OBZORNIK
ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA
1956-57
V. št. 3

VSEBINA

Članki Stran

Lalande in Vega (Jože Povšič) 97
Linearno programiranje (Alojzij Vadnal) 101
Operatorski račun (Rajko Jamnik) 107
Sekundarna emisija elektronov (Smiljan Jerič) 117
Dilatacijska viskoznost (Mitja Rosina) 127

Novice

Počasni in hitri reaktor v enem (Milan Osredkar) 133
Predavanje o Vegi na Dunaju (Jože Povšič) 106

Domače vesti

Reforma obvezne šole in pouk matematike (Jože Žabkar) 134
O reorganizaciji inštitutov 136
Nove knjige 138
Vprašanja 139
Odgovori 140

CONTENTS

Articles Page

Lalande and Vega (Jože Povšič) 97
Linear Programming (Alojzij Vadnal) 101
The Operator Calculus (Rajko Jamnik) 107
Secondary Emission of Electrons (Smiljan Jerič) 117
The Second Viscosity Coefficient (Mitja Rosina) 127

News

A Slow and Fast Reactor (Milan Osredkar) 133
A Lecture on Vega in Vienna (Jože Povšič) 106

School

The Reform of the Elementary School and the Teaching of Mathematics (Jože Žabkar) 134
On the Reorganisation of Our Institutes 136
New Books 138
Questions 139
Ansvers 140

IZ UPRAVE

Na zalogi imamo še vse številke I., II., III. in IV. letnika razen 1. številke I. letnika. I. letnik stane 120 din, posamezna številka 50 din, II. letnik stane 250 din, posamezna številka 90 din, III. letnik stane 250 din, posamezna številka 90 din, IV. letnik 250 din, posamezna številka 100 din.

Iz 4. številke Obzornika 1951 smo ponatisnili tabelo *Osnovne fizikalne konstante* na kartonu 32 × 33 cm. Dobite jih za ceno 20 din za kos pri prof. Štalcu Ivanu, Ljubljana, I. gimnazija, Vegova ul. 4. Prav tam lahko poravnate tudi naročnino za Obzornik.

LETO V
1956-57 OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO ŠTEV. 3
1. VI. 1957

LALANDE in VEGA

(Ob stopetdesetletnici smrti znamenitega francoskega astronoma Lalanda)

JOŽE POVŠIČ

Ob prehodu v 19. stoletje je imela francoska akademija znanosti za svoje redne člane slavne matematike, fizike in astronome. Lagrange, Laplace, Legendre, Monge, Delambre, Lalande — da omenimo le najvidnejše — so uspešno reševali probleme, ki sta jih prednje postavljala znanost in vsakdanja praksa. Večina izmed teh je imela posredno ali neposredno tudi veliko besedo pri revoluciji in pri vzpostavitvi nove republike. Ni čudno, da se je to poznalo tudi v zakonodaji, ki je uvedla: republikanski koledar, metrski sistem in orientacijo vse vzgoje v smeri eksaktnih ved. Ker je bil astronom Lalande v pismenih stikih z našim Jurijem Vego, zato zasluži, da ob tej priliki na kratko očrtamo njegovo življenjsko pot, skušamo z orisom njegovega ustvarjanja najti mesto, ki mu gre v zgodovini astronomije, in prikažemo pomembnost njegovega dopisovanja z Vego.

Vegovi biografi Lalandove korespondence z Vego niso poznali. Omenjajo jo le zgodovinarja Schwaldopler in Wurzbach ter pisec Vegovega nekrologa v *Allgemeine Literatur-Zeitung* iz l. 1803. Prav tako sporoča Vega v pismu kranjskim deželnim stanovom 1799, da jim pošilja kopijo enega od Lalandovih pisem. (Vegovo pismo je ohranjeno v ODAS-u, kopije Lalandovega pisma pa tam ni.) Ni znano, če se je kje v celoti ohranila Lalandova korespondenca z Vego. Nekaj značilnih odstavkov pa je 1802 v francoščini priobčil profesor estetike na budimpeštanskem vseučilišču Ludvik Schedius v svojem časopisu *Zeitschrift von und für Ungern*. Da bi Vega lahko uveljavljal svoje plemiške pravice tudi na Ogrskem, so mu takrat podelili ogrski indigenat. Z objavo Lalandovih pisem pa je Schedius hotel tudi prikazati, s kako znamenitim in zaslužnim možem se je pomnožilo število ogrskih učenjakov.

Joseph Jérôme Le Français de Lalande je bil rojen 1732 v kraju Bourg, okraj Ain. Študiral je v Parizu matematiko in astronomijo ter — na željo staršev — tudi pravo. Kmalu je postal najljubši učenec svojih učiteljev, astronomov Delisla in Lemonniera na Collège de France. Komaj 19 let starega je akademija poslala v Berlin, da bi tam določil paralakso lune, medtem ko je šel z istim namenom Lacaille na Rtič dobre nade. Kmalu je bil sprejet za

člana akademije v Berlinu ter je 1752 objavil svoje prvo delo, in sicer poročilo o berlinskih opazovanjih. Po povratku iz Berlina, kjer se je pogosto shajal z Eulerjem, Maupertuisom in Voltairom, je bil 1753, šele 21 let star, imenovan v francosko akademijo znanosti in je bil takoj med njenimi najbolj delavnimi člani. L. 1760 je prevzel uredništvo astronomskega časnika *Connaissance des temps,* l. 1761 je postal Lemonnierov naslednik kot profesor astronomije na Collège de France, od l. 1795 pa še direktor pariške zvezdarne, kar je ostal vse do svoje smrti 4. aprila 1807. leta.

Z Lalandom se je pričelo novo obdobje astronomske literature. Tu ni mesto, da bi naštevali njegova številna dela, razprave in tabele. Posebej pa je le treba omeniti njegovo poglavitno delo *Astronomie,* ki je izšlo prvič leta 1764 v Parizu. Z njim je postal učitelj tolikih generacij astronomov in posebno še prvakov v astronomiji kot Zacha, Gaussa ter Bessla. Bessel je v svojih spominih: *Kurze Erinnerungen an Momente meines Lebens* dal prednost tej knjigi — kljub delni zastarelosti — še 80 let po prvem izidu pred vsemi splošnimi razpravami o astronomiji, ki so izšle za njo. »Pisec je astronom,« pravi Bessel, »ki se je sam ukvarjal z vsemi deli stroke; nikoli ne zamudi navajati vire in dela drugih in s tem opozoriti bralca na takrat znano snov kakor tudi na zgodovinski razvoj.« Delo je bilo natisnjeno trikrat za Lalandovega življenja in pozneje še večkrat. Prevedeno je v različne jezike. — Nič manj pomembna ni *Bibliographie astronomique* (1803); sestavljal jo je trideset let in je služila kot bogat ter večkrat rabljen vir za zgodovinske in literarne podatke. — Lalande je bil preko 50 let izredno delaven kot astronomski opazovalec, kar je razvidno iz njegovih številnih seznamov zvezd in tabel. Postal je tako zaslužen za praktično astronomijo, da se je njegovo ime v prejšnjem stoletju v strokovni literaturi stalno omenjalo. Samo njegovo delo *Histoire céleste française* (1801) vsebuje lege blizu 50 000 zvezd. 40 let po Lalandovi smrti je to delo, nekoliko reducirano, na novo izdala britanska družba v Londonu kot katalog.

Lalande je užival tudi velik ugled med člani akademije znanosti. Kot njen odposlanec je vneto in plodno zastopal tako koristi akademije kakor znanosti ter posebno še stroke, ki se ji je ves posvetil. Tako se je moral v posebnem prosvetnem komiteju skupaj z revolucinarnimi poslanci narodne skupščine pečati kot zastopnik akademije z reformo koledarja. Laplaceove temeljne ideje, ki bi utegnile dati koledarju univerzalni značaj, revolucionarjem niso ugajale in so jih odklonili. Narodna skupščina je na prigovarjanje in podpihovanje nekaterih poslancev — zlasti predlagatelja profesorja matematike Romma — sprejela 1793 tako zvani republikanski koledar, po katerem se je pričelo leto v jesenskem enakonočju. Laplace takrat ni uspel in vse kaže, da tudi Lalande ni. Ko je 9 let pozneje imel Lalande v Parizu ob navzočnosti ministra javno predavanje o uspehih astronomije v prejšnjem letu, je zastavil svoj ugled ter se je upal izreči sledeče ostre besede: »Prvi dan 19. stoletja je bil karakteriziran z odkritjem devetega planeta. Uporabljam koledar vseh narodov, ker sem prepričan, da se bo francoska vlada kmalu odpovedala koledarju, ki ni uporaben in ki ga ne morejo sprejeti ne naši sosedje ne velika večina Francozov.« Poslušalci so Lalanda po teh besedah prekinili z viharnim odobravanjem.

Lalande se je moral že po svojem poklicu ukvarjati z uporabno, praktično matematiko. Za točno numerično računanje je bilo takrat že nekaj logaritmovnikov, ki pa niso več zadostovali, predvsem pa so bili nepriročni in premalo točni. Tudi Lalande je poznal pomanjkljivosti tedaj rabljenih logaritmovnikov

in tablic ter jih je hotel odpraviti. Tu je sam prijel za delo. Tako je skupaj z Lacaillom sestavil in izdal logaritemske tablice trigonometrijskih funkcij *Tables de logarithmes pour Sinus, Tangentes, etc.* (1760), ki so bile zaradi priročnosti okoli 100 let zelo priljubljene. Več let pa je skrbno pripravljal majhno izdajo logaritmovnika in jo nato izdal 1802 pod naslovom *Tables de logarithmes pour les nombres et les sinus etc.*

Na tem področju matematike pa je proti koncu 18. stoletja zaslovelo tudi ime Jurija Vege. Saj je l. 1783 na Dunaju izdal svoje *Logarithmische, trigonometrische und andere zum Gebrauche der Mathematik eingerichtete Tafeln und Formeln,* ki so po pravilnosti in mnogovrstnosti daleč presegale vse druge logaritmovnike tiste dobe. To mu je takratna strokovna kritika pri Nemcih tudi brezpogojno priznala. Kako visoko je pa to koristno delo ocenil Lalande, je razvidno iz pisma, ki ga je pisal Vegi 27. maja 1793. V njem pravi, da so njegovi logaritmi *»najbolj dragocena zbirka tablic, kar sem jih kdaj videl«.* Potem nadaljuje: *»Pa kaj bi Vam govoril o svoji osebni hvaležnosti za lepo posvetilo, ki ste ga priložili. Naj Vam raje spregovorim o hvaležnosti in priznanju vsega sveta in bodočih rodov, saj ste si zanje pridobili več pravic kot jaz, kajti Vaše ime bodo nujno ponavljali večkrat in mnogo dlje kakor moje.«**

Dve leti pozneje in leto dni po izidu Vegovega *Thesaurusa,* to je l. 1795, je izšel v Parizu 7-decimalni logaritmovnik *Tables portatives de Logarithmes par François Callet,* natisnjen pri tiskarnarju Didotu. S posebno odredbo republikanske vlade je bilo to delo zaupano Calletu z nalogo, da tako opravi obširne popravke prejšnjih francoskih tablic. Firmin Didot, ki je bil znan po tem, da je izboljšal stereotipijo — beseda izhaja od njega — je takrat po svojem novem postopku najprej natisnil te tablice. Lalande se je sam veliko trudil in z nasveti pomagal Calletu in Didotu, da bi bile te tablice kar najbolj izpopolnjene. Toda po izidu je Vega tudi v teh našel napake. Poslal jih je Lalandu, na kar mu je ta v drugem pismu dne 20. julija 1800 odgovoril takole: *»Gospod, z velikim veseljem sem prejel seznam napak iz stereotipnih logaritmov, ki ste mi ga poslali. Didot je logaritme takoj po izidu popravil in mi naročil, naj se Vam zahvalim. Za Vas bo dal na dobrem papirju natisniti popravljeni primerek in ga Vam bo poslal po mojem prijatelju Zachu. Zelo ste ustregli nam vsem, zakaj to so tablice, ki jih bomo zelo dolgo uporabljali in jih bodo izdajali še tudi po naši smrti. — Sam pripravljam za tisk malo stereotipno izdajo za minute in 10 000. Prosil Vas bom za podobno uslugo tudi za mojo izdajo. Z njo bo ustreženo več ljudem kot z velikimi tablicami. — Gospod, vesel sem novic o miru, ki se širijo tu. Na takšen način mi bo omogočeno dopisovati se kaj več z učenjakom, tako koristnim, kakor ste Vi.«*

Vega je z veseljem sprejel novi francoski ali metrski sistem, ki je bil po revoluciji vpeljan na Francoskem l. 1799. Bil je med prvimi v Avstriji, ki se je trudil, idejo nove mere in uteži razširiti na avstrijske in ogrske dežele. Zato je posredoval pri avstrijski vladi, da si je dala narediti v Parizu vzorce merskih enot (etalone), enake prvotnim pariškim. V dodatku k 3. izdaji I. zvezka svojih

* *»Mais au lieu de vous parler de ma reconnaissance personelle, pour la belle adresse, que vous y avez jointe, j'ame mieux vous parler de celle de l'univers et de la postérité, à laquelle vous avez acquis des droits bien supérieurs aux miens, car votre nom sera nécessairement répété bien plus souvent et plus longtemps que le mien.«*

Vorlesungen nam pravi, da je moral celih 20 let čakati, preden so iz Pariza poslali te vzorce. Šele Lalande mu je to oskrbel preko avstrijskega poslanika v Parizu Cobenzla. To dokazuje tudi tretje Lalandovo pismo z dne 8. januarja 1802, ki vsebuje med drugim tudi naslednje: »*Poskrbel bom, da bo Didot popravil napake, ki so ostale.*« (V pariški izdaji stereotipnih logaritmov je Vega namreč po prvem popravku še našel napake in je opozoril nanje.) »*Moji mali logaritmi še niso končani. Prvi, ki jih bo dobil v roke, boste Vi, in pregled, ki ga boste opravili, bo zadnje potrdilo za zaupanje vsem, ki jih bodo uporabljali. — Gospodu grofu Cobenzlu sem poslal utež in dolžinsko mero, ki ste me prosili zanju.*« — Nato slede nekateri podatki različnih evropskih mer, za katere ga je Vega najbrž prosil.

Ko so na dunajskem magistratu nekaj tednov nato primerjali dospele francoske mere s starimi avstrijskimi, je bil Vega navzoč kot prvi strokovnjak. Njegovo predzadnje delo, ki mu ga je sprožil Lalande, je bila prav razprava *Maass- und Gewichts-Einrichtung in den k. k. Erbländern*, v kateri obširno presoja in podrobno primerja nove francoske mere. Še istega leta je bila objavljena v *Zeitschrift von und für Ungern* in namenjena širjenju metrskega sistema na Ogrskem. Isto leto, nekaj dni pred svojo smrtjo, pa je izročil dunajski tiskarni rokopis z naslovom *Natürliches Maass-, Gewichts- und Münz-System ...*, s katerim se je poslovil od občinstva.

Sovjetski Vegov biograf Depman trdi, da je bil Vega verjetno sploh prvi propagandist tega sistema izven meja Francije. »Vegovo propagiranje metrskega sistema v tej dobi je dokaz njegovih naprednih nazorov tudi v tem vprašanju,« pravi Depman.

Lalande je posredoval, da je Vega sodeloval pri izpopolnjevanju francoskih logaritemskih tabel, tistih tabel, ki so bile nato v vsej Evropi poleg Vegovih skoraj izključno v rabi nad pol stoletja. Priskrbel je Vegi gradivo in podatke za širjenje metrskega sistema v Avstro-Ogrski. Njegova pisma, polna priznanj, kakršna lahko da le zares velik človek, pa so bila Vegi v veliko spodbudo. Pisec Vegovega nekrologa v *Allgemeine Literatur-Zeitung* trdi, da je Vega z entuziazmom prebiral ta pisma svojim prijateljem in da so mu bila zadnje dni življenja v največjo tolažbo in ponos.

Lalandova dela so danes že klasična in zastarela, njegova osebnost pa vzbuja priznanje in spoštovanje zaradi obširnega znanstvenega dela, globokega strokovnega znanja in vodilne vloge med astronomi takratne dobe. Njegovo ime se danes že odmika od vsakdanje rabe astronomov in častno odhaja v zgodovino znanosti. — Vegov 7-decimalni logaritmovnik pa še vedno redno izhaja v svetovnih jezikih in ime izrednega strokovnjaka za izračunavanje logaritemskih tablic je tudi danes poznano med matematiki, astronomi in geodeti po vsem svetu.

Literatura:

1. G. Vega, Vorlesungen über die Mathematik, Bd. I., 3. verb. Aufl., Wien 1802.
2. Zeitschrift von und für Ungern, Pesth 1802, I, 271, II. 152—160, 237—238.
3. G. Vega, Natürliches Maas-, Gewichts- und Münz-System, Wien 1803.
4. Allgemeine Literatur-Zeitung, Jena 1803, Intelligenzblatt 268—269.
5. Wolf, Geschichte der Astronomie, München 1877.
6. Wolf, Handbuch der Astronomie, Zürich 1890.
7. I. J. Depman, Zamečatel'nye slavjanskye vyčisliteli G. Vega i J. F. Kulik. Istoriko-matematičeskie issledovanija VI, Moskva 1953.

Portret Lalanda je posnet iz leksikona Larousse du XXe Siècle — 4.

LINEARNO PROGRAMIRANJE

ALOJZIJ VADNAL

1. Uvod

Vezane ekstreme funkcij več neodvisnih spremenljivk računamo navadno z metodami diferencialnega računa po znani Lagrangeovi metodi. V zadnjem desetletju pa so vzbudili pozornost vezani ekstremi neke posebne vrste, pri katerih je Lagrangeova metoda neuporabna. Računamo jih po neki algebrajski metodi, ki temelji na lastnostih večdimenzionalnih konveksnih poliedrov. Tehniko računanja te vrste vezanih ekstremov najdemo v strokovni, zlasti še v ekonomski literaturi, pod različnimi imeni kot n. pr.: input-output analiza, programiranje odvisnih dejavnosti, analiza aktivnosti, linearno programiranje itd. Ker bomo obravnavali v naslednjem ekstremne probleme, v katerih nastopajo samo linearne enačbe in funkcije, bomo privzeli izraz linearno programiranje (linear programming), ki je v moderni ekonomski literaturi še najbolj razširjen.

Linearno programiranje se je doslej najbolj uporabljalo in uveljavilo pri računanju vezanih ekstremov v gospodarstvu pri planiranju raznih gospodarskih dejavnosti, v tehniki pri organiziranju tehnoloških procesov in v statistiki pri organiziranju popisov itd. Linearno programiranje prihaja skratka v poštev povsod tam, kjer je mogoče in kjer se lahko predvidi tako ukrepanje, ki naj bo z gospodarskega vidika optimalno. Problemi, ki jih je mogoče reševati po tej metodi, so n. pr. tile:

a) Določiti je treba vrste in količine blaga, ki naj jih proizvaja neka industrijska panoga, da bo dosegla pri obstoječih cenah največji dobiček.

b) Vprašanje je, kako je treba organizirati transport na nekem področju, da bodo pri določenih transportnih tarifah in pri določenem obsegu transporta transportni stroški najmanjši.

c) Vedeti hočemo, kako je treba organizirati statistični popis, da bodo pri zahtevani natančnosti stroški popisa najmanjši.

d) Dognati je treba, kako naj poljedelec kolobari na svojem zemljišču, da bo njegov pridelek največji.

Pri teoretičnem obravnavanju linearnih programov uporabljamo zlasti matrični račun in teorijo večdimenzionalnih konveksnih poliedrov. Praktično računanje posameznih problemov po tako imenovani metodi simpleksov pa je dokaj enostavno in izvedljivo že s štirimi osnovnimi računskimi operacijami; ker je praktično računanje povsem zmehanizirano, je zanj mogoče uporabiti računske stroje, ki so pravzaprav nepogrešljivi, če ima problem le količkaj večje število neznank in pogojev.

Ako nastopata pri linearnem programiranju samo dve neznanki, tedaj ga lahko rešimo prav enostavno z elementarnimi metodami ravninske analitične geometrije. Kot zgled takega elementarnega razreševanja navajamo naslednji primer:

Za svoj obstoj potrebuje človek dnevno b_1 enot prve in b_2 enot druge organske snovi. Te snovi dobi lahko v dveh živilih. V enoti prvega živila je a_{11} enot prve in a_{12} enot druge organske snovi; v enoti drugega živila pa je a_{21} prve in a_{22} enot druge organske snovi. Enota prvega živila stane c_1, drugega živila pa c_2 denarnih enot. Kako je treba narediti načrt za nakup obeh živil,

da bo zadoščeno obema potrebama po organskih snoveh in da bodo izdatki čim manjši? Če zaznamujemo z x_1 količino prvega, z x_2 pa količino drugega živila, ki ju kupimo, tedaj izrazimo lahko to nalogo takole:

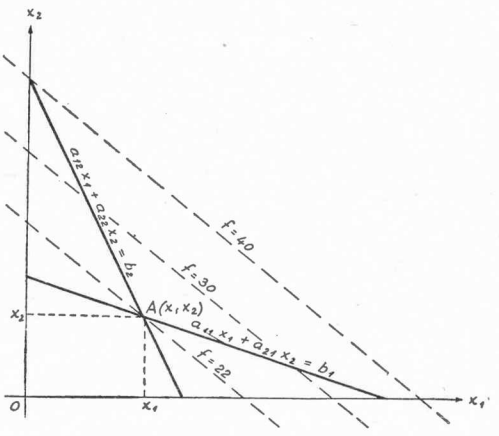
Izračunati je treba vrednosti x_1 in x_2, ki sta pozitivni ali pa kvečjemu enaki 0, ki zadoščata neenačbama:

$$a_{11}\, x_1 + a_{21}\, x_2 \geqq b_1,$$
$$a_{12}\, x_1 + a_{22}\, x_2 \geqq b_2$$

in za katere ima funkcija:

$$f = c_1\, x_1 + c_2\, x_2$$

minimum.



Nalogo rešimo lahko grafično v koordinatnem sistemu $x_2\, 0\, x_1$, v katerem načrtamo najprej premici, ki pripadata pogojnima neenačbama. Zaradi pogojev pridejo kot rešitve v poštev očividno samo tisti pari x_1 in x_2, ki jih ponazorujejo nad obema premicama ležeče točke prvega kvadranta. Med temi pari vzamemo za optimalno rešitev tisti par (A), za katerega ima minimum linearna funkcija f, ki jo v koordinantnem sistemu predstavlja družina vzporednih premic. Priložena slika daje grafično rešitev problema za naslednje posebne vrednosti:

$a_{11} = 1,\ a_{12} = 2,\ a_{21} = 3,\ a_{22} = 1,$

$b_1 = 9,\ b_2 = 8,\ c_1 = 4,\ c_2 = 5;$

rešitev je: $x_1 = 3,\ x_2 = 2,\ f_{\min} = 22.$

2. Standardno linearno programiranje

Splošno linearno programiranje izrazimo lahko takole: Izračunati je treba neznanke $x_1, x_2, \ldots, x_j$, ki naj bodo vse pozitivne ali kvečjemu enake 0 in ki naj zadoščajo naslednjemu sistemu linearnih enačb oziroma neenačb:

$$a_{11}\, x_1 + \ldots + a_{1j}\, x_j \lesseqgtr b_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}\, x_1 + \ldots + a_{mj}\, x_j \lesseqgtr b_m$$

in za katere ima linearna funkcija:

$$f = c_1 x_1 + \ldots + c_j x_j$$

minimum oziroma maksimum; pri tem so koeficienti a_{ik}, b_i in c_k poljubna realna števila in $j > m$.

Zaradi potreb pri teoretičnem razmotrivanju, zlasti pa zaradi potreb pri praktičnem računanju prevedemo to linearno programiranje v tako imenovano standardno obliko! S primerno preobrazbo pogojnih enačb oziroma neenačb ter z dodajo novih neznank, ki so sicer važne za računsko tehniko, pa bistvo problema ne zadevajo, je mogoče zgornje linearno programiranje prevesti v naslednje standardno linearno programiranje, ki je prvotnemu ekvivalentno:

Izračunati je treba neznanke $x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n$, ki naj bodo vse pozitivne ali kvečjemu enake 0:

$$x_i \geqq 0, \quad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{I}$$

ki zadoščajo naslednjemu sistemu m linearnih enačb:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} x_1 + \ldots + a_{mn} x_n &= b_m \end{aligned} \tag{II}$$

in za katere ima linearna funkcija:

$$f = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n \tag{III}$$

maksimum; pri tem so koeficienti a_{ik}, b_i in c_k poljubna realna števila in $n > m$.

Zaradi praktičnih potreb pri numeričnem računanju zadošča standardni problem še enemu pogoju. Vrednosti $x = (x_1, \ldots, x_n)$ imamo lahko za točko oziroma vektor n-dimenzionalnega prostora X_n. Koeficiente v stolpcih sistema pogojnih enačb (II) pa imamo lahko za točke oziroma vektorje m-dimenzionalnega prostora P_m, ki jih pišemo takole:

$$p_1 = (a_{11}, \ldots, a_{m1}), \ldots, p_n = (a_{1n}, \ldots, a_{mn}), \quad p_0 = (b_1, \ldots, b_m)$$

Z dodatkom primernih novih neznank k prvotnemu problemu je vedno mogoče doseči, da so pri standardnem problemu med vektorji $p_1, \ldots, p_n$ zapopadene vse vektorske enote prostora P_m:

$$p_{i1} = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, p_{im} = (0, \ldots, 0, 1).$$

Vsi ti vektorji enote so linearno neodvisni in tvorijo bazo prostora P_m; z njimi je namreč mogoče izraziti linearno vse vektorje $p_1, \ldots, p_n$, pa tudi vektor p_0, pri čemer je izražanje enolično.

3. Bazične možne rešitve

Sistem vrednosti $x_1, \ldots, x_n$ imenujemo možno rešitev linearnega programa, če zadoščajo $x_1, \ldots, x_n$ pogojnim enačbam (II), ne da bi morala imeti zanje linearna funkcija (III) že maksimum. Med možnimi rešitvami imajo posebno važno vlogo bazične možne rešitve. Možno rešitev $x_1, \ldots, x_n$ imenujemo bazično možno rešitev linearnega programiranja, če ima kvečjemu m pozitivnih komponent, medtem ko so vse druge enake 0.

Vektorji $p_1, \ldots, p_n$ so vektorji m-dimenzionalnega prostora P_m, zaradi česar je med njimi največ po m vektorjev linearno neodvisnih. Med njimi eksistira torej največ $\binom{n}{m}$ m-toric linearno neodvisnih vektorjev. Vsaka taka m-torica linearno neodvisnih vektorjev tvori bazo prostora P_m; z njimi je namreč mogoče enolično linearno izraziti vse vektorje $p_1, \ldots, p_n$, pa tudi vektor p_0.

Vsaki bazi prostora P_m, t. j. vsaki m-torici linearno neodvisnih vektorjev lahko izračunamo ustrezno bazično možno rešitev linearnega programa. Denimo, ne da bi pri tem na splošnosti kaj izgubili, da tvori bazo prostora P_m prvih m vektorjev $p_1, \ldots, p_m$, ter rešimo naslednji sistem m linearnih enačb z m neznankami:

$$a_{11} x_1 + \ldots + a_{1m} x_m = b_1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{m1} x_1 + \ldots + a_{mm} x_m = b_m$$

ki ima samo eno rešitev, recimo: $x_1, \ldots, x_m$. Ker je množica teh m vrednosti: $x_1, \ldots, x_m$ rešitev tega sistema enačb, je množica vrednosti: $x_1, \ldots, x_m, 0, 0, \ldots, 0$ očividno rešitev sistema enačb (II) in zato neka možna rešitev linearnega programiranja. Ker ima ta rešitev kvečjemu m pozitivnih komponent, je to bazična rešitev, in sicer tista, ki ustreza bazi $p_1, \ldots, p_m$.

Po tej metodi je prav lahko dejansko izračunati eno bazično možno rešitev linearnega programiranja, in sicer tisto, ki ustreza bazi, sestavljeni iz m-torice vektorskih enot prostora P_m. V tem primeru ima prej zapisani sistem m linearnih enačb tole zelo enostavno obliko:

$$x_1 = b_1, \ldots, \quad x_m = b_m$$

Ustrezna bazična možna rešitev linearnega programiranja pa je:

$$b_1, b_2, \ldots, b_m, 0, 0, \ldots, 0 \qquad \text{(IV)}$$

Za praktično računanje linearnega programiranja je bistveno važen prehod od ene baze na drugo. Denimo, da smo vzeli v prostoru P_m za bazo m-torico linearno neodvisnih vektorjev $p_1, \ldots, p_m$, ki ji ustreza določena bazična možna rešitev $x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0$! Iz te baze dobimo kako drugo bazo tako, da nadomestimo poljuben vektor, ki je v bazi, s kakim drugim vektorjem, ki ga v bazi še ni bilo. Tej novi bazi ustreza seveda tudi neka bazična možna rešitev.

Ta prehod od prvotne baze na novo bazo izvršimo v praksi z neko precej zamudno transformacijo matrice, ki jo sestavljajo koeficienti sistema enačb (II). Pri tem dobimo linearno izražavo vseh vektorjev $p_1, \ldots, p_n$ z vektorji nove baze, obenem pa dobimo tudi novi bazi ustrezno bazično možno rešitev linearnega programiranja. Ker tvorijo koordinatno izhodišče in konci bazičnih vektorjev m-dimenzionalni simpleks prostora P_m, imenujemo to metodo prehoda od prvotne baze na novo bazo metodo simpleksov. Podrobnosti te metode v naslednjem ne moremo obravnavati.

4. Maksimalne rešitve

Sistem vrednosti: $x_1, \ldots, x_n$ imenujemo maksimalno rešitev linearnega programiranja, če zadoščajo te vrednosti pogojnim enačbam (II) in če ima hkrati zanje linearna funkcija (III) maksimum. Če pa ima maksimalna rešitev kvečjemu m pozitivnih komponent, medtem ko so vse druge enake 0, tedaj jo imenujemo maksimalno bazično rešitev.

Za linearno programiranje velja naslednji temeljni izrek, ki ga ne bomo dokazovali: Če je linearna funkcija (III) omejena za vse možne rešitve linearnega programiranja, tedaj eksistira maksimalna rešitev, ki je bazična.

Upoštevajoč ta izrek, je dovolj, da se omejimo samo na bazične možne rešitve, med katerimi iščemo zahtevano maksimalno rešitev. Postopek, ki nas bo privedel do maksimalne rešitve linearnega programiranja, bo po dosedanjem očividno tale:

a) Za izhodišče vzamemo bazo, ki sestoji iz m-torice vektorskih enot prostora P_m in izračunamo ustrezno bazično možno rešitev (IV); za to rešitev ima linearna funkcija f (III) določeno vrednost, recimo f_1.

b) V prvotni bazi odpravimo določen vektor in vpeljemo namesto njega novega. Odstranjeni in vpeljani vektor izberemo tako, da dobimo novo bazično možno rešitev, pri kateri se vrednost linearne funkcije (III) poveča, recimo na f_2, pri čemer je $f_2 > f_1$. Pri metodi simpleksov se prav lahko ugotovi, kateri vektor moramo iz baze odpraviti in katerega moramo vanjo vpeljati, da se bo za novo bazično možno rešitev vrednost funkcije (III) dejansko povečala, in to še celo kolikor mogoče močno povečala.

c) Pri novi bazi zopet ponovimo ta postopek. Zaporedno ponavljanje postopka nas bo privedlo do vedno večjih vrednosti linearne funkcije (III).

Pri tem ponavljanju se nam morejo nuditi naslednje možnosti:

1. Po nekem končnem številu iteracij pridemo do zadnje baze, za katero ni več mogoče povečati linearne funkcije (III); za tej bazi ustrezno bazično možno rešitev ima torej ta funkcija maksimum. V tem primeru ima linearno programiranje maksimalno rešitev; ta je identična bazični možni rešitvi in ustreza zaključni bazi.

2. Pri iteriranju naraščajo vrednosti linearne funkcije (III) čez vse meje; v tem primeru linearno programiranje nima rešitve.

3. Iteriranje ne privede do nikakršnega zaključka v primeru, če je linearno programiranje protislovno.

5. Konveksni polieder

Oglejmo si še neko geometrično ponazoritev linearnega programiranja. Pogojne enačbe (II) lahko pišemo v matrični obliki:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \ldots . a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \ldots . a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}$$

ali kratko $Mx = p_o$, pri čemer sestoji matrica M iz koeficientov na levi strani pogojnih enačb (II). Matrico M imamo lahko za transformacijsko matrico linearne transformacije $Mx = p$, ki transformira točke oziroma vektorje (x) prostora X_n v točke oziroma vektorje (p) prostora P_m. Pri taki linearni transformaciji preidejo očividno vektorji enote prostora X_n v vektorje $p_1, \ldots, p_n$ prostora P_m. Pri taki razlagi predstavlja sistem pogojnih enačb (II) pravzaprav naslednjo nalogo: Določiti je treba vse tiste točke oziroma vektorje (x) prostora X_n, ki jih linearna transformacija s transformacijsko matrico M transformira v točko oziroma vektor p_o prostora P_m. Dokazati je mogoče, da tvori množica vseh takih točk (x) v prostoru X_n neki konveksni polieder K; dokazati pa je tudi mogoče, da tvorijo koordinate vsakega oglišča poliedra K po eno bazično možno rešitev linearnega programiranja. Linearno funkcijo (III) predstavlja v prostoru X_n neka družina vzporednih hiperravnin; za to linearno funkcijo je mogoče dokazati dejstvo, ki je v tridimenzionalnem prostoru X_3 pravzaprav očividno, da ima maksimum v enem izmed oglišč poliedra K. (Če ima maksimum v več ogliščih, tedaj ga ima tudi v vseh točkah konveksnega poliedra, ki ga definirajo vsa ta oglišča.)

Prej obravnavano metodo simpleksov si torej geometrično lahko ponazorimo takole: Prehod od ene baze na drugo oziroma prehod od ene bazične možne rešitve na drugo ponazoruje prehod od enega oglišča poliedra K v drugo oglišče, pri čemer pa moramo iskati drugo oglišče tako, da se zanj vrednost linearne funkcije (III) poveča. Če je konveksni polieder K omejen, tedaj nas iteriranje tega postopka prej ali slej privede do ekstremne rešitve linearnega programiranja; če pa polieder K ni omejen, tedaj pa linearno programiranje nima rešitve, ker narašča pri iteraciji postopka linearna funkcija (III) čez vse meje.

Literatura:

1. A. Charnes — W. W. Cooper — A. Henderson: An Introduction to Linear Programming, 4th printing, New York 1954.
2. K. Eisemann: Linear Programming, New York 1954.
3. Tjalling C. Koopmans: Activity Analysis of Production and Allocation (Proceedings of a Conference), New York 1951.
4. J. C. C. McKinsey: Introduction to the Theory of Games, New York 1952.

PREDAVANJE O VEGI NA DUNAJU

Avstrijski vojni arhiv na Dunaju je obvestil Društvo matematikov in fizikov LRS, da se je gospod vseučiliški profesor dr. Johann Radon, član avstrijske Akademije znanosti in predstojnik matematičnega inštituta na univerzi na Dunaju, ukvarjal z osebnostjo in z deli Vege ter da je imel o tem l. 1953 na univerzi predavanje, pri čemer je tudi pokazal nekatera Vegova dela.

Jože Povšič

OPERATORSKI RAČUN

RAJKO JAMNIK

Operatorski račun je znan kot važno pomožno sredstvo pri reševanju diferencialnih enačb, tako navadnih kakor parcialnih. Do njega je mogoče priti z več strani. Doslej mu je bila navadno za izhodišče Laplaceova transformacija

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

Operatorski račun s tem izhodiščem predpostavlja znanje funkcijske teorije, kar je precej huda zahteva. Po zadnji vojni pa je Poljak T. Mikusinski izdelal neposredno metodo, za katero je potrebno le znanje elementarne analize, zato nam je dostopna z manjšim trudom. Ideja za to metodo izhaja od Heavisida, vendar je šele sedaj dobila dobro urejeno in glede strogosti zadovoljivo obliko, tako da je postala zanimiva tudi s čisto matematičnega gledišča.

1. Konvolucija

Izhodišče neposrednega operatorskega računa je integral

$$c(t) = \int_0^t a(t-\tau)\, b(\tau)\, d\tau \tag{1}$$

ki ga imenujemo konvolucija funkcij $a(t)$ in $b(t)$. Ti dve funkciji naj bosta definirani in zvezni na intervalu $0 \leq t < \infty$. Množico funkcij s temi lastnostmi bomo imenovali razred C.

Uvedena operacija ima prav prijetne lastnosti. Ker je določeni integral zvezna funkcija zgornje meje, spada konvolucija tudi v razred C. Še pomembnejša pa so naslednja dejstva:

I. *Konvolucija je komutativna;* to pomeni, da je

$$\int_0^t a(t-\tau)\, b(\tau)\, d\tau = \int_0^t b(t-\tau)\, a(\tau)\, d\tau \tag{2}$$

O tem se prepričamo, če postavimo v integralu na levi strani $t - \tau = \sigma$.

II. *Konvolucija je asociativna.* Postavimo namreč

$$\int_0^t a(t-\tau)\, b(\tau)\, d\tau = g(t), \quad \int_0^t b(t-\tau)\, c(\tau)\, d\tau = h(t)$$

Potem je

$$\int_0^t g(t-\tau)\, c(\tau)\, d\tau = \int_0^t a(t-\tau)\, h(\tau)\, d\tau \tag{3}$$

Dokaz je podoben kot za (2).

III. *Konvolucija je distributivna,* saj je očitno, da je

$$\int_0^t a(t-\tau)\,[b(\tau) + c(\tau)]\, d\tau = \int_0^t a(t-\tau)\, b(\tau)\, d\tau + \int_0^t a(t-\tau)\, c(\tau)\, d\tau \tag{4}$$

Razen naštetih lastnosti velja za konvolucijo dveh funkcij iz razreda C še važni Titchmarshov teorem: Konvolucija dveh funkcij, od katerih ni nobena identično enaka nič, ni identično enaka nič.

Konvolucija ima torej enake lastnosti, kot jih najdemo pri produktu števil. Razlikuje se pa od njega po tem, da zanjo nimamo enote. To pomeni, da ni nobene funkcije $e(t)$ iz razreda C, ki bi zadoščala za vsak $a(t)$ enačbi

$$a(t) = \int_0^t a(t-\tau)\, e(\tau)\, d\tau \tag{5}$$

Za dokaz vzemimo, da je $a(t) = 1$! Potem bi moralo biti $1 = \int_0^t e(\tau)\, d\tau$ za vsak $t \geqq 0$. Za $t = 0$ pa to prav gotovo ne velja. Funkcije e z zahtevano lastnostjo torej ni.

Integralska simbolika je zelo nerodna, če jo primerjamo s simboliko, ki jo uporabljamo pri računanju s števili. Ker je konvolucija tako podobna produktu, bomo zanjo uporabljali isti znak kot za produkt. Pisali bomo torej $c = a \cdot b$ ali $c = ab$. Pri tem je seveda treba misliti na to, da sta a in b funkciji, ne pa števili. Pri konstantnih funkcijah bi pa vseeno prišlo do zamenjav. Produkt števil 3 in 4 je 12, konvolucija funkcij 3 in 4 pa $\int_0^t 3 \cdot 4\, d\tau = 12\, t$. Da se izognemo vsaki dvoumnosti, bomo pisali funkcije v zavitih oklepajih, števila pa brez njih. Tako n. pr. pomeni znak $\{f(t)\}$ funkcijo, $f(t)$ pa njeno vrednost v točki t, torej število. Če funkcija ni dana konkretno in zato ni nevarnosti za zamenjavo, oklepaje tudi izpuščamo.

Za konvolucijo dveh ali več enakih funkcij je ugodno uvesti enake znake, kot jih imamo za produkt dveh ali več števil. Torej $a \cdot a = a^2$, $a \cdot a \cdot a = a^3$ itd. Zavitih oklepajev tu nismo pisali, ker ni nevarnosti, da bi funkcijo a zamenjali s številom. Če sta m in n naravni števili, velja tudi za konvolucijo

$$a^m . a^n = a^{m+n}, \quad a^m . b^m = (ab)^m, \quad (a^m)^n = a^{mn}.$$

Te lastnosti potence slede iz njene definicije na enak način kot pri številih, saj je konvolucija komutativna in asociativna.

Pri številih sta glavni računski operaciji vsota in produkt. Pri našem računanju s funkcijami smo s konvolucijo definirali računsko operacijo, ki je analogna produktu. Vpeljimo zdaj še vsoto z enačbo

$$\{a(t)\} + \{b(t)\} = \{a(t) + b(t)\}$$

Vsoto dveh funkcij tvorimo tedaj tako, da za vsak t seštejemo ustrezne vrednosti obeh funkcij. Tako določena vsota je očitno funkcija iz razreda C in ima vse lastnosti številske vsote.

Osnova našega operatorskega računa sta torej formuli

$$\begin{aligned} \{a(t)\} + \{b(t)\} &= \{a(t) + b(t)\} \\ \{a(t)\} \cdot \{b(t)\} &= \left\{\int_0^t a(t-\tau)\, b(\tau)\, d\tau\right\} \end{aligned} \tag{6}$$

Oglejmo si zdaj še posebej, kaj pomeni konvolucija funkcije $\{f(t)\}$ s konstantno funkcijo $\{1\}$! Po definiciji sledi

$$\{1\}\{f(t)\} = \{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\} \tag{7}$$

Funkcija $\{1\}$ torej prireja funkciji $\{f(t)\}$ njen določeni integral. Zato jo imenujemo integralski operator, označujemo pa jo navadno s črko l.

Z zaporedno integracijo dobimo $l^2 = \{t/1!\}$, $l^3 = \{t^2/2!\}$, nato pa s popolno indukcijo

$$l^n = \{t^{n-1}/(n-1)!\} \tag{8}$$

Od tod sledi med drugim znana Cauchyjeva formula

$$\int_0^t dt \ldots \int_0^t f(t)\,dt = \int_0^t [(t-\tau)^{n-1}/(n-1)!]\, f(\tau)\,d\tau$$

Na levi je treba integrirati n-krat.

2. Operatorji

Uvedimo zdaj operacijo, ki je nasprotna konvoluciji! Nakažemo jo v obliki ulomka. Če sta a in b funkciji razreda C in če b ni identično nič, potem nam simbol a/b določa tako funkcijo c, če ta sploh eksistira, da je $a = cb$. Določiti pomen znaka a/b se torej pravi poiskati tako funkcijo c, da je a konvolucija funkcij b in c. Tako je n pr.

$$\{t^4\}/\{t^2\} = \{12\,t\}, \text{ ker je } \{12\,t\}\{t^2\} = \{\int_0^t 12\,(t-\tau)\,\tau^2\,d\tau\} = \{t^4\}.$$

Vpeljana operacija ima smisel le, če je funkcija c z njo enolično določena. Pa naj eksistirata dve različni funkciji c_1 in c_2 taki, da je $a = c_1 b$ in $a = c_2 b$! Potem bi bilo $(c_1 - c_2)\,b = 0$. Konvolucija dveh funkcij pa je po Titchmarshovem teoremu identično nič le tedaj, če je ena izmed funkcij identično nič. Ker je $b \neq 0$, sledi od tod, da je $c_1 = c_2$.

Pri naravnih številih nas uvedba deljenja, torej računske operacije, ki je nasprotna produktu, pripelje do novih števil. Kvocient dveh naravnih števil ni zmeraj naravno število. Če hočemo, da je deljenje neomejeno izvršljivo, moramo uvesti ulomke. Vidimo tudi, da imajo ulomki z imenovalcem 1 lastnosti naravnih števil. Zato jih kar izenačimo z njimi, tako da je množica naravnih števil delna množica množice ulomkov. Tudi v našem primeru se moramo vprašati, ali je uvedena operacija zmeraj izvršljiva v obsegu razreda C. V enačbi (5) smo dokazali, da ni take funkcije e, da bi za vsako funkcijo a veljala enačba $a = e \cdot a$. Ulomek a/a, ki bi imel pomen enote, torej ni funkcija iz razreda C.

Kakšen pomen ima tedaj v splošnem znak a/b? Iz enačbe $a = (a/b) \cdot b$ je razvidno, da a/b na kakršen koli način funkciji b prireja funkcijo a. Simbol a/b pomeni torej neko operacijo, ki jo je treba izvršiti s funkcijo b, da dobimo funkcijo a. Zato ga bomo imenovali operator.

Zgoraj smo na primeru videli, da je z izrazom a/b lahko definirana funkcija razreda C in sicer takrat, kadar je funkcija a konvolucija funkcije b in še neke druge funkcije. Razred C je torej delna množica množice operatorjev. Pojem operatorja pomeni razširitev pojma funkcije.

Za operatorje naj veljajo isti računski predpisi kot za številske ulomke:

I. Operatorja a/b in c/d sta enaka, v znakih $a/b = c/d$, če je $ad = bc$. Pri tem sta seveda ad in bc konvoluciji funkcij a, d oziroma b, c.

Naj pomeni operator a/b funkcijo u, torej $a = bu$. Če je $a/b = c/d$, pomeni tudi operator c/d funkcijo u. Kajti iz $ad = bc$ in $a = bu$ dobimo po Titchmarshovem izreku, da je $c = du$, tedaj $c/d = u$.

II. Vsota operatorjev a/b in c/d je operator $(ad + bc)/bd$. V posebnem primeru, ko sta imenovalca enaka, je $a/b + c/b = (ab + bc)/b^2 = (a + c)/b$, kar sledi iz gornje definicije enakosti dveh operatorjev.

III. Produkt operatorjev a/b in c/d je operator ac/bd. Produkt operatorja a/b in funkcije c pa dobimo takole: c zapišemo kot operator cx/x, pri čemer je x poljubna funkcija. Potem je $(a/b)\,c = a/b \cdot cx/x = acx/bx = ac/b$. Torej je $(a/b)\,c = ac/b$ kakor pri navadnih ulomkih.

IV. Kvocient operatorjev a/b in c/d je operator ad/bc.

Oglejmo si zdaj lastnosti operatorjev $\{\alpha\}/\{1\}$, kjer je $\{\alpha\}$ kakšna konstantna funkcija! Take operatorje bomo zaenkrat označili z znakom $[\alpha]$. Seštejmo operatorja $[\alpha]$ in $[\beta]$!

$$[\alpha] + [\beta] = \{\alpha\}/l + \{\beta\}/l = \{\alpha + \beta\}/l = [\alpha + \beta]$$

Zdaj ju pa še pomnožimo!

$$[\alpha] \cdot [\beta] = \{\alpha\}/l \cdot \{\beta\}/l = \{\alpha\} \cdot \{\beta\}/l^2 = \{\alpha\beta t\}/l^2 = l\,\{\alpha\beta\}/l^2 = [\alpha \cdot \beta]$$

Za operatorje te vrste torej veljata enačbi

$$[\alpha] + [\beta] = [\alpha + \beta] \quad [\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha \cdot \beta] \tag{9}$$

Tako je n. pr. $[2] + [3] = [5]$, $[2] \cdot [3] = [6]$. Ti operatorji imajo torej enake lastnosti kot števila. Zato jih bomo smatrali v bodoče za števila in jih pisali brez oglatih oklepajev. Treba jih je ločiti od konstantnih funkcij. Konvolucija konstantnih funkcij $\{2\}$ in $\{3\}$ je očitno $\{6\,t\}$.

Iz zgornjega je razvidno, da operatorski obseg ni le razširjenje obsega funkcij, ampak tudi razširjenje obsega števil in da povezuje obe med seboj tuji množici v večjo skupnost. Operacija $a/b \cdot c/d$ je za številske operatorje številski produkt; če sta pa oba faktorja funkciji iz razreda C, je operacija konvolucija. V nadaljnjem jo bomo imenovali produkt.

Pomnožimo številski operator a s funkcijo $\{f(t)\}$! Tako dobimo

$$a\,\{f(t)\} = \{\alpha\}\,\{f(t)\}/l = l \cdot \{\alpha f(t)\}/l = \{\alpha f(t)\}$$

Torej

$$\alpha \cdot \{f(t)\} = \{\alpha \cdot f(t)\} \tag{10}$$

Če je $\{f(t)\} = l$, ima enačba (10) obliko $\alpha \cdot l = \{\alpha\}$. Vsako konstantno funkcijo je tedaj mogoče pisati kot produkt števila in integralskega operatorja.

Če v formuli (10) postavimo $a = 1$, dobimo $1.\{f(t)\} = \{f(t)\}$. To pa ne velja le za funkcijo $\{f(t)\}$, ampak tudi za poljuben operator c. Naj bo $1 = l/l$, $c = a/b$! Potem je $1 \cdot c = l\,a/l\,b = a/b = c$. Torej je res za vsak operator c

$$1 \cdot c = c \tag{11}$$

Število 1 je tedaj enota v operatorskem obsegu.
Za število 0 pa veljata enačbi

$$\begin{aligned} 0 \cdot c &= 0 \\ c + 0 &= c \end{aligned} \tag{12}$$

Za dokaz pišimo $0 = \{0\}/l$ in $c = a/b$! Zdaj je

$$0 \cdot c = \{0\}\, a/lb = \{0\}\, b/lb = \{0\}/l = 0$$

$$c + 0 = [a/b + \{0\}]/l = [al + \{0\}b]/bl = (al + 0)/b = a/b = c$$

Formuli (12) pa ne veljata le za število 0, ampak tudi za funkcijo $\{0\}$. Oba elementa sta si torej med seboj identična in predstavljata v operatorskem obsegu izjemo. Razen tega ni nobenega drugega elementa, ki bi spadal hkrati v razred C in v obseg števil.

3. Diferencialni operator

Operator $1/h$ imenujemo inverzni operator operatorja h. Če je h funkcija, potem $1/h$ ne more biti funkcija. Njuna konvolucija bi bila tedaj za vsak $t \geqq 0$ enaka 1. Videli smo pa, da za $t = 0$ to gotovo ni res.

Posebno važno vlogo v operatorskem računu in njegovih uporabah ima integralskemu operatorju inverzni operator. Označimo ga s črko s. Tako je $s = 1/l$ ali $sl = ls = 1$. Ker je l funkcija, operator s po zgornjem ne more biti funkcija.

Kakšen pomen ima operator s? Naj ima funkcija $a = \{a(t)\}$ na intervalu $0 \leq t < \infty$ zvezen odvod $a' = \{a'(t)\}$! Potem je

$$\{a(t)\} = \{\int_0^t a'(\tau)\, d\tau\} + \{a(0)\} = l\,\{a'(t)\} + l\,a(0)$$

Pomnožimo zgornjo enačbo na obeh straneh s s! Tako dobimo važno zvezo

$$s \cdot a = a' + a(0) \tag{13}$$

Posebno preprosta je enačba (13), če je še $a(0) = 0$. Takrat dobimo $s \cdot a = a'$. V tem primeru je produkt funkcije z operatorjem s ravno njen odvod. Zato se operator s imenuje diferencialni operator.

Produkt $s \cdot a$ ima svoj smisel tudi tedaj, če a ni odvedljiva funkcija iz razreda C, ali celo, če je a operator. Če smatramo množenje s s za odvajanje v širšem smislu, moremo reči, da je odvedljiva vsak funkcija iz razreda C in celo vsaka integrabilna funkcija.

Na prvi pogled bi se zdelo ugodneje, ko bi produkt $s \cdot a$ pomenil ravno odvod v navadnem smislu. Vendar ima tak, kot je, pomembno prednost pred

navadnim odvajanjem. Množenje z s in množenje z l sta komutativni operaciji, navadno odvajanje in določeno integriranje pa ne. Če n. pr. funkcijo $\{e^t\}$ najprej odvajamo, nato pa integriramo odvod od 0 do t, dobimo funkcijo $\{e^t - 1\}$; če pa jo najprej integriramo in integral odvajamo, dobimo spet $\{e^t\}$.

Naj ima funkcija a še zvezen drugi odvod na intervalu $0 \leq t < \infty$! Potem dobimo, če v enačbi (13) pomnožimo obe strani z s,

$$s^2\, a = s \cdot a' + s \cdot a\,(0) = a'' + a'\,(0) + s \cdot a\,(0)$$

Z nadaljnjim množenjem in s popolno indukcijo ugotovimo, da velja za funkcijo a z zveznim n-tim odvodom

$$s^n\, a = a^{(n)} + a^{(n-1)}\,(0) + s\, a^{(n-2)}\,(0) + \ldots + s^{n-1}\, a\,(0)$$

Za uporabo je ugodneje, če enačbo razrešimo na $a^{(n)}$:

$$a^{(n)} = s^n\, a - s^{n-1}\, a\,(0) - s^{n-2}\, a'\,(0) - \ldots - a^{(n-1)}\,(0) \tag{14}$$

n-ti odvod funkcije je torej polinom n-te stopnje diferencialnega operatorja.

Važno vlogo v uporabah imajo operatorji z obliko

$$a_n\, s^n + a_{n-1}\, s^{n-1} + \ldots + a_1\, s + a_0$$

kjer so koeficienti poljubna števila. S takimi polinomi računamo kot z navadnimi. Dva polinoma te vrste sta enaka, če imata enake istoležne koeficiente. O tem se perpričamo, če ju oba pomnožimo z l^{n+1}. Na ta način postaneta oba operatorska polinoma navadna, zanju pa je gornji stavek znan.

Ker je zaradi enačbe (8) $\{t^n\} = l^{n+1} \cdot n!$ in $l = 1/s$, je tudi $\{t^n\} = n!/s^{n+1}$. Vsako potenco s celim pozitivnim eksponentom je tedaj mogoče izraziti z diferencialnim operatorjem. Zanima nas sedaj, ali je z njim mogoče izraziti še kake druge elementarne funkcije. Če na eksponentni funkciji uporabimo enačbo (13), dobimo $s\,\{e^{\alpha t}\} = 1 + \alpha\,\{e^{\alpha t}\}$ in iz tega

$$\{e^{\alpha t}\} = 1/(s - \alpha) \tag{15}$$

Zveza med eksponentno funkcijo in operatorjem s je torej kaj preprosta. Tvorimo zdaj zaporedne potence ulomka v enačbi (15)! Tako dobimo

$$1/(s-\alpha)^2 = \{e^{\alpha t}\}^2 = \{\int_0^t e^{\alpha\,(t-\tau)}\, e^{\alpha \tau}\, d\tau\} = \{e^{\alpha t} \int_0^t d\tau\} = \{t \cdot e^{\alpha t}/1!\}$$

in splošno

$$1/(s-\alpha)^n = \{t^{n-1}\, e^{\alpha t}/(n-1)!\} \tag{16}$$

Tudi trigonometrične funkcije je mogoče izraziti z operatorjem s. Zaradi Eulerjevih formul

$$\sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/2\,i \qquad \cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2$$

veljata enačbi

$$\{e^{\alpha t} \sin \beta t\} = \{e^{(\alpha + \beta\, i)\, t} - e^{(\alpha - \beta\, i)\, t}\}/2i$$
$$\{e^{\alpha t} \cos \beta t\} = \{e^{(\alpha + \beta\, i)\, t} + e^{(\alpha - \beta\, i)\, t}\}/2$$

Če zdaj upoštevamo enačbo (15), dobimo formuli

$$\{e^{\alpha t} \sin \beta t\}/\beta = 1/[(s-\alpha)^2 + \beta^2]$$
$$\{e^{\alpha t} \cos \beta t\} = (s-\alpha)/[(s-\alpha)^2 + \beta^2] \tag{17}$$

Ti dve formuli sta posebno preposti, če je $\alpha = 0$. Takrat je

$$1/(s^2 + \beta^2) = \{\sin \beta t\}/\beta \quad \text{in} \quad s/(s^2 + \beta^2) = \{\cos \beta t\} \tag{18}$$

Podobno kot pri eksponentni funkciji izračunamo z zaporednimi konvolucijami zaporedne potence izrazov v formulah (17). Splošna formula pa je tu precej zapletena.

Tako vidimo, da se izražajo eksponentna in trigonometrične funkcije z diferencialnim operatorjem racionalno. Velja pa tudi narobe. Vsak racionalni izraz

$$(\gamma_m s^m + \gamma_{m-1} s^{m-1} + \ldots + \gamma_1 s + \gamma_0)/(\delta_n s^n + \delta_{n-1} s^{n-1} + \ldots + \delta_1 s + \delta_0)$$

je mogoče razstaviti na parcialne ulomke oblik

$$(s-\alpha)^{-p}, \quad [(s-\alpha)^2 + \beta^2]^{-p}, \quad s\,[(s-\alpha)^2 + \beta^2]^{-p}$$

kjer sta α in β realni števili, p pa naravno število. Prva dva tipa nas takoj privedeta na eksponentno in trigonometrične funkcije, pri zadnjem pa je treba še upoštevati enačbo (13), pa pridemo tudi tu do omenjenih funkcij. Najprej namreč z zaporednimi konvolucijami izračunamo izraz $[(s-\alpha)^2 + \beta^2]^{-p}$, ki bo sestavljen v bistvu iz trigonometričnih funkcij, nato pa ga je treba pomnožiti z s, torej izračunati njegov odvod in mu prišteti vrednost v začetni točki.

4. Navadna diferencialna enačba s konstantnimi koeficienti

Operatorski račun je zelo uporaben pri reševanju linearnih diferencialnih enačb. Čeprav se izkaže posebno koristen pri parcialnih enačbah, se izplača tudi pri nehomogenih navadnih diferencialnih enačbah. Poleg tega ni za operatorsko reševanje navadnih diferencialnih enačb potrebna posebna teorija, ker jih zaradi (14) takoj prevedemo na algebrajske.

Oglejmo si zdaj diferencialno enačbo

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_1 x' + a_0 x = \{f(t)\} \tag{19}$$

kjer so koeficienti konstante, f pa poljubna zvezna funkcija za $t \geq 0$! Iščemo rešitev $x = \{x(t)\}$, ki zadošča začetnim pogojem

$$x(0) = \gamma_0, \; x'(0) = \gamma_1, \; \ldots, \; x^{(n-1)}(0) = \gamma_{n-1} \tag{20}$$

Upoštevajmo zdaj, da je

$$x^{(n)} = s^n x - s^{n-1} x(0) - \ldots - x^{(n-1)}(0)$$

Enačba (19) dobi potem obliko

$$a_n s^n x + a_{n-1} s^{n-1} x + \ldots + a_1 sx + a_0 x = \beta_{n-1} s^{n-1} + \beta_{n-2} s^{n-2} + \ldots + \beta_1 s + \beta_0 + f,$$

kjer so koeficienti β_ν določeni z enačbami

$$\beta_\nu = a_{\nu+1}\ \gamma_0 + a_{\nu+2}\ \gamma_1 + \ldots + a_{n-\nu-1} \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1)$$

Od tod pa takoj sledi

$$x = \frac{\beta_{n-1} s^{n-1} + \ldots + \beta_0}{a_n s^n + \ldots + a_0} + \frac{f}{a_n s^n + \ldots + a_0} \tag{21}$$

Do rešitve v navadni obliki pridemo iz (21) tako, da funkcijo f izrazimo z operatorjem s, nato oba ulomka razstavimo na parcialne ulomke in te končno izrazimo s potencami, eksponentno in trigonometričnimi funkcijami spremenljivke t. Funkcija f je lahko tudi taka, da je ni mogoče izraziti z diferencialnim operatorjem. V takem primeru razstavimo pri drugem sumandu v (21) samo ulomek $[a_n s^n + \ldots + a_0]^{-1}$. Parcialne ulomke pa nato izrazimo s funkcijami spremenljivke t, tako da dobimo neko funkcijo $\{S(t)\}$. Nazadnje moramo še izračunati konvolucijo funkcij S in f.

Primer: Rešitev enačbe

$$x'' + 4x = \sin t$$

naj zadošča začetnim pogojem $x(0) = x'(0) = 0$! Ker je $\sin t = (s^2 + 1)^{-1}$ in pri naših začetnih pogojih $x'' = s^2 x$, ima enačba operatorsko obliko

$$s^2 x + 4x = (s^2 + 1)^{-1}$$

Njena operatorska rešitev, razstavljena na parcialne ulomke, je

$$x = [3(s^2 + 1)]^{-1} - [3(s^2 + 4)]^{-1}$$

klasična pa

$$x = (\sin t)/3 - (\sin 2t)/6$$

Na podoben način rešimo tudi sistem navadnih linearnih diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti

$$\begin{aligned} x_1' + a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n &= f_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ x_n' + a_{n1} x_1 + a_{n2} + \ldots + a_{nn} x_n &= f_n \end{aligned} \tag{22}$$

Ker je $x' = sx - x(0)$, ima sistem (22) operatorsko obliko

$$\begin{aligned} (a_{11} + s) x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n &= x_1(0) + f_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots + (a_{nn} + s) x_n &= x_n(0) + f_n \end{aligned}$$

To pa je sistem n linearnih enačb za n neznank. Rešimo ga z determinantami ali s kakšno drugo algebrajsko metodo. Do navadne rešitve pa pridemo na enak način kot pri eni enačbi. Z istim postopkom se lahko lotimo tudi sistema, v katerem nastopajo višji odvodi, le da bo tedaj algebrajski sistem nekoliko bolj kompliciran.

Za primer rešimo zdaj sistem

$$x' + y = 0$$

$$2x + 2y = y'$$

pri začetnih pogojih $x(0) = y(0) = 1$! V operatorski obliki se sistem glasi

$$sx + y = 1$$

$$2x - (s - 2)y = -1$$

Iz njega dobimo operatorsko rešitev

$$x = (s - 1)/[(s - 1)^2 + 1] - 2/[(s - 1)^2 + 1]$$

$$y = (s - 1)/[(s - 1)^2 + 1] - 3/[(s - 1)^2 + 1]$$

in navadno

$$x = e^t(\cos t - 2 \sin t) \qquad y = e^t(\cos t + 3 \sin t)$$

Doslej smo z operatorsko metodo iskali linearnim diferencialnim enačbam in sistemom le partikularne rešitve, ki zadoščajo predpisanim začetnim pogojem. Nič drugačen pa ni postopek, če iščemo splošno rešitev. Naj v enačbah (20) γ_ν ne bodo dane vrednosti, ampak poljubne konstante! Potem so poljubne konstante tudi β_ν v rešitvi (21). Splošna rešitev je torej v operatorski obliki odvisna od n konstant. Toliko konstant pa nastopa tudi, če dobljeno rešitev (21) razstavimo na parcialne ulomke. Splošno rešitev je torej še laže dobiti kot partikularno. Postopek je takle: V rešitvi (21) prvi ulomek razstavimo na parcialne ulomke, a koeficientov ne določimo, ker so poljubni; v drugem ulomku pa nimamo nobene poljubne konstante, tako da so tudi koeficienti parcialnih ulomkov določeni in jih je treba izračunati. Splošna rešitev nehomogene enačbe je torej sestavljena iz splošne rešitve homogene enačbe in partikularne rešitve nehomogene. Pri sistemih pa na ta način ne uspemo. Dobili bi namreč pri parcialnih ulomkih še enkrat toliko nedoločenih koeficientov, kot je v resnici razpoložljivih konstant. Zato moramo tu začetne vrednosti predpisati, izraziti z njimi koeficiente v parcialnih ulomkih in jih šele v rešitvi smatrati za poljubne konstante.

5. Nezvezne funkcije

V operatorski račun lahko vpeljemo tudi nekatere nezvezne funkcije. Za uporabo navadno zadošča, če se omejimo na funkcije, definirane na intervalu $0 \leq t < \infty$, ki ustrezajo naslednjim pogojem:

I. da imajo v vsakem končnem intervalu kvečjemu končno mnogo točk nezveznosti;

II. da je zanje integral $\int_0^t |f(\tau)|\,d\tau$ končen za vsak $t > 0$.

Take lastnosti imata n. pr. karakteristika logaritma, ki je stopničasta funkcija logaritmanda, in $\{t^{-1/2}\}$, ki je nezvezna v točki $t = 0$ in v njeni okolici neomejena.

Množico funkcij, ki zadoščajo zahtevam I in II, imenujemo razred K. Razred C je očitno delna množica razreda K.

Naj bo zdaj $f = \{f(t)\}$ funkcija razreda K! Ker je določeni integral zvezna funkcija zgornje meje, je konvolucija funkcije f z integralskim operatorjem

$$a = lf = \{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\}$$

funkcija razreda C. Funkcijo f torej lahko zapišemo v obliki $f = a/l$. Funkcije iz razreda K so, kot vidimo, elementi operatorskega obsega. Zato veljajo zanje računski predpisi, ki smo jih uvedli za operatorje. Izkaže se celo, da so ti predpisi identični s tistimi, ki veljajo za funkcije razreda C. Vsota in konvolucija funkcij razreda K se tvorita torej po enačbah (6) in sta spet funkciji razreda K. Prav tako velja za funkcije razreda C, katerih odvod spada v razred K, da je $sa = a' + a(0)$. Ne velja pa zadnja enačba za vsako funkcijo razreda K. Naj bo n. pr. $a = 0$ na intervalu $0 \leq t < 1$ in $a = 1$ na intervalu $1 \leq t < \infty$! Odvod te funkcije je nič za vsak t. Gornja enačba bi bila potem $sa = 0$, iz česar bi sledilo, da je $a = 0$ za vsak t, kar pa ni res.

Oglejmo si zdaj še dve funkciji razreda K, ki sta v tesni zvezi z integralskim in diferencialnim operatorjem! S formulama (8) in (16) smo uvedli potence l^n in $(s-a)^{-n}$ za naravne n. To definicijo bomo zdaj razširili na poljuben eksponent. Na negativne cele eksponente razširimo izraz l^n z dogovorom $l^{-n} = 1/l^n$. Če pa je eksponent ulomek, moramo v formuli $l^n = \{t^{n-1}/(n-1)!\}$ postaviti v imenovalec tako funkcijo eksponenta, da bo imela za cele pozitivne vrednosti argumenta pomen fakultete. Tej zahtevi zadošča Eulerjeva funkcija

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty t^{\lambda-1} e^{-t}\,dt$$

z znatnimi lastnostmi. Zato definiramo

$$l^\lambda = \{t^{\lambda-1}/\Gamma(\lambda)\} \quad \lambda > 0 \tag{23}$$

Naša definicija ima smisel le, če ima uvedeni izraz lastnosti potence. Res se je mogoče prepričati, da velja zanj adicijski teorem $l^\lambda l^\mu = l^{\lambda+\mu}$. Na negativne λ razširimo definicijo kot na negativne cele eksponente.

Popolnoma enako kot z integralskim operatorjem delamo tudi z operatorjem $s - a$. Obe potenci sta tako definirani za vsak realen eksponent.

V definiciji (23) imamo opraviti s predpisom, ki vsakemu λ prireja neki operator. Izraz l je torej operatorska funkcija. Poročati o teh in o njihovi uporabi pri reševanju parcialnih enačb pa ne sodi več v okvir tega članka.

Literatura: Mikusinski, Operatornoe isčislenie, Moskva 1956.

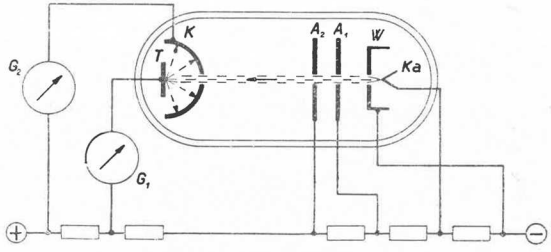
SEKUNDARNA EMISIJA ELEKTRONOV

SMILJAN JERIČ

1. Opazovanje sekundarne emisije

Znano je, da lahko spravimo elektrone iz kovin ali drugih snovi na več načinov: s segrevanjem, z osvetljevanjem, pa tudi z bombardiranjem z elektroni ali drugimi delci. Te tri načine ločimo z imeni *termična emisija, fotoemisija* (*fotoefekt*) in *sekundarna emisija*. Tu bomo razpravljali le o sekundarni emisiji, ki jo povzročijo elektroni.

Sekundarno emisijo opazujemo tako, da v evakuirani posodi usmerimo z elektronsko brizgalko (kakršno ima n. pr. katodna cev) curek elektronov na *tarčo*, to je na ploščo iz snovi, pri kateri hočemo opazovati sekundarno emisijo. Pod vplivom vpadajočih (*primarnih*) elektronov oddaja snov *sekundarne* elektrone, ki jih polovimo s posebno elektrodo, tako imenovanim *kolektorjem*. Kolektor ima običajno obliko krogle ali polkrogle, ki obdaja tarčo, in ima le ozko odprtino za vstopajoči curek; le-ta pa mora biti tako ozek, da ne zadeva v robove odprtine. Napetost kolektorja je za nekaj deset voltov višja od napetosti tarče. Napetost med katodo in tarčo (U_p) določi energijo primarnih elektronov $e_0 U_p$ (pri čemer je e_0 naboj elektrona). Z galvanometrom G_1 (glej sliko!)



Sl. 1. Shema priprave za merjenje sekundarne emisije. Ka = oksidna katoda, W = Wehneltov valj, A_1, A_2 = anodi, T = tarča, K = kolektor, G_1, G_2 = galvanometra.

merimo razliko med primarnim in sekundarnim tokom ($I_p - I_s$), z galvanometrom G_2 pa sam I_s. Pri meritvah moramo paziti, da so vsi deli dobro razplinjeni, posebno pa tarča. Poleg tega moramo paziti, da s katode ne izparevajo snovi, ki bi se naparile na tarčo (tako n. pr. oksidna katoda lahko oddaja barij). Da to preprečimo, moramo držati katodo na razmeroma nizki tempreraturi ali pa je treba s posebnimi elektrodami (ali magnetnim poljem) toliko upogniti elektronski curek, da nevtralne molekule, ki letijo naravnost, ne morejo do tarče.

V nadaljnjem si bomo najprej ogledali splošne zakone sekundarne emisije, ki bodo pojasnjeni predvsem s podatki za kovine. Posebnosti, ki jih opazimo pri izolatorjih in polvodnikih, pa bodo obravnavane ločeno.

2. Koeficient sekundarne emisije

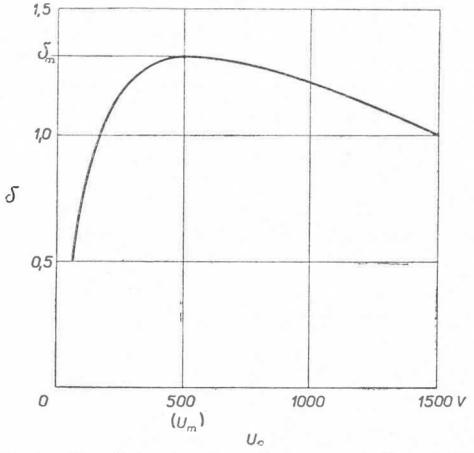
Koeficient sekundarne emisije (δ), to je kvocient toka sekundarnih in primarnih elektronov ($\delta = I_s/I_p$), pove, koliko sekundarnih elektronov sprosti v povprečju en primarni elektron. Rekli smo »v povprečju«, kajti posamezni pri-

marni elektron lahko izbije tudi več ali manj kot δ sekundarnih elektronov. Za število sekundarnih elektronov na posamezni primarni elektron velja približno *Poissonova porazdelitev*; verjetnost, da dobimo ravno N sekundarnih elektronov, je enaka $(\delta^N/N!)\, e^{-\delta}$. Statistična narava sekundarne emisije se kaže v neenakomernosti sekundarnega toka, ki jo slišimo po ojačenju kot šum.

Tabela 1. *Sekundarna emisija kovin*

Kovina:	δ_m	U_m
K	0,7	200 V
Cs	0,72	400
Be	0,6	200
Mg	0,95	300
Al	1,0	300
Ti	0,9	280
Mo	1,35	375
Ni	1,3	550
W	1,4	600
Pt	1,6	800

Pri vsaki snovi je δ odvisen od energije primarnih elektronov ($e_0\, U_p$). Funkcija $\delta\,(U_p)$ ima maksimum δ_m pri neki napetosti U_m. Pri kovinah ima δ_m vrednosti od 0,5 do 1,6, U_m pa znaša nekaj sto voltov (glej tabelo 1). Do U_m krivulja $\delta\,(U_p)$ precej strmo narašča, nato pa položno pada (slika 2).



Sl. 2. Koeficient sekundarne emisije niklja.

Sekundarno emisijo kovin, zlasti pa značilnosti funkcije $\delta\,(U_p)$ si lahko razlagamo po Bruiningovi teoriji. Vedeti moramo najprej, kako se primarni elektroni ustavljajo pri prodiranju v snov. Zaviranje je močnejše pri manjši energiji, pri čemer približno velja *Whidingtonov zakon**:

$$U_x^2 = U_p^2 - ax. \qquad (1)$$

* Boljše, toda bolj kompliciranе formule podajata H. A. Bethe in J. Ashkin v Segréjevi Experimental Nuclear Physics, I (Wiley, New York, 1953).

Pri tem je $e_0 U_x$ energija primarnih elektronov v globini x, a pa je koeficient, ki je značilen za snov. Whidingtonov zakon je bil približno preverjen v območju od 25 do 50 kilovoltov s spuščanjem elektronov skozi razne kovinske folije in z merjenjem vstopne in izstopne energije. Koeficient a je približno sorazmeren gostoti kovine, tako da ima kvocient a/ϱ večinoma vrednost okrog $4 \cdot 10^{-11}$ $V^2\, g^{-1}\, cm^2$.

Energija primarnih elektronov se v snovi troši za ugrevanje, za sevanje in za vzbujanje elektronov. Vzbujeni elektroni, ki imajo dovolj energije, da izstopijo, so potem sekundarni elektroni. Povprečno število vzbujenih elektronov (n) na enoto poti in na posamezni primarni elektron je sorazmerno izgubi energije primarnega elektrona na tej poti, $n(x) = -KdU_x/dx$, torej z upoštevanjem enačbe (1):

$$n(x) = \tfrac{1}{2} Ka/\sqrt{U_p^2 - ax} \qquad (2)$$

pri čemer je K neka konstanta.

Iz enačbe (1) vidimo, da se primarni elektroni ustavijo v globini $x_m = U_p^2/a$. Ko se bližajo tej globini, $n(x)$ raste in je največji, tik preden se ustavijo. Vidimo, da se področje intenzivnega vzbujanja z rastočim U_p pomika vedno globlje.

Nastali sekundarni elektroni se morajo prebiti do površine. Tok sekundarnih elektronov, ki so energijsko mešani, pojema po grobem približku eksponencialno. Če se v globini x vzbudi N elektronov, jih izstopi približno $Ne^{-\alpha x}$, kjer je α »absorpcijski koeficient sekundarnih elektronov«.

S tem si že lahko razložimo obliko funkcije $\delta(U_p)$. V začetku δ narašča, ker je na razpolago vedno več energije in nastajajo sekundarni elektroni tik ob površini, tako da absorpcija sekundarnih elektronov še ne moti. Z naraščajočo energijo primarnih elektronov se področje intenzivnega vzbujanja pomika vedno globlje; zaradi vedno večje absorpcije sekundarnih elektronov se δ spet manjša. V splošnem je δ tem večji, čim večji je a in čim manjši je α. S tem se ujema dejstvo, da imajo lahke kovine manjši δ kot težke.

To razlago dopolnimo še z računi! Iz navedenih predpostavk zlahka izračunamo sekundarno emisijski koeficient za pravokotno vpadajoče primarne elektrone:

$$\delta = \int_0^{x_m} [\tfrac{1}{2} Ka/\sqrt{U_p^2 - ax}]\, e^{-\alpha x}\, dx = K\sqrt{a/\alpha} \cdot \exp(-r^2) \int_0^r \exp(y^2)\, dy$$

pri čemer smo substituirali $y^2 = (\alpha/a)(U_p^2 - ax)$ ter $r^2 = ax_m = (\alpha/a) U_p^2$. Vrednost U_m, pri kateri doseže δ svoj maksimum δ_m, izračunamo iz pogoja $d\delta/dU_p = 0$. Tako dobimo $r_m = 0{,}92$, čemur ustreza

$$U_m = 0{,}92\ \sqrt{a/\alpha} \quad \text{ter} \quad \delta_m = 0{,}3\, K\, \sqrt{a/\alpha} \qquad (3)$$

Rezultati prikazane površne teorije so seveda le približno veljavni; izračunane vrednosti se ujemajo z izmerjenimi le glede reda velikosti. Osnovna slabost te teorije je v tem, da nič ne upošteva, kako se prenaša energija primarnih elektronov na sekundarne.

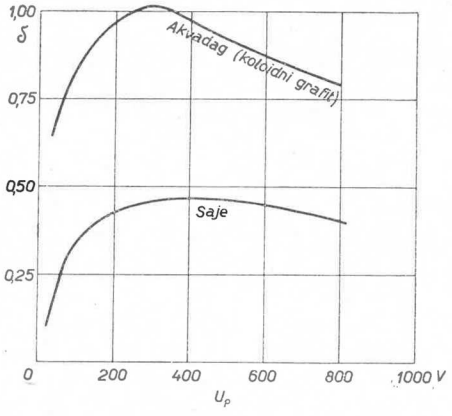
Koeficient δ je precej odvisen od vpadnega kota Θ primarnih elektronov: ta narašča, če narašča vpadni kot. To si lahko razlagamo na ta način, da je področje intenzivnega vzbujanja sekundarnih elektronov pri poševnem vpa-

danju bliže površini in se torej absorbira manj sekundarnih elektronov. Če računamo kar, kot da izvirajo vsi sekundarni elektroni iz globine x_m, dobimo takoj, da je

$$\delta_\Theta = \delta_0 \exp [\alpha x_m (1 - \cos \Theta)] \qquad (4)$$

kjer pomenita δ_Θ in δ_0 sekundarno emisijska koeficienta pri vpadnem kotu Θ oz. 0 (običajno navedeni δ velja za kot 0). Enačba kaže, da je kotna odvisnost tem bolj izrazita, čim večji je x_m. Velik x_m imajo kovine z majhnim α, torej kovine z majhno gostoto; to so alkalne in zemljoalkalne kovine.

Enačba (4) omogoča, da na osnovi dveh meritev δ pri različnem kotu Θ, pa pri isti napetosti, določimo produkt αx_m. Če poznamo α, lahko izračunamo x_m. Za Ni dobimo pri 500 V, da je $x_m = 30$ Å.



Sl. 3. Gladka plast koloidnega grafita ima večji δ kot saje.

Globino izvora sekundarnih elektronov (x_m) lahko merimo tudi s tenkimi plastmi, ki jih naparimo na kovinsko podlago. Vrednosti δ obeh kovin se morata znatno razlikovati. Če je plast zelo tenka, dobimo δ, ki ustreza podlagi, ker primarni elektroni skoraj neovirano udarijo skozi plast. Če je plast debela, dobimo δ, ki je značilen za kovino plasti. Debelina prehodnega področja pa je približno enaka globini x_m.

Znižanje izstopnega dela nima tako velikega vpliva na sekundarno emisijo kot na termično.* Kajti sekundarni elektroni imajo energijo nekaj elektronskih voltov, termični pa le nekaj desetink elektronskega volta (glej dalje). Primer: Če adsorbiramo natrij na volframu, se zniža izstopno delo na polovico; s tem se termična emisija poveča približno 10^6-krat, sekundarna emisija pa le za 60 %. Kot drug primer lahko navedemo, da imajo alkalne in zemljoalkalne kovine kljub manjšemu izstopnemu delu (1,5 do 1 eV) manjši δ_m kot težke kovine (pri katerih meri izstopno delo 4 do 6 eV); to je zato, ker imajo težke kovine večji α.

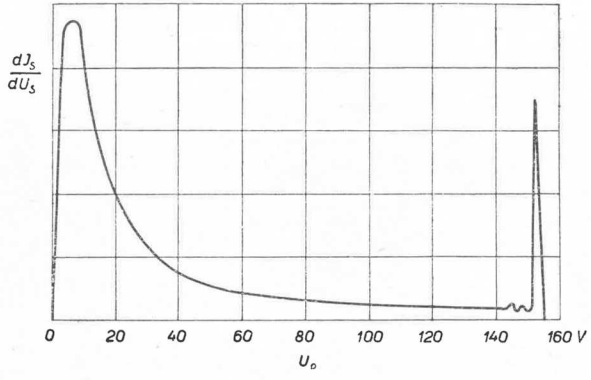
Sekundarna emisija je zelo odvisna od strukture površine. Tako je ta emisija mikrokristaliničnih, črnih kovinskih površin znatno nižja kot gladkih (slika 3).

* Glej Obz. mat. fiz. 4 (1955/56), str. 62!

Tudi adsorbirani plini vplivajo na sekundarno emisijo, in sicer zato, ker znižajo ali zvišajo izstopno delo. Ti plini tudi sami lahko oddajajo sekundarne elektrone. Prav zaradi plinov zahteva meritev sekundarne emisije zelo skrbno grajene priprave in visoko razvito vakuumsko tehniko, če hočemo dobiti zanesljive rezultate.

3. Energijska in smerna porazdelitev sekundarnih elektronov

Energijska porazdelitev sekundarnih elektronov je zelo važna za razumevanje sekundarne emisije. Po energiji razdelimo sekundarne elektrone v tri skupine: 1. v počasne sekundarne elektrone, 2. v sekundarne elektrone, ki imajo enako veliko hitrost kot primarni in 3. v sekundarne elektrone z vmesno hitrostjo.



Sl. 4. Energijska porazdelitev sekundarnih elektronov in srebra.

Porazdelitev energije počasnih sekundarnih elektronov je neodvisna od energije primarnih elektronov in je podobna Maxwellovi (sl. 4). Porazdelitvena funkcija ima maksimum pri 2 do 6 eV za kovine in nekaj pod 1 eV za izolatorje. Polvodnik germanij ima maksimum pri 1 do 2 eV. Sekundarni elektroni s polvodniških fotokatod pa imajo maksimum med 1,4 in 2,2 eV.

Tisti sekundarni elektroni, ki imajo enako veliko hitrost kot primarni, so pravzaprav le elastično odbiti primarni elektroni. Poizkusi kažejo, da pride do odboja primarnih elektronov že v prvih dveh atomskih plasteh. — Pri nekaj voltov nižji energiji pa vidimo na porazdelitveni krivulji nekaj neznatnih maksimumov in minimumov. Lega posameznih maksimumov je odvisna samo od snovi. Zdi se, da nastane taka fina struktura zaradi kvantizirane izgube energije primarnih elektronov. Na osnovi te ideje sta Rudberg in Slater izdelala kvantno mehansko teorijo sekundarne emisije.

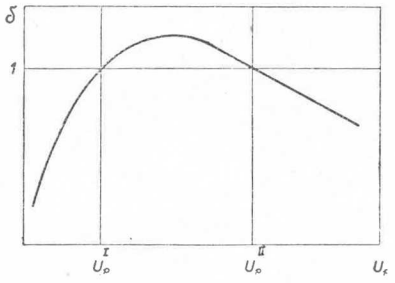
Če imajo primarni elektroni energijo samo nekaj elektronskih voltov, so skoraj vsi sekundarni elektroni elastično reflektirani primarni elektroni. Pri 150 eV primarne energije je 20—35 % sekundarnih elektronov takih, ki imajo energijo nad 50 eV. Pri velikih energijah zopet narašča del elastično reflektiranih elektronov in je na primer za zlato pri 11 kV 48 % od vseh sekundarnih elektronov elastično odbitih primarnih elektronov.

Kotna porazdelitev sekundarno emisijskega toka počasnih elektronov sledi skoraj natančno (podobno kot pri fotoelektronih) kosinusovemu (Lambertovemu) zakonu, neodvisno od vpadnega kota primarnih elektronov. Še dokaj dobro sledijo kosinusovemu zakonu tudi sekundarni elektroni s srednjimi energijami. To lahko razumemo, če upoštevamo, da je vzrok kosinusove kotne porazdelitve večja absorpcija, ki jo doživijo na daljši poti oni elektroni, ki zletijo iz snovi pod večjim kotom.

Popolnoma drugače pa se obnašajo elastično reflektirani primarni elektroni. Pri teh dobimo zaradi interference uklonska maksima, kakor sta to odkrila Davisson in Germer. Smeri teh maksimov so določene z znano Braggovo formulo.

4. Sekundarna emisija izolatorjev

Izolatorji imajo precej podobno krivuljo $\delta(U_p)$ kot kovine. Vendar sta δ_m in U_m v splošnem precej večja zaradi majhnega α. V izolatorjih namreč pri sobni temperaturi skoraj ni prostih elektronov, na katerih bi sekundarni



Sl. 5. Koeficient sekundarne emisije izolatorja.

elektroni, preden izstopijo, s sipanjem izgubljali energijo. Prav zaradi visoke upornosti pa se pri statičnih meritvah, ko bombardiramo izolator s trajnim tokom elektronov, naberejo na površini naboji, ki zelo spremenijo pogoje meritve in napravijo rezultate nezanesljive. Ta problem si bo treba še posebej ogledati.

δ doseže vrednost 1 pri dveh vrednostih primarne napetosti U_p^{I} in U_p^{II}. (slika 5). Ti dve vrednosti razmejita tri področja, v katerih se izolator različno obnaša. Če je $U_p < U_p^{\mathrm{I}}$, prihaja na izolator več elektronov, kot pa jih odhaja. Zato se tedaj površina izolatorja nabija negativno, dokler ne doseže potenciala katode, s čimer se zapre primarni tok. V področju $U_p^{\mathrm{I}} < U_p < U_p^{\mathrm{II}}$, kjer je δ večji od 1, se površina nabija pozitivno, to pa do potenciala zbiralne elektrode sekundarnih elektronov; prostorski naboj (oblak elektronov) med tarčo in zbiralno elektrodo potem znižuje sekundarni tok. Kadar je $U_p > U_p^{\mathrm{II}}$, se površina nabija negativno; zato pada energija primarnih elektronov do U_p^{II}, kjer je obratovanje najstabilnejše. U_p^{II} je torej najvišja napetost, ki jo na ta način more izolator stalno imeti proti katodi.

Za sekundarno emisijo izolatorjev so torej značilne vrednosti δ_m, U_m, U_p^{I} in U_p^{II}. Napetost U_p^{I} je običajno manjša od 60 voltov, U_p^{II} pa meri nekaj kilovoltov (glej tabelo 2).

Tabela 2. *Podatki za sekundarno emisijo nekaterih izolatorjev*

Izolator	δ_m	U_m	U_p^{I}	U_p^{II}
Steklo pyrex	2,3	400 V		
NaCl	6,8			
MgO	2,4	1500		
Oksidna katoda	8	1500	60 V	3500 V
Sljuda	2,4	380	30	3300

V nasprotju s kovinami je pri izolatorjih δ odvisen od napetosti med tarčo in kolektorjem. Ta pojav in druge značilne lastnosti sekundarne emisije izolatorjev si razlagamo z obstojem negativnih ali pozitivnih nabojev na površini in tik pod površino. Pri tem govorimo o *poljsko ojačeni sekundarni emisiji.*

Po eni razlagi zapirajo po površini izolatorja neenakomerno razsejana področja negativnih nabojev pot sekundarnim elektronom, podobno kot zapira negativna mrežica elektronko. Zato je treba napetost kolektorja precej zvišati, da seže polje kolektorja skozi zapirajoče polje mrežaste negativne obloge.

Druga razlaga pa se opira na dejstvo, da se površina nabija pozitivno, kadar je δ večji od 1. Na ta način nastane v izolatorju močno polje, ki vleče elektrone proti površini. Če je to polje dovolj močno, lahko sekundarni elektron dobi na poti proti površini toliko energije da vzbuja *terciarne elektrone.* Če vzamemo, da je energija, ki je potrebna za nastanek sekundarnega ali terciarnega elektrona nekaj deset elektronskih voltov, prosta pot elektronov v izolatorju pa nekaj sto Å, je za nastanek terciarnih elektronov potrebna poljska jakost približno 10^6 V/cm. Nakopičenje naboja in s tem vzpostavitev polja na površini izolatorja zahteva nekaj časa. Zato kaže poljsko ojačena sekundarna emisija zakasnitev, ki pa je lahko zelo različna, v obsegu od dela mikrosekunde do nekaj ur. Običajno pride do znatne zakasnitve šele tedaj, ko postane δ večji od 10 do 12.

Drugače pa se obnašajo tenke plasti izolatorjev na prevodni podlagi. Če ima izolator debelino reda velikosti proste poti elektrona, se odleteli elektroni takoj nadomestijo z novimi iz podlage. Na ta način ne pride do tvorbe nabojev in ni nobene zakasnitve. Ugodno pri tem je, če je plast približno enaka dosegu primarnega elektrona. Takšno plast dobimo na primer pri pravilnem površinskem oksidiranju (»formiranju«) zlitine bakra z nekaj procenti berilija ali zlitine srebra z nekaj procenti magnezija. Te zlitine se pogosto uporabljajo za izdelavo sekundarno emisijskih elektrod, tako imenovanih *dinod,* v fotomultiplikatorjih. Da dosežemo močno sekundarno emisijo, jih formiramo v razredčenem kisiku ali v vodni pari, ki ne reagira za bakrom ter srebrom, pač pa oksidirata berilij in magnezij. Formiranje z vodno paro je zanesljivejše, ker molekule vode ne difundirajo v srebro ali baker. (Kisik pa zelo hitro difundira v srebro in baker ter oksidira magnezij in berilij tudi v notranjosti zlitine.) Formiranje izvedemo tako, da ogrejemo zlitino v vakuumu na 400 do 700 ° C, zato da postane difuzija berilija oz. magnezija dovolj živahna. Berilij in magnezij difundirata na površino, kjer se oksidirata in tvorita tenko plast BeO ali MgO na kovinski podlagi. Primerna debelina plasti je okoli 1000 Å.

5. Sekundarna emisija polvodnikov

Sekundarno emisijski koeficient čistih polvodnikov je zelo nizek (tabela 3). To ni težko razumeti: Polvodniki so po svoji upornosti nekje v sredi med kovinami in izolatorji. Tako imajo že precej prostih elektronov, na katerih notranji sekundarni elektroni s sipanjem izgubljajo svojo energijo. Ti elektroni tudi preprečijo, da bi prišlo do poljsko ojačene emisije.

Tabela 3.

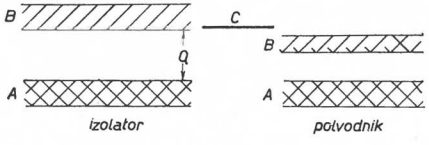
Polvodnik	δ_m	U_m
B	1,2	150 V
Ge	1,2	400
Si	1,1	250
Ag_2O	1,1	
Cu_2O	1,2	
MoO_2	1,1	
MoS_2	1,1	

Z dodatkom primernih primesi pretvorimo lahko nekatere izolatorje v polvodnike. V ugodnih primerih dosežemo tedaj zelo visok δ (tabela 4).

Tabela 4.

Polvodnik	δ_m	V_m
BeO + Ni	12	750
NaCl + Cs	22	1400
CsCl + Cs	14	1700
KJ + Cs	13	1800

S teorijo energijskih pasov elektronov v kristalu si lahko napravimo nazorne slike dobre ali slabe sekundarne emisije z izolatorjev ali polvodnikov (slika 6). Pri izolatorjih je energijska razdalja Q med zasedenim pasom A in



Sl. 6. Zasedeni in prvi prevodniški energijski pas za elektrone v izolatorju in polvodniku.

prvim dovoljenim pasom B tolikšna (nekaj eV), da imajo elektroni pri sobni temperaturi premalo energije, da bi prišli v pas B. Zato je pas B prazen in nima prostih elektronov, na katerih bi se primarni in sekundarni elektroni lahko sipali. Skoraj vsa energija primarnega elektrona se porabi za nastanek notranjih sekundarnih elektronov, katerih število je približno enako U_p/Q. Vsi

ti elektroni imajo dovolj energije, da lahko izstopijo, če je energija elektrona v vakuumu (C) v bližini dna pasu B (sl. 6 levo). Če pa je energija C nad dnom pasu B, se verjetnost izstopa zelo zmanjša.

Polvodniki imajo energijsko razliko Q med obema pasoma razmeroma majhno (okrog 1 eV), tako da je že pri sobni temperaturi precej elektronov v pasu B. Nivo C leži običajno precej nad dnom pasu B, kar oboje slabi sekundarno emisijo.

Z dodatkom primerne primesi ustvarimo elektronom še vmesne energijske nivoje. Lahko pa se zaradi primesi stvori tudi nova kemijska spojina s svojo lastno razporeditvijo energijskih pasov in s spremenjeno sekundarno emisijo. Primer takšne mnogofazne strukture je katoda Cs_2O—Ag—Cs, ki ima poleg znatne fotoemisije tudi visoko sekundarno emisijo. Zaradi kompliciranega sestava je zelo težko dobiti jasno sliko v energijskih razmerah elektronov v tej katodi. Timofejev, Hlebnikov in Pomerantz trdijo, da izvirajo sekundarni elektroni iz elektronskih pasti, ki jih tvorijo atomi Ag ali Cs v kristalni mreži Cs_2O. Bruining in de Boer pa trdita, da izvirajo sekundarni elektroni iz zasedenega pasu v kristalni mreži Cs_2O. Jacobs, Martin in Brand so skušali rešiti spor. Bombardirali so plasti Cs_2O in plasti AgOCs z zelo počasnimi primarnimi elektroni in ugotovili, da pod neko mejno energijo primarnih elektronov (8 eV za Cs_2O in 7 eV za AgOCs) preneha sekundarna emisija. Mejna energija sekundarne emisije se ujema z energijo drugega ausorpcijskega maksimuma za ultravijolično svetlobo. V tem vidijo dokaz, da izvirajo sekundarni elektroni iz zasedenega pasu in ne iz elektronskih pasti, ker je 7 do 8 eV prevelika energija za emisijo elektronov iz pasti.

Sekundarna emisija germanija ni odvisna od primesi, ampak le od lastnosti germanija samega. Iz meritev temperaturne odvisnosti δ se da sklepati, da pride do sipanja energije sekundarnih elektronov na prostih elektronih šele, ko presežejo koncentracijo $3 \cdot 10^{18}$ cm^{-3} (to je malo v primeri s kovinami, če je na primer v natriju $2{,}6 \cdot 10^{22}$ prostih elektronov na cm^3).

Spojina antimona s cezijem ($SbCs_3$) se poleg AgMg najbolj pogosto uporablja v fotomultiplikatorjih kot snov z izdatno sekundarno emisijo. Antimon naparijo na nikljevo pločevino in ga z naparevanjem cezija skupno s fotokatodo »formirajo« v spojino $SbCs_3$. Tukaj imamo zopet opraviti s tenko polvodniško plastjo na prevodni podlagi. Antimon-cezij je glede sekundarne emisije še malo raziskan.

6. Uporaba sekundarne emisije

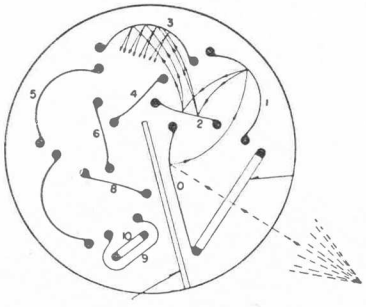
Pri navadnih elektronkah včasih srečamo sekundarno emisijo kot škodljivo motnjo. Ko so iznašli tetrodo (elektronko z dvema mrežama), so jo kmalu morali izpopolniti v pentodo, s tem da so dodali še tretjo mrežo. Ta je potrebna zato, da prepreči sekundarnim elektronom z anode dostop do druge mreže. Po potrebi lahko zmanjšamo sekundarno emisijo s premazi iz saj, grafita, ZrO_2 ali Cr_2O_3.

Sekundarna emisija pa se da tudi koristno izrabiti, in sicer za ojačevanje v tako imenovanih *elektronskih multiplikatorjih** (*pomnoževalkah*; slika 7).

* Obz. mat. fiz. **1** (1951), str. 139.

Multiplikatorji s svetlobno občutljivimi katodami (fotomultiplikatorji) se rabijo za merjenje šibkih svetlobnih tokov, zlasti pa za scintilacijske števce. Med katodo in kolektorjem multiplikatorja je vključenih do 10 ali še več vmesnih elektrod (dinod). Vsaka naslednja ima proti prejšnji napetost kakih 100 do 200 V. Če je $\delta = 4$, izbije elektron iz dinode povprečno po 4 elektrone; iz naslednje dinode jih izleti v povprečju že 16, potem 64; tako raste plaz naprej. Z desetimi dinodami dosežemo na ta način $4^{10} = 10^6$-kratno ojačenje.

Za dinode se danes zlasti uporablja zlitina Ag—Mg in spojina $SbCs_3$. Pravilno formirana plast Ag—Mg ima nekaj prednosti pred $SbCs_3$, kajti sekundarna emisija z Ag—Mg je manj podvržena utrujanju. Zato prenesejo take dniode večje obremenitve. Nadalje ima ta zlitina manjšo termično emisijo



Sl. 7. Tloris fotomultiplikatorja RCA 1 P 21. Številke pomenijo: 0 = fotokatoda, 1 do 9 = dinode, 10 = kolektor.

kot $SbCs_3$. V fotomultiplikatorjih se zadovoljimo, če dosežemo vrednosti δ od 3 do 4 pri napetosti 100 do 200 V na posamezno stopnjo. Previsoko z δ ne smemo iti, kajti pri vrednostih čez 10 se pojavijo zakasnitve in nestabilnosti. Tedaj bi trpela časovna ločljivost multiplikatorjev, ki mora biti v scintilacijskih števcih zelo visoka.

Literatura:

1. H. Bruining: Die Sekundär-Eelektronen-Emission fester Körper. Berlin (Springer) 1942.

2. Mc Kay: Secondary Emission. Advances in Eelectronics I (1948).

3. Wright: Semiconductors. London (Methuen) 1950.

4. J. L. H. Jonker: The Angular Distribution of the Secondary Electrone of Nickel. Philips Res. Rep. **6**, 372—387, 1951.

5. Johnson, Mc Kay: Secondary Eelectron Emission of Crystalline MgO. Phys. Rev., **91**, 582, 1953.

6. Johnson, Mc Kay: Secondary Electron Emission from Germanium. Phys. Rev., **93**, 668, 1954.

7. Jacobs: Field-Dependent Secondary Emission. Phys. Rev., **84**, 877, 1951.

8. Jacobs, Martin, Brand: Secondary Emission from Composite Surfaces. Phys. Rev., **85**, 441, 1952.

9. Rappaport: Methods of Processing Silver-Magnesium Secondary Emitters for Electron Tubes, J. Appl. Phys., **25**, 288, 1954.

DILATACIJSKA VISKOZNOST

MITJA ROSINA

1. Uvod

Ko opisujemo stanje elastične snovi, rabimo dva tenzorja drugega reda, namreč *tenzor napetosti* σ, ki ima komponente σ_{ik}, ter *tenzor deformacij* ε. S tenzorjem napetosti se izražajo sile na ploščinsko enoto. Na ploskev dS, ki ji priredimo vektor $\mathbf{dS}$ s smerjo normale, deluje sila $\mathbf{dF} = \sigma \mathbf{dS}$ ali, izpisano v komponentah $dF_i = \Sigma_k \sigma_{ik}\, dS_k$.

Komponente tenzorja deformacij so $\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}(\partial u_i/\partial k + \partial u_k/\partial i)$. Pri tem stojita i in k namesto x, y ali z, medtem ko predstavlja vektor $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ odmik kakega dela telesa od prvotne lege (ko telo še ni bilo deformirano). Definicijo deformacijskega tenzorja pišemo v krajši simbolični obliki takole: $\varepsilon = \mathrm{def}\,\mathbf{u}$, pri čemer pomeni kratica def prej nakazani diferencialni operator. Pomen komponent ε_{ik} si oglejmo na posebnih primerih! Če se kocka z robom a raztegne v smeri osi x za s, ima tenzor ε edino od nič različno komponento $\varepsilon_{xx} = s/a$. Če pa se kocka popači v paralelepiped, in sicer tako, da se ploskvi, ki sta pravokotni na os y, premakneta ena proti drugi v smeri x za s, sta edini nič različni komponenti $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = s/2\,a$.

Hookov »zakon« pove, da je pri majhnih deformacijah tenzor napetosti *sorazmeren* tenzorju deformacij. S tem hočemo reči, da je en tenzor homogena linearna funkcija drugega. Sorazmernost tenzorjev in že sorazmernost vektorjev pa je bolj komplicirane narave kot sorazmernost skalarjev, tako da potrebujemo še nekaj pojasnil.

Sorazmernost dveh skalarjev posreduje en sam skalarni koeficient (primer: $m = \varrho V$). Sorazmernost dveh vektorjev posreduje koeficient, ki je tenzor drugega reda (ima torej 9 komponent). Spremenljiva vektorja v splošnem nista paralelna. — Primer: $\mathbf{dF} = \sigma\,\mathbf{dS}$ (glej zgoraj). — Drug primer: V anizotropni snovi vektor gostote električnega toka ($\mathbf{j}$) in vektor električne poljske jakosti $\mathbf{E}$ v splošnem nista paralelna (elektrika ne teče natančno v smeri silnic); kljub temu pa sta $\mathbf{j}$ in $\mathbf{E}$ po navadi sorazmerna (Ohmov zakon), tako da velja $\mathbf{j} = \lambda\mathbf{E}$ (torej $j_i = \Sigma_k \lambda_{ik} E_k$) pri čemer je λ tenzor električne prevodnosti. Če je snov izotropna, se ta sorazmernost zelo poenostavi; tedaj sta vektorja $\mathbf{j}$ in $\mathbf{E}$ dosledno paralelna, tako da posreduje sorazmernost skalarna prevodnost λ (= recipročni specifični upor), torej : $\mathbf{j} = \lambda\mathbf{E}$.

Sorazmernost dveh tenzorjev drugega reda posreduje koeficient, ki je tenzor četrtega reda (z 81 komponentami). Sorazmernost, ki povezuje σ in ε se zelo poenostavi, ako je nenapeta snov izotropna. Tedaj rabimo namreč samo d v a skalarna koeficienta. Kot taka služita lahko strižni modul G in kompresijski modul K (= recipročna stisljivost), ki se s prožnostnim modulom E in Poissonovim številom μ takole izražata: $G = E/2\,(1 + \mu)$ ter $K = E/3\,(1 - 2\,\mu)$. Sorazmernost se glasi :

$$\sigma_{ik} = 2\,G\,\varepsilon_{ik}, \text{ če } i \neq k,$$

$$\sigma_{ii} = 2\,G\,\varepsilon_{ii} + (K - \tfrac{2}{3}\,G)\,(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}).$$

Izraz $\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \partial u_x/\partial x + \partial u_y/\partial y + \partial u_z/\partial z = \mathrm{div}\,\mathbf{u}$ predstavlja *dilatacijo*, to je relativno spremembo specifične prostornine ($= \triangle V/V$). Sorazmernost lahko krajše takole zapišemo:

$$\sigma = 2\,G\,\mathrm{def}\,\mathbf{u} + (K - \tfrac{2}{3}G)\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{1}, \qquad (1)$$

pri čemer pomeni $\mathbf{1}$ tenzorsko enoto, to je tenzor, ki ima diagonalne komponente enake 1, ostale pa nič.

2. Viskoznost

Podobno sorazmernost kot pri prožnih snoveh najdemo tudi pri tekočinah in plinih, samo da tenzor napetosti tam ni sorazmeren tenzorju deformacij, ampak *tenzorju deformacijskih hitrosti*. Sila, ki je potrebna, da tekočino deformiramo, namreč ni odvisna od deformacije same, ampak od hitrosti, s katero izvajamo deformacijo. Sorazmernost spet izrazimo z dvema koeficientoma: strižnemu modulu ustreza *navadna (strižna) viskoznost* η, kompresijskemu modulu pa tako imenovana *dilatacijska viskoznost* ζ. Velja torej

$$\sigma_{ik} = 2\,\eta\,\dot{\varepsilon}_{ik}$$

ter

$$\sigma_{ii} = 2\,\eta\,\dot{\varepsilon}_{ii} + (\zeta - \tfrac{2}{3}\eta)\,(\dot{\varepsilon}_{11} + \dot{\varepsilon}_{22} + \dot{\varepsilon}_{33}) - p_s$$

kar lahko krajše takole zapišemo:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\,\eta\,\mathrm{def}\,\mathbf{v} + [(\zeta - \tfrac{2}{3}\,\eta)\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} - p_s]\cdot\mathbf{1} \tag{2}$$

Tu pomeni $\mathrm{def}\,\mathbf{v} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ tenzor deformacijskih hitrosti s komponentami $\dot{\varepsilon}_{ik} = \tfrac{1}{2}\,(\partial v_i/\partial k + \partial v_k/\partial i)$. Izraz $\mathrm{div}\,\mathbf{v} = \dot{\varepsilon}_{xx} + \dot{\varepsilon}_{yy} + \dot{\varepsilon}_{zz} = dV/V dt$ predstavlja tako imenovano *dilatacijsko hitrost*. Poleg tako imenovanega *hidrostatičnega tlaka* p_s nas bo zanimal tudi *povprečni tlak* p, ki je definiran takole: $p = -\tfrac{1}{3}\,(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$. Iz enačbe (2) razberemo, da je

$$p = p_s - \zeta\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} = p_s - \zeta\cdot\frac{1}{V}\,\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \tag{3}$$

Pri pretakanju tekočine se gibljejo sosednje plasti z različno hitrostjo, pri čemer se zaradi strižne viskoznosti η pojavijo medsebojne sile (sile notranjega trenja). Če pa izvršimo izotropno kompresijo, t. j. kompresijo, pri kateri se posamezni deli samo stisnejo ali razširijo, toda ohranijo svojo obliko, tega trenja med plastmi nimamo. Tedaj je tenzor napetosti izotropen, namreč (po enačbi 2) enak $-p\cdot\mathbf{1}$. V enačbi tedaj η ne nastopa več, kar je razumljivo; saj nimamo strižnih deformacij. Pač pa se pojavi zaradi dilatacijske viskoznosti dodatek k tlaku, ki je enak $-\zeta\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} = -\zeta\,dV/V dt$. Ta dodatek je po navadi majhen v primeri s statičnim tlakom p_s.

Medtem ko gre pri čisti deformaciji celotno delo v izgubo (s tem, da se porabi za segrevanje snovi), dobimo pri kompresiji večino dela lahko povrnjeno. V izgubo gre le majhen delež zaradi dilatacijske viskoznosti. Ta delež smemo pri običajnih hidrodinamičnih pojavih zanemariti, ker so relativne spremembe volumna zelo majhne (pri tekočinah) ali vsaj zelo počasne (pri plinih). Zato so do pred dobrimi 10 leti o dilatacijski viskoznosti le prav malo vedeli. Iz kinetične teorije dobimo za idealni enoatomni plin $\zeta = 0$. Stokes je privzel, da velja to tudi za ostale pline in tekočine. To predpostavko je opravičil s tem, da je pri običajnih problemih člen, ki vsebuje ζ, itak zelo majhen in je morebitna napaka zanemarljiva. S tem je od dveh modulov (η, ζ) prešel na enega samega (η). Novejši poizkusi z zvokom in zlasti z ultrazvokom pa so pokazali, da Stokesova domneva ne drži, kajti po njej izračunani zvočni absorpcijski koeficienti so premajhni za faktor 2 do 1000. Edino pri enoatomnih plinih so meritve potrdile, da je res $\zeta = 0$.

3. Absorpcija zvoka

Pri absorpciji zvoka sodelujejo trije vzroki: 1. strižna viskoznost; 2. prevajanje toplote iz toplejših zgoščin v hladnejše razredčine; 3. dilatacijska viskoznost. Oglejmo si te tri vzroke po vrsti:

Pri zvoku na prvi mah ni razvidno, da imamo kaj opraviti s strižno viskoznostjo, saj se gibljejo hkrati cele valovne fronte. — V smeri valovanja res nimamo striga. Če pa pogledamo tanko plast plina, ki leži poševno na smer valovanja, vidimo, da se pri kompresiji in ekspanziji strižno deformira.

Če bi bil koeficient toplotne prevodnosti λ neskončno velik, bi imela vsa tekočina enako temperaturo. Toplota bi sproti prehajala iz zgoščin na razredčine. Nasprotno bi bilo pri tekočini, ki bi imela $\lambda = 0$; v zgoščinah bi bila zaradi adiabatne zgostitve segreta, v razredčinah pa ohlajena. Dejansko λ ni niti enak ∞ niti 0, ampak imamo nekaj vmesnega. Ker je λ razmeroma majhen, smemo pri računanju hitrosti zvoka toplotno prevodnost zanemariti. Vendar pa toplotna prevodnost znatno vpliva na absorpcijo. Tega ni težko razumeti: pri tvorbi zgoščine opravi okolna tekočina neko delo; pri ekspanziji pa zgoščena tekočina ne povrne vsega dela, ker se je medtem zgoščina že nekoliko ohladila in je tlak v njej padel.

Dilatacijska viskoznost povzroči še dodatno absorpcijo, čeprav je člen $\zeta\, dV/Vdt$ zelo majhen v primeri s p_s. Upoštevati moramo, da je celotno delo pri zaključenem ciklu kompresija—ekspanzija, po katerem se snov vrne v prvotno stanje, odvisno samo od člena $\zeta\, dV/Vdt$, kajti delo proti statičnemu tlaku p_s dobimo povrnjeno. Res je izguba dela zaradi dilatacijske viskoznosti pri enem samem ciklu majhna, toda zvok je periodičen pojav in ves ciklus se ponovi večtisočkrat v sekundi, s čimer se nabere zaznavna moč.

Če upoštevamo vse tri vzroke, dobimo (pri majhnih amplitudah) naslednjo valovno enačbo, ki je tretjega reda:

$$\frac{\partial^2 \varrho}{\partial t^2} = c^2{}_0 \nabla \varrho + \frac{1}{\varrho_0} \left(\frac{3}{4}\, \eta + \zeta + (\varkappa - 1)\, \frac{\lambda}{c_p} \right) \nabla^2 \frac{\partial \varrho}{\partial t} \tag{4}$$

Tu je ϱ gostota; ϱ_0 je srednja vrednost gostote; $c_0{}^2 = dp/d\varrho = 1/\varrho\, \chi_S$, pri čemer je χ_S adiabatna stisljivost; $\varkappa$ je razmerje obeh specifičnih toplot ($\varkappa = c_p/c_v$). Posebna rešitev valovne enačbe, ki predstavlja dušeno ravno valovanje, je: $\varrho - \varrho_0 = Ae^{-\beta x} \cdot \sin \omega\, (t - x/c)$. S substituiranjem v enačbo (4) ugotovimo, da je pri šibkem dušenju v prvem približku $c = c_0$ in

$$\beta = (\omega^2/2\, c_0{}^3\, \varrho)\, [4\, \eta/3 + \zeta + (\varkappa - 1)\, \lambda/c_p] \tag{5}$$

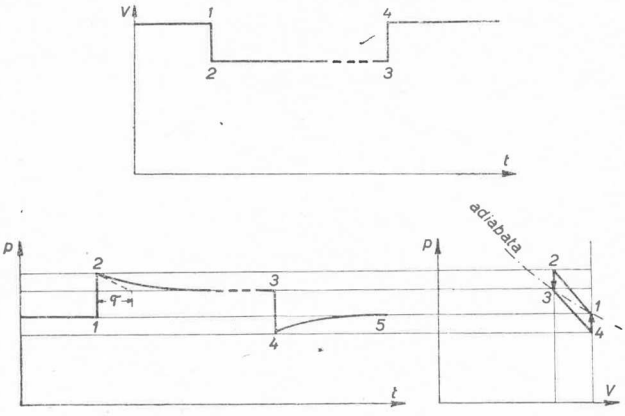
Ker poznamo η in λ že iz drugih meritev, lahko dobimo ζ iz absorpcijskega koeficienta β. Največ meritev te vrste je bilo izvršenih v območju ultrazvoka (za tekočine sploh samo v tem območju, ker je pri nižjih frekvencah absorpcija majhna in jo je težko meriti). Rezultati kažejo, da ima koeficient ζ pri nekaterih snoveh enako velikostno stopnjo kot η; neredko pa je tudi do stokrat ali celo tisočkrat večji.

4. Dilatacijska viskoznost kot relaksacijski pojav

Zgornja vpeljava pojma dilatacijske viskoznosti je bila čisto formalna. Oglejmo si še fizikalno bistvo tega pojava! Dilatacijska viskoznost je ozko povezana z *relaksacijskimi pojavi*, ki jih opazimo pri hitrem stiskanju in

razpenjanju snovi. Pri teh pojavih snov ne gre skozi sama ravnotežna stanja, ker vzpostavljanje termodinamskega ravnotežja ne more tako hitro slediti. To najlaže razumemo, če si ogledamo potek tlaka pri sunkoviti kompresiji in ekspanziji toplotno izolirane tekočine (slika 1). Pri kompresiji naraste pritisk prvi hip na vrednost p_2; nato eksponencialno pada proti ravnotežni vrednosti p_3 z relaksacijskim časom τ. Pri ekspanziji pa pade pritisk najprej na vrednost p_4; nato se približuje novi ravnotežni vrednosti $p_5 = p_1$. Tekočina se vrne spet v prvotno stanje, toda zapravili smo delo, ki je podano s ploščino zanke 12341 v diagramu pV.

Razlaga tega pojava je: Energija molekul W se sestoji iz translacijske energije W_{tr}, rotacijske energije W_r in nihajne energije W_n. Prva dva dela skupaj bomo zaznamovali z W_z. Pri kompresiji opravimo na sistemu delo; njegova energija se poveča. Toda ta razlika energije se takoj porazdeli le na



Sl. 1. Časovni potek prostornine tekočine in tlaka pri sunkoviti kompresiji in ekspanziji.

translacijske in rotacijske prostostne stopnje. Nihajna energija ne more tako hitro slediti. Tekočina se približuje ravnotežnemu stanju eksponencialno z relaksacijskim časom τ. Energija pri tem polagoma prehaja s translacijskih in rotacijskih prostostnih stopenj na nihajne, dokler ni doseženo ravnotežje. Zato pojema W_z od prvotne prevelike vrednosti na končno ravnotežno vrednost. Podobno se pri ekspanziji W_z najprej preveč pomanjša (namreč za celo odvzeto energijo), ker W_n le počasi oddaja svoj delež. Ker je tlak sorazmeren W_{tr} in ne celotni energiji, je njegov potek enak poteku W_{tr} in s tem poteku W_z.

Podobno je pri harmoničnem (sinusnem spreminjanju volumna, le da so ogli zanke zaokroženi. V diagramu pV dobimo elipso, ki se pri nizkih frekvencah ($\omega\tau \ll 1$) zoži v diagonalo 13 (to je del adiabate), ker gremo skozi sama ravnotežna stanja. Pri visokih frekvencah pa se elipsa zoži v diagonalo 24, ker W_n tako hitrim spremembam ne more več slediti.

Tlak torej ni samo funkcija volumna, ampak je odvisen tudi od prejšnjih dogodkov, kar lahko izrazimo s časovnimi odvodi volumna. Pišimo $p = p_0 + \Delta p$ in $V = V_0 + \Delta V$, kjer sta p_0 in V_0 srednji (ravnotežni) vrednosti tlaka oz. volumna, Δp in ΔV pa odmika od srednje vrednosti (izmenični komponenti)! Vzeli bomo, da sta Δp in ΔV majhna v primeri s p_0 in V_0 (pri zvoku je ta pogoj po navadi izpolnjen). Pri počasni spremembi bi se v diagramu pV gibali po adiabati; za plin bi veljalo $p/p_0 = (V/V_0)^{-\varkappa} \cong 1 - \varkappa\, \Delta V/V_0$. (6)

Pri hitri spremembi pa snov ni v ravnotežnem stanju in njena temperatura tedaj ni enolično definirana. Tekočina ima tako rekoč dve temperaturi: ena (T) ustreza translacijskim in rotacijskim prostostnim stopnjam, druga (T_n) pa nihajnim. Ustrezno si mislimo razdeljeno specifično toploto pri konstantnem volumnu ($c_V = c_z + c_n$), tako da velja: $\Delta W_z = m\, c_z\, \Delta T$ ter $\Delta W_n = m\, c_n\, \Delta T_n$. Zanima nas, kako se ΔT spreminja s časom. Nihajna energija se približuje ravnotežni vrednosti $m\, c_n\, \Delta T$ s hitrostjo, ki je sorazmerna odmiku od te vrednosti, torej $\partial \Delta V_n/\partial t = -(\Delta W_n - m\, c_n\, \Delta T)/\tau$. Če upoštevamo, da je $\Delta W_n = \Delta W - m\, c_z\, \Delta T$, dobimo tole diferencialno enačbo za ΔT:

$$mc_z \frac{\partial \Delta T}{\partial t} + m\, c_V \frac{\Delta T}{\tau} = \frac{\partial \Delta W}{\partial t} + \frac{\Delta W}{\tau} \tag{7}$$

Pri toplotno izoliranem sistemu je sprememba energije enaka dovedenemu delu: $\Delta W = -\int p\, dV \doteq -p_0\, \Delta V$. Zaradi enostavnosti bomo računali naprej le za idealni plin, pri katerem se glasi enačba stanja $pV = m\, RT/M$, ali v prvem približku $p_0\, \Delta V + V_0\, \Delta p = mR\, \Delta T/M$. S tem, da vstavimo zadnja dva izraza v enačbo (7), dobimo iskano diferencialno enačbo za tlak:

$$p + \frac{c_z}{c_V}\tau \frac{\partial \Delta p}{\partial t} = -\varkappa \frac{p_0}{V_0}\, \Delta V - \frac{c_z + R/M}{c_V}\tau \frac{p_0}{V_0} \frac{\partial\, \Delta V}{\partial t} \tag{8}$$

Tlak torej lahko izrazimo s časovnimi odvodi volumna:

$$p = p_0 + \Delta p = p_0 \left(1 - \varkappa \frac{\Delta V}{V_0}\right) - p_0\, (\varkappa - 1)\, \frac{c_n}{c_V} \cdot \frac{\tau}{V_0} \cdot \frac{\partial \Delta V}{\partial t} +$$
$$+ p_0 \frac{c_z}{c_V} c_n\, (\varkappa - 1) \frac{\tau^2}{V_0} \frac{\partial^2 \Delta V}{\partial t^2} + \ldots \tag{9}$$

Pri ne previsokih frekvencah ($\omega\, \tau \ll 1$) zadostujeta prva dva člena na desni; druge in višje odvode smemo zanemariti. Prvi člen pomeni ravnotežni (statični) tlak p_s [glej enačbo (6)]. Da ugotovimo pomen drugega člena, primerjajmo enačbi (3) in (9)! Podobni sta si! Vidimo, da se da ζ izraziti z znanimi termodinamskimi konstantami $\varkappa$, c_n, c_V in z molekulsko konstanto τ, ki jo lahko dobimo iz spektroskopskih opazovanj ali pa jo morda izračunamo s pomočjo kvantne mehanike:

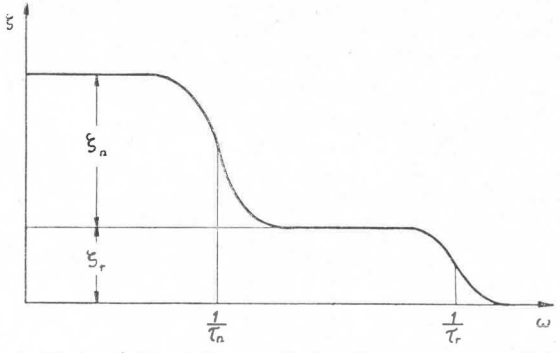
$$\zeta = p\, (\varkappa - 1)\, \tau\, c_n/c_V \tag{10}$$

Ta rezultat se da še drugače zapisati, če vpeljemo dolžino $l_n = \bar{v}\tau$, ki je približno tako velika kot povprečna pot molekule med dvema zaporednima spremembama njenega nihajnega stanja. Pri tem pomeni $\bar{v}$ povprečno hitrost molekul, torej $\bar{v} = \sqrt{8\, kT/\pi\, m} = \sqrt{8\, p/\pi\, \varrho}$. Formula $\zeta = [\frac{1}{8}\, \pi\, (\varkappa - 1)\, c_n/c_V]\, \varrho\, \bar{v}\, l_n$, ki jo tako dobimo, je zelo podobna formuli za η, ki je znana iz kinetične teorije:* $\eta = \frac{1}{2}\, 0{,}5\, \varrho\, \bar{v} l$, pri čemer je l povprečna prosta pot molekule (povprečna pot med dvema zaporednima trkoma). Iz formule tudi vidimo, da je ζ v splošnem precej večji od η, ker je pot l_n mnogo večja od povprečne proste poti l.

* Glej n. pr. J. Jeans: An Introduction to the Kinetic Theory of Gases, str. 156-163.

Pri zelo visokih frekvencah moramo v enačbi (9) upoštevati tudi višje odvode volumna. Ustrezno bi bilo treba izpopolniti tudi enačbo (3) ter enačbo (5) za absorpcijski koeficient zvoka. Če pa kljub temu vztrajamo pri prvotni obliki enačbe (5) in po njej iz izmerjenega β računamo ζ, le-ta ni več konstanten, ampak je odvisen od frekvence (slika 2).

Končno moramo upoštevati še druge relaksacijske pojave. Tudi rotacijska energija ne sledi momentano spremembam stanja in prispeva svoj delež (ζ_r) k dilatacijski viskoznosti. Pravzaprav bi morali računati z dvema relaksacijskima časoma: z daljšim (τ_n) za nihajno in krajšim (τ_r) za rotacijsko energijo. Pri frekvenci, ki je nekaj večja kot $1/\tau_n$, poprečna nihajna energija molekul ne more več slediti hitrim periodičnim spremembam; tedaj je ζ spet konstanten, ker preostane samo še delež ζ_r, ki ustreza rotacijski relaksaciji. Ko pa doseže frekvenca vrednosti blizu $1/\tau_r$, se začne ζ spet manjšati in gre pri skrajno visokih frekvencah proti nič.



Sl. 2. Odvisnost dilatacijske viskoznosti (izračunane po enačbi 5) od frekvence.

Takšno odvisnost dilatacijske viskoznosti (izračunane po enačbi 5) od frekvence so dejansko opazili. Pri vodiku pojema ζ od vrednosti 60 η pri nizkih frekvencah proti 0 pri visokih frekvencah. Pri dušiku je ζ precej konstanten (namreč enak $\zeta_n + \zeta_r$) pri $\omega < 3 \cdot 10^5\ s^{-1}$; nato začne padati; v intervalu $10^7\ s^{-1} < \omega < 10^9\ s^{-1}$ je ζ spet konstanten ($= \zeta_r$); nato spet pada.

Pri tekočinah igra poleg navedenega važno vlogo tudi prehajanje med strnjeno in nestrnjeno molekularno strukturo pod vplivom spreminjanja gostote. To prehajanje ima namreč tudi svoj relaksacijski čas. Močno vplivajo nanj tudi majhne množine primesi, ki delujejo kot nekaki katalizatorji. Majhna količina vlage v zraku zaznavno skrajša relaksacijski čas.

Na koncu je še treba omeniti, da je razlaga absorpcije zvoka z relaksacijsko teorijo že starejša (Kneser 1932)*. Pač pa je precej novo tolmačenje tega pojava z dilatacijsko viskoznostjo.

Literatura:

H. O. Kneser: Druck- und Schubviskosität in Gasen. Ann. d. Phys., **6**, 253 (1949).

F. Trendelenburg: Einführung in die Akustik (Berlin, 1950), str. 208.

L. Tisza: Supersonic Absorption and Stokes' Viscosity Relation. Phys. Rev., **61**, 531 (1942).

S. M. Karim, L. Rosenhead: The Second Coeficient of Viscosity of Liquids and Gases, Rev. Mod. Phys. **24**, 108 (1952).

* Prof. Kneser je o tem predaval v Ljubljani na Inštitutu J. Stefana dne 15. marca 1955.

NOVICE

POČASNI IN HITRI REAKTOR V ENEM

Državni laboratorij v Argonnu (ZDA), eden od znanih ameriških centrov za raziskovanja na jedrskih reaktorjih, je lani novembra objavil vest, da je začel delovati novi reaktor ZPR—V (Zero power reactor No. V), ki ga imenujejo »počasni hitri reaktor« in o katerem pravijo, da je po svoji zamisli revolucionaren, ker združuje prednosti hitrega in počasnega (termičnega) reaktorja.

Oglejmo si na kratko, za kaj gre! V hitrem reaktorju se velika večina cepitev dogaja pri visokih energijah (povprečna energija je 0,2 do 0,4 MeV), to je z zelo hitrimi nevtroni. Ker ima večina snovi pri visokih energijah zelo majhne absorpcijske preseke, zato pri hitrem reaktorju ni tako težko dobiti primernih gradbenih materialov kot pri termičnem. Velikokrat je možno uporabljati na primer nerjaveče jeklo, ki za termične reaktorje sploh ne pride v poštev. Še važnejše pa je dejstvo, da je za hitre razcepe število ν (število novo porojenih nevtronov na vsak v uranu absorbirani nevtron) precej večje (2,5) kot za termične (2,1). Zaradi tega imamo pri hitrem reaktorju možnost, da ga uporabimo kot plodilni reaktor (breeder)*, kar pri termičnem ni mogoče (razen če imamo uran 233). Možnost pomnoževanja goriva je za bodočnost jedrske energije zelo važna, ker omogoča izkoriščanje U 238 in Th^{232}, ki sama po sebi nista cepljiva.

Poleg navedenih dobrih lastnosti pa ima hitri reaktor še neko, zelo nevšečno. Njegova časovna konstanta, to je čas, v katerem nevtronski fluks e-krat (2,7-krat) naraste, je že pri majhni nadkritičnosti silno kratka, prekratka, da bi mogli reaktor zanesljivo uravnavati. Časovna konstanta je odvisna od povprečnega življenjskega časa nevtronov; ta pa je odvisen od koncentracije urana 235. Zaradi majhnega cepilnega preseka pri visokih energijah je kritična masa hitrega reaktorja zelo velika, torej potrebna koncentracija U 235 je velika, življenjski čas nevtronov pa zelo kratek.

Termični reaktor je veliko laže kontrolirati. Zato pa je prebitek prostih nevtronov majhen in reaktor težko prenaša prisotnost večine materialov. Majhno število ν ne dovoljuje, da bi reaktor proizvajal več goriva, kot ga troši.

Novi reaktor naj bi združeval dobre lastnosti obeh; možnost oplojevanja necepljivih snovi (da se potem spremene v cepljive), ki jo ima hitri reaktor, in njegovo tolerantnost do materialov ter veliko časovno konstanto termičnega. Kako so to izvedli? Novi reaktor ima dva dela: notranjega, hitrega, z visoko obogatenim uranom, in zunanjega, ki prvega oklepa in je termičen. Zunanji del tvorijo palice rahlo obogatenega urana, razporejene v vodi, ki služi kot moderator. Hitri del je sam zase rahlo podkritičen in deluje le, kadar ga počasni plašč (sam po sebi kritičen) zalaga z nevtroni. Tako je tudi časovno vedenje reaktorja določeno z vedenjem termičnega dela, ki ga lahko kontroliramo. Z drugimi besedami: iskrega konja so privezali k počasnemu.

Zamisel takega reaktorja je brez dvoma silno zanimiva in kaže, da tudi pri uranskih reaktorjih še ni konec vseh možnosti, čeprav navadno pravijo, da fizikalno ni pričakovati kaj posebno novega. Ali pa bo reaktor ZPR-V res obdržal vse dobre lastnosti hitrega reaktorja, bomo pa videli šele, ko bo znano kaj več o njegovem delovanju.

Milan Osredkar

* Tako imenujemo tisto vrsto reaktorjev, ki med delovanjem proizvajajo več jedrskega goriva, kot ga trošijo. Proizvajajo lahko Pu^{239} iz urana 238 ali U^{233} iz torija.

DOMAČE VESTI

REFORMA OBVEZNE ŠOLE IN POUK MATEMATIKE

V pripravah za reformo obvezne šole je sestava dobrega učnega načrta ena izmed važnih, hkrati pa tudi odgovornih nalog. Izbrati ustrezno vsebino, ki bo dala mlademu rodu potrebno znanje, izobrazbo in vzgojo, je vprašanje, na katerega ni mogoče zadovoljivo odgovoriti samo s preučevanjem učnega gradiva za mizo, s preprosto redukcijo vsega, kar ustvarja težave pri dojemanju in posredovanju, kar nima neposredne praktične vrednosti in uporabnosti v življenju. Sestava učnega načrta zahteva hkrati skrbnega preučevanja uspešnosti dela ob predvidenem gradivu pri ljudeh, ki obvladajo predmetno problematiko in poznajo možnosti, kjer lahko uveljavi učitelj določene naloge in vzgojne cilje. Ni važno tu samo golo, strokovno znanje, ampak so važni tudi vzgojni prijemi, ki omogočajo razvijanje določenih kvalitet, reda, točnosti, natančnosti, sistematičnosti, vztrajnosti itd. Pri tem se moramo tudi zavedati, da vzgoja in pouk nista kratkotrajen proces, ki bi dal takoj vidne rezultate, ampak da zahteva obilo sistematičnega dela, dobro premišljene perspektivnosti, vsestranskega uveljavljanja in nenehne aktivizacije mladine.

Pri dosedanjih razpravah o učnih načrtih o pouku matematike srečujemo pogosto predloge po ohranitvi dosedanjih učnih načrtov. Zanimivi so tudi predlogi za temeljito redukcijo sedanjega gradiva, predvsem poglavja o algebri. Utemeljevanje redukcije omenjenega gradiva sloni deloma na težavah razumevanja, največ pa na izpodbijanju praktične vrednosti in uporabnosti v življenju. Toda težave v razumevanju ne izhajajo toliko iz abstraktnosti, iz značaja gradiva samega, ampak ležijo bolj na pomanjkljivosti učnega procesa, ki je vse prej kot približan otrokovemu interesu in premalo prilagojen pogojem, v katerih učitelj dela. Posledice takega posredovanja se vidijo pri spominskem utrjevanju in bolj verbalnem obnavljanju, kar povzroča odpor in občutek, da snov za življenje nima nobenega pomena.

Pravilna zasnova dela, skrbno uvajanje otroka v to področje, povezava s prakso, uporaba grafičnih pripomočkov, vse to pa prinaša globlje nazore o pomenu te snovi za življenje. Možnosti posplošenja, strnenje določenih operacij, prihranki na računanju, možnosti okrajšav — uporaba tabel, formul, možnosti ocenjevanja situacije in rešitve itd., vse to so prednosti, ki jih ob pretiranem prakticističnem delu ni mogoče uveljaviti. Zato bo treba pri dokončni odločitvi uvedbe tega področja v učni načrt obvezne šole dobro premisliti, preden se odločimo, kaj bomo obravnavali, kaj črtali.

Na skupnem posvetu zastopnikov republiških strokovnih društev v okviru Saveza društva matematikov in fizikov FLRJ dne 30. in 31. marca t. l. v Beogradu je bil sprejet soglasni sklep, da se v učni načrt obvezne šole postavi tudi algebra.

V vidu omenjenih nalog in ciljev je komisija izkušenih strokovnjakov in pedagogov, ki so daljšo dobo poučevali na tej stopnji, obravnavala probleme pouka matematike na obvezni šolski stopnji in osvojila tale perspektivni učni načrt.

Na elementarni stopnji, t. j. v 1. in 2. razredu, bo uvajal učitelj otroka v razumevanje količinskih odnosov in spoznavanje številnih pojmov od 1 do 10 in 20, v nadaljevanju pa do 100 in ga seznanjal z osnovami računskih operacij.

Težišče dela bo pri tem posvečeno računanju in zapisovanju teh računov. Izredna pažnja bo osredotočena pojmovanju in mehanizaciji poštevanke. Poleg enic in desetic bo obravnaval tu učitelj še osnove dolžinskih in časovnih merskih enot v obdelanem območju števil in uvajal prve pojme o ulomkih. Povezujoč dogodke iz življenja, pri katerih se pojavljajo količinski problemi, bo postavljal prve temelje sklepnim računom in uporabnim nalogam. Pri obravnavanju črt, pri legah črt v prostoru in pojmovanju razsežnosti bo pripravljal potrebne osnove geometrijskemu gradivu.

Za nadaljnje delo na tako imenovani srednji stopnji, ki bi vključevala 3., 4. in 5. šolsko leto, bo potrebna boljša razporeditev učnega gradiva, pedagoško bolj preučeno stopnjevanje težkoč, kot ga ugotavljamo pri dosedanjem sestavu učnih načrtov za to stopnjo. Le tako bomo dosegli zadovoljivejše uspehe, kot so mogoči pri sedanjih določilih. Pri postopni razširitvi številskega območja do 1000, 10 000, 100 000, 1 000 000 in več bo obravnaval učitelj vsakokrat štiri osnovne računske operacije sprva v ustni obliki, nato pa v pismeni. Tudi pri pismenem računanju bo potrebna velika previdnost in pedagoška strpnost, da bo pridobljeno znanje doumeto in pogoji za mehanizacijo trdni. Pri obravnavanju računskih zakonitosti bo seznanjal učitelj učenca še s praktično vrednostjo ugotovljenih odnosov, zlasti za preverjanje pravilnosti dobljenih rezultatov. Poleg naravnih števil bo v tem šolskem obdobju potrebno, da se otrok seznani z decimalnimi števili, kjer je pedagoško najlepša prilika, da se vključijo tudi operacije in problemi z imenovanimi števili. Časovne merske enote zahtevajo obravnavanje v posebnem poglavju. Osnovne geometrijske pojme, geometrijske tvore, črte, medsebojno lego premih črt, pravokotnik, kvadrat, kvader, kocko, krog (ločne mere), kote (kotne mere), trikotnik bo obravnaval učitelj nazorno, upoštevajoč pri tem tudi potrebe pri drugih predmetih.

Velika pažnja na vsej srednji stopnji bo posvečena spoznavanju odnosov med odvisnimi količinami, reševanju uporabnih nalog s sklepanjem in uporabi grafičnih pripomočkov za ponazarjanje teh odnosov. Pri deljenju decimalnih števil bo dana priložnost za uvedbo pojma procent in promile.

Ulomki, računske operacije z ulomki in njihove zakonitosti, odnosi med ulomki in decimalnimi števili ter določanje približnih vrednosti števil je v načrtu za višjo stopnjo, t. j. za 6. šolsko leto. Sem spada tudi temeljita obdelava procentnih in obrestnih računov in reševanje ustreznih nalog na sklepni osnovi. Ker bo razvijanje logičnega mišljenja, utrjevanje sklepanja naloga vzgoje na vsej obvezni stopnji, ne bo potrebno posebno obravnavanje teh računov v tem obdobju, kot je bila to navada doslej. Pojavlja se tudi potreba po uvedbi računov iz praktičnega življenja, ki vključujejo razne gospodarske osnovne pojme (proizvodna in prodajna cena, davki, režijski in amortizacijski stroški, kalkulacije, prebitek, izguba, obresti in podobno). Probleme te vrste bo obravnaval učitelj na vsej višji stopnji. Posebna skrb bo pa posvečena tudi osnovnim pojmom iz knjigovodstva.

Temeljite in pedagoško dovršene obdelave pa je potrebno poglavje o občih številih. Le s skrbno pripravljenim delom bo mogel učitelj vzbuditi in razviti interes za gradivo, ki je velikega pomena za nadaljnji napredek mladega človeka. Obravnavanje občih števil bo vključevalo naslednje teme: pojmovanje občih števil, zapisovanje računskih operacij z občimi števili, obči številski izrazi,

izračunavanje vrednosti občih številskih izrazov, zakonitosti računskih operacij osnova za izračunavanje neznanih količin, preproste enačbe, uporaba enačb pri reševanju raznih gospodarskih in tehničnih problemov, pomen formul.

Nadalje bodo obravnavana še poglavja: Pojmovanje relativnih števil, računske operacije z relativnimi števili, uporaba in pomen relativnih števil v vsakdanjem življenju.

Računske operacije z algebrajskimi izrazi, pojem kvadrata in kuba kot potence, grafično in tabelarično določanje kvadratnega in kub. korena.

Najvažnejše lastnosti geometrijskih likov in geometrijskih teles, ploščinski problemi in ploščine geometrijskih likov, Pitagorov izrek, površina in prostornina geometrijskih teles, simetrija, konstrukcijske naloge, uporaba in pomen geometrije v gospodarstvu in tehniki, elementi projekcijskega risanja.

Podrobno izdelavo učnega načrta, porazdelitev snovi po razredih, določitev obsega in vsebine pa bo mogoče podrobno izdelati, ko bo urejeno število ur na teden.

Dolžnost nas vseh je, da z dobro preučenimi predlogi prispevamo k sestavi učnega načrta za matematiko, ki bo v polni meri ustrezal nalogam in težnjam sodobne obvezne šole.

Jože Žabkar

O REORGANIZACIJI INŠTITUTOV

Društvo matematikov in fizikov LRS je dne 21. februarja t. l. naslovilo na Prirodoslovno matematično filozofsko in na Tehniško fakulteto resolucijo, ki se tiče reorganizacije matematičnih, fizikalnih in sorodnih inštitutov na naši univerzi. Ker je ta problem zanimiv tudi za širšo javnost, objavljamo resolucijo v celoti.

Naše društvo je sklicalo dne 19. februarja sestanek, na katerega so bili povabljeni vsi predavatelji in asistenti Matematično fizikalnega odseka Prirodoslovno matematično filozofske fakultete ter Oddelka za splošne predmete in Odseka za fiziko Tehniške fakultete, prav tako pa matematiki in fiziki z drugih fakultet. Sestanek je bil sklican z namenom, da se prediskutirajo možnosti za reorganizacijo in uspešnejši razvoj matematike in fizike na naši univerzi. Soglasna želja vseh prisotnih je bila, da naj se društvo obrne na prizadete fakultete s predlogom, da bi o teh problemih razpravljale in skupno našle najboljšo rešitev. V naslednjem je podana analiza sedanjega stanja ter več predlogov, o katerih je bilo govora na sestanku.

Matematika in fizika sta danes na naši univerzi organizirani na dveh ali več tirih. Za vsako teh ved imamo namreč več središč. Na Prirodoslovno matematično filozofski fakulteti je zastopana bolj teoretična smer, na Tehniški fakulteti pa se goji bolj uporaba obeh ved. PMFF vzgaja študente predvsem za srednješolske profesorje. Na TF pa sta matematika in fizika osnovna predmeta za večino tehniških strok; razen tega vzgaja TF tudi tehniške fizike in predvidoma bo uvedena še posebna jedrska smer.

Dejstvo, da sta obe znanosti tudi za tehniko zelo pomembni, terja od univerze, da goji skladno teorijo in uporabo. Toda kaj neprikladno je, če imamo ločena inštituta za teoretične in uporabne smeri v istih strokah. Saj se znotraj

vsake vede obe smeri tesno prepletata. Potrebni povezavi teorije z uporabo bi bolje ustrezal enoten, širok inštitut kakor razdrobljene organizacijske enote.

Druga slabost dosedanje organizacije je materialne narave. Obe vedi zahtevata bogato knjižnico in — fizika že danes, matematika pa prav gotovo jutri — drag instrumentarij. Sredstva, ki jih daje skupnost za razvoj obeh ved na domačih tleh, se pri dvotirnem delovanju ne morejo uporabiti povsem racionalno, ker ustvarjamo z njimi po več šibkih inštitutov z nepopolnim inventarjem, namesto da bi imeli močnejši, solidno opremljen inštitut.

Tretji pomislek glede sedanjega stanja zadeva vzgojo kadra. Kako pereče je vprašanje kadra matematikov in fizikov na naši univerzi, ni treba posebej poudarjati. Delovno atmosfero, ki je predpogoj za vzgojo naraščaja, pa je laže ustvariti v enotnem inštitutu, kjer dela večje število ljudi.

Sedaj, ko se fakultete reorganizirajo, je najboljša priložnost, da se reši tudi zgoraj nakazani problem. Glede na različne možnosti pri reorganizaciji fakultet so v naslednjem podani štirje predlogi, ki bi lahko služili kot osnova za iskanje najprimernejše rešitve.

Prva možnost bi bila, da se sedanji inštituti ohranijo, da pa se istovrstni inštituti prostovoljno povežejo v nekako asociacijo in najdejo oblike medsebojnega sodelovanja tako na znanstvenem kot na pedagoškem polju.

Po drugi varianti bi imeli namesto dveh ali treh istovrstnih inštitutov samo en fizikalni in en matematični inštitut, ki bi bila oba neposredno podrejena univerzi. V teh inštitutih bi bile lahko zastopane vse prizadete fakultete. — Zdi se pa, da bi predstavljala takšna rešitev le izhod za silo in da bi prinesla precej administrativnih težav.

Tretji, še bolj radikalen predlog je ta, da bi se sedanji Oddelek za splošne predmete in Odsek za fiziko TF (ki se že nameravata združiti) ter Matematično fizikalni odsek na PMFF združili v eno enoto, ki bi lahko tvorila samostojen oddelek pri eni izmed obeh fakultet.

V primeru pa, da bi se Tehniška fakulteta razcepila na več fakultet, se zdi najprimernejša četrta varianta, po kateri bi sedanji Matematično fizikalni odsek PMFF, Oddelek za splošne predmete TF, Odsek za fiziko TF, Oddelek za kemijo TF in Kemijski odsek PMFF skupaj stvorili novo fakulteto. O tem predlogu bi se seveda bilo treba sporazumeti s člani obeh kemijskih oddelkov. Nova fakulteta bi na svojih področjih obdržala vse naloge obeh sedanjih fakultet. Med te naloge spada vzgoja inženirjev kemije in fizike s specializacijo v nuklearni tehniki, prav tako pa vzgoja profesorjev matematike, fizike in kemije ter drugih kadrov. Kdaj kasneje bomo morda lahko mislili na samostojno inženirsko smer tudi pri matematiki in mehaniki.

Kakor doslej bi oddelek (ali fakulteta) skrbel tudi za predavanja iz svojih strok za druge oddelke in fakultete.

S samo reorganizacijo seveda vsi problemi ne bodo rešeni, ampak bo treba prizadete inštitute tudi prostorsko združiti. Pri tem ni važna samo združitev matematike zase in fizike zase, ampak prav tako medsebojna povezava matematike, fizike, mehanike, astronomije in sorodnih strok. V bodočnosti bomo morali misliti na skupno streho. Upoštevati je treba, da živijo prizadeti inštituti danes v mnogo pretesnih prostorih, ki deloma ne zadoščajo niti za pouk in ne dopuščajo prav nobenega razvoja.

Upamo, da bosta obe fakulteti rešili nakazane probleme v korist razvoja naših strok.

Društvo matematikov in fizikov LRS.

NOVE KNJIGE

SVET SVETLOBE IN BARV

Miroslav Adlešič: Svet žive fizike. 1. knjiga: **Svet svetlobe in barv.** Mladinska knjiga, Ljubljana 1957, 574 strani, 697 slik, 42 barvnih prilog.

Knjiga je namenjena ljubiteljem uporabnih znanosti in prijateljem umetnosti. V njej so obdelana naslednja poglavja: Svet vidne svetlobe (Nihanja in valovanja, odboj in lom svetlobe, razklon svetlobe — spektrum, razširjanje svetlobe, leče, oči in vid, daljnogledi, fotografski proces in fotografska optika, mikroskopija, spektroskopija, še nekaj o optičnih pripravah, interferenca svetlobe, uklon svetlobe, polarizacija svetlobe, luminiscentni pojavi). Svet nevidne svetlobe (Razved v svetu nevidnega sevanja, kvantna teorija v okviru nauka o svetlobi, elektronska mikroskopija). Svetloba in gledanje. Nauk o barvah. Razgledi in teorije. Praktično barvoslovje.

Besedilo pojasnjuje mnogo zanimivih barvnih in črnobelih fotografij, risb, diagramov in tabel.

Knjiga je prvo obširnejše slovensko delo, ki nam prikazuje optiko in nauk o barvah teoretično in praktično, in sicer v zanimivi ter privlačni obliki brez matematičnih obrazcev. Pisana je tako, da koristi tudi bralcu, ki se želi razgledati le na ožjem področju, ki ga zanima. Z užitkom jo bodo brali prijatelji fizike in sploh naravoznanstva ter prijatelji slikarstva, pa tudi tisti, ki imajo poklice, ki so v zvezi s svetlobo, razsvetljavo, z barvami in slikanjem. *J. Š.*

FIZIKALNA MERJENJA

dr. ing. M. Paić: Fizička mjerenja III, Školska knjiga, Zagreb 1957, 258 strani.

Knjiga vsebuje merjenja visokih temperatur in električna merjenja, zlasti tista, ki so v zvezi z elektronkami, s fotoelektričnim efektom, z električnim nihanjem, z uporabo jakega toka in s katodnim oscilografom.

Namenjena je študentom 3. letnika, ki študirajo fiziko na univerzi v Zagrebu, služila bo pa tudi tistim, ki predavajo fiziko in jo praktično uporabljajo.

I. Š.

VIŠJA MATEMATIKA

J. Bass: Cours de Mathématiques: Masson et Cie, Paris 1956; 916 + XI strani, 363 slik; cena: 8 500 Frs.

Knjiga je učbenik višje matematike in je namenjena inženirjem. Po vsebini, zlasti pa s primeri skuša ustreči potrebam mehanike, nauka o trdnosti, hidromehanike, elektrike in splošne fizike. Za njeno razumevanje je potrebno že dokajšnje poznavanje nekaterih področij višje matematike. Kljub temu, da je knjiga precej obsežna, pa je zaradi nenavadne obilice obravnavane snovi marsikje tako koncentrirana, da jo bralec, ki učne tvarine še ne pozna, le s težavo razume. Na dobrih devetstotih straneh je avtor obdelal tale poglavja:

1. Linearna algebra; vektorski prostori, matrice, Hermitov prostor, tenzorska algebra. 2. Integral; množice funkcij, določeni integral, integriranje, numerično integriranje, vrste. 3. Funkcije, definirane z vrstami ali integrali;

vrste funkcij, Fourierove vrste, ortogonalne funkcije, Fourierov integral. 4. Krivulje, krivuljni integrali; teorija krivulj, planimetri in integrali. 5. Ploskve, večkratni integrali; dvojni integral, teorija ploskev, ploskovni integral, vektorska analiza, Eulerjeve funkcije, simbolični račun. 6. Analitične funkcije; odvod analitične funkcije, konformna upodobitev, elementarne funkcije, integrali analitičnih funkcij, vrste, residuum. 7. Diferencialne enačbe; splošne lastnosti, sistemi linearnih enačb, Besselova funkcija. 8. Parcialne diferencialne enačbe, potencial; linearne enačbe prvega reda, nelinearne enačbe prvega reda, linearne enačbe drugega reda, Newtonov potencial. 9. Variacijski račun. 10. Funkcijske mreže, nomografija.

Vsako poglavje je zaključil s precej bogato zbirko nalog in z bibliografijo. Naloge so brez rešitev, pri težjih pa najdemo kratke napotke za razreševanje. V bibliografiji so navedeni večinoma francoski avtorji.

Alojzij Vadnal

VPRAŠANJA

6. PRAVOKOTNIK IZ KVADRATOV

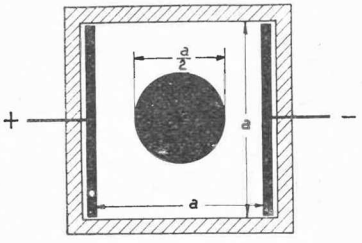
V matematiki je mogoče formulirati mnogo problemov, ki so elementarni v tem smislu, da jih lahko razumemo brez velikega znanja matematike, so pa kljub temu često zelo težki, saj nekateri med njimi sploh še niso bili rešeni. Problem štirih barv, Goldbachov problem (treba je dokazati, da je vsako sodo število vsota dveh praštevil) in Fermatov problem so taki zgledi. Seveda niso vsi tako težki kakor navedeni. Neko tako zanimivo vprašanje, ki je tudi popolnoma elementarno, je stavil l. 1939 H. Toepken v Jahresbericht der DMV. Glasi se:

Dokaži, da ni mogoče sestaviti pravokotnika iz n med seboj različnih kvadratov, če je $n < 9!$ Z devetimi različnimi kvadrati pa se dasta sestaviti le pravokotnika, ki imata razmerje stranic 32:33 in 61:69. Seveda se pri tem kvadrati ne smejo prekrivati niti ne sme ostati kak del pravokotnika nepokrit.

Ivan Vidav

7. ČUDNA ELEKTROLIZA

Na sredi kockaste elektrolizne kadi z robom a, ki je do vrha napolnjena z razredčeno žvepleno kislino, stoji valj s premerom $\frac{1}{2}a$ in višino a. Os valja je vzporedna z elektrodama, ki pokrivata nasprotni steni kadi (glej tloris na sliki!). Elektroda in valj sta iz enake kovine, ki je kislina ne načenja. Raztopino elektroliziramo s tolikšnim tokom, da je napetost med elektrodama enaka štirikratni polarizacijski napetosti.



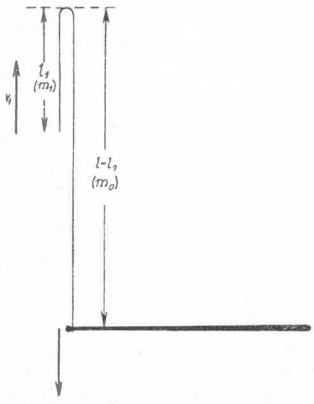
Ali se tudi na valju kaj izloča? Kolikšen del toka teče skozi valj?

Ivan Kuščer

ODGOVORI

GIBANJE BIČA

(Odgovor na vprašanje 6 iz III. letnika)



Naloga se da enostavno rešiti, če vzamemo, da smemo zanemariti debelino vrvice, upogibno trdnost vrvice in njeno raztegljivost.

Upoštevajmo, da veljata za bič zakona o gibalni količini in o kinetični energiji. Pri tem bomo z indeksom 1 zaznamovali količine za tisti del biča, ki visi še v prvotni legi in se giblje navzgor. Drugemu delu biča, ki se je že prepognil in ki ga vlečemo s stalno hitrostjo (v_0) navzdol, pa pripišemo indeks 0. Navedena zakona povesta, da je

$$F = d\,(m_0\,v_0 - m_1\,v_1)/dt$$

$$Fv_0 = d\,(\tfrac{1}{2}\,m_0\,v_0^2 + \tfrac{1}{2}\,m_1\,v_1^2)/dt$$

Sledi: $v_0\,d\,(m_0\,v_0 - m_1\,v_1)/dt = d\,(\tfrac{1}{2}\,m_1\,v_1^2 + \tfrac{1}{2}\,m_0\,v_0^2)/dt$

Na obeh straneh integriramo po času in upoštevamo, da je v_0 = konst. ter $m_0 = (m - m_1)$, pri čemer je m masa celotne vrvice. Iz pogoja, da je ob začetku $v_1 = 0$ ter $m_0 = 0$, sklepamo, da je integracijska konstanta nič. Po kratkem računu dobimo: $v_1 = v_0\,(\sqrt{m/m_1} - 1) = v_0\,(\sqrt{l/l_1} - 1)$, pri čemer je l celotna dolžina vrvice, l_1 pa dolžina tistega dela, ki še visi.

Iz slike je razvidno, da je $dl_1/dt = -\tfrac{1}{2}\,(v_0 + v_1)$. Z upoštevanjem prejšnjega rezultata dobimo torej naslednjo diferencialno enačbo za $l_1\,(t)$:

$$dl_1/dt = -\tfrac{1}{2}\,v_0\,\sqrt{l/l_1}$$

katere rešitev je

$$l_1 = l\,(1 - 3\,v_0\,t/4\,l)^{2/3}$$

Sledi:

$$v_1 = v_0\,[(1 - 3\,v_0\,t/4\,l)^{-1/3} - 1]$$

Če vstavimo te količine v izraz za silo, upoštevajoč, da je $m_1 = ml_1/l$, dobimo:

$$F = \tfrac{1}{2}\,(m/l)\,v_0^2\,(1 - 3\,v_0\,t/4\,l)^{-2/3} = m\,v_0^2/ll_1$$

Čas trajanja poskusa (t_1) dobimo iz pogoja, da je $l_1\,(t_1) = 0$; torej $t_1 = 4\,l/3\,v_0$. Izkaže se, da je $v_1\,(t_1) = \infty$ in $F\,(t_1) = \infty$.

Milan Gergič

Opomba urednika: Zadnji rezultat kaže, da ne bi mogli s končno veliko silo ves čas vleči konec biča s konstantno hitrostjo v_0, če bi imel bič res vse zahtevane idealne lastnosti. V resnici seveda sila F in hitrost v_1 ne naraščata neskončno. Res pa je, da doseže prosti konec biča precej veliko hitrost, ki more preseči zvočno hitrost. Zato bič poči.

ŠE O STATISTIKI PEŠČENIH ZRN

(Vprašanje 4 iz III. letnika, str. 32; odgovor prav tam, str. 187)

Prešteli smo N zrn peska in ugotovili A zrn granata. B zrn turmalina, C zrn distena in D zrn ostalih. V odgovoru S. Pahorja v 5.—6. številki III. letnika je pojasnjeno, da je verjetnost, da dobimo ravno števila A, B, C, D enaka $(N!/A!B!C!D!) \cdot p^A q^B r^C s^D$, kjer so p, q, r in s verjetnosti, da naletimo po naključju na posamezno zrno granata itd. Če prevladuje ena vrsta zrn, lahko preidemo na Poissonovo porazdelitev, kakor je to napravil Pahor. V splošnem pa moramo ostati pri navedeni formuli. Najprej se zanimajmo le za zrna granata! Verjetnost, da dobimo med N zrni A zrn granata, je $N!/A!(N-A)! \cdot p^A (1-p)^{N-A}$; ta formula opisuje tako imenovano *Bernoullijevo porazdelitev*. Upoštevali smo, da je drugih zrn $N - A$, ni nas pa zanimala njihova medsebojna porazdelitev. Pri Bernoullijevi porazdelitvi dobimo po kratkem računu za efektivni (= standardni) odmik naslednji rezultat: $(A - \bar{A})^2 = \sigma_A^2 = Np(1-p)$. (Podobni izrazi veljajo tudi za druga zrna.) Če hočemo, da je kvocient σ_A/N manjši kot ε, mora biti $Np(1-p)/N^2 < \varepsilon^2$ in zato $N > p(1-p)/\varepsilon^2$. Če je $p = 0{,}82$ in $\varepsilon = 0{,}005$, mora biti $N > 5900$. Na enak način ugotovimo še, da pri tolikšnem N tudi za ostala zrna kvocient σ/N ni večji kot 0,005.

Mitja Rosina

ENERGIJA ELASTIČNIH TELES

(Vprašanje 10 iz IV. letnika)

Pri vprašanju ni povedano, kako je s temperaturo in toplotno izoliranostjo vrvice. Zanimiva sta predvsem oba skrajna primera, ko sta konstantni bodisi temperatura ali pa entropija vrvice. Oglejmo si najprej prvi primer!

Če vrvico pri stalni temperaturi najprej raztegnemo za s in potem tordiramo za kot φ, opravimo delo A_1; če jo pa najprej tordiramo za kot φ in potem raztegnemo za s, opravimo delo A_2. Ker je vrvica idealno prožna, dobimo v vsakem primeru opravljeno delo povrnjeno, če spravimo vrvico po isti poti nazaj v prvotno stanje. Vzemimo, da bi bilo $A_1 < A_2$! Deformirajmo vrvico po poti 1, nazaj v prvotno stanje pa se vrnimo po poti 2! S tem pridobimo delo $A_1 - A_2$ na račun toplote, ki jo prejme vrvica iz okolice! S periodičnim ponavljanjem te krožne izotermne spremembe dobimo perpetuum mobile druge vrste, ki pa po entropijskem zakonu ni mogoč. Z obrnjeno krožno spremembo ugotovimo, da tudi $A_2 < A_1$ ne more biti. Torej je $A_1 = A_2$, q. e. d.

Ta zaključek se da še drugače formulirati. Iz entropijskega zakona splošno sledi, da je delo, ki ga kako telo prejme pri obrnljivi izotermni spremembi, odvisno samo od začetnega in končnega stanja, ne pa od vmesne poti. To delo je enako spremembi proste energije telesa, ki je enolična funkcija stanja. (Z notranjo energijo W in entropijo S se prosta energija F takole izraža: $F = W - TS$.)

Preden se lotimo obravnavanja adiabatne deformacije, si moramo biti na jasnem, koliko je neodvisnih termodinamičnih spremenljivk. Ravnovesno stanje enakomerno raztegnjene in tordirane vrvice je popolnoma opredeljeno s tremi spremenljivkami, na primer s podaljškom s, kotom φ in temperaturo T. Namesto teh vzamemo seveda lahko kako drugo trojico med seboj neodvisnih termo-

dinamičnih spremenljivk. Kot tretjo spremenljivko bomo sedaj raje vzeli entropijo, ki je pri vsaki obrnljivi adiabatni spremembi konstantna.

Iz povedanega sledi, da je pri obeh navedenih poskusih, če ju naredimo z adiabatno izolirano vrvico, končno doseženo stanje enako, ker imajo spremenljivke s, φ, S obakrat enake vrednosti (tudi končna temperatura je zato obakrat enaka.) Po energijskem zakonu je pri vsaki spremembi toplotno izoliranega telesa (tudi če sprememba ni obrnljiva) opravljeno delo odvisno samo od začetnega in končnega stanja telesa, ne pa od vmesne poti. To delo je enako spremembi notranje energije telesa (vrvice), ki je enolična funkcija stanja.

Videli smo, da nam v obeh prikazanih primerih energijski zakon ne zadošča, ampak se moramo sklicevati še na entropijski zakon.

Če deformacija ni niti izotermna, niti adiabatna, enakost dela za različne poti ni nujna. Saj lahko s kombinacijo dveh adiabatnih in dveh izotermnih deformacij (pri različnih temperaturah) sestavimo krožno spremembo Carnotovega tipa.

Mitja Rosina

ODGOVOR NA VPRAŠANJE ŠT. 2

Pri stalni temperaturi in v popolnem ravnotežju pojema tlak z višino eksponentno: $p(x) = p.e^{-ax}$. Tu pomeni x višino nad morsko gladino. Ker je gostota sorazmerna tlaku, pojema tudi sama eksponentno.

Vprašanje je: Kakšna mora biti porazdelitev molekul glede vertikalne komponente hitrosti, če naj gostota pojema eksponentno? Pri tem vzemimo še naslednje poenostavitve: trkov med molekulami naj ne bo; tla, od katerih se padajoče molekule odbijajo, naj bodo gladka in horizontalna; odboj naj bo popolnoma elastičen; vse molekule naj imajo enako maso.

Naj bo $\varphi(v)\,dv$ število molekul, ki imajo pri tleh vertikalno komponento hitrosti med v in $v + dv$. Porazdelitvena funkcija $\varphi(v)$ je v ravnotežju od časa neodvisna. Vzemimo molekulo, ki ima ob odboju hitrost med v in $v + dv$. Zaznamujmo z dt čas, v katerem preteče ta molekula plast debeline dx v višini x. Da pride molekula od tal do najvišje točke svoje poti, porabi $T = v/g$ sekund. Ker smo vzeli, da trkov med molekulami ni, pade molekula po odboju od tal čez $2T = 2v/g$ sekund zopet na tla. V zgoraj omenjeni plasti se pri dviganju in padanju zadržuje $2\,dt$ sekund; torej je povprečno v tej plasti (dt/T)-ti del časa. Povprečna časovna gostota, ki jo prinese ta molekula, je zato mdt/Tdx. Tu pomeni m maso molekule. Molekul s hitrostmi med v in $v + dv$ pa je $\varphi(v)\,dv$; takó je gostota molekul s hitrostmi ob odboju med v in $v + dv$ v višini x enaka

$$d\varrho = m\,\varphi(v)dvdt/Tdx$$

Upoštevajmo še, da je $dx = v_x\,dt$, kjer je v_x hitrost molekule v višini x. Iz zakona o ohranitvi energije izračunamo v_x; velja namreč $\frac{1}{2}\,mv^2 = \frac{1}{2}\,mv_x^2 + mgx$. Od tod je $v_x = (v^2 - 2\,gx)^{\frac{1}{2}}$. Če vse to upoštevamo v izrazu za $d\varrho$, dobimo:

$$d\varrho = mg\,\varphi(v)\,dv/vv_x = mg\,\varphi(v)\,dv/v\,(v^2 - 2\,gx)^{\frac{1}{2}}$$

Ker hočemo imeti celotno gostoto, moramo sešteti gostote, ki jih doprinesejo molekule z vsemi hitrostmi. Vendar dosežejo višino x le tiste molekule, ka-

tdrih hitrost ob odboju ni manjša od $(2\,gx)^{\frac{1}{2}}$. Zato integriramo $d\varrho$ na vse hitrosti od $(2\,gx)^{\frac{1}{2}}$ naprej:

$$\varrho\,(x) = \int_{\sqrt{2\,gx}}^{\infty} \frac{mg\,\varphi\,(v)\,dv}{v\,(v^2 - 2\,gx)^{\frac{1}{2}}}$$

Ker pada gostota eksponentno, imamo od tod enačbo:

$$\int_{\sqrt{2\,gx}}^{\infty} \frac{\varphi\,(v)\,dv}{v\,(v^2 - 2\,gx)^{\frac{1}{2}}} = C\,e^{-xa}$$

Naša naloga je, določiti iz te integralske enačbe funkcijo $\varphi\,(v)$. Če napravimo substitucijo $v^2 = y^2 + 2\,gx$, dobimo

$$\int_0^{\infty} \frac{\varphi\,[(y^2 + 2\,gx)^{\frac{1}{2}}]\,dy}{y^2 + 2\,gx} = C\,e^{-ax}$$

Postavimo še $\varphi\,(z^{\frac{1}{2}})/z = f\,(z)$. Enačba dobi enostavnejšo obliko:

$$\int_0^{\infty} f\,(y^2 + 2\,gx)\,dy = C\,e^{-ax}$$

Substitucija $2\,gx = u$ nam da

$$\int_0^{\infty} f\,(y^2 + u)\,dy = C\,e^{-bu}, \quad b = a/2\,g \tag{1}$$

Ta enačba je poseben primer integralske enačbe

$$\int_0^{\infty} f\,(y^2 + u)\,dy = F\,(u) \tag{2}$$

kjer je $F\,(u)$ znana funkcija u-ja. Rešimo jo takole:

Če substituiramo $u = z^2 + t$, pomnožimo dobljeno enačbo z dz in integriramo na z od 0 do ∞, dobimo

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} f\,(y^2 + z^2 + t)\,dy dz = \int_0^{\infty} F\,(z^2 + t)\,dz$$

Na levi vpeljimo polarne koordinate $y = r\cos\varphi$, $z = r\sin\varphi$. Ker se integral nanaša na prvi kvadrant, moramo integrirati na r od 0 do ∞, na φ pa od 0 do $\frac{1}{2}\pi$. Funkcija pod integralom ni odvisna od φ; torej moremo integracijo na φ izvršiti, kar nam da

$$\tfrac{1}{2}\pi \int_0^{\infty} f\,(r^2 + t)\,r dr = \int_0^{\infty} F\,(z^2 + t)\,dz$$

Z odvijanjem na t dobimo od tod

$$\tfrac{1}{2}\pi \int_0^{\infty} f'\,(r^2 + t)\,r dr = \frac{d}{dt}\int_0^{\infty} F\,(z^2 + t)\,dz$$

Na levi postavimo novo spremenljivko $r^2 = z$. Tako imamo

$$\tfrac{1}{4}\pi \int_0^\infty f'(z+t)\,dz = \frac{d}{dt}\int_0^\infty F(z^2+t)\,dz$$

Integracija leve strani nam da rešitev naše integralske enačbe:

$$f(t) = -\frac{4}{\pi}\cdot\frac{d}{dt}\int_0^\infty F(z^2+t)\,dz \tag{3}$$

Tu smo upoštevali, da je $f(\infty) = 0$.

Da dobimo rešitev problema (1), vstavimo v (3) za $F(u)$ funkcijo $C\,e^{-bu}$. Rešitev se tedaj glasi

$$f(t) = -\frac{4C}{\pi}\frac{d}{dt}\int_0^\infty e^{-b(z^2+t)}\,dz = 2C\sqrt{\frac{b}{\pi}}\,e^{-bt}$$

Pri tem smo upoštevali, da je vrednost integrala $\int_0^\infty e^{-bz^2}\,dz$ enaka $\frac{1}{2}(\pi/b)^{\frac{1}{2}}$. (Glej I. Vidav, Višja mat., I. del, str. 404.) Ker je $b = a/2g$ ter $\varphi(v) = v^2 f(v^2)$, dobimo od tod porazdelitveno funkcijo:

$$\varphi(V) = C\,(2a/\pi g)^{\frac{1}{2}}\,v^2\,e^{-av^2/2g}$$

Drugo vprašanje je podobno prvemu. Kroglice mečemo navpično navzgor. Kakšna mora biti porazdelitev začetnih hitrosti kroglic, da bo povprečna časovna gostota kroglic po višini enakomerna?

Vzemimo, da smo tako stanje že dosegli. Na enak način, kot v prejšnjem primeru izračunamo gostoto kroglic, le da je porazdelitvena funkcija $\varphi(v)$ seveda druga. Vzeti moramo, da mečemo kroglice le do neke končne višine a. (Če bi vzeli lim $a = \infty$, problem ne bi imel rešitve.) Zato je gostota v višinah, večjih od a, enaka 0; funkcija $\varphi(v)$ pa je tudi enaka 0, če je v večji od $(2ga)^{\frac{1}{2}}$. Če vse to upoštevamo, dobimo enačbo v obliki:

$$\int_{\sqrt{2gx}}^\infty \frac{\varphi(v)\,dv}{v\,(v^2-2gx)^{\frac{1}{2}}} = \begin{cases} C, & 0 \le x \le a \\ 0, & x > a \end{cases}$$

Ustrezna integralska enačba (2) je tu

$$\int_0^\infty f(t^2+y)\,dt = F(y) = \begin{cases} C, & 0 \le y \le 2ga \\ 0, & y > 2ga \end{cases} \tag{4}$$

V splošno rešitev (3) moramo postaviti na desno stran s (4) definirano funkcijo $F(y)$. Ko izvršimo nakazano integracijo in odvajanje, dobimo

$$f(y) = 2C/\pi\,(2ga - y)^{\frac{1}{2}}$$

Ker je zopet $\varphi(v) = v^2 f(v^2)$, ima porazdelitvena funkcija v tem primeru obliko

$$\varphi(v) = 2Cv^2/\pi\,(2ga - v^2)^{\frac{1}{2}}, \quad 0 \le v < (2ga)^{\frac{1}{2}}$$

za $v > (2ga)^{\frac{1}{2}}$ pa je $\varphi(v) \equiv 0$.

Anton Suhadolc

UREDNIŠTVO JE PREJELO V ZAMENO

Bulletin scientifique, Zagreb 1956, T 3, No 2.
Bulletin de la Société mathématique de France, Paris 1956, T 84, F. III, IV.
Bulletin of the Institute of nuclear sciences Boris Kidrich, Beograd 1957, Vol. 7.
Elektrotehniški vestnik, Ljubljana 1957, XXV, št. 1—2, 3—4.
Farmacevtski vestnik, Ljubljana 1957, VIII, št. 1—2, 3—4, 5—6.
Fotokemijska industrija, Zagreb 1957, IV, št. 1, 2.
Geologija, razprave in poročila, Ljubljana 1954, 1955.
Glasnik mat.-fiz. i astr., Zagreb 1956, T. 11, No 3—4.
Gospodarski vestnik, Ljubljana 1957, št. 15—50.
Idrijski razgledi, Idrija 1956, št. 3, 4; 1957, št. 1.
Hathaway Engineering News, Denver-Colo — 19.
Le Courrier de l'Unesco, Paris 1957, X, april, maj.
Matematično-fizički list, Zagreb 1956/57, VII, št. 3, 4.
Modern Precision, Philadelphia 1957, Vol. 16, No. 2.
Nastava matematike i fizike, Beograd 1956, V, št. 4.
Philip's Technische Rundschau, Eindhoven 1956/57, No. 9, 10, 11.
Physics Today, New York 1956, Vol. 9, No. 11, 12.
Proteus, Ljubljana 1956/57, XIX, št. 7, 8, 9, 10.
Publikacije elektroteh. fakulteta, Beograd 1957, No. 11, 12.
Reports J. Stefan Institute, Ljubljana 1956, Vol. 3.
Sodobna pedagogika, Ljubljana 1957, VIII, št. 1—2.
Ukrainskij matematičeskij žurnal, Kiev 1957, T. IX, No. 1.
Uspehi matematičeskih nauk, Moskva 1957, T. XII, 1 (73), 2 (74).
Varilna tehnika, Ljubljana 1956, št. 1—4.
Vestnik Leningradskogo universiteta, Leningrad 1956, No. 22; 1957, No. 1, 4, 7.
Zdravstveni vestnik, Ljubljana 1956; XXV, št. 12; 1957, št. 1—2, 3, 4.

Zveza Društev matematikov in fizikov FLRJ izdaja časopis:

Nastava matematike i fizike

Naročnina je za člane vseh republiških društev matematikov in fizikov 300 din, za ostale naročnike, šole in biblioteke 400 din. Naročila in naročnino pošiljajte na žiro-račun Nastave 10-KB-2-Ž-1262 z oznako Za »Nastavu« za l. 1957. Časopis naročite lahko tudi pri našem Društvu.

Društvo matematikov in fizikov NRS izdaja

Vesnik Društva matematičara i fizičara NRS

Letno izide v dveh dvojnih številkah, letna naročnina je 400 din. Naročnino pošiljajte na ček. račun 102-T-119 Društvu matematičara i fizičara NRS pod označbo »Za Vesnik«.

Društvo matematikov in fizikov NRH izdaja za vso državo

MATEMATIČKO FIZIČKI LIST

za učenike srednjih škola. Letnik ima 4 številke, med počitnicami ne izhaja. Letna naročnina je 200 din, posamezna številka 60 din.

Profesorji srednjih šol, priporočajte list dijakom! Naročila in naročnino pošiljajte na naslov:

Matematičko-fizički list, Zagreb, Ilica 16/III, p. p. 165 ali na čekovni račun št. 401-T-1080.

Društvo matematičara i fizičara N. R. Hrvatske poziva sve, koji se zanimaju matematičko-fizičkim naukama, da se pretplate na

Glasnik
matematičko-fizički i astronomski

i sarađuju u njemu.

Zaista ne bi smjelo biti ni jednog kulturnog radnika, koji se bavi matematičko-fizičkim naukama, kao ni prosvjetne ustanove, koja nije pretplatnik Glasnika. Pretplatom i suradnjom u svojem naučnom i stručnom časopisu pokazujete u kolikoj mjeri pratite i podupirete razvitak i napredak svoje struke. Širite također Glasnik u svom krugu, jer time podupirete razvitak matematičko-fizičkih nauka u svojoj okolini.

Prijave pretplate slati na administraciju Glasnika: Zagreb, Ilica 16/III. Pretplata za god. 1957 iznosi 480.— din i šalje se na ček. br. 401-606/I-K-1077.

Obzornik za matematiko in fiziko izhaja vsak tretji mesec. Izdaja ga Društvo matematikov in fizikov LRS. Urejujejo ga: A. Kuhelj, I. Kuščer, A. Moljk, N. Prijatelj, I. Vidav. Odgovorni in tehnični urednik: I. Štalec. Upravo vodi I. Štalec. — Tiska tiskarna ČZP »Ljudska pravica« v Ljubljani. — Naročnina je 250 din, za podjetja in ustanove, ki plačajo po računu in za naročnike, ki plačajo po terjatvi 280 din. Posamezna številka 100 din. Naročnino nakažite na naš čekovni račun 60-KB-1-Ž-207. Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov:

Obzornik za matematiko in fiziko, Ljubljana, poštni predal 253.