šole in biblioteke 400 din. Naročila in naročnino pošiljajte na žiro-račun Nastave 101-701-5-1262 z oznako »za Nastavu«.

Društvo matematikov in fizikov NRS izdaja

Vesnik Društva matematičara i fizičara NRS

Letno izide v dveh dvojnih številkah, letna naročnina je 400 din. Naročnino pošiljajte na ček. račun 101-707-3-119 Društvu matematičara i fizičara NRS pod označbo »Za Vestnik«. Dopise pošiljajte na naslov društva Beograd pošt. fah 791.

Društvo matematikov in fizikov NRH izdaja za vso državo

MATEMATIČKO FIZIČKI LIST

za učence srednjih šol. Letnik ima 4 številke, med počitnicami ne izhaja. Letna naročnina je 240 din, posamezna številka 60 din.

Profesorji srednjih šol, priporočajte list dijakom! Naročila in naročnino pošiljajte na naslov:

Matematičko-fizički list, Zagreb, Ilica 16/III, p. p. 165 ali na čekovni račun št. 400-73-5-1884.

Društvo matematikov in fizikov LR Hrvatske izdaja časopis

Glasnik matematičko-fizički i astronomski

Naročnina za leto 1958 znaša 480 din. Časopis naročite pri administraciji Glasnika: Hrvatsko prirodoslovno društvo, Zagreb, Ilica št. 16-III. Čekovni račun 400-73-3-1077 za Društvo matematičara i fizičara NRH.

Obzornik za matematiko in fiziko izhaja vsak tretji mesec. Izdaja ga Društvo matematikov in fizikov LRS. Urejujejo ga: A. Kuhelj, I. Kuščer, A. Moljk, N. Prijatelj, I. Vidav. Odgovorni in tehnični urednik: I. Štalec. Upravo vodi T. Skubic. — Tiska tiskarna ČZP »Ljudska pravica« v Ljubljani. — Naročnina je 250 din, za podjetja in ustanove, ki plačajo po računu in za naročnike, ki plačajo po terjatvi 280 din. Posamezna številka 100 din. Naročnino nakažite na naš čekovni račun $\frac{600-70}{3-207}$. Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov:

Obzornik za matematiko in fiziko, Ljubljana, poštni predal 253, tel. št. 23-304.