OBZORNIK
ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA
1957-58
VI. št. 1

VSEBINA

Članki Stran

Vektorji — vir pomembnih matematičnih pojmov (Ivan Vidav) 1

Elastičnost — plastičnost — viskoznost (Franc Cvelbar) 11

Radioaktivnost ozračja (Alojz Kline) 18

Šola

Šolski žleb hidrotehničnega odseka univerze v Ljubljani (Janko Bleiweis) 27

Nekaj neuvoženih nalog za našo srednjo šolo (Ivan Kuščer) 36

Srednješolski tečaj za matematiko (Stanko Uršič) 41

Domače vesti

Občni zbor Društva matematikov in fizikov LRS (J. Grasselli) . . . 44

XI. plenum Zveze društev matematikov in fizikov FLRJ (Jože Povšič) . 44

Strokovna posvetovanja v Hercegnovem (Jože Žabkar) 46

Odgovori 47

Vprašanja 43

Utrinki 26

CONTENTS

Articles Page

Vectors — a Source of Important Mathematical Notions (Ivan Vidav) . 1

Elasticity — Plasticity — Viscosity (Franc Cvelbar) 11

Radioactivity of the Atmosphere (Alojz Kline) 18

School

Le canal vitre a l'universite de Ljubljana (Janko Bleiweis) 27

Some Problems for our School (Ivan Kuščer) 36

Mathematical Competitions in School (Stanko Uršič) 41

Home News 44

Answers 47

Questions 43

LETO VI 1957-58 OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO ŠTEV. 1 1. V. 1958

VEKTORJI — VIR POMEMBNIH MATEMATIČNIH POJMOV

IVAN VIDAV

1. Vektorje si nazorno upodobimo z usmerjenimi daljicami v prostoru. Dve daljici, ki sta enako dolgi in vzporedni v isto smer, upodabljata isti vektor. Zato smemo začetno točko vektorja poljubno izbrati. Najčešče jo vzamemo v izhodišču koordinatnega sistema. Druga krajišča vseh možnih vektorjev opišejo potem ves prostor.

Za računanje z vektorji imamo več osnovnih operacij. Naštejmo jih in si oglejmo njih glavne lastnosti:

I. *Seštevanje.* Dva vektorja **A** in **B** enolično določata vsoto **A** + **B**. Geometrično je vsota **A** + **B** diagonala paralelograma, ki ima za nevzporedni stranici sumanda **A** in **B**, in sicer tista diagonala, ki gre iz skupne začetne točke.

Vsota vektorjev ima običajne lastnosti: komutativna je in asociativna. Zato smemo vektorje seštevati v poljubnem vrstnem redu.

Razlika vektorjev **A** in **B** je tisti vektor **C**, za katerega je **B** + **C** = **A**. Odštevanje je zmerom izvedljivo. Razlika **A** — **B** je druga diagonala v zgoraj omenjenem paralelogramu. Končno naj omenimo, da je vektor nič tisti vektor, ki ima dolžino nič.

Bralec, ki pozna teorijo grup, bo takoj spoznal, da tvorijo vektorji pri seštevanju Abelovo grupo.

Projekcije kakega vektorja na koordinatne osi pravokotnega koordinatnega sistema imenujemo komponente. Tri so: A_x na osi (x), A_y na osi (y) in A_z na osi (z). Na kratko zaznamujemo vektor **A** s komponentami A_x, A_y, A_z takole: $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$. Vsota dveh vektorjev je potem

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x, A_y, A_z) + (B_x, B_y, B_z) = (A_x + B_x,\ A_y + B_y,\ A_z + B_z) \qquad (1)$$

Vsoto izračunamo tako, da seštejemo komponente.

II. *Množenje z realnimi števili.* Vektor **A** pomnožimo s številom α tako, da pomnožimo njegove komponente z α. Torej

$$\alpha\mathbf{A} = (\alpha A_x, \alpha A_y, \alpha A_z) \qquad (2)$$

Dobljeni vektor $\alpha\,\mathbf{A}$ ima pri pozitivnem α isto smer, kakor **A**, pri negativnem α pa nasprotno smer. Dolžina vektorja $\alpha\,\mathbf{A}$ je $|\alpha|$-krat večja kakor pri vektorju **A**. Za množenje z realnimi števili veljajo zakoni:

$$(\alpha + \beta)\,\mathbf{A} = \alpha\,\mathbf{A} + \beta\,\mathbf{A} \qquad \alpha\,(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\,\mathbf{A} + \alpha\,\mathbf{B}$$

$$(\alpha\,\beta)\,\mathbf{A} = \alpha\,(\beta\,\mathbf{A}), \qquad 1.\,\mathbf{A} = \mathbf{A}, \qquad 0.\mathbf{A} = 0$$

III. Dolžina vektorja je njegova absolutna vrednost. Absolutno vrednost vektorja **A** bomo tu zaznamovali z $\| \mathbf{A} \|$. Absolutna vrednost ima pri vektorjih podobne lastnosti kakor pri realnih ali kompleksnih številih, namreč:

1. $\| \mathbf{A} + \mathbf{B} \| \leq \| \mathbf{A} \| + \| \mathbf{B} \|$
2. $\| \alpha \mathbf{A} \| = | \alpha | \cdot \| \mathbf{A} \|$
3. $\| \mathbf{A} \| = 0$ le, če je $\mathbf{A} = 0$.

Prva lastnost trdi, da absolutna vrednost vsote ni večja od vsote absolutnih vrednosti sumandov. Vsota je diagonala paralelograma s stranicama **A** in **B**, dolžina diagonale pa je manjša od vsote obeh stranic.

IV. *Skalarni produkt.* Vektorje moremo skalarno množiti. Skalarni produkt, ki je realno število, dobimo takole: Pomnožimo absolutno vrednost prvega faktorja z absolutno vrednostjo drugega faktorja, dobljeni produkt pa še s kosinusom kota, ki ga vektorja oklepata:

$$\mathbf{AB} = \| \mathbf{A} \| \cdot \| \mathbf{B} \| \cos \delta$$

če je δ kot med **A** in **B**. Skalarni produkt je komutativen in distributiven

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} \quad \text{in} \quad (\alpha \mathbf{A} + \beta \mathbf{B}) \mathbf{C} = \alpha (\mathbf{AC}) + \beta (\mathbf{BC})$$

Če je skalarni produkt enak nič, faktorja pa oba od nič različna, stojita vektorja provokotno drug na drugem.

V. *Vektorski produkt.* Ta produkt je vektor, ki stoji pravokotno na obeh faktorjih, njegova absolutna vrednost pa je ploščina paralelograma, ki ga tvorita oba faktorja. Vektorski produkt ni komutativen, pač pa je distributiven:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}, \quad (\alpha \mathbf{A}) \times \mathbf{B} = \alpha (\mathbf{A} \times \mathbf{B}), \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{C} + \mathbf{B} \times \mathbf{C}$$

2. Pogosto pa imamo v matematiki opraviti z objekti, ki z njimi lahko podobno računamo kakor z vektorji. Oglejmo si le en primer. Vektor določajo njegove tri komponente. Naravna je zdaj posplošitev, da vzamemo namesto treh n komponent, pri čemer je n še poljubno, vendar fiksno naravno število. Vsako n-torico komponent $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ imenujemo lahko vektor v n-razsežnem prostoru. Vsoto dveh vektorjev **x** in **y** ter produkt vektorja **x** z realnim številom α definiramo po analogiji z (1) in (2) takole

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$
$$\alpha \mathbf{x} = \alpha (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$$

Obe operaciji imata iste lastnosti kakor pri navadnih vektorjih. Zato pravimo, da tvorijo vse n-torice realnih komponent *linearni vektorski prostor.*

Definicija. Množica elementov $\mathfrak{X}$ tvori realen linearni vektorski prostor, če moremo elemente te množice seštevati in množiti s skalarnimi faktorji ter če veljajo za te dve operaciji vsa računska pravila (I) in (II) kakor za navadne vektorje. Posamezne elemente linearnega vektorskega prostora imenujemo vektorje.

Poljubna elementa **x** in **y** iz množice $\mathfrak{X}$ enolično določata vsoto $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, ki je seveda element iz množice $\mathfrak{X}$. Vsota je komutativna in asociativna. Nadalje

moremo vsak element $\mathbf{x}$ pomnožiti s poljubnim realnim številom α. Produkt $\alpha\,\mathbf{x}$ je spet neki element iz $\mathfrak{X}$.

V našem primeru zgoraj so elementi n-torice realnih števil.

Vektorje $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ iz prostora $\mathfrak{X}$ imenujemo linearno odvisne, če eksistira med njimi kaka zveza z obliko

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{x}_n = 0 \tag{3}$$

Koeficienti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ so realna števila, ki niso vsa enaka nič. V nasprotnem primeru, ko take zveze ni, imenujemo vektorje $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ linearno neodvisne.

Dva navadna vektorja — začetni točki obeh naj bosta v izhodišču koordinatnega sistema — sta linearno odvisna, če ležita na isti premici. Trije vektorji pa so linearno odvisni, če leže na isti ravnini. Štirje vektorji so zmerom linearno odvisni.

Če eksistira v vektorskem prostoru $\mathfrak{X}$ le končno število linearno neodvisnih vektorjev, pravimo, da je prostor $\mathfrak{X}$ končno razsežen. Največje število linearno neodvisnih vektorjev je dimenzija prostora.

V navadnem prostoru so enotni vektorji na koordinatnih oseh linearno neodvisni. Vsak vektor se da z njimi linearno izraziti: Prostor je tridimenzionalen.

V prostoru vseh n-toric so očitno linearno neodvisni vektorji

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0) \ldots, \quad \mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)$$

Vsak drug vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se da z njimi linearno izraziti

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \ldots + x_n \mathbf{e}_n$$

Zato ima ta prostor n razsežnosti.

So tudi taki vektorski prostori, katerih dimenzija je neskončno velika. V njih eksistira poljubno število linearno neodvisnih vektorjev. V nadaljnjem bomo obravnavali le končno razsežne prostore.

Kot drugi primer vktorskega prostora si oglejmo matrike! Kvadratna n-vrstna matrika je sestavljena iz n^2 števil-elementov, ki jih zapišemo v n vrsticah po n števil:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

Na kratko zaznamujemo matriko A tudi takole: $A = \| a_{ik} \|$. Vse kvadratne matrike z n vrsticami tvorijo linearni vektorski prostor. Vsota dveh matrik je

$$\| a_{ik} \| + \| b_{ik} \| = \| a_{ik} + b_{ik} \|$$

Torej matrike seštevamo tako, da seštevamo istoležne člene v obeh sumandih. Vsota je seveda spet n-vrstna matrika. Odštevamo pa matrike, če odštevamo istoležne člene

$$\| a_{ik} \| - \| b_{ik} \| = \| a_{ik} - b_{ik} \|$$

Matriko A pomnožimo z realnim številom α tako, da pomnožimo vse njene člene z α. Torej

$$\alpha \| a_{ik} \| = \| \alpha a_{ik} \|$$

Brez posebnih težav uvidimo, da imata seštevanje matrik in množenje z realnim faktorjem iste lastnosti kakor pri navadnih vektorjih. Zato tvorijo vse n-vrstne matrike linearni vektorski prostor. Dimenzija tega prostora je n^2. Zaznamujmo namreč z E_{ik} matriko, v kateri stoji število 1 na križišču i-te vrstice in k-tega stolpca, povsod drugod pa so same ničle. Matrik E_{ik} je n^2 in so očitno med seboj linearno neodvisne. Vsaka druga matrika A pa se da z njimi linearno izraziti:

$$A = a_{11} E_{11} + a_{12} E_{12} + a_{21} E_{21} + a_{22} E_{22} + \ldots + a_{nn} E_{nn}$$

On tod sledi, da je n^2 razsežnost prostora, ki ga tvorijo vse matrike.

Matrike pa moremo med seboj tudi množiti. Produkt n-vrstnih matrik $A = \| a_{ik} \|$ in $B = \| b_{ik} \|$ je n-vrstna matrika $C = \| c_{ik} \|$. Element c_{ik} produkta $C = AB$ izračunamo po formuli

$$c_{ik} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \ldots + a_{in} b_{nk}$$

Torej dobimo c_{ik} tako, da pomnožimo člene i-te vrstice matrike A s členi k-tega stolpca matrike B. To pravilo je isto kakor pri množenju determinant.

Produkt matrik je asociativen in distributiven. Velja torej

$$(AB)\,C = A\,(BC), \quad (A + B)\,C = AC + BC, \quad (\alpha A)\,B = \alpha\,(AB)$$

Teh pravil ni težko dokazati, vendar bomo dokaz tu opustili. Pač pa produkt matrik ni komutativen. V splošnem matrika AB ni ista kakor BA. Preprost zgled sta matriki

$$A = \begin{vmatrix} 1,0 \\ 0,0 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 0,1 \\ 0,0 \end{vmatrix}$$

Potem je

$$AB = \begin{vmatrix} 0,1 \\ 0,0 \end{vmatrix} \qquad BA = \begin{vmatrix} 0,0 \\ 0,0 \end{vmatrix}$$

tedaj $AB \neq BA$. Zato računamo z matrikami kakor z navadnimi števili, le na vrstni red faktorjev moramo paziti.

Ker je produkt AB v splošnem druga matrika kakor BA, razlika $AB - BA$ ni zmerom enaka nič. To razliko imenujemo *komutator* matrik A in B in jo zaznamujemo z

$$[A, B] = AB - BA$$

Komutator je seveda neka n-vrstna matrika. Če je $[A, B] = 0$, je $AB = BA$. Matriki A in B sta v tem primeru zamenljivi.

Za komutatorje veljajo tale računska pravila

1. $[A, B] = -[B, A]$ 2. $[\alpha A + \beta B, C] = \alpha [A, C] + \beta [B, C]$

3. $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$

O tem se prepričamo z lahkim računom.

Ker smo za matrike definirali tri računske operacije: seštevanje, množenje z realnim številom in množenje matrik med seboj, tvorijo vse n-vrstne matrike neko *linearno algebro.*

3. Doslej smo študirali le seštevanje vektorjev in množenje z realnim številom. Pri navadnih vektorjih pa imamo še druge operacije. Oglejmo si najprej, kako je z absolutno vrednostjo!

Naj bo vektorski prostor $\mathfrak{X}$ tak, da pripada vsakemu vektorju $\mathbf{x}$ neko pozitivno število, ki ga zaznamujmo z $\| \mathbf{x} \|$. Torej je $\| \mathbf{x} \| \geqq 0$ za vsak vektor iz prostora $\mathfrak{X}$. Število $\| \mathbf{x} \|$ imenujemo *normo* vektorja $\mathbf{x}$, če ustreza pogojem III. 1., 2., 3., to se pravi, če je

1. $\| \mathbf{x} + \mathbf{y} \| \leq \| \mathbf{x} \| + \| \mathbf{y} \|$, 2. $\| \alpha \mathbf{x} \| = |\alpha| \cdot \| \mathbf{x} \|$

3. $\| \mathbf{x} \| = 0$ le, če je $\mathbf{x} = 0$.

Prostor, v katerem je definirana norma, imenujemo *normirani vektorski prostor.*

Za zgled vzemimo vektorski prostor vseh n-toric realnih števil. Normo vektorja $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definirajmo takole:

$$\| \mathbf{x} \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

Desna stran je posplošitev formule za absolutno vrednost navadnih vektorjev. Brez posebne težave bi spoznali, da ta norma ustreza pogojem 1., 2. in 3. S to normo tvorijo vse n-torice normirani vektorski prostor.

V normiranem vektorskem prostoru lahko govorimo o konvergenci zaporedij. Zaporedje vektorjev $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$ iz prostora $\mathfrak{X}$ konvergira proti vektorju $\mathbf{x}$, če pripada vsakemu številu $\varepsilon > 0$ tak člen zaporedja, da je od tistega člena naprej stalno $\| \mathbf{x}_n - \mathbf{x} \| < \varepsilon$. Konvergentno zaporedje ustreza tako imenovanemu Cauchyjevemu pogoju: Vsakemu pozitivnemu številu ε pripada tak člen zaporedja $\mathbf{x}_n$, da je $\| \mathbf{x}_{n+p} - \mathbf{x}_n \| < \varepsilon$ za vsak pozitiven p. Pri realnih številih je Cuachyjev pogoj tudi zadosten: Če mu kako zaporedje ustreza, je konvergentno, ima tedaj limito. V normiranih vektorskih prostorih pa to ne drži vselej. Tak vektorski prostor, v katerem je Cauchyjev pogoj zadosten pogoj za konvergenco zaporedij, imenujemo *poln.* Normirani vektorski prostor, ki je poln, je *Banachov prostor,* po poljskem matematiku S. Banachu, ki je med prvimi študiral njegove lastnosti.

4. Pri navadnih vektorjih poznamo skalarni produkt. Ali moremo tudi pri nekaterih splošnih vektorskih prostorih uvesti skalarni produkt? Naj bo $\mathfrak{X}$ linearni vektorski prostor. Vsakemu paru vektorjev $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ naj pripada neko realno število, ki ga zaznamujmo z $(\mathbf{x}/\mathbf{y})$.

Če ustreza število $(\mathbf{x}/\mathbf{y})$ *pogojem*

1. $(\mathbf{x}/\mathbf{y}) = (\mathbf{y}/\mathbf{x})$, 2. $(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}/\mathbf{z}) = \alpha (\mathbf{x}/\mathbf{z}) + \beta (\mathbf{y}/\mathbf{z})$

3. $(\mathbf{x}/\mathbf{x}) \geqq 0$ in $(\mathbf{x}/\mathbf{x}) = 0$ le za $\mathbf{x} = 0$

potem imenujemo $(\mathbf{x}/\mathbf{y})$ *skalarni produkt vektorjev* $\mathbf{x}$ *in* $\mathbf{y}$.

Za zgled vzemimo vektorski prostor vseh n-toric. Če sta $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ in $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ poljubna vektorja, definiramo skalarni produkt s formulo

$$(\mathbf{x}/\mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

izraz $(\mathbf{x}/\mathbf{y})$ ustreza vsem zgoraj naštetim pogojem in je zato skalarni produkt.

Skalarni produkt vektorja s samim seboj je pozitivno število. Pozitivni drugi koren izraza $(\mathbf{x}/\mathbf{x})$ imenujemo normo vektorja $\mathbf{x}$, tedaj $\| \mathbf{x} \|^2 = (\mathbf{x}/\mathbf{x})$. Tako določeno število $\| \mathbf{x} \|$ ima vse lastnosti, ki jih zahtevamo od norme. Zato je vektorski prostor, v katerem je definiran skalarni produkt, tudi normiran. Če je hkrati v smislu te norme poln in neskončno razsežen, ga imenujemo *Hilbertov prostor*. Več o njem glej v članku dr. F. Križaniča: Spektralna teorija linearnih operatorjev v Hilbertovem prostoru. Obzornik IV, 149—160!

5. Navadne vektorje moremo med seboj vektorsko množiti. Vektorski produkt je neki vektor. Ali se da definirati vektorski produkt tudi v splošnejših vektorskih prostorih? Preden odgovorimo na to vprašanje, opozorimo na naslednje dejstvo iz navadne vektorske algebre: Naj bodo $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ poljubni vektorji. Zmerom velja identiteta

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + \mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) + \mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0$$

Vrnimo se zdaj k splošnim vektorskim prostorom!

Naj bo $\mathfrak{X}$ linearni vektorski prostor s končno razsežnostjo! Privzemimo, da je dan kak predpis ali zakon, po katerem pripada vsakemu paru vektorjev $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ enolično neki vektor, ki ga zaznamujmo z $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$! Vektor $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ naj ustreza pogojem

1. $[\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}, \mathbf{z}] = \alpha [\mathbf{x}, \mathbf{z}] + \beta [\mathbf{y}, \mathbf{z}]$ 2. $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = - [\mathbf{y}, \mathbf{x}]$
3. $[\mathbf{x}, [\mathbf{y}, \mathbf{z}]] + [\mathbf{y}, [\mathbf{z}, \mathbf{x}]] + [\mathbf{z}, [\mathbf{x}, \mathbf{y}]] = 0$

Tu sta α in β poljubni realni števili, $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ pa poljubni vektorji iz $\mathfrak{X}$. *Vektorski prostor, v katerem eksistira taka računska operacija z navedenimi lastnostmi, se imenuje Liejeva algebra, včasih tudi infinitezimalna grupa.*

Operacija, ki priredi v linearnem vektorskem prostoru $\mathfrak{X}$ vektorjema $\mathbf{x}$ in $\mathbf{y}$ vektor $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$, je posplošitev vektorskega produkta pri navadnih vektorjih. Iz primerjave s V. in z 1., 2., 3. namreč vidimo, da ima $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ iste lastnosti kakor vektorski produkt $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

V razdelku **2.** smo spoznali, da tvorijo vse n-vrstne matrike $A = \| a_{ik} \|$ linearno algebro z n^2 dimenzijami. Ker produkt matrik AB v splošnem ni komutativen, smo razliko $AB - BA$ zaznamovali z $[A, B]$ in jo imenovali komutator matrik A in B. Komutator se obnaša prav tako kakor operacija v Liejevi algebri (glej lastnosti komutatorjev). Od tod sklepamo: *Vse n-vrstne matrike tvorijo Liejevo algebro, če definiramo operacijo $[A, B]$ kot komutator $AB - BA$ dveh matrik.* Zato bomo odslej v vsaki Liejevi algebri imenovali $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ komutator vektorjev $\mathbf{x}$ in $\mathbf{y}$.

Tudi navadni vektorji tvorijo Liejevo algebro. Kakor vidimo, ni to edina možnost. Eksistirajo še Liejeve algebre, ki imajo poljubno veliko razsežnost: Liejeva algebra n-vrstnih matrik ima razsežnost n^2 in n je še poljubno naravno število.

Povrnimo se k splošni Liejevi algebri $\mathfrak{X}$. Iz lastnosti 2. sledi, da je

$$[\mathbf{x}, \mathbf{x}] = 0 \tag{4}$$

Nadalje je komutator linearen tudi v drugem faktorju

$$[\mathbf{x}, \alpha \mathbf{y} + \beta \mathbf{z}] = \alpha [\mathbf{x}, \mathbf{y}] + \beta [\mathbf{x}, \mathbf{z}] \tag{5}$$

Osnovni vektorski prostor $\mathfrak{X}$ je n-razsežen. Zato eksistira v njem n linearno neodvisnih vektorjev $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, s katerimi se dajo vsi drugi vektorji linearno izraziti. Poljuben vektor $\mathbf{x}$ iz $\mathfrak{X}$ je tedaj

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \ldots + x_n \mathbf{e}_n ,$$

pri čemer so $x_1, x_2, \ldots, x_n$ realna števila. Iz lastnosti 1. in enačbe (5) se vidi, da moremo izračunati komutator dveh poljubnih vektorjev $\mathbf{x}$ in $\mathbf{y}$, če poznamo komutatorje osnovnih vektorjev $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. Komutator $[\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k]$ je neki vektor prostora $\mathfrak{X}$ in se tedaj linearno izraža z $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. Torej je

$$[\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k] = \gamma_{ik}{}^1 \mathbf{e}_1 + \gamma_{ik}{}^2 \mathbf{e}_2 + \ldots + \gamma_{ik}{}^n \mathbf{e}_n \tag{6}$$

$\gamma_{ik}{}^r$ so realna števila. Imenujemo jih *strukturne konstante* dane Liejeve algebre. Le-te Liejevo algebro popolnoma določajo. Če jih poznamo, lahko po formuli (6) izračunamo komutatorje osnovnih vektorjev, zaradi bilinearnosti pa tudi komutator dveh poljubnih vektorjev prostora $\mathfrak{X}$.

Strukturnih konstant $\gamma_{ik}{}^r$ bi bilo na prvi pogled n^3, ker indeksi i, k, r lahko zavzamejo vse vrednosti od 1 do n. Vendar so nekateri $\gamma_{ik}{}^r$ enaki nič, nekateri pa med seboj odvisni. Zato jih je manj. Ker je namreč $[\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k] = -[\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_i]$ in so vektorji $\mathbf{e}_r$ med seboj neodvisni, vidimo iz enačbe (6), da je

$$\gamma_{ik}{}^r = -\gamma_{ki}{}^r \tag{7}$$

Tako je n. pr. $\gamma_{ii}{}^r = 0$ za vse indekse i in r. Nadaljnje zveze med strukturnimi konstantami dobimo iz lastnosti 3. Najprej izračunamo

$$[\mathbf{e}_i, [\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l]] = (\Sigma\, \gamma_{kl}{}^r \gamma_{ir}{}^1)\, \mathbf{e}_1 + (\Sigma\, \gamma_{kl}{}^r \gamma_{ir}{}^2)\, \mathbf{e}_2 + \ldots + (\Sigma\, \gamma_{kl}{}^r \gamma_{ir}{}^n)\, \mathbf{e}_n$$

Na desni seštevamo povsod na indeks r, in sicer od 1 do n. Upoštevajoč 3., dobimo od tod

$$\Sigma\, \gamma_{kl}{}^r \gamma_{ir}{}^s + \Sigma\, \gamma_{li}{}^r \gamma_{kr}{}^s + \Sigma\, \gamma_{ik}{}^r \gamma_{lr}{}^s = 0 \tag{8}$$

To so nadaljnje zveze, ki jim zadoščajo strukturne konstante $\gamma_{ik}{}^r$.

Če izberemo števila $\gamma_{ik}{}^r$ tako, da ustrezajo zvezam (7) in (8), so ta števila strukturne konstante neke abstraktne n-dimenzionalne Liejeve algebre. Z enačbami (6) definirani komutator zadošča pogojem 1., 2., 3., ker ustrezajo števila $\gamma_{ik}{}^r$ zvezam (7) in (8).

Najpreprostejša Liejeva algebra ima dve dimenziji. Če niso vsi komutatorji enaki nič, lahko v tem primeru osnovne vektorje tako izberemo, da je

$$[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] = \mathbf{e}_1$$

Naj bosta $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2$ in $\mathbf{y} = y_1 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2$ poljubna vektorja. Njun komutator je

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = [x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2, y_1 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2] = (x_1 y_2 - x_2 y_1)\, \mathbf{e}_1$$

Vidimo, da leže vsi komutatorji na vektorju $\mathbf{e}_1$.

Navadni vektorji z vektorskim produktom kot komutatorjem tvorijo trirazsežno Liejevo algebro. Vzemimo za osnovne vektorje enotne vektorje na koordinatnih oseh: **i**, **j**, **k**. Vektorski produkti le-teh so

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

Strukturne konstante so v tem primeru

$$\gamma_{11}{}^{r} = \gamma_{22}{}^{r} = \gamma_{33}{}^{r} = 0, \qquad \gamma_{12}{}^{1} = \gamma_{12}{}^{2} = 0, \qquad \gamma_{23}{}^{2} = \gamma_{23}{}^{3} = 0$$

$$\gamma_{31}{}^{1} = \gamma_{31}{}^{3} = 0, \qquad \gamma_{12}{}^{3} = \gamma_{23}{}^{1} = \gamma_{31}{}^{2} = 1$$

V naslednjem si bomo še na kratko ogledali enega izmed osnovnih problemov v teoriji Liejevih algeber.

Dana je neka abstraktna Liejeva algebra $\mathfrak{X}$. Naj pripada vsakemu vektorju **x** prostora $\mathfrak{X}$ neka n-vrstna matrika X, ki jo imenujemo slika elementa **x**! Ta upodobitev vektorjev na matrike naj bo taka, da pripada vsoti **x** + **y** vsota ustreznih matrik $X + Y$, vektorju α **x** (α je realno število) matrika αX, komutatorju [**x**, **y**] pa komutator ustreznih matrik $[X, Y] = XY - YX$! Tako upodobitev z matrikimi imenujemo *linearno reprezentacijo abstraktne Liejeve algebre.* Reprezentacija je zvesta, če se vsak od nič različen vektor upodobi v matriko, ki ni enaka nič. Pri zvesti reprezentaciji se dva različna vektorja upodobita v dve različni matriki. Zdaj nastane tole vprašanje:

Ali ima vsaka abstraktna Liejeva algebra kako zvesto linearno reprezentacijo z matrikami?

Odgovor je pritrdilen: Vsako Liejevo algebro je mogoče zvesto upodobiti z matrikami. Takih reprezentacij je celo nešteto.

Prvi je postavil gornje vprašanje S. Lie (1842—1899), norveški matematik, po katerem se te algebre imenujejo. Izrek pa je dokazal šele l. 1934 ruski matematik I. Ado, in sicer z algebraičnimi metodami. Vendar je imel njegov dokaz še nekatere pomanjkljivosti. Pozneje (1938) je E. Cartan ponovno dokazal izrek, uporabljajoč pri tem transcendentne metode.

Za zgled vzemimo navadne vektorje. Po gornjem izreku se dajo vektorji tako upodobiti z matrikami, da preide vektorski produkt v komutator ustreznih matrik. Eno tako upodobitev dobimo, če priredimo enotnim vektorjem na koordinatnih oseh, t. j. vektorjem **i**, **j**, **k**, matrike

$$I = \begin{Vmatrix} 0, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & 0 \\ -1, & 0, & 0 \end{Vmatrix} \qquad J = \begin{Vmatrix} 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \\ -1, & 0, & 0 \end{Vmatrix} \qquad K = \begin{Vmatrix} 0, & -1, & 0 \\ 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{Vmatrix}$$

S kratkim računom preverimo, da je res

$$IJ - JI = K, \qquad JK - KJ = I, \qquad KI - IK = J$$

Vektor $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ se potem upodobi v matriko $A_x I + A_y J + A_z K$.

6. Študij Liejevih algeber pa ni pomemben le zaradi njih samih, temveč predvsem zaradi povezave s teorijo Liejevih grup. Kajti vsaki Liejevi grupi pripada neka Liejeva algebra in narobe: vsaka Liejeva algebra določa neko (lokalno) Liejevo grupo.

Kaj pa je Liejeva grupa? Glede abstraktne definicije Liejeve grupe glej članek F. Križaniča: Peti Hilbertov problem, ki je izšel v Ozborniku IV, 119—121!

S. Lie sam je proučeval predvsem zvezne transformacijske grupe. Oglejmo si razmere v dveh dimenzijah, to je v ravnini! Naj bosta x, y pravokotni koordinati kake točke! Enolični funkciji

$$x' = u\,(x, y, a_1, a_2, \ldots, a_n)\,, \quad y' = v\,(x, y, a_1, a_2, \ldots, a_n) \tag{9}$$

določata neko transformacijo ravnine (xy) váse: Točka (x, y) se transformira v točko T' (x', y'), ki ji dobimo koordinate iz enačb (9). Funkciji u in v naj bosta zvezni in enačbi (9) enolično rešljivi na x, y! Konstante $a_1, a_2, \ldots, a_n$, imenujemo jih parametri, naj imajo na nekem polju še poljubne vrednosti. Zato enačbi (9) ne določata ene same transformacije, temveč neskončno mnogo. Za vsak sistem vrednosti parametrov $a_1, a_2, \ldots, a_n$ po eno. Zaznamujmo skupnost vseh teh transformacij z $\mathfrak{G}$.

Napravimo v ravnini zaporedoma dve transformaciji iz množice $\mathfrak{G}$: Točka $T\,(x, y)$ preide po prvi transformaciji v točko T' (x', y'), le-to pa preslikajmo v točko T'' (x'', y''), in sicer s transformacijo iz $\mathfrak{G}$, ki pripada vrednostim parametrov $b_1, b_2, \ldots, b_n$; torej

$$x'' = u\,(x', y', b_1, b_2, \ldots, b_n), \quad y'' = v\,(x', y', b_1, b_2, \ldots, b_n) \tag{10}$$

Prehod od točk T na T'' $(x'' y'')$ je spet neka transformacija ravnine, ki pa v splošnem ni več iz množice $\mathfrak{G}$. To transformacijo imenujemo produkt prve in druge transformacije.

Če pa enačbi (9) razrešimo na x in y, dobimo tako imenovano inverzno transformacijo. Le-ta prevede sliko T' v prvotno točko T nazaj.

Množica $\mathfrak{G}$ tvori grupo transformacij, če je a) produkt poljubnih transformacij iz $\mathfrak{G}$ spet neka transformacija iz $\mathfrak{G}$ in če so b) vse inverzne transformacije v $\mathfrak{G}$.

Produkt dveh transformacij dobimo, če v enačbi (10) vstavimo za x', y' izraza (9). Če je $\mathfrak{G}$ grupa, je produkt neka transformacija iz $\mathfrak{G}$. Naj bo tista, ki pripada vrednostim parametrov $c_1, c_2, \ldots, c_n$:

$$x'' = u\,(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n)\,, \quad y'' = v\,(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

Parametri $c_1, c_2, \ldots, c_n$ so seveda odvsini od parametrov obeh faktorjev:

$$c_r = f_r\,(a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n)\,, \quad r = 1, 2, \ldots, n \tag{11}$$

Ker je tudi inverzna transformacija v $\mathfrak{G}$, dobimo z rešitvijo enačb (9)

$$x = u\,(x', y', c_1, c_2, \ldots, c_n)\,, \quad y = v\,(x', y', c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

Tudi tu so $c_1, c_2, \ldots, c_n$ odvisni od začetnih parametrov:

$$c_r = g_r\,(a_1, a_2, \ldots, a_n)\,, \quad r = 1, 2, \ldots, n \tag{12}$$

Vsaka grupa ima tudi identično transformacijo $x' = x, y' = y$. Naj bo (9) identična transformacija, če je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$!

Grupa $\mathfrak{G}$ je pravzaprav karakterizirana s funkcijami f_r in g_r, ki določajo parametre produkta in inverzne transformacije. Če so vse te funkcije analitične, to se pravi, da se dajo razviti v konvergentne potenčne vrste parametrov, se imenuje $\mathfrak{G}$ Liejeva grupa. Ker je n parametrov, je $\mathfrak{G}$ n-dimenzionalna Liejeva grupa.

Preprost zgled Liejeve grupe so vrtenja ravnine okrog izhodišča koordinatnega sistema. Transformacije se tu glase

$$x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha, \qquad y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

α je kot, za katerega smo zavrteli ravnino okrog izhodišča. Očitno tvorijo vsa vrtenja enoparametrično Liejevo grupo: Če zavrtimo ravnino za kot α in nato še za kot β, dosežemo isto, kot če zavrtimo enkrat ravnino za kot $\gamma = \alpha + \beta$. Če pa najprej zasučemo ravnino za kot α, potem pa za kot $-\alpha$, ima na koncu ravnina spet začetno lego. Funkciji f in g se zato tu glasita

$$f(\alpha, \beta) = \alpha + \beta, \qquad g(\alpha) = -\alpha$$

Obe sta analitični. Zato tvorijo vrtenja Liejevo grupo.

Vsa vrtenja prostora okrog izhodišča koordinatnega sistema pa tvorijo tridimenzionalno Liejevo grupo. Homogena ortogonalna transformacija v prostoru ima namreč 9 koeficientov. Med njimi pa je šest zvez, tako da so le trije koeficienti neodvisni. Ker tvorijo očitno vsa vrtenja grupo, je to tridimenzionalna Liejeva grupa.

Pri splošni Liejevi grupi se dajo funkcije f_r in g_r razviti v konvergentne potenčne vrste. Če je $b_1 = b_2 \ldots = b_n = 0$, je drugi faktor v produktu identična transformacija: $x'' = x'$, $y'' = y'$. Torej so parametri produkta enaki parametrom prve transformacije $c_1 = a_1$, $c_2 = a_2, \ldots, c_n = a_n$. Od tod sledi

$$f_r(a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots, 0) = a_r$$

Prav tako pa dokažemo, da je

$$f_r(0, 0, \ldots, 0, b_1, b_2, \ldots, b_n) = b_r$$

Če torej razvijemo funkcije f_r po potencah parametrov a_i in b_k, dobimo vrste z obliko

$$f_r = a_r + b_r + \Sigma\, \alpha_{ik}{}^r a_i b_k + \ldots \tag{13}$$

Na desni so s pikami naznačeni členi z višjimi potencami parametrov.

Produkt dveh transformacij v splošnem ni komutativen, kar se vidi že pri linearnih transformacijah. Zato se funkcije f_r v splošnem spremene, če med seboj zamenjamo parametre a_i in b_k. Koeficienta $\alpha_{ik}{}^r$ in $\alpha_{ki}{}^r$ tedaj nista med seboj enaka. Oglejmo si diference

$$\gamma_{ik}{}^r = \alpha_{ik}{}^r - \alpha_{ki}{}^r \tag{14}$$

Očitno je $\gamma_{ik}{}^r = -\gamma_{ki}{}^r$. Pač pa je produkt transformacij asociativen. Od tod se dajo dokazati naslednje zveze med števili $\gamma_{ik}{}^r$:

$$\Sigma\, \gamma_{kl}{}^r \gamma_{ir}{}^s + \Sigma\, \gamma_{li}{}^r \gamma_{kr}{}^s + \Sigma\, \gamma_{ik}{}^r \gamma_{lr}{}^s = 0$$

Primerjajoč te zveze z enačbami (8), vidimo, da so $\gamma_{ik}{}^r$ strukturne konstante neke Liejeve algebre. Zato pripada vsaki Liejevi grupi $\mathfrak{G}$ neka Liejeva algebra. V posebnem primeru, ko je $\mathfrak{G}$ grupa vseh vrtenj prostora okoli izhodišča koordinatnega sistema, je ustrezna Liejeva algebra navadna vektorska algebra z vektorskim produktom kot komutatorjem.

Na koncu bodi omenjeno, da je teorija Liejevih grup tisto področje sodobne matematike, kjer se križajo najpomembnejše smeri raziskovanja: algebra, topologija in funkcionalna analiza.

ELASTIČNOST — PLASTIČNOST — VISKOZNOST

FRANC CVELBAR

Navajeni smo, da ločimo snovi na trdne, tekoče in plinaste, zato niti ne premišljujemo dosti, ali se da ta klasifikacija res povsod izvesti. Vendar pa vsak dan srečujemo snovi, kot so testo, maslo, sir, razni bitumeni, marmelada, lončarska glina, oljne barve, kislo mleko itd., za katere bi na vprašanje, ali so tekoče ali trdne, le s težavo odgovorili. Po občutku bi jih postavili nekam med trdne snovi in tekočine. Zato, da se nam ne bo treba zanašati na občutke, moramo premisliti, kakšne meritve lahko pomagajo pri presoji.

§ 1. Trdne snovi

Ugotovimo najprej, kako se spreminjajo napetosti v snovi, če jo deformiramo. Pravimo, da je snov *idealno trdna (elastična)*, kadar obstaja enolična zveza med tenzorjem napetosti in tenzorjem deformacij.[1] Vsa naša nadaljnja obravnavanja bodo veljala za primer, ko sta izmed komponent tenzorja deformacij od nič različna samo $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}$, ki ju bomo zaznamovali kar z ε; ustrezni komponenti tenzorja napetosti pa bomo pisali s σ. Omenjeno funkcijsko zvezo bomo torej zapisali takole:

$$\varepsilon = \varepsilon(\sigma) \tag{1}$$

Slika te funkcije naj se na kratko imenuje diagram $\varepsilon(\sigma)$ (slika 1 a).

Pogosto, zlasti če deformacija ni prehuda, lahko računamo s *Hookovim zakonom*, to je s sorazmernostjo

$$\sigma = 2\,G\,\varepsilon \tag{2}$$

pri čemer je G strižni modul. Snov, ki se pokorava temu zakonu, se imenuje *Hookova snov.*

Ko pravimo, da je pri idealni trdni snovi ε enolično odvisen od σ, zahtevamo tudi, da mora deformacija nastopiti takoj, čim nastopi napetost. Če ostane napetost konstantna, se tudi deformacija ne sme več spremeniti. Deformacija mora biti neodvisna od tega, ali telo obremenjujemo ali razbremenjujemo. Oglejmo si to na diagramu $\varepsilon(t)$ (slika 1 b)! Ta slika kaže odvisnost deformacije od časa za primer, ko nastopi napetost hipoma (pri $t = 0$) in hipoma (pri $t = t_0$) spet odneha, medtem ko je vmes konstantna. V danem primeru dobimo na sliki pravokotno odsekano črto.

Idealni trdni (elastični) snovi se zelo dobro približujejo razna stekla (pri ne previsoki temperaturi), precej dobro pa tudi nekatere kovine (n. pr. jeklo), če le napetosti ne prekoračijo določene meje. Pri steklu je ta meja določena z napetostjo zloma, pri jeklu pa z mejo plastičnosti.

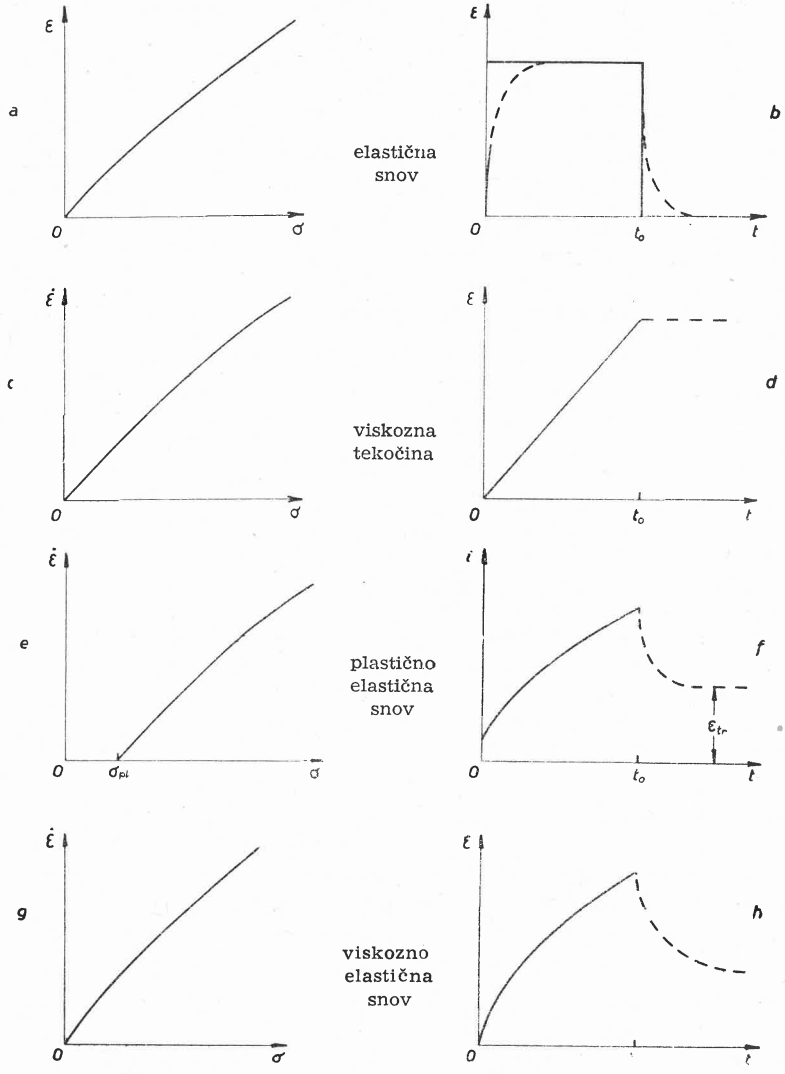
Resnične elastične snovi se ne pokoravajo natančno zgornji shemi. Pri kavčuku in v majhni meri včasih tudi pri kovinah opazimo pojav *zakasnele (retardirane) deformacije.* Ko na kavčukovo vrvico obesimo utež, ne doseže takoj polnega raztezka, ampak še nekaj časa leze (črtkano na sliki 1 b). Ko utež odstranimo, deformacija le počasi izgineva. Vzrok za pojav zakasnele deformacije je notranje trenje, ki pride posebno do izraza pri snoveh iz velikih molekul.

§ 2. Tekočine

Tekočine se od trdnih snovi najbolj ločijo po tem, da v njih ni strižnih napetosti, kadar mirujejo. V mirujoči tekočini je $\sigma = 0$, ne glede na to, kako smo tekočino prej deformirali. Samo takrat, ko tekočina teče, torej ko jo ravno deformiramo, je lahko $\sigma \neq 0$. Pri pristnih tekočinah je tenzor strižnih hitrosti enolično odvisen od tenzorja napetosti. Zapišimo spet samo enačbo za najbolj preprost primer:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}(\sigma) \tag{3}$$

kjer pomeni $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_{xy} = \dot{\varepsilon}_{yx}$ deformacijsko hitrost. Namesto diagrama $\varepsilon(\sigma)$, ki ga rabimo pri trdnih snoveh, narišemo za tekočino diagram $\dot{\varepsilon}(\sigma)$ (sl. 1 c). Oglejmo si



Sl. 1. Diagrami $\varepsilon(\sigma)$ oziroma $\dot{\varepsilon}(\sigma)$ ter $\varepsilon(t)$ za različne tipe snovi

še diagram $\varepsilon(t)$ (sl. 1 d)! Pri konstantni strižni napetosti raste deformacija linearno s časom. Kakor hitro pa napetost poneha, se tekočina tudi ne more več dalje deformirati; ε ostane potem nespremenjen. Po navadi lahko računamo s sorazmernostjo

$$\sigma = 2\,\eta\,\dot{\varepsilon} \tag{4}$$

kjer pomeni η viskoznost. Tekočine, pri katerih velja ta sorazmernost, se imenujejo *Newtonove tekočine.*

Z elastičnimi telesi se ukvarja *elastomehanika.* Idealne tekočine so predmet *hidrodinamike.* Nova veja mehanike, *reologija,* pa obravnava razmere v snoveh, ki niso niti prave tekočine, niti idealne trdne snovi. Reologija je torej nauk o deformaciji in toku realne materije vseh vrst, med katerimi sta idealna tekočina in idealna trdna snov samo ekstremna primera, ki sta bila matematičnim prijemom najprej dostopna.

§ 3. Plastične snovi

Poleg elastične deformacije in viskoznega toka poznamo še plastično deformacijo. Viskozni tok nastane pod vplivom še tako majhne napetosti; plastična deformacija pa nastopi šele, ko napetost prekorači določeno mejo, namreč *mejo plastičnosti* (σ_{pl}). Diagram $\dot{\varepsilon}(\sigma)$ (sl. 1 e) se pri plastični deformaciji razlikuje od slike 1 c le v tem, da krivulja ne izhaja iz koordinatnega začetka, ampak iz točke na abscisi pri $\sigma = \sigma_{pl}$. Če je zveza med deformacijsko hitrostjo in napetostjo linearna, torej

$$\dot{\varepsilon} = (\sigma - \sigma_{pl})/2\,\eta \tag{5}$$

pravimo, da je snov *idealno plastična* (*Binghamova plastična snov*). Diagram $\varepsilon(t)$ za plastično snov je podoben kot pri tekočini, če je $\sigma > \sigma_{pl}$.

Dober primer plastične snovi je glina. Njena meja plastičnosti je tako visoka, da sveži glineni izdelki kljub lastni teži še obdržijo obliko. Pri obdelovanju pa z malo večjimi napetostmi dosežemo trajno deformacijo. Lahko rečemo, da so bili stari lončarji pri iskanju čimboljše gline pravi reologi.

Z opisanimi reološkimi prvinami — elastično deformacijo, plastično deformacijo in viskozno deformacijo se dajo vsaj za silo opisati ostali vmesni tipi snovi. Sem spadajo predvsem *plastično elastične* in *viskozno elastične snovi.*

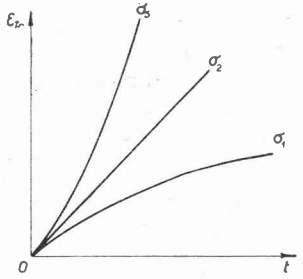
§ 4. Plastično elastične snovi

Plastično elastična deformacija nastopa pri skoraj vseh elastičnih snoveh, če napetost preseže mejo plastičnosti, razen če ne nastane prej zlom (kot pri steklu). Pod vplivom preobremenitve poprej elastična snov steče, zaradi česar deformacija pri konstantni napetosti s časom narašča. Ko obremenitev odstranimo, nastopi navadno pojav retardacije (na sliki označeno črtkano); povrnitev pa je v tem primeru vsekakor le delna (slika 1 f). Če plastično elastično snov obremenimo le za kratek čas, se nam bo zdela elastična; šele po dolgotrajnejši obremenitvi bomo opazili plastično deformacijo. Ta pojav lahko opazimo pri šestrogelnem telesu v obliki prostorskega križa, ki ga zgnetemo iz kruhove sredice. (Velikost naj bo cca. 1,5 do 2 cm). S počasnim gnetenjem lahko tako

telo popolnoma preoblikujemo; če pa ga z vso silo treščimo ob tla, odleti kot žoga in na njem sploh ne moremo opaziti deformacije. Plastično elastična je tudi marmelada.

Pod vplivom trajne plastične deformacije nastanejo običajno tudi spremembe reoloških lastnosti. Merjenec, s katerim smo delali prvo meritev, nam pri ponovitvi ne da več istih rezultatov. Tudi ni vseeno, za koliko smo prekoračili mejo plastičnosti. O tem nam priča sl. 2, ki kaže odvisnost trajne deformacije ε_{tr} plastično elastičnega telesa od časa pri različnih napetostih ($\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$).

Krivulja za σ_1 predstavlja primer, ko doseže $\varepsilon_{tr}(t)$ po daljšem času neko limitno vrednost (primer omejene deformacije). — Imamo torej pojav, da pri konstantni napetosti deformacijska hitrost s časom pojema. Pri σ_2 pa je $\varepsilon_{tr}(t)$ linerna funkcija časa; torej je $\dot{\varepsilon}_{tr}$ konstantna ves čas opazovanja. Krivulja za σ_3 ponazarja primer, ko $\dot{\varepsilon}_{tr}(t)$ s časom narašča. V obeh zadnjih primerih lahko dobimo pri konstantni napetosti neomejeno veliko deformacijo, če je le čas dovolj velik.



Sl. 2. Časovni potek trajne deformacije plastično elastične snovi pri različnih obremenitvah

V mnogih snoveh nastane prej zlom, kot pa dosežemo vse omenjene vrste plastičnih deformacij. Pri jeklu, bakru, aluminiju itd. imamo primer omejene deformacije, pri svincu pa lahko opazujemo pojav neomejene deformacije. Omejena deformacija je posledica dejstva, da se pri teh snoveh zviša meja plastičnosti, ko jih plastično deformiramo.

Če plastično deformacijo večkrat ponovimo (za kar je potrebna vsakokrat višja napetost), se področje elastičnih lastnosti takih kovin znatno poveča, saj se kovina vse do nove meje plastičnosti obnaša elastično. V tem tiči pomen hladnega utrjevanja kovin. Podoben proces se dogaja pri poliranju kovinskih površin. Zaradi visokih napetosti nastane trajna deformacija kovine ob površini. S tem pa se spremenijo tudi njene reološke lastnosti (običajno je polirana površina trša od nepolirane). Tudi maslo in sir pod vplivom napetosti otrdita.

V primeru, da se meja plastičnosti po opravljeni plastični deformaciji zniža, imamo namesto utrjevanja (kot prihladnem obdelovanju kovin) — mehčanje. Snov postane za deformacijo manj odporna.

Če se viskoznost snovi zaradi deformacije zmanjša in se po preteku določenega časa v neobremenjenem stanju spet zveča, pravimo, da je snov *thiksotropna.* Taka snov je kislo mleko. Če ga podvržemo majhnim obremenitvam, kaže elastične lastnosti. Ko napetost prekorači določeno vrednost, nastopi plastična deformacija — pri tem pa postaja mleko vse bolj tekoče. Če

takšno mleko potem pustimo dalj časa neobremenjeno, se počasi strjuje in njegove reološke lastnosti se približujejo tistim, ki jih je imelo mleko pred poskusom.

Thiksotropne snovi so tudi črnila v kemičnih svinčnikih ter tiskarska črnila. Pod pritiskom so tekoča, ko pa napetost odstranimo, otrdijo. To je v tiskarstvu zelo pomembno, ker na ta način ni treba čakati, da se barva osuši. Tudi oljne barve spadajo sem. Dobra barva se lepo vleče; ko pa z barvanjem prenehamo, otrdi. Ta sprememba je dovolj počasna, da se sledovi čopiča lahko zalijejo, vendar pa zadosti hitra, da barva med otrjevanjem ne odteče z navpičnih ali nagnjenih površin.

§ 5. Viskozno elastične snovi

Pri viskozno elastičnih snoveh nastopi trajna deformacija že pri najmanjših napetostih, če le trajajo dovolj dolgo. Pri kratkotrajnih obremenitvah pa se take snovi obnašajo kot elastične.

To najlepše vidimo pri silikonskem gumiju. Če ga pustimo v posodi dovolj časa, se razleze kot tekočina in zavzame obliko posode, pri metanju ob tla pa odskakuje kot žoga.

Vsa stekla, razne smole, bitumeni in podobne snovi postanejo viskozno elastične, če jih segrejemo do temperature, pri kateri se komaj začnejo mehčati. Steklena palica pri tej temperaturi prav počasi leze, kot kaka močno viskozna tekočina. Če pa palico le na hitro obremenimo in takoj spet popustimo, se vêde podobno kot pri navadni temperaturi: nalahko se vda (kot kaka vzmet) in odskoči skoraj do prvotne lege, ko sila popusti.

Viskozno elastične lastnosti kaže tudi razredčena raztopina želatine. To pokažemo tako, da ji primešamo železnih opilkov, ki jih premikamo z nehomogenim magnetnim poljem. Ko magnetno polje odstranimo, skočijo opilki za malenkost nazaj, preden se ustavijo — torej kakor da bi bil vsak opilek privezan s prožno vrvico.

Diagrama $\varepsilon(\sigma)$ in $\dot{\varepsilon}(t)$ za viskozno elastične snovi nam kažeta sliki 1 g in 1 h, in sicer za primer, ko se pokaže še pojav zakasnele deformacije. To se kaže več ali manj pri vseh viskozno elastičnih snoveh.

§ 6. Modeli

Zakasnelo elastično deformacijo, plastično, viskoznoelastično in tudi plastično elastično deformacijo lahko približno ponazorimo s preprostimi mehanskimi modeli.

Model za zakasnelo elastično deformacijo je sestavljen iz paralelno vezane elastične vzmeti in tekočinskega dušilca (slika 3). Če zgornji konec modela vpnemo, spodnjega pa obremenimo s silo F, prevzame del te sile dušilec, del pa elastična vzmet, torej $F = R dx/dt + kx$, pri čemer je x odmik spodnjega konca, k koeficient vzmeti, R pa koeficient upora, ki je značilen za dušilec (velja naj linearni zakon upora). Analogno poskusimo opisati vedenje elastične snovi, pri kateri se kaže zakasnitev, z enačbo

$$\sigma = 2\eta \frac{d\varepsilon}{dt} + 2G\varepsilon \tag{6}$$

Pri pogoju, da model ob času $t = 0$ podvržemo napetosti σ, ki jo držimo potem konstantno (kot je to veljalo za vse naše diagrame $\varepsilon(t)$, dobimo za časovni potek deformacije naslednji rezultat (primerjaj s sliko 1b)

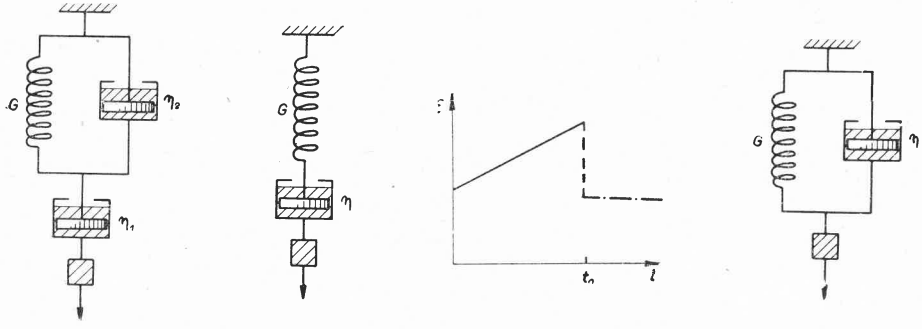
$$\varepsilon(t) = (\sigma/2G)(1 - e^{-t/\tau}) \tag{7}$$

Pri tem je $\tau = \eta/G$, tako imenovani zakasnitveni čas (časovna konstanta). Primerjaj n. pr. polnjenje kondenzatorja skozi upor!

Po odstranitvi napetosti se telo vrača v prvotno stanje po enačbi

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{-t/\tau} \tag{8}$$

kar kaže, da po preteku dovolj dolgega časa deformacija izgine. (Primerjaj praznjenje kondenzatorja!)



Sl. 3. Sl. 4a. Sl. 4b Sl. 5.

Sl. 3. Model, ki kaže zakasnelo deformacijo

Sl. 4. Maxwellov model viskozne elastične snovi in ustrezni diagram $\varepsilon(t)$

Sl. 5. Model, ki prikazuje vedenje viskozno elastične snovi z zakasnitvijo

Iz enačbe (7) sledi tudi, da je

$$\dot{\varepsilon}(t) = (\sigma/2\eta)\, e^{-t/\tau} \tag{9}$$

Če opazujemo snov, ki nam jo ponazarja naš model, le malo časa ($t \ll \tau$), se bo zdela $\varepsilon(t)$ kot premica z naklonom $\dot{\varepsilon} = \sigma/2\eta$. Izgledalo bo, da imamo opraviti s tekočino z viskoznostjo η. Za ugotovitev, da je snov retardirano elastična, jo je treba opazovati v času, ki je večji od τ.

Maxwellov model za viskozno elastično snov je sestavljen iz vzmeti in dušilca, ki sta vezana zaporedno (slika 4a). Če smo spet obesili utež, deluje ista sila na oba elementa modela. Odmik spodnjega konca je enak vsoti podaljškov vzmeti in dušilca, torej $x = (F/R)\,t + F/k$. Podobno si mislimo pri viskozno

elastični snovi celotno deformacijo sestavljeno iz viskozne in elastične deformacije, torej

$$\varepsilon(t) = (\sigma/2\,\eta)\,t + (1/2\,G)\,\sigma \tag{10}$$

(primerjaj s sliko 4b!). Viskozno elastične snovi, za katere velja ta enačba, se imenujejo *Maxwellove snovi* (viskozno elastične snovi, idealizirane z Maxwellovim modelom).

Ko model obremenimo, se najprej raztegne vzmet, nato pa s hitrostjo $\dot{\varepsilon} = \sigma/2\,\eta$ narašča viskozna deformacija (sl. 4b). Ko utež odstranimo, se vzmet skrči, bat v dušilcu pa ostane na miru. Tako vidimo, da se vede Maxwellova snov pri kratkotrajni obremenitvi ($t \gg \eta/G$) kot elastična. Če se $t \ll \eta/G$, se vede snov kot viskozna. Če pa je t približno enako velik kot η/G, pridejo do izraza tako viskozne kot elastične lastnosti.

Večina realnih viskoznoelastičnih snovi se ne pokorava Maxwellovemu modelu, ker nastopa pri njih elastična deformacija z zakasnitvijo.

Boljši model za realno viskozno elastično snov kaže slika 5, kjer smo vzeli dva tekočinska dušilca, enega vzporedno z vzmetjo in drugega zaporedno. $\varepsilon(t)$ za tak model ima obliko

$$\varepsilon(t) = (\sigma/2\,\eta_1)\,t + (\sigma/2\,G)\,[1 - \exp(-Gt/\eta_2)] \tag{11}$$

za čas, dokler napetost traja, oziroma

$$\varepsilon(t) = (\sigma/2\,\eta_1)\,t_0 + (\sigma/2\,G)[1 - \exp(-Gt_0/\eta_2)]\exp(-Gt/\eta_2) \tag{12}$$

za čas po odstranitvi napetosti, kjer pomeni t_0 čas trajanja obremenitve. Rezultat (12) se da kar dobro prilagoditi vedenju resničnih viskozno elastičnih snovi (sl. 1h).

Model za idealno plastično snov je tekočinski dušilec, pri katerem se bat zatika zaradi trenja. Bat se ne premakne, dokler obremenitev ne preseže neke meje. Najprej se vse dogaja tako kot pri viskoznem toku. Za ponazoritev plastično elastične deformacije je treba v Maxwellovem modelu (oziroma v modelu sl. 5) spodnji dušilec nadomestiti z dušilcem, ki se mu bat zatika.

Literatura

1. M. Rosina: Dilatacijska viskoznost. Obzornik za matematiko in fiziko, **5**, 172 (1957).

2. A. Turner: Mechanical Behaviour of High Polymers. New York (Interscience Publishers), 1948.

3. F. R. Eirich: Rheology I. New York (Academic Press), 1956.

4. G. W. Scott Blair: A Survey of General and Applied Rheology. London (Pitman), 1949.

5. H. Green: Industrial Rheology and Rheological Structures. New York (Wiley), 1949.

6. V. G. W. Harrison: The Science of Rheology. Nature **146**, 580, 1940.

7. H. M. Richardson: Fundamentals of Plastics. New York (McGraw-Hill), 1946.

RADIOAKTIVNOST OZRAČJA

ALOJZ KLINE

V zadnjem času beremo v dnevnem časopisju mnoga poročila o radioaktivnih snoveh v ozračju in o radioaktivnih padavinah. Pri tem mislimo vedno na umetno radioaktivnost atmosfere, ki jo povzročajo razcepni produkti vedno pogostejših poskusnih eksplozij jedrskega orožja. Te eksplozije pa niso edini vir radioaktivnosti v zraku, ker so navzoče še naravno radioaktivne snovi. S posebnimi metodami lahko merimo in tudi razločujemo obojno radioaktivnost. V naslednjem si bomo ogledali te metode in rezultate nekaterih meritev,* pri čemer pa bomo najprej obravnavali samo naravno radioaktivnost ozračja in potem posebej umetno.

1. **Naravna radioaktivnost ozračja.** Povsod v zemlji je nekaj urana in torija. Oba razpadata preko precej dolgih verig vmesnih radioaktivnih izotopov. Med vmesnimi členi sta tudi radioaktivna žlahtna plina radon (Em^{222}) in toron (Em^{220}), ki lahko pronicata v ozračje. Pronicanje je odvisno od sestava zemeljske plasti, od meteoroloških pogojev in končno tudi od razpolovnih časov obeh izotopov. Aktivni potomci radona in torona oddajajo žarke alfa, beta in gama. Napišimo uranovo radioaktivno družino od radija naprej!

$$\mathrm{Ra} \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Rn} \xrightarrow{\alpha} \mathrm{RaA} \xrightarrow{\alpha} \mathrm{RaB} \xrightarrow{\beta} \mathrm{RaC} \xrightarrow{\beta} \mathrm{RaC'} \xrightarrow{\alpha} \mathrm{RaD} \xrightarrow{\beta} \mathrm{RaE} \xrightarrow{\beta} \mathrm{RaF} \xrightarrow{\alpha} \mathrm{RaG} = \mathrm{Pb}^{206}\ (\text{stabilen})$$

$$\mathrm{RaC} \xrightarrow[0{,}04\,\%]{\alpha} \mathrm{RaC''} \xrightarrow{\beta} \mathrm{RaC'}$$

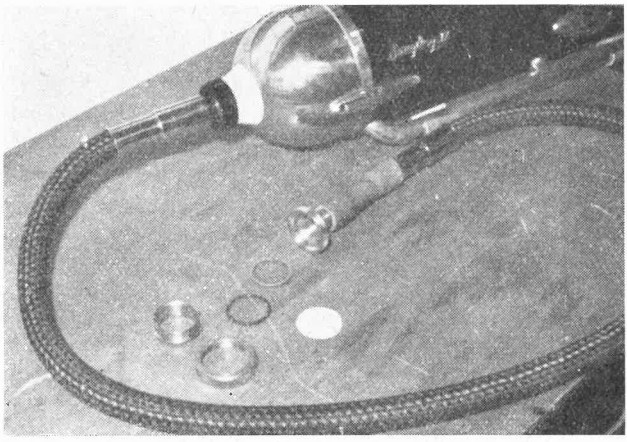
Radonovi potomci RaA, RaB, ... RaG, ki so izotopi polonija, svinca, bizmuta in talija, se obnašajo povsem drugače od svojega plinastega prednika. Kmalu po nastanku se usedejo na suspendirane prašne delce — imenujemo jih aerosole —, katerih je v zraku vedno dovolj. Ravno to zelo olajša merjenje teh snovi, ker jih lahko nakopičimo, s tem da jih poberemo iz večje množine zraka s primerno filtrirno napravo. Neposredno merjenje zračne radioaktivnosti pa bi bilo zaradi njene majhnosti veliko bolj težavno. Množina dobljenih potomcev radona pokaže tudi, koliko je bilo v zraku radona samega, čeprav je ta ušel skozi filter.

Na ta način so koncentracijo radona določili že v začetku tega stoletja razni raziskovalci[1, 2]. Vrednosti, ki so jih dobili, so bile med $2 \cdot 10^{-11}$ in $2 \cdot 10^{-10}$ C/m^3 (curiejev na m^3 zraka). Vidimo, da gre za zelo majhne aktivnosti. Udobno jih lahko merimo le, če zberemo aktivni prah iz večje množine zraka (1 do 10 m^3) na površini nekaj cm^2.

Merilne metode se razlikujejo po načinu zbiranja. Največkrat uporabljamo m e h a n s k i f i l t e r[3], to je nekaj desetink milimetrov debelo ploščo tkiva iz vlaken celuloze, volne ali plastičnih mas. Dobri filtri zadržijo pri zbiranju tudi 99 % radioaktivnih prašnih delcev (na primer Whatmanov filtrirni papir št. 41). Pronicanje v notranjost filtra naj bo čim manjše, ker se drugače pri kasnejši meritvi absorbira preveč žarkov v filtru. Filter z velikostjo 10 do 50 cm^2 pri-

* Povzeto po diplomskem delu, ki je bilo opravljeno na Inštitutu »J. Stefan« v Ljubljani pod vodstvom doc. dr. A. Moljka.

trdimo na črpalno glavo (slika 1), ki jo zvežemo preko primerne plinske ure na sesalnik za prah. Po končanem črpanju filter naglo snamemo, ga položimo na scintilacijski števec (sl. 2) in merimo pogostost sunkov ob različnih časih po končanem črpanju.

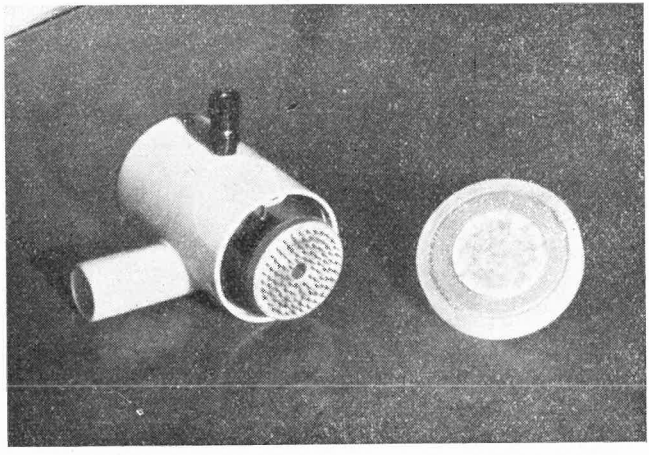


Sl. 1. Črpalna glava s sesalnikom

Sl. 2. Filter ali ploščico položimo po končanem črpanju na scintilator s fotopomnoževalko, ki sta v bakrenem valju s pokrovom (levo). Sunke iz katodnega predojačevalnika (v škatli pod pomnoževalko) registrira dekadni števec (desno zgoraj). Pod števcem je visokonapetostni usmernik za pomnoževalko

Filtrirni papir lahko nadomestimo z elektrostatskim precipitatorjem. Tu vleče sesalnik zrak skozi prostor med dvema elektrodama, med katerima je napetost okoli 10 kV. Za pozitivno elektrodo služi okrogla aluminijasta ploščica s premerom 40 mm, na negativni elektrodi pa je večje število ostrih konic, na katerih nastane korona (slika 3). Prašni delci ujamejo pri prehodu med obema elektrodama vedno nekaj negativnih ionov, ki nastajajo pri koronskem toku. Negativno naelektrene delce potem pobere pozitivna elektroda. Aktivnost ploščice merimo z isto aparaturo kot pri filtrirnih papirjih.

Značilno razpadno krivuljo nabranih radonovih razpadnin kaže slika 4. Če hočemo sevalce alfa v ozračju identificirati, merimo spekter žarkov. Kot je znano, imajo žarki α ostro določeno energijo, ki je karakteristična za vsak aktiven izotop. Z merjenjem energijskega spektra lahko torej identificiramo

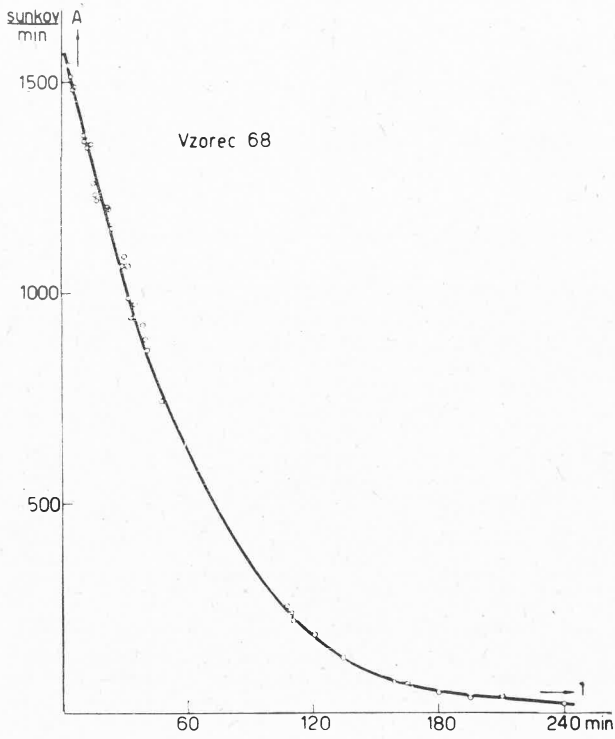


S. 3. Elektrostatski precipitator. Zrak vstopa skozi odprtino na levi strani in izstopa očiščen skozi odprtino bodičaste elektrode. Prašni delci se odlagajo na aluminijasto ploščico (na pokrovu)

prisotnost različnih sevalcev alfa v preparatu. V ta namen navadno uporabljamo ionizacijsko celico [4] ali pa proporcionalni števec s primernim analizatorjem. Vzorce dobimo po opisanem postopku z elektrostatskim precipitatorjem. Prašna plast na ploščici naj bo čim tanjša in enakomerno debela, ker absorpcija v preparatu močno razširi črto in s tem zmanjša ločljivost. Na sliki 5 je spekter alfa radonovih in toronovih razpadnin v ozračju, ki je bil posnet v različnih časih po končanem črpanju. Spekter umerimo z znanimi preparati. Merilno pripravo kaže slika 6.

Množina radona, torona in njunih razpadnin v ozračju ni konstantna, temveč se s krajem in časom močno spreminja. Na kopnem in ob zemeljski površini je koncentracija mnogo večja kot na morju ali v višjih zračnih plasteh. Tako je na primer znašala marca 1951 povprečna koncentracija radona v Chicagu $2{,}4 \cdot 10^{-10}$ C/m^3, na Marshallskih otokih v Tihem oceanu pa le $2{,}7 \cdot 10^{-12}$ C/m^3,[5] kar je skoraj stokrat manj. Koncentracija je še odvisna od množine padavin, od smeri vetra in od izmenjave z višjimi plastmi ozračja zaradi konvekcije. Izmenjava je največja ob sončnih dnevih. Tedaj se radon s svojimi potomci dviga s segretim zrakom, tako da je koncentracija ob zemeljski površini majhna.

Ponoči, ob temperaturni inverziji, pa je izmenjava neznatna; radioaktivne snovi ostajajo v tanki plasti pri tleh, kjer se njihova koncentracija poveča. Debelina te plasti meri ponoči približno 50 m in naraste podnevi do 400 m. Primer dnevnega ciklusa (v Ljubljani) kaže slika 7. Iz diagrama opazimo ujemanje med



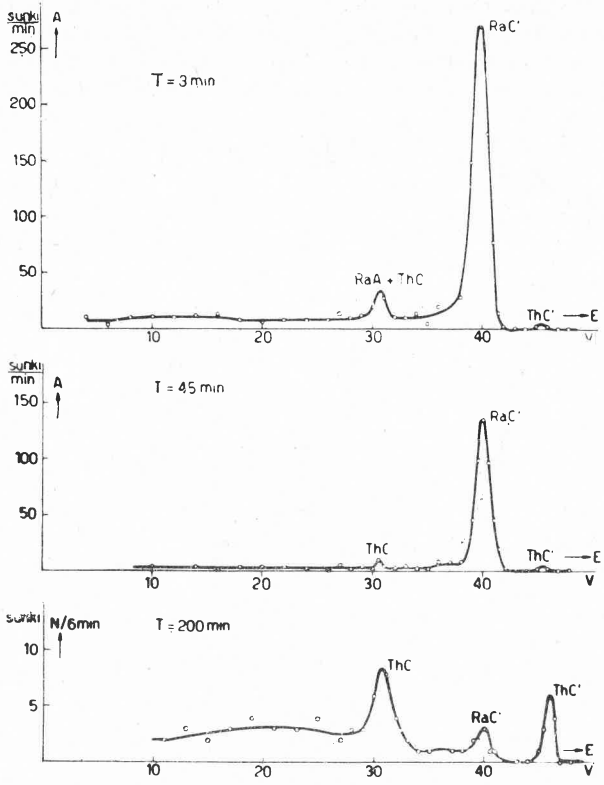
Sl. 4. Razpadna krivulja radonovih potomcev iz 5 m^3 zraka. Po štirih urah ostane še majhna aktivnost zaradi razpadnin torona (ThC, ThC′

dobo maksimalnih koncentracij in nočno temperaturno inverzijo. Kako močno se ozračje očisti s padavinami, pa kaže slika 8. Ob deževnih dnevih je koncentracija lahko desetkrat manjša kot ob lepem vremenu.

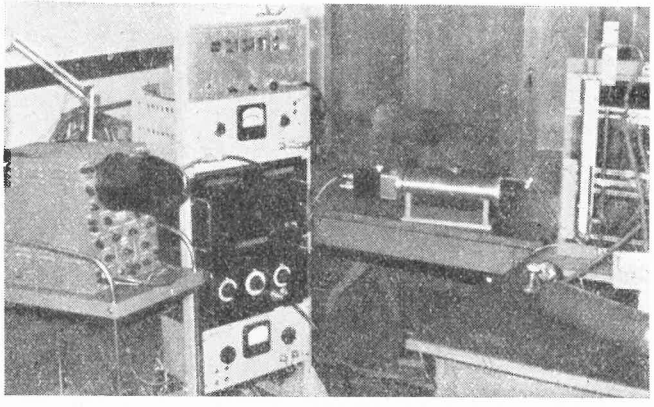
Doslej smo razpravljali le o radioaktivnih potomcih radona in torona. K naravni radioaktivnosti ozračja pa prištevamo še izotope H^3, Be^7, C^{14}, P^{32} in S^{35}, ki nastajajo — predvsem v stratosferi — iz dušika in argona pod vplivom kozmičnih žarkov. Koncentracijo teh izotopov v zraku pri normalnih pogojih kaže naslednja razpredelnica.

Radioaktivni izotopi, ki jih v ozračju naredijo kozmični žarki

izotop	energija in rapad		$t_{\frac{1}{2}}$	koncentracija	reakcija
H^3	0,02 MeV	β^-	13 let	100 $\frac{\text{atomov}}{\text{liter}}$	N^{14} (n, C^{12}) H^3
Be^7	0,5	$\varkappa, \gamma$	53 dni	10	N^{14} (p, 2 α) Be^7
C^{14}	0,16	β^-	5700 let	10^{11}	N^{14} (n, p) C^{14}
P^{32}	1,7	β^-	14 dni	6000	iz A^{40}
S^{35}	0,17	β^-	87 dni	$4 \cdot 10^5$	iz A^{40}

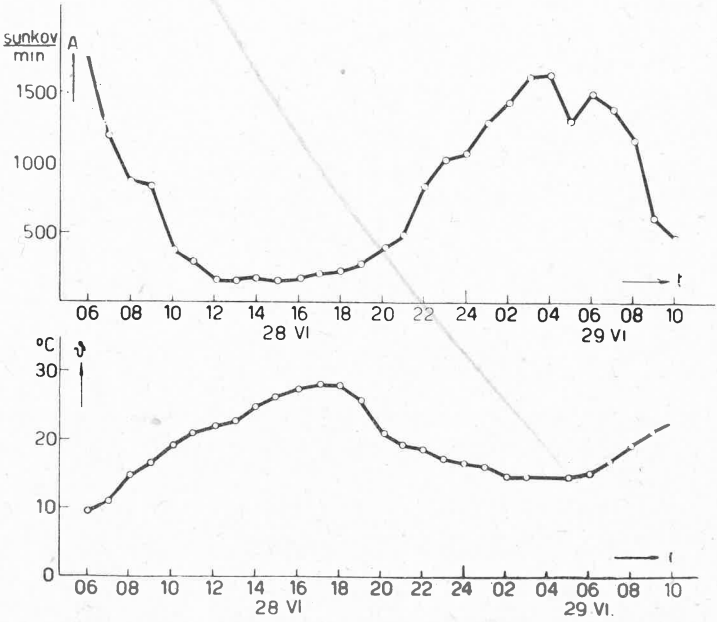


Sl. 5. Spekter alfa radonovih in toronovih potomcev v ozračju, posnet ob različnih časih po končanem črpanju. RaA kmalu razpade (t = 3 min). Po nekaj urah dobimo le še črti ThC in ThC'. Njuno pojemanje je določeno z 10-urnim razpolovnim časom torija B



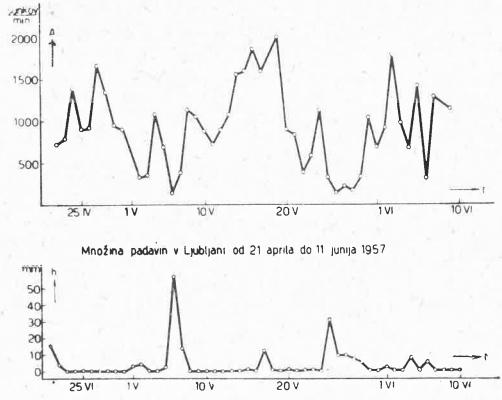
Sl. 6. Proporcionalni števec (na mizi v ozadju) z enokanalnim spektrometrom (stolp na levi). V sredini števca je 4 cm velika okrogla odprtina, na katero namestimo preparat. Nato iz števca izčrpamo zrak in ga napolnimo z metanom (jeklenka desno spredaj) približno do pritiska 500 tor (manometer desno zadaj). Z osciloskopom (levo) kontroliramo obliko sunkov

2. **Umetna radioaktivnost ozračja.** Pri poskusih z jedrskim orožjem nastajajo velike množine radioaktivnih snovi. Totalna aktivnost beta in gama razcepnih produktov (elementi z masnimi števili okoli 95 in 140) atomske bombe, ki je ekvivalentna 20 000 tonam TNT, znaša še po enem mesecu po eksploziji nekaj megacuriejev. Večina aktivnih snovi pride v ozračje, od koder



Sl. 7. Dnevne spremembe naravne radioaktivnosti ozračja. Na tej in na naslednji sliki ustreza 100 sunkov/min koncentraciji $1{,}4 \cdot 10^{-10}$ C/m^3.

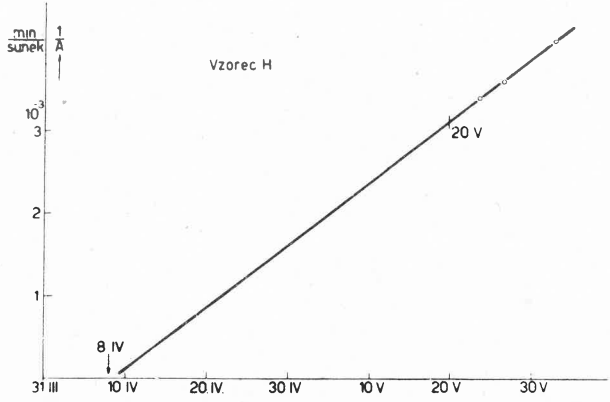
se počasi usedajo. Tako se na primer pri eksploziji navadne atomske bombe v višini 1000 m nad zemljo sesede v neposredni okolici le 0,02 % aktivnega prahu; večina dospe v višine do 15 km, od koder ga zračni tokovi odnašajo v zelo oddaljena področja. Vendar se ta radioaktivni prah seseda razmeroma



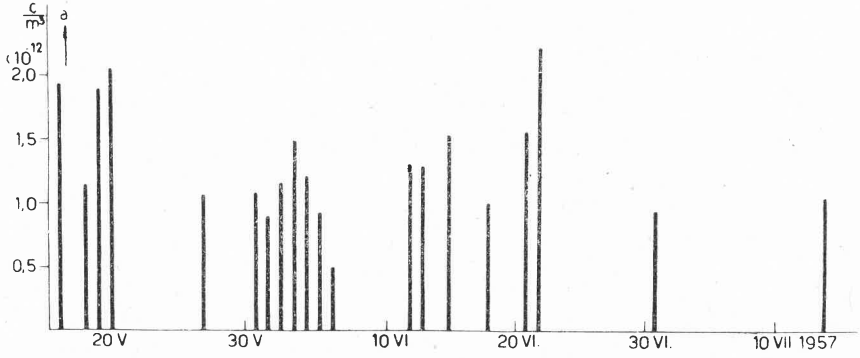
Sl. 8. Koncentracija radonovih razpadnin v Ljubljani od aprila do junija 1957. Dnevi majhnih aktivnosti se ujemajo z dnevi padavin

hitro, pri čemer je izpiranje z dežjem odločilnega pomena. Množina tega prahu v ozračju pojema približno eksponentno in se zmanjša na polovico že nekako v 20 dneh.

Precej drugače je pri vodikovi bombi, pri kateri se vzdigne eksplozijski oblak celo do višine 30 km, torej daleč v stratosfero. Stratosferski vetrovi raznesejo prah po vsem svetu. Usedanje pa je v tem primeru veliko bolj počasno, ker v stratosferi ni padavin in ker je izmenjava zraka s troposfero (z »vremensko« plastjo ozračja) precej šibka. Čas, v katerem se sesede polovica ostankov vodikove bombe, meri po več let.



Sl. 9. Diagram kaže na prisotnost razcepnih produktov v ozračju Ljubljane, spomladi 1957. Grafično določeni čas nastanka se ujema s časom poskusnih eksplozij v SZ (od 3. do 14. aprila 1957)



Sl. 10. Koncentracija razcepnih produktov v Ljubljani v maju in juniju 1957

Pri kvalitativnem in kvantitativnem določevanju umetne radioaktivnosti se je najbolj obnesla metoda s filtrirnim papirjem. Skozi filter, velikosti okoli 50 cm², črpamo zrak s hitrostjo 0,2 do 0,5 m³/min. Črpalni čas je 20 do 50 ur; na ta način prečrpamo 300 do 600 m³ zraka. Nabrano aktivnost merimo s tankostenskim GM števcem. Poleg razcepnih produktov imamo na filtru še vedno razpadnine radona in torona. Po štirih urah moteča aktivnost RaB + + RaC izgine in merimo poleg razcepnih produktov le še žarke β torija C

in torija C″. Odmik od razpadne krivulje toronovih potomcev je občutljiv indikator za navzočnost dolgoživih razcepnih produktov. Na ta način merimo lahko še koncentracije, ki znašajo 1 % naravne radioaktivnosti.

Po petih dneh postane aktivnost toronovih razpadnin zanemarljiva. Ostanejo samo še dolgoživi sevalci beta in gama umetne radioaktivnosti. Njihova skupna aktivnost ne pojema eksponencialno, ker gre za mešanico mnogih sevalcev z razpolovnimi dobami od nekaj dni do 25 let. Pojemanje skupne aktivnosti se približno opiše z enačbo $A = kons.\ t^{-n}$, pri čemer je v intervalu 4 dni $< t <$ 100 dni $n = 1{,}05$ ali približno kar $n = 1$. Dobro oceno za starost mešanice dobimo torej, če nanesemo na diagram recipročno aktivnost v odvisnosti od časa in ekstrapoliramo na $1/A = 0$. Presečišče nam da datum eksplozije na nekaj dni natančno, kolikor izvira mešanica res od ene same eksplozije. Diagram na sliki 9 kaže, da je bila starost sevalcev v opazovanem primeru približno 40 dni. Po podatkih F. N. Hunterja[12] so deleži, ki jih prispevajo posamezni izotopi ob tej starosti k totalni aktivnosti A, naslednji: izotopa joda I^{131} in I^{132} . . . približno 4 %, zemljoalkalijski kovini Sr^{89} in Ba^{140} . . . 17 %, elementi iz skupine redkih zemelj in sosednjih redkih kovin pa ostalih 79 %.

Rezultate meritev umetne radioaktivnosti v ljubljanskem zraku kaže slika 10. Povprečje za meseca maj in junij 1957 je nekaj nad 10^{-12} C/m³, kar je manj kot desetinka naravne radioaktivnosti. Vsekakor je ugotovljena množina razcepnih produktov znatno manjša, od maksimalne koncentracije, ki je dopustna po sedanjih sanitarnih predpisih (10^{-9} C/m³, kot je razvidno iz spodnje razpredelnice).

Maksimalno dopustne koncentracije nekaterih radioaktivnih snovi v zraku in vodi

izotop	zrak	voda
C^{14} (kot CO_2)	10^{-5} C/m³	$3 \cdot 10^{-3}$ C/m³
Sr^{89}	$2 \cdot 10^{-8}$	$7 \cdot 10^{-5}$
Sr^{90} (+ Y^{90})	$2 \cdot 10^{10}$	$8 \cdot 10^{-8}$
Rn^{222} + potomci	10^{-7}	—
Ra^{226} + potomci	$8 \cdot 10^{-12}$	$4 \cdot 10^{-8}$
Co^{60}	$8 \cdot 10^{-8}$	$4 \cdot 10^{-4}$
uran naravni	$3 \cdot 10^{-11}$	$2 \cdot 10^{-6}$
Pu^{239}	$2 \cdot 10^{-12}$	$3 \cdot 10^{-6}$
kakršnakoli mešanica sevalcev alfa	$5 \cdot 10^{-12}$	10^{-7}
kakršnakoli mešanica sevalcev beta	10^{-9}	10^{-7}

Radioactivity of the Atmosphere

(Summary)

The article describes the usual sampling and measuring techniques, as well as the results of some measurements of both natural and fission product radioactivity of air at ground level in Ljubljana over a period of three months (May, June, July 1957).

The collection of radioactive dust was accomplished by passing air through either filter pads or electrostatic precipitator of known transmission characteristics. At a sampling rate of 0,25 m³/min the collection efficiency was

found to be 90 % for Schleicher Schuell Schwarzband No. 1117 filter paper and 25 % for the electrostatic percipitator. A proportional tube spectrometer has been introduced for identification of α-emitters in air. Fig. 5 shows the energy spectra measured at different times after completion of sampling.

The average atmospheric radon and thoron concentration over the mentioned period was found to be $6 \cdot 10^{-10}$ C/m^3 and $3 \cdot 10^{-11}$ C/m^3, respectively. Diurnal variations with night to day ratios up to 14 were frequently observed. During rainy days the concentration of radon decay products was about ten times smaller than in fine weather. In May 1957 fission- product activity has been detected (probably due to atomic bomb tests in USSR from 3rd to 14th April 1957). The average concentration of artificial radioactivity over this period was found to be $1{,}3 \cdot 10^{12}$ curie per cubic meter of air.

Literatura

1. A. S. Eve: On the Radioactive Matter present in the Atmosphere, Phil. Mag. **10**, 98, (1905). — On the Amount of Radium Emanation in the Atmosphere near the Earth's Surface, Phil. Mag. **14**, 724, (1907).
2. J. Satterly: The Amount of Radium Emanation in the Atmosphere, Phil. Mag. **16**, 584, (1908).
3. G. Thuronyi: Annotated Bibliography in the Atmosphere, Meteorol. Abstr. and Bibliography, **7**, 5, 616, (1956).
4. U. Facchini in A. Malvicini: The fast Ionization Chamber in the Study of α-Radioactivity of Air, Nuovo Cimento, **2**, 1, 340, (1955).
5. I. H. Blifford, Jr., H. Friedman, L. B. Lockhart, Jr. in R. A. Baus: Geographical and time distribution of radioactivity in the air, J. Atmos. Terr. Physics, **9**, 1. (July 1956).
6. W. Faltings in P. Harteck: Der Tritiumgehalt der Atmosphere, Z. Naturforschung, **5a**, 438, (1950).
7. A. J. Cruikshank, G. Cowper, W. E. Grummitt: Production of Be^7 in the Atmosphere, Can. J. Chem. **34**, 214, (1956).
8. K. Rankama: Isotope Geology, Pergamon Press LTD, 1954, str. 181.
9. L. Maquez in N. L. Costa: The Formation of P^{32} from Atmospheric Argon by Cosmic Rays, N. Cimento, **2**, 1038, (1955).
10. P. S. Goel: Radioactive Sulphur produced by Cosmic Rays, Nature, **178**, 1458, (1956).
11. P. A. Sheppard: Radioactive Fall-out and the Weather, The New Scieitist, 2, 39, 23, (Aug. 1957),
12. F. N. Hunter in N. E. Ballou: Fission Product Decay Rates, Nucheonics, **9**, C-2, (1951).

UTRINKI

Da li znate brzinu i veličinu elektrona? — Kretanje elektrona, poznato pod imenom »električna struja«, vrši se u metalnim provodnicima brzinom od 300.000 kilometara u sekundi.

Ako bi po obimu Zemljine kugle obmotali provodnik u kome je došlo do kretanja elektrona, oni bi u vremenu od 1 sekunde obišli zemlju 7,5 puta.

Nauka i tehnika — tjedni dodatak Borbe, 6. I. 1958.

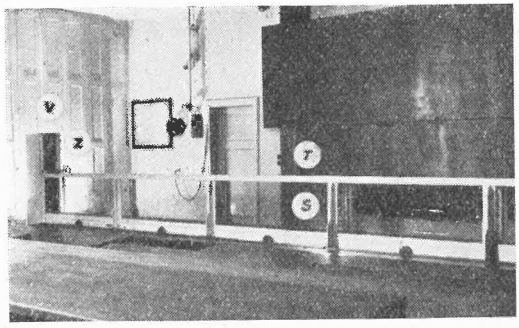
Nekaj nebuloznega — Že leta 1950 so zvezdoslovci s takratnimi daljnogledi odkrili v vsemirju nekakšne plinaste plasti, ki so jih imenovali meglice ali nebuloze, torej navadne plasti kozmičnih žarkov, ki so bili ali fluorescentni ali pa so prejemali svetlobo od sosednjih zvezd. *Ljudska pravica, 7. XI. 1957.*

ŠOLA

ŠOLSKI ŽLEB HIDROTEHNIČNEGA ODSEKA UNIVERZE V LJUBLJANI

1. *Uvod*

Pri stalnem in vedno hitrejšem naraščanju aplikativnih vej prirodoslovnih znanosti ter temu dejstvu na prvi pogled protislovnem stremljenju po skrajševanju študijske dobe, se naravno mora pojaviti pri vsakem učitelju želja, da poda v odmerjenem času čim več snovi. Metode za dosego tega cilja so različne in odvisne od snovi. Med najbolj preskušenimi je pa prav gotovo uporaba učnih pripomočkov, kot so projekcija slik, film in eksperiment. Kjer je količkaj dinamike, se eksperiment z vsemi svojimi uspelimi pa tudi neuspelimi prehodi in zaključki slušateljem gotovo najbolj vtisne v spomin in najbolj realistično podpre razlago. Zlasti pa je pri eksperimentu možno hitro pokazati učinke



Sl. 1. Šolski žleb v predavalnici Hidrotehničnega odseka Fakultete za arhitekturo, gradbeništvo in geodezijo v Ljubljani. Prav levo vtočni kotlič *V*, ki je zaprt proti žlebu z zapornico *Z*. Sam žleb je zastekljen s 16 mm debelimi ploščami. Levo zgoraj ob vratih stikalna plošča in naprava za merjenje pretokov s pripadajočim diagramom

raznih vplivov, kar je za temeljitejše znanje nujna zahteva. Pri eksperimentu odpade pusto opisovanje in pojav govori že sam po sebi. Eksperiment zahteva sicer skrbno pripravo, dovoljuje pa zato učitelju, da pojasni v odrejenem času mnogo več, kot bi mogel z golim pripovedovanjem.

Pri gradnji novejših univerzitetnih institutov je bila zato instalacijam za eksperimentiranje posvečena potrebna pozornost. Tako je bila tudi v novem poslopju Hidrotehničnega odseka na Mirju ena predavalnica opremljena s posebno instalacijo za demonstriranje hidravličnih pojavov, to je s tako imenovanim *šolskim žlebom* (sl. 1).

Naprava se še dopolnjuje, vendar služi že nekaj let svojemu namenu pri pouku hidravlike (aplikativne hidrodinamike), ki jo kot osnovno stroko za ostale hidrotehnične predmete poslušajo slušatelji gradbenega oddelka. V tej stroki je še posebej dana možnost za poglobljeni in usmerjeni študij ter specializacijo. Saj imamo za to glede na bližino Vodogradbenega laboratorija, Turboinstituta, Instituta »Jožef Stefan« ter Instituta za preiskavo materiala in konstrukcij v Ljubljani prav ugodne pogoje.

Ker je naš šolski žleb edina naprava te vrste v državi, originalna že po svoji zamisli in izvedbi, je umestno, da podamo glavne zahteve, ki naj jim ustreza, in ga nato opišemo v glavnih obrisih.

2. *Splošne zahteve*

Žleb mora biti dovolj dolg, tako da je pri stalnem pretoku gibanje vode po vsej njegovi dolžini v povprečju enakomerno. Tudi višina in širina žleba naj ne bosta premajhni. Višina mora biti tolikšna, da so pojavi dobro vidni tudi slušateljem, ki sede na najbolj oddaljenih mestih predavalnice. Pri širini žleba pa je treba vselej misliti na možnost montaže objektov (to je raznih prelivov, cevi, ovir itd.) in na še težavnejše nameščanje priključkov na te objekte. Za delo z rokami in z navadnimi orodji je potrebna določena širina med steklenima stenama, ki je spet odvisna od globine žleba in od višine njegove namestitve. Čim plitvejši je žleb, tem ožji je lahko. Vendar mislim, da je 20 cm najmanjša možna širina, čim preseže njegova višina 20 cm. Pri vsaki uporabi običajnega orodja v prečni smeri je 20 cm pač minimum, ki še dovoljuje delo.

Ker je treba vedno misliti na istočasno demonstriranje in razlago ter eventualno projiciranje, žleb ne sme s svojimi neprozornimi konstruktivnimi deli preveč zakrivati za to potrebne ploskve. Vertikalne stojke (*S* na sl. 1 in sl. 4) morajo biti zato med seboj čimbolj oddaljene. Njihov razstoj je odvisen od jakosti steklenih plošč; čim debelejše plošče imamo, tem večji je lahko. Tirnice in zgornje vodoravne obrobe (*T* na sl. 1 ter *T* in *O* na sl. 4) steklenih plošč pa naj bodo čim ožje, tako da zastirajo najmanjšo površino.

Če ima predavalnica vodoravna tla, je za slušatelje ugodno, če je žleb nameščen čim više. Pri predavalnici s stopničasto namestitvijo klopi pa je primerno, če namestimo žleb ca. 0,70 m visoko od tal. Seveda ni nujno, da je prostor pod žlebom izpolnjen s kakršnokoli konstrukcijo. Žleb mora imeti samo potrebno število podpor, ki si jih določimo glede na to, ali je žleb nepremičen (vodoraven) ali vrtljiv v navpični ravnini okrog vodoravne osi, tako da ga lahko nagibamo. Glede na predavatelja pa žleb ne sme biti nameščen previsoko. Delo pri demonstriranju v razmeroma ozkem žlebu je lažje, če so tla med žlebom in tablo (*D* na sl. 3) nekoliko višja kot tla v predavalnici.

Stremeti je treba po čim doslednejši odpravi ropota in šumov. Predavatelju oz. demonstratorju šum ali ropot zelo otežkočata delo. Zato je najbolj primerno, da sta motor in črpalka, ki povzročata ropot, nameščena v sosednjem prostoru, ki naj bo zvočno dobro izoliran od predavalnice. Ne glede na kraj namestitve je treba tudi sam motor in črpalko zvočno izolirati. Vse odtoke vode pa je treba urediti s pomočjo cevi tako, da izteka voda vedno pod gladino, ker je tak odtok najmanj šumen.

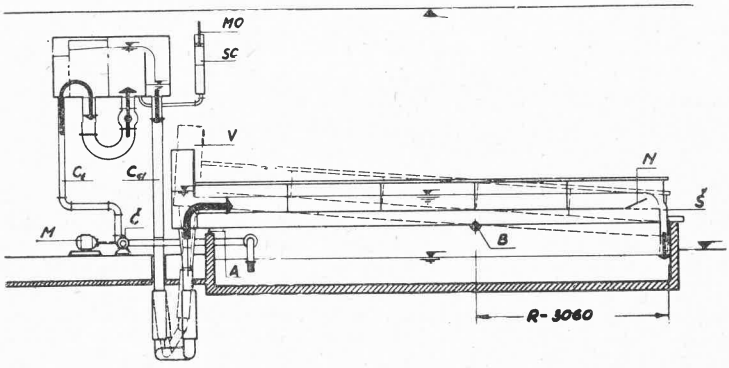
Če smo namestili motor v sosednjem prostoru, mora vendar biti dana možnost pogona v predavalnici sami. Da se prepreči nepoklicano zaganjanje motorja, je najprimernejša ureditev z daljinskim stikalom, ki ga vkljapljamo s posebnim ključem. S ključem, ki ga nosi predavatelj s seboj, se vklopi ves električni del naprave in se po končanem demonstriranju prav tako izklopi. Tudi ostale mehanizme: zapornice, dvižne naprave, zasunke itd. je najprimerneje urediti tako, da z odstranitvijo ročice ali kolesa onemogočimo njihovo uporabo.

Vsa oprema žleba mora biti taka, da se želeni hidravlični efekti dosežejo naglo in da je vgrajevanje objektov čim enostavnejše in hitro.

3. *Opis žleba*

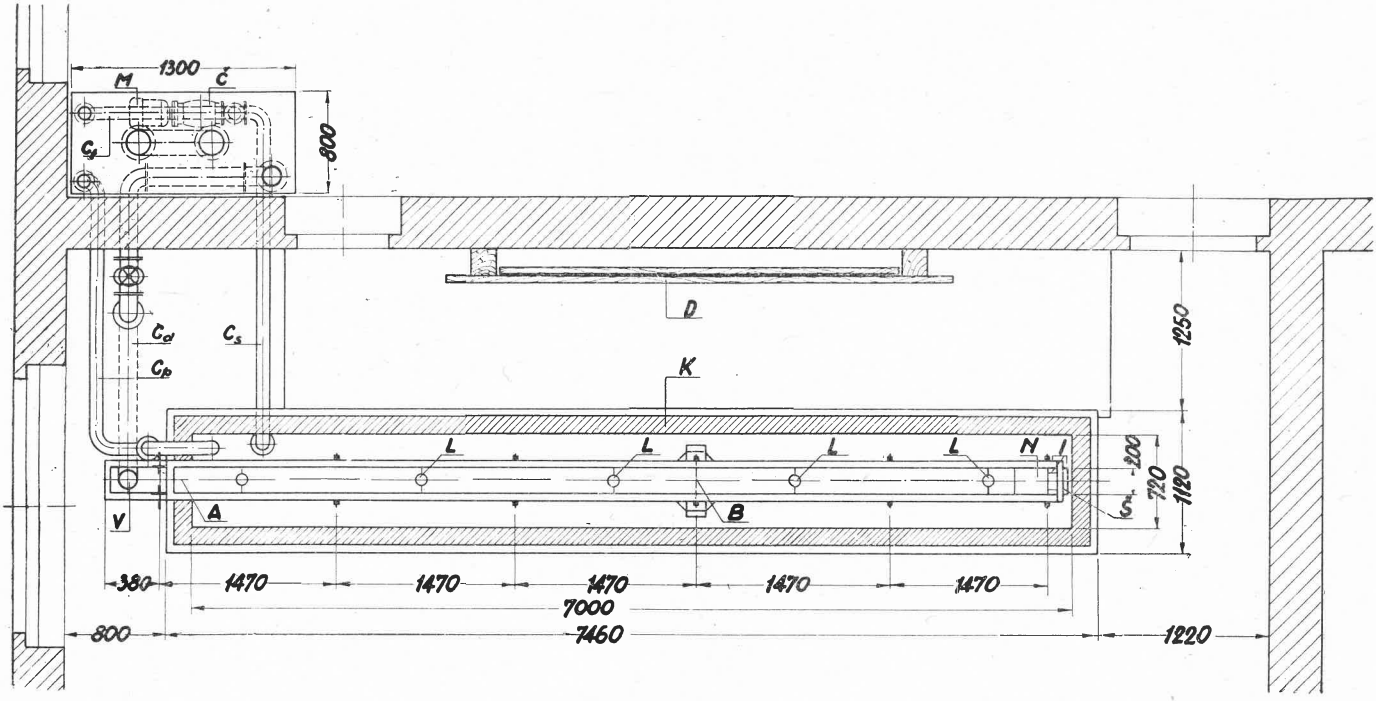
Vsa naprava ima naslednje tri dele:

1. *Vtočni kotlič* (*V* na sl. 1, 2, 3 in 5), v katerega doteka voda na spodnji strani skozi trombasto razširjeno cev (*Cr* na sl. 5). Dno kotliča je v isti višini kot spodnji pas žleba (*SP* na sl. 4). Merjen od tu, je kotlič 1,22 m visok; širok je prav toliko kot žleb, dolg pa je 0,38 m. Proti žlebu kotlič lahko zapremo z medeninasto tablasto zapornico (*Z* na sl. 1). V kotliču se tok vode preusmeri iz vertikalne v vodoravno smer (Glej puščico na sl. 2!). Pri popolnoma odprti tablasti zapornici in pri večjem pretoku je zaradi majhne razdalje preusmeritev preveč sunkovita, kar moti pravilnost dotoka v žleb. Kotlič bi moral biti daljši. V našem primeru pa ga zaradi bližine stene in okna nismo mogli podaljšati. Razen za preusmerjanja pretoka služi kotlič lahko še za to, da s pripiranjem zapornice dvignemo gladino in ustvarimo pod priprto zapornico večje iztočne hitrosti (do ca. 4 m/sek.).



Sl. 2. Shematični prikaz šolskega žleba in vodnega obtoka

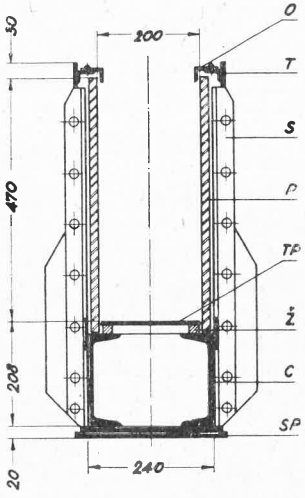
2. *Žleb* sam (v ožjem smislu) ima pet, po 1,47 m dolgih zastekljenih polj in je z vtočnim kotličem in iztočnim podaljškom (*I* na sl. 3) dolg 7,85 m. Notranja širina med stekli znaša 0,20 m, njegova globina od dna do zgornjega roba stekel 0,47 m, do vrha tirnic pa 0,5 m (sl. 4). Statično je zamišljen kot greda, ki leži na trdni podpori *A*, na vrtljivi podpori *B* in je podaljšana s konzolo *R*, dolgo 3,06 m (Glej sliki 2 in 3!). Okrog podpore *B*, ki je oblikovana kot tečaj, se ves žleb suče, medtem ko je podpora *A* na betonskem obodu rezervoarja. Ob tej podpori je možno žleb dvigniti s pomočjo hidravlične dvigalke (*HD* na sl. 5) za 35 cm, tako da se žleb pri tem zasuče okrog osi *B* in se konzolni del *R* vgrezne v korito (*K* na sl. 3). Železna konstrukcija je namenoma predimenzionirana, zato da bi bile tudi pri polnem žlebu deformacije čim manjše. Kovinski deli so med seboj deloma zvarjeni, deloma pa zakovičeni ali priviti. Zakovičene stojke (*S* sl. 4) so z vijaki pritrjene na glavni nosilec, ki je sestavljen iz dveh *C* želez (*C* na sl. 4) in nosijo zgoraj vzdolžno povezavo, na kateri je pritrjena tirnica (*T* sl. 4) za pomičen merilni mostiček. Ta mostiček služi za merjenje višin gladine in v žleb vgrajenih objektov. Na zgornjih krakih *C* želez sta vzdolž privarjeni dve kradratni železi (*Ž* na sl. 4), nanju pa je privita talna plošča žleba (*TP* na sl. 4).



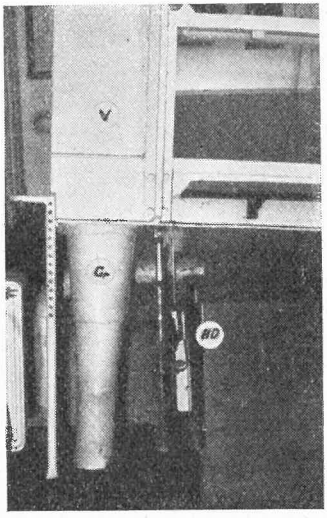
Sl. 3. Razporeditev naprave v predavalnici in v sosednjem prostoru

Ker morajo biti notranje stene žleba po dovršitvi popolnoma gladke in ravne, je pri izdelavi treba posvetiti največjo pozornost položaju stojk, ki morajo imeti vse, za namestitev stekel potrebne ploskve v isti ravnini. Dno žleba, ki mora biti čimbolj ravno in gladko, bi bilo seveda najidealneje izdelati iz ene same skobljane talne plošče. V našem primeru je talna plošča sestavljena iz petih krajših, 8 mm debelih kosov pločevine in je bilo uravnavanje zelo težavno.

Stekla (1,45 × 0,50 m), ki so 16 mm debela (*P* na sl. 4), stoje v vsakem polju na dveh lesenih podporah. S podporama dosežemo, da so stekla čim manj izpostavljena napetostim; razen tega pa z njima stekla tudi horizontiramo. Utori so tesno izpolnjeni s prvovrstnim okenskim kitom in površinsko zaliti s plastjo



Sl. 4.



Sl. 5.

Sl. 4. Vertikalni prerez skozi šolski žleb

Sl. 5. Vtočni del šolskega žleba v dvignjeni legi. Vtočni kotlič *V*, čigar dno tvori podaljšani spodnji pas (*SP* na sl. 3) žleba, razširjeni del dotočne cevi *Cr* in hidravlična dvigalka *HD*

cementne malte. Zgoraj so stekla točkasto oprta na vzdolžno povezavo (*O* na sl. 4) stojk in je tesna naslonitev dosežena z lesenimi klini.

Kovinska tirnica za merilni mostiček ni uspela. Iz razlogov, navedenih med splošnimi zahtevami, tirnica ne sme biti premočna, tanko konstrukcijo pa je zelo težko uravnati. Primerneje bi bilo, če bi na stojke pritrdili leseno tirnico, katero pred važnejšimi poskusi vedno lahko izravnamo.

V talni plošči žleba morajo biti predvidene odprtine za nameščanje standardnih objektov, skozi stranske stene glavnega nosilca žleba pa izvrtane odprtine (Vidni so temni polkrožni poklopci na sl. 1). Skozi te lahko sežemo z roko in z maticami od spodaj privijemo objekte k dnu žleba. Tudi za piezometrične* priključke je primerneje, če jih izpeljemo iz žleba skozi dno in ne

* Piezometer je preprost vodni manometer (navpična steklena cevka s skalo).

preko zgornjega roba stene. Zato ima dno žleba v vsakem polju okroglo odprtino (premer = 10 cm, *L* na sl. 3), ki je običajno zaprta z medeninastimi poklopci. Če je potrebno, pa nadomestimo poklopec s ploščo z nastavki za piezometrične odvode. Že prej omenjene stranske odprtine (sl. 1) služijo v tem primeru tudi za nameščanje in odvod piezometričnih gumijastih cevk.

Ker je betonsko korito 0,72 m široko, ogrodje žleba pa na najširšem mestu samo 0,41 m, je bilo treba prosto površino prekriti. Lesen pokrov (*LP* na sl. 6), ki je deloma fiksno privit na leseno oblogo korita, deloma pa pričvrščen na pomično kovinsko ogrodje žleba (delno vidno na sl. 5), služi kot odlagalna miza med montažo in pri demonstriranju.

3. *Iztočni del žleba* (I na sl. 3) je konstruktivno enako oblikovan kot žleb sam, le talna plošča je opuščena. Voda izteka iz žleba skozi štirioglato cev (*Š* na sl. 2 in 3), ki je priključena ob koncu konstrukcije na obe *C* železi in je tako dolga, da sega pod gladino vode v koritu pri vodoravnem položaju žleba; pri nagnjenem žlebu pa sega do bližine dna betonskega korita. Manjkajoči del talne plošče je delno nadomeščen z loputo (*N* na sl. 2 in 3), ki se suče okrog osi, nameščene v ravnini dna žleba. Loputa omogoča naglo postavitev gladine v žlebu in je zato kljub nekaterim pomanjkljivostim najprimernejša zapornica za ta namen.

Ker so razen zapornic vsi kovinski deli žleba iz rjavečega materiala, je vsa konstrukcija zaščitno belo opleskana. Za oplesk talne plošče, ki je oksidaciji najbolj izpostavljena, še nismo našli primernega obstojnega materiala, zato je treba oplesk večkrat obnavljati.

4. *Obtok vode*

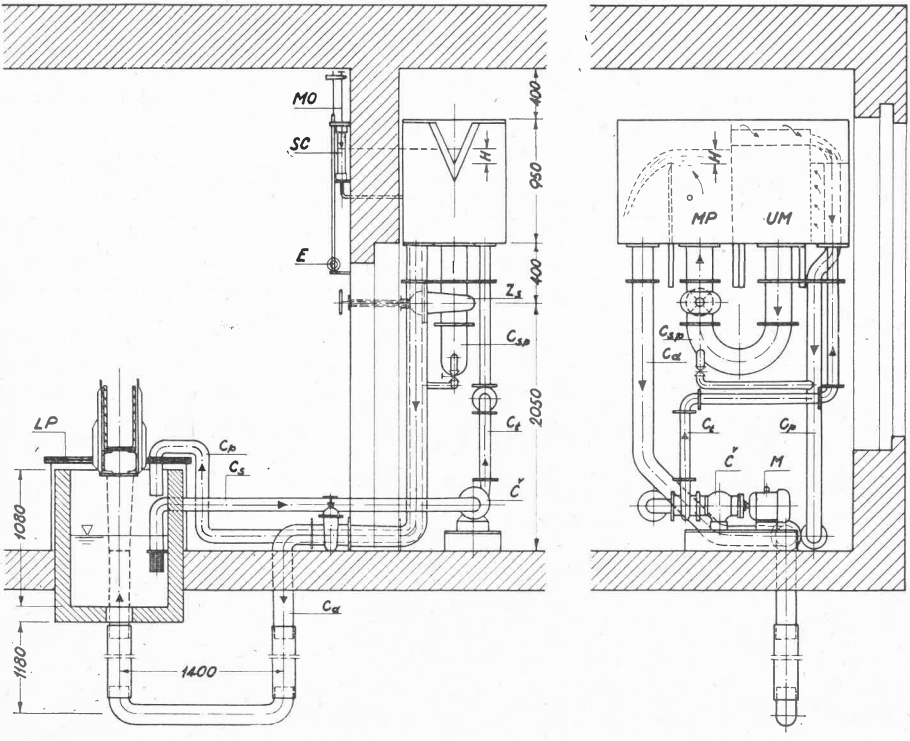
Rezervoar za šolski žleb je bil v obliki betonskega korita predviden že v prvotnem gradbenem načrtu. Korito je znotraj 7,0 m dolgo, 0,72 m široko in 1,08 m globoko. Debelina obodnih sten (*K* na sl. 3) znaša 0,14 m. Korito je vgreznjeno v tla predavalnice, tako da je zgornji rob 0,68 m nad nivojem parketa. Ker je bilo betonsko korito samo močno propustno, je bilo naknadno obloženo z 0,5 mm debelo svinčeno pločevino. Primernejši kot svinčena obloga bi bil večplastni brušen omet. Za primer izpraznjenja naj ima korito v dnu odtočno odprtino, opremljeno z izpustnim zasunkom. Korito, ki ima sicer enakomeren profil, ima v oddaljenosti 4,40 m od vtočnega konca betonsko preklado za namestitev ležišč za os žleba.

Voda teče iz korita po sesalni cevi (*Cs* na sl. 6 in 7, premer = 100 mm), opremljeni s sesalno košaro, do črpalke (*Č* na sl. 2 in 6), dalje po tlačni cevi (*Ct* na sl. 6 in 7, premer 80 mm) v umirjevalec (*UM* na sl. 6) ter iz merskega prekata (*MP* na sl. 6) preko 45-stopinjskega trikotnega merilnega jezu (zgoraj na sl. 6) v dovodno cev (*Cd* na sl. 6 in 7, premer 150 mm), ki vodi v žleb.

Posebnost obtočnega sistema je v tem, da je dovodna cev zaradi premakljivega vtoka v žleb pregibna. To je izvedeno na ta način. da je dovodna cev izpeljana v obliki črke *U* skozi klet, kjer sta oba vertikalna kraka iz gumijastih cevi, medtem ko je vodoravni prečni del običajna železna cev (sl. 6). Pri spuščanju oz. dviganju žleba se gumijasti cevi nekoliko upogneta od vertikale, pri čemer se en krak višinsko ne premakne, drugi pa se dvigne ali zniža (sl. 2) in ostane brez velikih deformacij profila zvezan s togo prečno cevjo in drugo gumijasto cevjo s fiksnim cevnim sistemom. Za primer, da je treba napravo izprazniti, je na togem vodoravnem delu cevi nameščen izpraznjevalni ventil.

5. *Meritve pretoka*

Za posamezne poskuse moramo poznati pretok vode Q (n. pr. v litrih ali m^3 na sekundo). Merimo ga na trikotnem merilnem jezu, ki je nameščen v steni umirjevalnega prekata, in sicer s tem, da izmerimo višino gladine mirujoče vode (H) glede na spodnje oglišče trikotne odprtine merilnega jezu. Za po-



Sl. 6. Vzdolžni prerez in pogled na cevovode, potrebne za obtok od korita, skozi črpalko $\check{C}$, umirjevalec *UM*, merski prekat *MP* s trikotnim Thomsonovim merilnim jezom nazaj do žleba

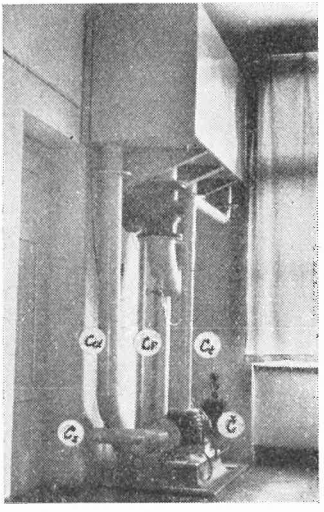
samezne višine gladine je poskusoma določen pretok in nanesen na krivuljo, ki ga prikazuje v odvisnosti od višine.* Tako je torej z odčitanjem višine gladine pri znanem položaju merilnega jezu vselej določen pretok, to je množina vode, ki na sekundo priteka v žleb. Črpalka zmore tlačno razliko 0,56 kp/cm²,

---

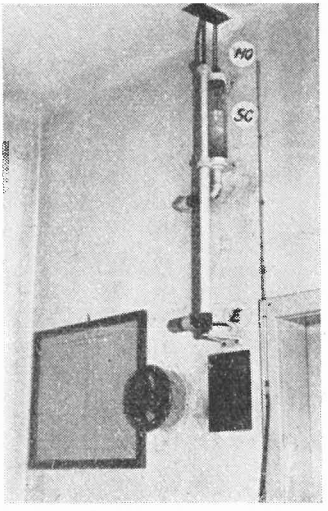
* Pretok čez jez pa lahko približno izračunamo po Bernoullijevi enačbi. Iz luknjice v globini z pod gladino bi brizgala voda s hitrostjo $v = \sqrt{2\,gz}$. Namesto luknjice imamo del trikotne ploskve jezu, in sicer vodoravni pas s ploščino $dS = 2\,(H - z)\,\mathrm{tg}\,(\frac{1}{2}\,\alpha)\,dz$, pri čemer je α značilni kot jezu. Skozi to ploskev gre pretok $dQ = v dS$, tako da bi bil celotni pretok po teh idealiziranih računih naslednji: $Q = \int v dS = \int_0^H \sqrt{2\,gz} \cdot 2\,(H - z)\,\mathrm{tg}\,(\frac{1}{2}\,\alpha)\,dz = (8/15)\,\sqrt{2\,g}\,\mathrm{tg}\,(\frac{1}{2}\,\alpha) \cdot H^{5/2}$. V resnici moramo na desni strani dodati še korekturni koeficient, s katerim upoštevamo, da voda v posameznih plasteh curka ne izteka neovirano. Pri velikem Reynoldsovem številu ima ta koeficient vrednost 0,604, če je $\alpha = 45^0$.

čemur ustreza 5,6 metrov vode. Poganja jo 2,9 kilovatni motor (*M* na sl. 2 in 6) s 1450 vrtljaji na minuto. Ker črpa črpalka vedno po 1100 litrov na minuto, je potrebno, da se odvečna voda, ki je pri poskusu ne rabimo, vrača po pretočni cevi (*Cp* sl. 6 in 7) nazaj v rezervoar. Zaradi varnosti mora biti ta del naprave tako projektiran, da se lahko celotni pretok, ki ga daje črpalka, vrača direktno nazaj v rezervoar. Na merilni jez usmerimo po spojni cevi (*Cspr* na sl. 6, premer 200 mm) s pomočjo zasunka (*Zs* na sl. 6), ki ga upravljamo iz predavalnice, samo toliko vode, kolikor je v žlebu potrebujemo.

Ker so vse te naprave, t. j. črpalka, motor, potrebne cevi, umirjevalec in merilni jez nameščene v sosednjem prostoru in je treba pretočne količine nastaviti in meriti v predavalnici, je umirjevalni prekat skozi steno zvezan s cilindrično stekleno posodo (*SC* sl. 6 in 8), ki je pritrjena v predavalnici v primerni



Sl. 7.



Sl. 8.

Sl. 7. Posoda z umerjevalcem *UM*, merskim prekatom *MP*, Thomsonovim merilnim jezom ter črpalko *Č* z motorjem in potrebnimi cevovodi sta nameščeni v sosednem prostoru

Sl. 8. Plošča z daljinskim stikalom in magičnim očesom, kolo za naravnavanja zasunka *Zs*, elektromotor s števcem obratov *E* za pogon merilne osti *MO*, ki sega do gladine v steklenem cilindru *SC* in diagram s krivuljo $Q = f(H)$

višini na tej steni. Vodni gladini v umirjevalnem prekatu in v stekleni posodi sta torej v isti višini in sedaj lahko v predavalnici odmerimo položaj gladine in s tem pretočno količino. Položaj gladine ugotavljamo z vertikalno merilno ostjo (*MO* na sl. 6 in 8), s katero se z vrha dotaknemo gladine. Pogon merilne osti opravlja po polžastem prenosu dvosmerni pogonski elektromotor (*E*- sl. 6 in 8), opremljen s števcem vrtljajev. Ta elektromotor vklopimo istočasno z vklapljanjem motorja za črpalko z daljinskim stikalom. Ko se konica merilne osti dotakne gladine, se spoji električni krogotok, pri čemer zažari magično oko. Števec pogonskega elektromotorja je tako umerjen, da pokaže že kar višino *H* (na 0,1 mm natančno). S tem podatkom lahko na diagramu preberemo pretok. Konica merilne osti, s katero določamo položaj gladine v stekleni posodi, mora

biti iz nerjavečega materiala, ker se sicer oksidira zaradi elektrolize, s čimer se pokvari oblika konice in s tem pravilnost prebrane višine.

Pri namestitvi črpalke in motorja moramo misliti na možnost odtoka vode, če bi črpalka pri ležiščih ali tesnilih puščala. V našem primeru je betonska temeljna plošča obrobljena s plitvim kanalom in opremljena z odprtino, skozi katero more voda odtekati v klet. S tem je preprečena možnost »poplave« v sobi, kjer je nameščena črpalka.

V žlebu je z doslej izdelanimi objekti in pripomočki možno pokazati nad dvajset standardnih poskusov, ki jih navaja spodnji seznam. Število poskusov pa se z dodatnimi pripravami vsako leto povečuje.

6. *Seznam eksperimentov*

1. Vodni tlak in srk.
2. Hidrostatični pritisk na ravno ploskev — meritev s tehtanjem.
3. Čas iztekanja — izpraznjenje posode.
4. Odskočna razdalja vodnega curka.
5. Tok v ceveh — izgube — Bernoulli.
6. Sifon.
7. Krajevne izgube — hipna razširitev in hipna zožitev.
8. Reynoldsov poskus: laminarni tok — prehod — turbulentni tok.
9. Iztekanje iz odprtin raznih oblik.
10. Iztekanje izpod zapornic.
11. Iztekanje iz nastavkov in kratkih cevi.
12. Iztekanje skozi propuste.
13. Prelivanje čez ostrorobi jez — vpliv ozračenja. Popolno in nepopolno prelivanje.
14. Preliv čez bočno stisnjeni jez.
15. Preliv čez široki prag.
16. Preliv čez jez Creagerjevega tipa.
17. Oblike gladin — postopne in nagle spremembe gladin.
18. Vrste toka: mirni in deroči tok.
19. Gladine pri raznih spremembah širine korita.
20. Vodni skok.
21. Podslapja.
22. Glavni merski instrumenti.

LE CANAL VITRE A L'UNIVERSITE DE LJUBLJANA

(Sommaire)

Vu la grande importance de la visualisation d'enseignement, les Instituts de l'Université de Ljubljana (Yougoslavie) construits après la dernière guerre avaient até assez bien equipés avec des installations servant ce but.

Dans l'Institut Hydrotechnique un canal vitré avait été amenagé dans une salle de conférences permettant d'accompagner de démonstrations l'enseignement de l'hydraulique.

Pendant que la fig. 1 donne l'aspect de ce canal et la fig. 4 sa coupe caractéristique, la fig. 3 représente la disposition totale de l'installation en plan.

Pour prévenir autant que possible le bruit de la pompe et du moteur, ces derniers sont installés dans la pièce voisine ainsi que le tranquilisateur avec

un déversoir Thomson, très bruyant lui aussi. Cette installation, très restreinte, est montrée sur les figs 6 et 7. Le sens de la circulation du débit est représenté avec des flèches sur les tuyaux respectives de la fig 6.

Parceque le canal est à pente variable (la tête du canal avec le cric hydraulique est représentée sur la fig 5), un raccordement special est prévu au souterrain, combiné de deux manches verticales flexibles et d'un tuyau transversal rigide.

Le niveau au déversoir Thomson est communiqué par le mur à un récipient en verre, fixé à une hauteur convenable dans la salle de conférences, ce qui permet la détermination du débit d'ici même. Cette détermination est semi-automatisée et l'appareillage correspondant est montré sur la fig 8.

Le canal vitré sert déjà quelques années son but et un index des démonstrations standard est cité à la fin de l'article.

Janko Bleiweis

NEKAJ »NEUVOŽENIH« NALOG ZA NAŠO SREDNJO ŠOLO

Mnenja o pomenu srednješolske matematike so tako različna kot najbrž pri malokaterem drugem predmetu. Za nekatere je to mučenje kristjanov, za druge duševna telovadba, za tretje predpriprava za študij na univerzi, za četrte nujen del splošne kulture ali pa praktične izobrazbe. Kateri imajo prav?

Najbrž je v vsakem teh mnenj zrno resnice, kajti matematični pouk ima več ciljev.[1] Temu ustrezno tudi učna snov ni izbrana po enotnem, ampak po različnih vidikih. Nekaj učne snovi, zlasti pa nalog je takšnih, da učencu ne nudijo drugega kot telovadbo. Precej je prave matematike, v kateri se definira in izpeljuje vse z veliko strogostjo, ne da bi se kaj dosti menili za uporabo izsledkov. Nekaj vaje pa si učenec srednje šole pridobi tudi v uporabi matematike.

Ni dvoma, da potrebuje srednješolski pouk vse tri komponente; vprašanje je le, če je sedanje razmerje med njimi še dobro. V učnem programu srednješolske matematike se namreč že dolgo ni skoraj nič spremenilo.[2] Marsikaj spominja celo na čase, ko so se še Tartaglia, Cardan in drugi dvobojevali s čim bolj zavozlanimi enačbami. Zdi se, da je v srednji šoli za današnje razmere preveč matematične telovadbe, premalo pa uporabe matematike. Tako se na primer uporaba enačb izčrpa v nalogah, ki se dajo razdeliti na precej majhno število tipov. Naloge enega tipa, kot na primer primeri z ribniki in sodi, ki se polnijo in puščajo, pa so zastopane z obilico variant.

Ob tem tradicionalnem zatišju smo lahko veseli vsake ideje, ki daje kake napotke za reformo ali izboljšanje srednješolske matematike. Zelo koristno in hvalevredno novost predstavljata zbirka »uvoženih« nalog, ki sta jo lani objavila profesorja Milan Ziegler in Niko Prijatelj,[3] ter zbirka nalog, ki jih je po ruskih »matematičnih olimpiadah« povzel dr. France Križanič.[4] Obeh zbirk so se profesorji matematike, ravno tako pa stari in mladi ljubitelji matematike brez dvoma razveselili. Zbirki pa imata tudi svojo slabo lastnost, da sta namreč enostranski. Usmerjeni sta bolj v abstraktno matematiko; nekaj nalog pa je tudi čisto »telovadnih«. Uporaba matematike je tu zanemarjena.

---

[1] Ludvik Gabrovšek: O pouku matematike. Obz. mat. fiz. **5** (1956—57), str. 82.

[2] Niko Prijatelj: O srednješolski matematiki. Obz. mat. fiz. **4** (1955—56), str. 79.

[3] Milan Ziegler in Niko Prijatelj: Nekaj »uvoženih« nalog za našo srednjo šolo. Obz. mat. fiz. **5** (1956—57), str. 80.

[4] France Križanič: Tekmovanje srednješolcev. Obz. mat. fiz. **5** (1956-57), str. 184.

S takšno pristranostjo nehote pomagamo utrjevati sedanje stanje v srednješolski matematiki. Upoštevajmo pa, da je med srednješolskimi dijaki kaj malo bodočih pravih matematikov, medtem ko hitro raste vojska tistih, ki bodo matematiko rabili kot orodje! Delavcu, ki bo v svojem poklicu rabil kladivo, definicija kladiva ali telovadba z njim ne zadoščata. Pokazati mu je treba predvsem, kako se s kladivom zares zabije žebelj v les.

Za izravnavo enostranskega vtisa, ki sta ga naredili omenjeni zbirki, je spodaj dodana zbirka »neuvoženih« nalog, ki je enostranska v nasprotni smeri, namreč v smeri uporabe matematike. Ta zbirka naj pa nikogar ne zavaja k misli, da bi kazalo vso srednješolsko matematiko tako pobarvati in da naj se sploh odpovemo lepotam prave matematike. Tudi tu bo treba najti pametno srednjo pot, ki bo morala upoštevati obe smeri.

Večina spodnjih nalog je podanih v kolikor mogoče nematematični obliki. Matematično obliko mora učenec šele sam najti, kar mu neredko povzroča več preglavic kot pa ves kasnejši račun. Deloma je morda teh težav kriva šola, ki sicer nudi učencu obilo vaje v računanju, ne navadi ga pa v zadostni meri, kako je treba razne probleme matematično formulirati. Tudi to bo morala šola dajati, če bomo hoteli dobiti kader ljudi, ki bodo znali uporabljati matematiko.

Gotovo se bo kdo spotaknil ob naloge s fizikalno vsebino, češ da se takšne naloge ne smejo dajati pri pouku matematike. Natančnejši ogled pa pokaže, da zahtevajo te naloge le najosnovnejše znanje iz fizike (ki ga profesor lahko ponovi, ko daje podatke za nalogo), medtem ko so v matematičnem pogledu nekatere naloge malo bolj zahtevne. Pri teh nalogah se učenec ne uči fizike, ampak matematiko; zato bo koristno, če jih uvrstimo v pouk matematike. Med dolžnosti profesorja matematike pa spada, da išče in obravnava tudi takšne naloge; tega dela ne more in ne sme prepuščati drugim. Veliko olajšavo v tem pogledu pomeni obstoječa simbioza matematike in fizike na naši srednji šoli, kjer uči oba predmeta večinoma isti profesor. Želeti je, da bi šolske oblasti to simbiozo, ki je kvečjemu še prerahla, tudi vnaprej dosledno podpirale.

Priznati je treba, da se nekatere izmed predloženih nalog v resnici samo po besedah ločijo od običajnih abstraktnih nalog. Matematik bo na primer zlahka slekel vso uporabnost z naloge 20 in jo formuliral po svoje: »Potegni kubno parabolo skozi točke...« Vprašati pa smemo, ali sta obe formulaciji enakovredni tudi za učenca. Ta je dotlej morda le abstraktno razpravljal o raznih funkcijah, tako da bo rad preizkusil svoje znanje na primeru, ki ni vzet iz matematike.

Pri sestavljanju takšnih nalog si človek ne more kaj, da se ne bi spotaknil ob problem infinitezimalnega računa v srednji šoli, kajti tu se šele začenja neizčrpno področje za uporabo matematike. V prejšnjem učnem načrtu infinitezimalnega računa sploh ni bilo, v sedanjem pa ga je tudi komaj kaj več kot ime. Učni načrt za matematiko je tu gluh in slep za potrebe fizikalnega pouka, kjer se hočeš nočeš že od šestega razreda dalje uporabljata odvod in integral. Menda iz psiholoških ali ne vem kakšnih drugih razlogov so pri tem vpeljali znamenji Δ in Σ namesto d in $\int$. Na ta način se pač le pokrivamo s figovim peresom, kar nikomur ne koristi.

Da smo v srednji šoli skoraj brez infinitezimalnega računa, je približno tako, kot če bi nauk o slovenski literaturi zaključili z Valentinom Vodnikom, češ da je ves kasnejši literarni razvoj za srednješolca pretežak. Razumevanje

osnov infinitezimalnega računa je bolj potrebno kot pa na primer kvadratne enačbe, vaje v računanju z logaritmi in analitična geometrija skupaj. Poudariti je še treba, da tisti, ki rabi matematiko kot orodje, v šoli bolj pogreša močno nazorno predstavo ter pogumno uporabo odvoda, diferenciala in integrala, kakor pa stroge definicije ali obširno računsko tehniko.

Razpored spodnjih nalog približno ustreza učnemu načrtu, čeprav se toga ločitev na poglavja in tudi ločitev na algebro ter geometrijo nista dali izvesti. Prve štiri naloge lahko damo v petem razredu ali deloma že v nižji šoli. Naloge 5. do 14. spadajo v šesti razred, naloge 15. do 19. v sedmi, 20. do 25. pa v osmi.

*

1. Koliko metrov 0,2 mm debele žice lahko naredimo iz 1 kilograma bakra (gostota = 8,9 g/cm^3)? Koliko metrov pa, če je žica 0,4 mm debela?

Pripomba: Zanimivo je opazovati, kako rešujejo učenci drugi del naloge.

2. Film z debelino 0,2 mm je navit na boben s premerom 8 cm. Zunanji premer svitka je 30 cm. Koliko metrov filma je v svitku?

3. Po deski, ki je nagnjena za 10^0, se kotali valj s premerom 8 cm, ki ima težišče 2 cm daleč od osi. Nariši pot, po kateri se giblje težišče! Z risanjem približno določi ravnovesne lege valja!

4. Če za štiri upore pri Wheatstonovem mostu ne velja, da je $R_1 : R_2 = R_3 : R_4$, teče v galvanometru tok. Kako je ta tok odvisen od vseh štirih uporov ter od upora galvanometra, če je dana napetost U priključene baterije? Baterija naj bo brez upora.

Pripomba: Profesor naj doda nalogi skico in pojasnilo.

5. Vrvica, ki teče preko dveh pritrjenih škripcev (brez trenja), ima na konceh obešeni uteži po 1 kg. Na sredi (med škripcema) pa je privezana vrvica s tretjo utežjo, ki tehta 1,5 kg. Kolikšne kote oklepajo vrvice, ko se ustali ravnovesje?

6. Kroglast balon ima steno, katere kvadratni meter tehta 200 g. Polnjen je z vodikom, ki ima gostoto 0,080 kg/m^3, medtem ko ima zrak ob enakih okoliščinah gostoto 1,16 kg/m^3. Kako velik mora biti balon, da bo lahko nosil samega sebe? Kako velik pa, če naj nosi še tovor 100 kg?

Navodilo k drugemu delu naloge: Dobiš kubno enačbo za r. Najprej izračunaj približno velikost, ne upoštevajoč teže stene. Z dobljenim r izračunaš približno, kako težka je stena; to vneseš v enačbo in ponovno izračunaš r itd.

7. Desettonski vagon se zaleti s hitrostjo 1 m/s v 15-tonskega, ki se mu giblje nasproti s hitrostjo 0,5 m/s. Kolikšni sta hitrosti po trku, če so odbijači popolnoma prožni (torej če je skupna kinetična energija po trku enaka kot pred njim)? Kolikšna je hitrost skupnega težišča? Kako se pri trku spremenita relativni hitrosti glede na težišče? Povej to tudi splošno!

8. V valju s premerom 2 cm je z batom tesno zaprt zrak. Kadar je tlak enak zunanjemu zunanjemu (1 kp/cm^2), je bat 20 cm odmaknjen od dna. Na zunanjo stran naslonimo vzmet, ki je takšna, da se vda za 4 cm, če jo stisnemo s silo 1 kp. Na prosti konec vzmeti pritisnemo s tolikšno silo, da se ta konec premakne za 5 cm. Kako se stisne zrak pod batom, če se njegova temperatura ne spremeni? (Pri tem je prostornina obratno sorazmerna s tlakom.) Trenja naj ne bo.

9. Zmes dušika in vodika, v kateri pridejo na vsako molekulo dušika po tri molekule vodika, močno stisnemo in segrejemo, pri čemer se oba elementa deloma spojita v amonijak. V ravnovesju $N_2 + 3\,H_2 \rightleftarrows 2\,NH_3$ velja za delne tlake vseh treh plinov pri konstantni temperaturi enačba $p_N\, p_{H^3}/p_{am^2} =$ = konst.

Pri nekem tlaku in neki temperaturi je v ravnovesju polovica vse mase plinske zmesi v obliki amoniaka, polovica pa v obliki elementov. Kako se premakne ravnovesje, če tlak podvojimo?

10. Lesena gred s kvadratnim profilom in z gostoto 0,85 g/cm³ plava na vodi. (Dve ploskvi gredi sta pri tem vzporedni z gladino.) Nariši v preseku, kje je težišče gredi in kje je težišče vzgona! Zasuči gred okrog vzdolžne osi za majhen kot! Pri tem naj ostane gred tako globoko potopljena, da je njena teža še vedno enaka teži izpodrinjene vode. Nariši presek gredi v novi legi ter premaknjeno težišče vzgona! Pokaži, da seče rezultanta vzgona prejšnjo težiščeico v neki točki, tako imenovanem metacentru, ki leži v danem primeru nad težiščem gredi! (Zaradi takšne lege metacentra je prvotno ravnovesje gredi stabilno.) Določi lego metacentra tudi računsko! Dokaži, da je pri takšni gredi in pri opisani legi metacenter vedno nad težiščem, če je razmerje gostote gredi in gostote vode med 0,798 in 1!

11. Merilna posoda, ki ima obliko prisekanega stožca, je znotraj 15 cm visoka; premer ob dnu meri 8 cm, na vrhu pa 12 cm. Na steni je narisana skala za prostornino, in sicer po ena črtica za vsak deciliter. Izračunaj, kakšna je skala in nariši jo!

12. Simetrična bikonveksna steklena leča (z ostrim robom) ima premer 4 cm, debelina na sredi pa je 4 mm. Leča tehta 6,3 g. Kolikšna je gostota tega stekla?

13. Med dva droga, ki sta 40 m vsaksebi, napnemo žico. Žica se na sredini povesi za 1 m. Koliko dolga je?

Navodilo: Računaj, kot da se oblika žice ujema s krožnim lokom!

14. Na steklen valj pada v smeri, ki je pravokotna na osi, snop vzporednih svetlobnih žarkov. Nariši potek večjega števila posameznih žarkov, upoštevajoč odboj na zadnji steni! Lomni kvocient je 1,52.

15. Na vodi plava dolg homogen lesen valj (gostota 0,75 g/cm³, radij 10 cm). Koliko ga gleda iz vode?

Navodilo: Dobiš enačbo oblike $\sin \alpha = \alpha$ — konst, pri čemer je α značilni kot, s katerim je določena rešitev naloge. Enačbo lahko rešiš grafično, namreč z risanjem sinusne krivulje.

16. Na vrhu otoka stoji 30 m visok svetilnik. S čolna izmerimo zorno višino vrha svetilnika (30°) in njegovega podnožja (20°). Kako visok je otok?

17. V celicah človeškega telesa je po 24 parov kromosomov. V vsakem paru pa kromosoma v splošnem nista popolnoma enaka (ne določata popolnoma enakih dednih lastnosti), ker je eden podedovan od očeta in drugi od matere. Ob zoritvi spolnih celic se število kromosomov spet razpolovi in dobi vsaka taka celica od vsakega para le po en izvod. Koliko je največje možno število različnih kombinacij vseh 24 kromosomov v spolnih celicah enega individua?

18. Kadar pada svetloba iz zraka pravokotno na steklo, se petindvajsetina odbije, 24/25 pa gre skozi. Enako velja za prehod iz stekla v zrak. Koliko

svetlobe se odbije pri pravokotnem prehodu skozi šipo? Upoštevaj tudi večkrat odbito svetlobo, to je tisto, ki gre večkrat sem in tja, preden zapusti šipo!

Koliko svetlobe pa gre skozi skladovnico iz dveh, treh, ali štirih šip? Med šipami je zrak.

19. Žogo spustimo z višine 1 m na tla, da odskakuje. Pri vsakem odboju izgubi 40 % svoje energije. Po kolikem času se žoga popolnoma umiri?

20. Voda ima največjo gostoto, namreč 1,0000 g/cm^3, pri 4^0 C. Pri 20^0 C je gostota 0,9982 g/cm^3, pri 50^0 C pa 0,9881 g/cm^3. Poskusi opisati gostoto vode s kubno funkcijo temperature! Nariši diagram! Izračunaj po tej funkciji gostoto pri 30^0 C in primerjaj rezultat z izmerjeno vrednostjo 0,9956 g/cm^3!

21. Na gumijevi vrvici viseča utež lahko niha gor in dol, pri čemer se vrvica krči in razteza. Lahko pa niha tudi prečno, pri čemer ostane dolžina vrvice skoraj nespremenjena. S primerno izbiro vrvice in uteži se da doseči, da je nihajni čas pri drugem načinu nihanja dvakrat tolikšen kot pri prvem. Če v takem primeru sunemo utež iz ravnovesne lege v poševni smeri, se giblje po krivulji, ki ima obliko ležeče osmice. Nariši to krivuljo in zapiši njeno enačbo! Amplituda naj bo majhna v primeri z dolžino vrvice.

22. V pokončni valjasti posodi stoji voda. V razdalji h pod gladino je v steni luknja, iz katere izteka voda v vodoravni smeri in pada potem po paraboli. Zapiši enačbo te parabole in nariši jo! Iz točke, ki je nad luknjo v višini gladine, potegni tangento na parabolo! Kolikšen kot oklepa tangenta z navpičnico? Ali se kaj spremeni, če spremenimo h?

23. Z balkona, 5 m visoko od tal, izstrelimo s fračo kamen z začetno hitrostjo 10 m/s. V kateri smeri ga moramo izstreliti, da bo padel najdelj? Kako daleč bo padel? Tla so vodoravna.

Navodilo. Izračunaj najprej daljino meta kot funkcijo začetnega naklonskega kota α! Z odvajanjem dobiš enačbo, ki ji mora ustreči najbolj ugodni α. Iz nje izpelješ kvadratno enačbo za $\cos 2\alpha$.

24. Dvanajst enakih kosov tanke žice zvarimo tako, da tvorijo robove kocke. To ogrodje pomočimo v milnico. Ko ga previdno izvlečemo, obvisi na vsaki žici po ena lamela iz milnice. Te lamele tvorijo včasih v prvem hipu stranske ploskve šestih pravilnih štiristranih piramid, s skupnim vrhom v središču kocke. Osnovne ploskve piramid, to so ploskve kocke, ostanejo pri tem prazne. Prav kmalu (ali pa že takoj spočetka) se lamele tako premaknejo, da nastane pravilna dvojna prisekana piramida, ki spominja na peščeno uro. V sredini kocke nastane pri tem majhna kvadratna ploskev, ki je skupna obema piramidama. Prejšnje ploskve se le malo spremenijo; 4 so trikotne, 8 pa je trapezastih stranskih ploskev piramid. — Izračunaj oblike opisane dvojne piramide iz pogoja, da je skupna površina milnice minimalna!

Navodilo: Problem pripelje na kubno enačbo, ki jo lahko rešiš grafično.

25. Po bakreni žici hočemo napeljati tok 10 A od elektrarne do porabnika. Če vzamemo pretanko žico, je to negospodarno, ker ima takšna žica velik upor in se zato v njej troši znatna moč. Predebela žica pa spet ni ekonomična, ker je predraga. Kako debela žica je najbolj gospodarna, če računamo z 8 % letnimi obrestmi za investicijo in če teče navedeni tok vse leto noč in dan? Baker ima ceno 1000 din/kg, gostoto 8,9 g/cm^3 ter ima specifični upor 0,017 ohm. mm^2/m. Kilovatno uro pa računamo po 2 din.

Ivan Kuščer

SREDNJEŠOLSKI TEČAJ ZA MATEMATIKO

Sekcija za popularizacijo znanosti pri Društvu matematikov in fizikov LRS je organizirala matematični krožek, ki je namenjen dijakom višjih razredov vseh ljubljanskih gimnazij. Zamisel, da bi se organiziral tak krožek, ni nova in, kakor ste brali v zadnji številki Obzornika, imajo tudi v drugih državah podobne krožke. Pri nas pa smo jo uresničili komaj v letošnjem letu. V krožku se bodo obravnavala posamezna kratka in zanimiva poglavja iz matematike, ki ne sodijo v redni šolski program. Predavili bodo poleg srednješolskih tudi profesorji VPŠ in univerzitetni profesorji matematike in sorodnih strok ter seznanjali dijake s sodobnimi poklici, ki uporabljajo matematiko kot osnovno sredstvo.

Prvega sestanka, ki je bil 26. novembra t. l. v matematični predavalnici ljubljanske univerze, se je udeležilo okrog 200 dijakov iz vseh ljubljanskih gimnazij, iz TSŠ in iz Ekonomske srednje šole. Organizatorji tečaja so pričakovali največ 50 udeležencev, zato je bilo presenečenje tem večje. Predsednik društva je v nagovoru dijakom pravilno poudaril, da je taka udeležba res razveseljiva, kar kaže, da si naša mladina želi znanja in žrtvuje za to tudi svoje proste ure, ker čuti, da ji gimnazija ne more vsega dati. Mladina čuti, da je matematika postala v sodobnem življenju vse bolj nepogrešljivo gibalo napredka. Zato potrebe po matematično šolanem kadru povsod po svetu in tudi pri nas nenehno rastejo. Naš krožek namerava opozoriti mladino na te potrebe in vzbuditi več zanimanja in veselja za matematiko in sorodne vede.

Po prvem tednu tečaja smo ugotovili, da je število udeležencev naraslo na 251. Iz posameznih ljubljanskih šol je prihajalo na predavanja sledeče število dijakov: Klasična gimnazija 28, I. gimn. 28, II. gimn. 9, III. gimn. 8, V. gimn. 38, VI. gimn. 8, VII. gimn. 22, VIII. gimn. 8, IX. gimn. 4, X. gimn. 19, XII. gimn. 22, Ekonomska srednja šola 21, Tehnična srednja šola 38, Gozdarska srednja šola 6. Udeleženci pa obiskujejo sledeče razrede: 8. razred gimnazije ali 4. letnik strokovne šole 64, 7. razred gimn. ali 3. letnik strok. šole 97, 6. razred gimn. ali 2. letnik strokovne šole 90. Dijaki petih razredov gimnazij niso bili povabljeni na tečaj.

Zaradi velike udeležbe so organizatorji namesto ene same skupine porazdelili dijake na pet skupin in vsaka od teh je imela tedensko po eno predavanje. V prvem delu tečaja so se obravnavala poglavja iz matematike s praktičnimi vajami, pri katerih so dijakom pomagali študentje matematike. Prve tedne so obravnavali sledeče teme: diofantske enačbe, sintetična delitev, deljivost in pitagorejska števila, ekstremi, neenačbe, homotetija in inverzija. V drugem delu, ki je trajal štiri tedne, so bili dijaki seznanjeni s praktično uporabo matematike in s sodobnimi poklici, ki zahtevajo bolj temeljito znanje matematike, kot ga daje srednja šola. Krožek je bil zaključen v marcu s tekmovanjem vseh udeležencev. Za pripravo na to tekmovanje je društvo izdalo posebno zbirko nalog. Naloge so zajemale snov, ki so jo udeleženci poslušali v krožkih in nekaj vaj iz srednješolske snovi.

Za pokroviteljstvo in pomoč pri tečaju smo zaprosili Prirodoslovno matematično fakulteto v Ljubljani, ki nam je obljubila vso podporo. Tudi Sveta za šolstvo pri Republiškem in Okrajnem odboru sta nam nudila vso pomoč.

Ob zaključku tečaja, ki se je vršil od 3. decembra do 30. marca t. l., je bilo zaključno tekmovanje najboljših udeležencev. Pri tekmovanju so bili tekmovalci porazdeljeni v tri skupine. Od štirih nalog, ki so jih morali izdelati v dveh urah, sta bili dve iz snovi, ki so jo predelali na tečaju, dve pa iz srednješolske snovi.

Prva skupina (šestošolci) je imela sledeče naloge:

1. Pokaži, da je izraz $n^5 - n$ deljiv z 48, ako je n liho število!

2. Katero celo število, ki je deljivo s 7, da pri delitvah z 2, 3, 4, 5 in 6 po vrsti ostanke 1, 2, 3, 4 in 5? Koliko je pozitivnih rešitev do 10 000 in katero je najmanjše tako število?

3. V nekem logaritemskem sestavu je $\log_x 450$ za 1,16395 večjo od $\log_x 40$. Kolika je osnova tega sestava in kolika sta omenjena logaritma?

4. V enakokrakem trikotniku sta dani osnovnica c in krak a. Trikotniku je včrtan krog in krogu narisana tangenta, vzporedna osnovnici c. Določi ploščino trikotnika, ki je nad tangento!

Druga skupina (sedmošolci):

1. Določi število a tako, da bo imela enačba

$$2x^5 + 2x^4 - 37x^3 + a x^2 - 49x + 6 = 0$$

en koren enak -1 in jo nato reši!

2. Za kakšne x ima izraz $\sqrt{\log \frac{21 - 9x}{x^2 - 8x + 15}}$ realno vrednost?

3. Pretvori v produkt vsoto $2 + \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha$!

4. Kocka z robom a ima diagonalo AB. Izračunaj polmer krogle, ki se dotika onih treh mejnih ploskev, ki se stikajo v ogljišču A, in onih treh robov, ki se stikajo v ogljišču B! Izračunaj površino onih delov krogelne ploskve, ki segajo izven kocke!

Tretja skupina (osmošolci):

1. Pokaži, da je od sedmih celih števil, ki tvorijo aritmetično zaporedje z diferenco 30, samo eno deljivo s 7!

2. Izreži iz lepenke, ki ima obliko kvadrata s stranico $2a$, odprto škatlo z največjo prostornino!

3. V izsek iz krogle s polmerom R in kotom ob vrhu osnega preseka 2α včrtaj pokončni stožec z vrhom sredi kapice krogelnega izseka ter z osnovno krožnico na plašču krogelnega izseka! Kot ob vrhu osnega preseka včrtanega stožca je 2β. Kolika je prostornina včrtanega stožca?

4. Inverzijski krožnici s polmerom a je včrtan premočrtni trikotnik, katerega oglišča so tri zaporedna oglišča inverzijski krožnici včrtanega pravilnega šesterokotnika. Načrtaj krožni trikotnik, v katerega se z inverzijo na dani krožnici s polmerom a preslika podani trikotnik! V katerem razmerju se pri tej preslikavi povečajo stranice, v katerem pa ploščina? Morda ti uspe še ugotoviti, da se pri preslikavi koti ohranijo.

Ocenjevalna komisija, pod vodstvom univ. prof. dr. Ivana Vidava je predložila za nagrado tele dijake:

I. nagrada: Vojska Jurij, 8. razred I. gimn.

II. nagrada: Brajnik Dušan, 8. razred klasične gimn., in Gogala Borut, 6. razred I. gimn.

III. nagrada Novak Janez, 6. razred XII. gimn., Babšek Bogdan, 7. razred klasične gimn., Vrabec Jože, 7. razred klasične gimn., Kovačič Mitja, 7. razred I. gimn., Vodopivec Vinko, 6. razred I. gimn. in Gros Mladen, 7. razred klasične gimnazije.

Društvo matematikov in fizikov LRS se zaveda resnosti in važnosti prizadevanj, ki so v zvezi z reformo šolstva, in smatra za svojo dolžnost, da po

svojih močeh čim več prispeva k dobri rešitvi tega problema. Prav gotovo smo v tem pogledu že zelo veliko storili in so imeli naši prosvetni organi v Društvu matematikov in fizikov zavednega in marljivega svetovalca in sodelavca.

Znano je namreč, da dela slušateljem, ki se vpisujejo na univerzo, prav velike težave prehod iz srednje šole na univerzo. Bistveno različen način dela na teh dveh tipih šol zmede novinca na univerzi, ki se precej dolgo ne znajde v novem načinu študija. Tu je treba prav gotovo iskati tudi vzroke, da se študij na univerzi po nepotrebnem prekomerno podaljšuje.

Med razpravljanjem o načinu študija na srednjih šolah in na univerzi se je v našem društvu porodila misel, da bi bilo treba že srednješolce polagoma uvajati v nesrednješolski sistem študija ter jih hkrati seznanjati s snovjo, ki se na srednji šoli ne obravnava.

Da bi ne ostalo samo pri besedah, je v letošnjem šolskem letu napravilo naše društvo poskus ter priredilo tečaje iz matematike. S temi tečaji in z zaključnim tekmovanjem je želelo poživiti zanimanje dijakov za matematiko ter jim vcepiti veselje do nje. Predavatelji so na seminarski način obdelovali z dijaki študijsko snov, ki ne spada v srednješolski učni program, ki pa bo lahko udeležencem tečaja zelo koristila pri njihovem bodočem študiju na visokih šolah.

Tečaj je v celoti uspel, saj je bilo zanimanje zanj nepričakovano veliko (povprečni tedenski obisk je bil 120 dijakov). Zato se je društvo odločilo, da bo v prihodnjem šolskem letu ponovno organiziralo tečaj za matematiko in fiziko, ki naj bi bil v prihodnje v republiškem obsegu.

Stanko Uršič

VPRAŠANJA

1. UPOR SATELITA

Kolikšen je upor kroglastega satelita v zelo razredčenem zraku? Gostota zraka naj bo tako majhna,. da je prosta pot molekul velika v primeri s premerom satelita.

Ivan Kuščer

2. BARVA CIGARETNEGA DIMA

Cigareta, iz katere smo pravkar posrkali dim, se kadi na obeh konceh. Iz tlečega konca se vije modrikast dim, medtem ko je dim na drugi strani čisto bel. Kako naj si razložimo to razliko v barvi?

3. POVRŠINA IN PRESEK KONVEKSNIH TELES

Znano je, da je presek krogle (πr^2) enak četrtinki površine ($4 \pi r^2$). Manj znano pa je, da se da ta trditev posplošiti na vsa konveksna telesa, če namesto preseka vstavimo primerno definiran povprečni presek.

Presek telesa definirajmo s ploščino njegove sence, ki jo naredijo vzporedni žarki, ko pravokotno padejo na ravnino za telesom! Če telo zasučemo, se presek (velikost sence) v splošnem spremeni. Vzemimo množico enakih konveksnih teles, ki so različno orientirana, pri čemer naj bodo vse možne orientacije enakomerno zastopane (tako kot n. pr. orientacije molekul v plinu, ki je prepuščen samemu sebi)! Za to množico izračunamo povprečni presek telesa.

Dokaži, da je ta povprečni presek enak četrtinki površine telesa!

DOMAČE VESTI

OBČNI ZBOR DRUŠTVA MATEMATIKOV IN FIZIKOV LRS

12. oktobra 1957 je bil v Ljubljani redni občni zbor Društva matematikov in fizikov LRS. Udeležilo se ga je okrog 60 članov. Namesto obolelega predsednika dr. Vadnala je njegovo poročilo prebral podpredsednik dr. Vidav, poročali so pa tudi referenti posameznih sekcij in komisij.

Društvo je bilo v pretekli poslovni dobi v stikih z ostalimi republiškimi društvi in z Zvezo društev matematikov in fizikov FLRJ ter je plodno delovalo v vseh sekcijah.

Število članov se je povečalo od 325 na 351; v glavnem so zdaj včlanjeni v Društvu vsi matematiki in fiziki iz Slovenije.

Zelo uspešno je bilo delo sekcije za dvig pouka in predavanja pod vodstvom prof. Šušteršiča. Poleg 14 predavanj je sekcija organizirala ekskurzijo na Primorsko z ogledom soških hidrocentral, priredila je tečaj iz eksperimentalne fizike za višjo stopnjo in sodelovala pri radijski univerzi; pripravlja pa tudi knjigo 800 eksperimentov.

Sekcija za tisk je izdajala Obzornik za matematiko in fiziko. Število naročnikov je v primeri z lanskim letom padlo od 923 na 903. Iz inozemstva prihajajo v zameno za 21 izvodov Obzornika razne podobne publikacije. V želji, da bi bil Obzornik čimbolj pester, vabijo uredniki člane k sodelovanju.

Sekcija za bibliografijo je tudi letos nadaljevala zbiranje bibliografskih podatkov o Vegi in Močniku.

Podružnica Društva v Mariboru je imela 7 sestankov s predavanji.

V poročilih je bilo poudarjeno, da je Svet za prosveto in kulturo LRS z zanimanjem spremljal delo Društva in z gmotno podporo omogočil Društvu uspešno delovanje.

V novi upravni odbor so bili izvoljeni: dr. A. Vadnal, predsednik; dr. I. Vidav, podpredsednik; J. Grasselli, tajnik; F. Plevnik, blagajnik; odborniki: F. Ahlin, dr. F. Dominko, dr. I. Kuščer, J. Povšič, N. Prijatelj, V. Rupnik, T. Skubic, I. Štalec, F. Šušteršič, G. Tomšič, v nadzorni odbor pa: F. Čemažar, M. Potiskova, O. Sajovic. Častno razsodišče bodo tvorili: I. Molinaro, dr. A. Peterlin, dr. A. Vakselj.

J. Grasselli

XI. PLENUM ZVEZE DRUŠTEV MATEMATIKOV IN FIZIKOV FLRJ

24. septembra 1957 je v Hercegnovem zasedal XI. plenum Zveze društev matematikov in fizikov FLRJ. Navzoči so bili člani plenuma in zastopniki društev iz vseh republik.

Na plenumu so razpravljali o znanstvenem, strokovno-pedagoškem in organizacijskem delu na področju matematike in fizike v okviru posameznih republik ter vse FLRJ. Iz poročil Izvršnega odbora Zveze in komisij Zveze, iz poročil posameznih republiških odborov, uredniških odborov zveznih in republiških časopisov se je moglo jasno videti, kako mnogostrana in vsebinsko bogata je delavnost za dosego napredka matematičnih in fizikalnih znanosti pri nas. Po obširni razpravi kakor tudi na podlagi podanih poročil in v njih vsebovanih predlogov je bilo ugotovljeno in sprejeto sledeče:

Zvezne komisije so sicer aktivnejše, kot so bile doslej, toda imajo še vedno bolj republiški kot zvezni značaj, delajo v praksi v sestavu tovarišev ene republike in ne dobivajo pomoči iz ostalih republik. — Treba je podpreti sedanjo

akcijo za reformo na univerzah in visokih šolah ter v društvih več razpravljati o obstoječih vprašanjih na naših fakultetah. — Potrebno je, da bi bila naša javnost, bolj kakor doslej, obveščena o delu, uspehih in akcijah naših društev, da bi tako pravilna stališča društev imela večji in potrebni vpliv pri reševanju ustreznih važnejših vprašanj. — Naša društva še vedno posvečajo premalo pozornosti popularizaciji matematike in fizike, zlasti tiste, ki je namenjena širši publiki. — Da bi lahko proučili stanje naših učnih kadrov, naj društva zberejo na območjih svojih republik vse ustrezne statistične podatke za vse vrste šol. — Očiten napredek v delu je pokazala sekcija LR Črne gore in zlasti Društvo matematikov in fizikov LR Slovenije. — Poleg številnih vprašanj, ki so v zvezi s strokovnim izpopolnjevanjem učiteljev in ki so se dosedaj obravnavala v naših društvih, je bilo sklenjeno, da se tudi sistematično prouči vprašanje usposabljanja kandidatov za učiteljske in profesorske izpite. Treba je, da se v soglasju z vsemi našimi društvi o tem vprašanju izdela predlog, katerega realizacija bi pripomogla, da bi dobili kvalitetnejše učne moči. — V zvezi s simpozijem diferencialnih enačb, ki bo v Beogradu od 16. do 21. decembra 1957, naj vsako društvo določi referenta in naj se najresneje potrudi, da izposluje denarno pomoč za čimvečje število slušateljev. — Sprejeto je bilo poročilo blagajnika in predlog proračuna za leto 1958.

Plenum je pretehtal publicistično delavnost Zveze in posameznih republiških društev. Časopisi prikazujejo stalen napredek tako v znanstvenem in strokovno-pedagoškem pogledu kakor tudi v povečanju števila čitateljev. Kako veliko izobraževalno vlogo vrši Matematičko-fizički list med našo srednješolsko mladino, dokazuje njegovih 12 419 naročnikov. Naš Obzornik so v razpravi nekateri udeleženci plenuma pohvalili kot kvaliteten časopis. Glasnik ima 348 zamenjav iz 43 držav, Vesnik pa 274. Vse to priča o velikem pomenu, ki ga imajo ti časopisi pri razširjanju znanstvenih zvez in pri zastopanju naših znanosti v inozemstvu. — Medtem ko je uredniški odbor Nastave pohvalil uspešno prizadevanje našega društva pri širjenju števila njenih naročnikov po Sloveniji, pa je bilo iz poročila za Matematičko-fizički list razvidno, da smo v naši republiki zanemarili širjenje tega časopisa med mladino. Število naročnikov med mladino pri nas je v zadnjem letu padlo ter ne znaša več niti 4 % vseh naročnikov.

Predlagano je bilo, da Zveza poskrbi za izid Enciklopedije elementarne matematike v štirih zvezkih, velikost 8°, vsak po 400 do 500 strani. Plenum je bil tudi obveščen, da je doslej pripravljenega okoli 70 % gradiva za monografijo Nastava matematike u Jugoslaviji.

Društvo LR Srbije je predlagalo, naj Zveza oziroma posamezna društva sprožijo sistematično izhajanje strokovne literature matematično-fizikalne smeri za učitelje in učence srednjih šol. Še to leto naj se formirajo uredniški odbori za obe knjižni izdaji, ki naj pripravijo načrt za izdajanje v prihodnjem letu. — V razpravi o tem predlogu je bilo tudi sklenjeno, naj vsi časopisi bolj kakor doslej obravnavajo pouk matematike in fizike v osemletkah in srednjih strokovnih šolah.

Ob vprašanju reforme srednje šole in pouka matematike in fizike v njej se je razvil živahen razgovor. Sklenjeno je bilo, naj izbrana skupina udeležencev plenuma nadaljuje razgovor izven plenuma in naj pripravi pismen predlog novega programa za matematiko.

Plenum se je odločil, da bo sklican III. kongres matematikov in fizikov FLRJ v septembru 1959 v Srbiji. Vse priprave in organizacijo tega kongresa naj oskrbi društvo LR Srbije.

Treba je še pohvalno omeniti, da so se Svet za šolstvo LR Črne gore, OLO v Hercegnovem in črnogorski tovariši z uspehom potrudili, da je bilo bivanje delegatov in udeležencev plenuma v Črni gori kar najzanimivejše in najprijetnejše.

Jože Povšič

STROKOVNA POSVETOVANJA V HERCEGNOVEM

Ob številni udeležbi članov matematičnih društev ljudskih republik Črne gore, Bosne in Hercegovine ter zastopnikov članov iz ostalih republik, so se pričela dne 26. septembra 1957 v Hercegnovem posvetovanja iz raznih področij strokovne problematike.

Program dela se je v glavnem dotikal treh važnih področij, in sicer: pouka matematike, pouka fizike in nekaterih teoretskih vprašanj v tej zvezi.

V temi »Učni načrti in predmetniki v gimnaziji«, je razpravljal tov. dr. F. Pejović o vprašanju, koliko so sedanji učni načrti za matematiko ovira uspešnemu delu in kako jih izpopolniti, da bodo racionalno sestavljeni.

O »Sodobnih načinih obravnavanja geometrije v osemletni šoli« je govoril tov. D. Rajčić. Del njegovih izvajanj je uveljavljen v učnih načrtih in ciljih pouka matematike v reformirani obvezni šoli.

V referatih Praktična matematika v osemletki in v Demonstracijah I. in II. (Uporaba prozornega materiala pri grafičnem reševanju in računanju na strojih; tablice in nomogrami) nas je seznanil tov. dr. K. Orlov s praktično vrednostjo raznih grafikonov, tabel in tablic pri šolskem delu na osemletki. Nakazal je tudi potrebo po uvedbi demonstracij z raznimi računskimi stroji v šolski pouk, da se otrok čimprej seznani s temi pridobitvami.

S temo Praktična matematika v srednji šoli se je lotil prof. dr. V. Dajović problema natančnosti pri raznih izračunavanjih in merjenjih, načina določanja približnih vrednosti in napak.

Možnosti uporabe matematičnega gradiva pri pojasnjevanju in utrjevanju fizikalne snovi je prikazal v predavanju O matematiki v srednješolskem kurzu fizike tov. I. Smolec. Zapostavljanje teh oblik na račun eksperimenta in obratno je za uspešni pouk škodljivo.

Problematika pouka fizike je bila obdelana še v naslednjih predavanjih: O sodobnosti pouka fizike (L. Milić), Politehnizacija pri pouku fizike (D. Popović), Važnost eksperimenta pri pouku fizike v srednji šoli (I. Basarić), Pouk matematike in fizike v srednjih strokovnih šolah.

Poleg teh izrazito šolskih vprašanj je delovni program obsegal še naslednje teme: Sodobne težnje v reformi pouka matematike v svetu in pri nas (dr. Dj. Kurepa) in Transformacije v srednješolskem kurzu matematike (dr. Dj. Kurepa in I. Bandić). Zadnji referat je obsegal gradivo o transformacijah, pojem funkcije, transformacije v algebri, transformacije v geometriji in sodobno obravnavanje algebre.

Iz navedenih tem je razvidno, da je bila vsebina dela zelo pestra in obsežna. Diskusija je bila poučna in polna pobud za uvajanje novih smeri pri obravnavanju matematičnega gradiva. Posebej je bila poudarjena zlasti potreba po večjih in nujnih vezeh matematike s prirodnimi vedami in po trdnejših zvezah med posameznimi matematičnimi disciplinami.

Posvetovanja so se končala v nedeljo, 29. septembra.

Zborovanje učnega osebja za pouk matematike in fizike na tem področju je uspelo ne samo v strokovnem pogledu, ampak tudi po številu udeležencev.

Jože Žabkar

ODGOVOR

ODGOVOR NA VPRAŠANJE ŠT. 6

V nalogi je treba dokazati, da se iz manj kot devetih različnih kvadratov ne da sestaviti pravokotnik in da se dasta iz devetih kvadratov sestaviti le pravokotnika z razmerjem stranic 61:69 in 32:33.

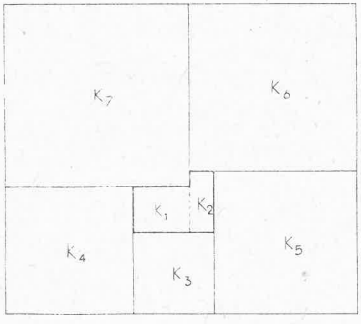
Najprej bomo ugotovili lego kvadratov v pravokotniku, nato pa bomo nastavili enačbe za stranice teh kvadratov. Te enačbe tvorijo linearen homogen sistem. Če ima ta sistem pozitivno rešitev in so stranice med seboj različne, potem se da res sestaviti iz ustreznih kvadratov pravokotnik.

Kvadrate po velikosti označimo s $k_1, k_2, k_3, \ldots, n$ pa naj bo najmanjše število kvadratov, iz katerih se da sestaviti pravokotnik.

Noben kvadrat ne more imeti s pravokotnikom dveh vogalov skupnih, ker bi sicer lahko ta kvadrat odstranili in bi ostal pravokotnik, ki bi ga sestavljalo že manjše število kvadratov. Najmanjši kvadrat izmed tistih, ki so na robu pravokotnika, ne leži v kotu, ker bi se sicer oba večja soseda prekrivala. Na robu je torej najmanj 5 kvadratov.

Brez težave tudi uvidimo, da kvadrata k_1 in k_2 — to sta najmanjša dva — ležita v notranjosti pravokotnika. Če bi namreč eden od njiju ležal na robu, se preostalo polje ne bi dalo izpolniti s samimi večjimi kvadrati. Od tod sklepamo, da je n najmanj 7; vsaj 5 kvadratov je na robu in najmanj 2 v notranjosti.

Oglejmo si najprej primer, ko je 5 kvadratov na robu. Ležati morajo tako, kakor kaže pričujoča slika (1). Notranje polje pa se ne da pokriti samo z dvema različnima kvadratoma. Denimo namreč, da je to mogoče in zaznamujmo stranice kvadratov z $a_1, a_2, \ldots, a_7$. Iz slike je razvidno, da so med stranicami tele zveze:



$$a_3 = a_1 + a_2$$
$$a_4 = a_1 + a_3 = 2\,a_1 + a_2$$
$$a_5 = a_2 + a_3 = a_1 + 2\,a_2$$
$$a_6 = a_2 + a_5 = a_1 + 3\,a_2$$
$$a_7 = a_1 + a_4 = 3\,a_1 + a_2$$
$$a_4 + a_7 = a_5 + a_6$$

Če vstavimo vrednosti a-jev, izražene z a_1 in a_2, v zadnjo enačbo, dobimo $a_1 = a_2$; to pa ni rešitev naloge, ker morajo biti vsi kvadrati med seboj različni.

Od tod vidimo, da so v notranjosti vsaj trije kvadrati. Takoj pa se tudi izkaže, da se notranje polje na sliki ne da izpolniti s tremi različnimi kvadrati. Torej je n večji od 8.

Videli bomo, da je $n = 9$, pri čemer dobimo dve rešitvi.

Prvo rešitev dobimo, če notranje polje izpolnimo s štirimi kvadrati. To je možno na dva načina, če postavimo najmanjši kvadrat ob izbočeni kot na eno ali drugo stran. Enačbe nam povedo, da nastopa rešitev le v enem primeru.

Iz slike bi dobili naslednje enačbe:

$$a_3 = a_1 + a_2$$

$$a_4 = a_1 + a_3 = 2\,a_1 + a_2$$

$$a_5 = a_3 + a_4 = 3\,a_1 + 2\,a_2$$

$$a_6 = a_4 + a_5 = 5\,a_1 + 3\,a_2$$

$$a_7 = a_2 + a_3 + a_5 = 4\,a_1 + 4\,a_2$$

$$a_8 = a_2 + a_7 = 4\,a_1 + 5\,a_2$$

$$a_9 = a_1 + a_4 + a_6 = 8\,a_1 + 4\,a_2$$

$$a_8 + a_7 = a_9 + a_6$$

To je sistem 8 homogenih enačb za 9 neznanih stranic. Enoto (a_1) si lahko poljubno izberemo. Če vstavimo vse v zadnjo enačbo, dobimo: $5\,a_1 = 2\,a_2$. Naj bo $a_1 = 2$, potem so ostale stranice:

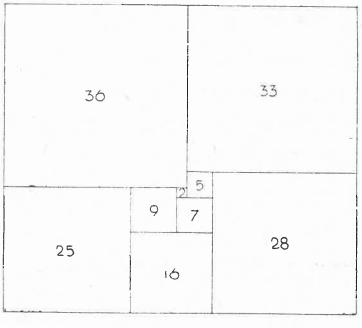
$$a_2 = 5,\ a_3 = 7,\ a_4 = 9,\ a_5 = 16,$$
$$a_6 = 25,\ a_7 = 28,\ a_8 = 33,\ a_9 = 36.$$

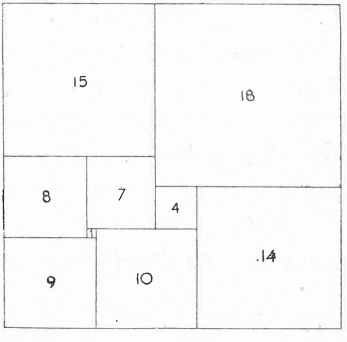
Pravokotnik, ki se da na ta način sestaviti iz 9 kvadratov, ima razmerje stranic 61:69.

Sedaj pa si oglejmo še drugo možnost, namreč, da je 6 kvadratov na robu in 3 v notranjosti! Kmalu se lahko prepričamo, da mora biti drugi najmanjši kvadrat od kvadratov na robu, v kotu pravokotnika, ker se v nasprotnem primeru na preostalo polje ne dajo postaviti trije kvadrati.

S poskušanjem in računanjem dobimo, da se da na ta način sestaviti pravokotnik z razmerjem stranic 32:33.

Spodnji sliki kažeta obe rešitvi. Številke v kvadratih pomenijo dolžine stranic v izbranih enotah.





Zvonimir Bohte

Inštitut za metalne konstrukcije sprejme v službo takoj diplomiranega fizika (eventualno tudi absolventa ali študenta višjih letnikov) za delo v Centru za defektoskopijo ZKNE (delo z rentgenskimi aparati, izotopi, ultrazvokom in dr.).

Pismene prijave pošljite na:

Inštitut za metalne konstrukcije, Ljubljana, Mencingerjeva 7.

Društvo matematikov in fizikov NRH izdaja za vso državo

MATEMATIČKO FIZIČKI LIST

za učenike srednjih škola. Letnik ima 4 številke, med počitnicami ne izhaja. Letna naročnina je 200 din, posamezna številka 60 din.

Profesorji srednjih šol, priporočajte list dijakom! Naročila in naročnino pošiljajte na naslov:

Matematičko-fizički list, Zagreb, Ilica 16/III, p. p. 165 ali na čekovni račun št. 401-T-1080.

Društvo matematičara i fizičara N. R. Hrvatske poziva sve, koji se zanimaju matematičko-fizičkim naukama, da se pretplate na

Glasnik matematičko-fizički i astronomski

i sarađuju u njemu.

Zaista ne bi smjelo biti ni jednog kulturnog radnika, koji se bavi matematičko-fizičkim naukama, kao ni prosvjetne ustanove, koja nije pretplatnik Glasnika. Pretplatom i suradnjom u svojem naučnom i stručnom časopisu pokazujete u kolikoj mjeri pratite i podupirete razvitak i napredak svoje struke. Širite također Glasnik u svom krugu, jer time podupirete razvitak matematičko-fizičkih nauka u svojoj okolini.

Prijave pretplate slati na administraciju Glasnika: Zagreb, Ilica 16/III. Pretplata za god. 1957 iznosi 480.— din i šalje se na ček. br. 401-606/1-K-1077.

Obzornik za matematiko in fiziko izhaja vsak tretji mesec. Izdaja ga Društvo matematikov in fizikov LRS. Urejujejo ga: A. Kuhelj, I. Kuščer, A. Moljk, N. Prijatelj, I. Vidav. Odgovorni in tehnični urednik: I. Štalec. Upravo vodi T. Skubic. — Tiska tiskarna ČZP »Ljudska pravica« v Ljubljani. — Naročnina je 250 din, za podjetja in ustanove, ki plačajo po računu in za naročnike, ki plačajo po terjatvi 280 din. Posamezna številka 100 din. Naročnino nakažite na naš čekovni račun $\frac{600-70}{3-207}$. Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov:

Obzornik za matematiko in fiziko, Ljubljana, poštni predal 253, tel. št. 23-304.

IZ UPRAVE

Na zalogi imamo še vse številke I., II., III. in IV. letnika razen 1. številke I. letnika. I. letnik stane 120 din, posamezna številka 50 din, II. letnik stane 250 din, posamezna številka 90 din, III. letnik stane 250 din, posamezna številka 90 din, IV. letnik 250 din, posamezna številka 100 din.

Iz 4. številke Obzornika 1951 smo ponatisnili tabelo *Osnovne fizikalne konstante* na kartonu 32 × 33 cm. Dobite jih za ceno 20 din za kos pri prof. Štalcu Ivanu, Ljubljana, I. gimnazija, Vegova ul. 4. Prav tam lahko poravnate tudi naročnino za Obzornik.

UREDNIŠTVO JE PREJELO V ZAMENO

Bulletin of the Institute of Nuclear Sciences, Beograd 1958, Vol. 8.
Bulletin scientifique, Zagreb 1957, No. 4.
Elektrotehniški vestnik, Ljubljana 1957, XXV, št. 7—8, 9—10, 11—12; 1958, št. 1—2.
Farmacevtski vestnik, Ljubljana 1957, VIII, št. 11—12; 1958, št. 1—2.
Fotokemijska industrija, Zagreb 1957, št. 4; 1958, št. 1.
Glasnik mat.-fiz. i astr., Zagreb 1957, T. 12, No. 1, 2, 3, 4.
Gospodarski vestnik, Ljubljana 1957, št. 81—101; 1958, št. 1—40.
Idrijski razgledi, Idrija 1957, št. 4; 1958, št. 1.
Matematičko-fizički list, Zagreb 1957/58, VIII, št. 2, 3.
Philip's Technische Rundschau, Eindhoven 1957/58, No. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.
Proteus, Ljubljana 1957-58, št. 1, 2, 3, 4/5, 6, 7, 8, 9.
Physics Today, New York 1957, Vol. 10, No. 5.
Sodobna pedagogika, Ljubljana 1957, VIII, št. 5—7, 8—10; 1958, št. 1—2.
Ukrainskij matematičeskij žurnal, Kiev 1957, T. IX, No. 3, 4.
Uspehi matematičeskih nauk, Moskva 1958, XIII., 1, 2.
Vestnik Leningradskogo universiteta, Leningrad 1958, No. 4.
Vestnik Moskovskogo universiteta, Moskva 1957, 3, 4.
Zdravstveni vestnik, Ljubljana 1957, št. 10, 11, 12; 1958, št. 1, 2.

Zveza Društev matematikov in fizikov FLRJ izdaja časopis:

Nastava matematike i fizike

Naročnina je za člane vseh republiških društev matematikov in fizikov 300 din, za ostale naročnike, šole in biblioteke 400 din. Naročila in naročnino pošiljajte na žiro-račun Nastave 10-KB-2-Ž-1262 z oznako Za »Nastavu« za l. 1957. Časopis naročite lahko tudi pri našem Društvu.

Društvo matematikov in fizikov NRS izdaja

Vesnik Društva matematičara i fizičara NRS

Letno izide v dveh dvojnih številkah, letna naročnina je 400 din. Naročnino pošiljajte na ček. račun 102-T-119 Društvu matematičara i fizičara NRS pod označbo »Za Vesnik«.