

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



**LJUBLJANA
1956-57
V. št. 1**

VSEBINA

Članki	Stran
Ob stoletnici rojstva Nikole Tesle (Lavo Čermelj)	1
Moderna algebra in kvantna mehanika (Ivan Vidav)	5
O Tauberjevem izreku za potenčne vrste (Anton Suhadole)	16
Antiproton (Bibijana Čujec-Dobovišek)	21
Elektrostatični pospeševalnik (Edvard Cilenšek)	25
 Novice	
Analogni računski stroji za reševanje sistemov linearnih enačb (Rudolf Kladnik)	34
Dolgoživ radioaktiven izotop aluminija (Silvester Šterbal)	38
Rentgenski žarki s Sonca (Mitja Kregar)	39
 Šola	
Tečaj za fizikalno eksperimentiranje (Francè Ahlin)	42
Joulov poskus v šoli (Rajko Korbar)	44
Vprašanja	41
Nove knjige	45
Odgovori	46

CONTENTS

Articles	Page
Hundredth Anniversary of Nikola Tesla's Birth (by L. Čermelj)	1
Modern Algebra and Quantum mechanics (by I. Vidav)	5
On Tauber's Theorem for Power Series (by A. Suhadole)	16
The Antiproton (by B. Čujec-Dobovišek)	21
The Electrostatic Generator (by E. Cilenšek)	25
 News	
Analog Computers for the Solution of Systems of Linear Equations (by R. Kladnik)	34
Longlived Radioactive Isotope of Aluminum (by S. Šterbal)	38
X-Rays from the Sun (by M. Kregar)	39
 School	
Course of Demonstration Experiments in Physics (by F. Ahlin)	42
Joule's Experiment in the Classroom (by R. Korbar)	44
Questions	41
New Books	45
Answers	46

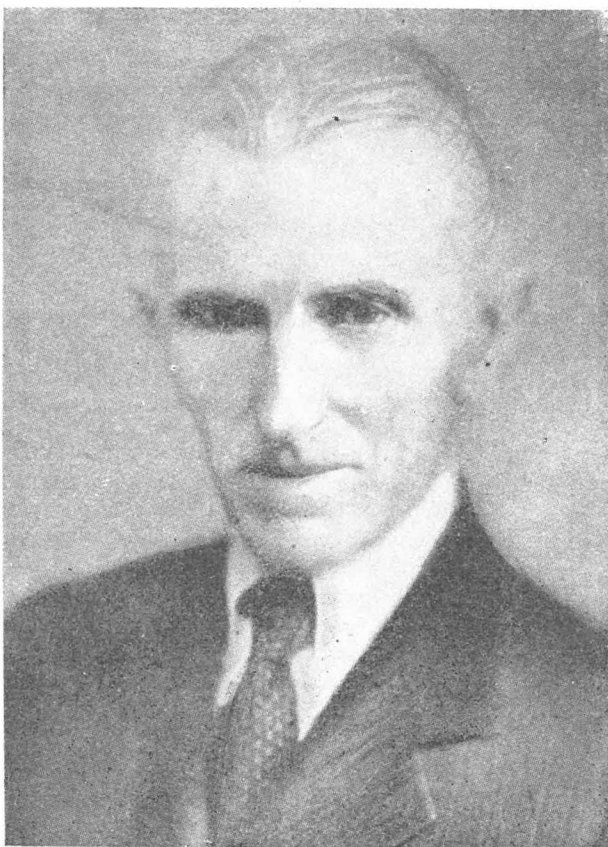
The OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO is published quarterly by the Society of Mathematicians and Physicists of Slovenia. Summaries in English, French German or Russian will appear with some articles.

Letters should be addressed to: Obzornik za matematiko in fiziko, P. p. 253, Ljubljana, Yugoslavia.

OB STOLETNICI ROJSTVA NIKOLE TESLE

LAVO ČERMELJ

10. julija letos je bila v dvorani Jugoslovanskega dramskega gledališča v Beogradu slavnostna akademija, posvečena stoletnici rojstva Nikole Tesle. Slavnosti so prisostvovali znanstveniki iz vsega sveta, med njimi Nobelov laureat Niels Bohr iz Danske, Arthur Fleming iz Anglije, profesor Karl Chambers iz Pensilvanije, prof. Aleksejev iz ZSSR, švedski znanstvenik Dahlgren, predsednik Mednarodne elektrotehniške komisije Dunsheat in predsednik Ameriškega inštituta elektrotehniških inženirjev Richard Sogge. Že prisotnost toliko velikih znanstvenikov v glavnem mestu naše države, ko je slavila stoti rojstni dan svojega sina Nikole Tesle, je najboljši dokaz za veličino moža, ki mu je veljala ta slavnost. Iz tega pa smemo tudi sklepati,



da zaslug slavljenca ne ceni samo njegova domovina, temveč da pripada Tesla po svojem delu vsemu kulturnemu svetu. V skladu s tem pripravlja Ameriški inštitut elektrotehniških inženirjev veliko komemoracijo v času od 1. do 5. oktobra v Chicagu. Ob tej priliki bodo ustanovili Teslovo medaljo, ki jo bodo podelili vsako leto za uspehe na področju elektrotehnike. Na akademiji v Beogradu pa je predsednik Mednarodne elektrotehniške komisije Dunsheat prebral sklep akcijskega odbora te komisije, ki se je sestel 27. junija v Münchenu, da sprejme predlog, po katerem naj enota za magnetno indukcijo (gostoto magnetnega toka) v merskem sestavu MKSA (meter-kilogram-sekunda-amper) nosi

ime po Tesli. En tesla (znak T) je magnetni tok (fluks) ene voltsekunde ali webra ($Wb = Vs$) skozi prerez enega kvadratnega metra:

$$1\text{ T} = 1\text{ Wb/m}^2 = 10^4\text{ gauss}$$

S temi proslavami in sklepi bo znanstveni svet Nikoli Tesli vsaj po smrti izkazal zaslužen priznanje in poskrbel, da se njegovo ime ne bo tako hitro pozabilo, kakor se je že ime marsikaterega drugega velikega izumitelja. Nevarnost je bila prav velika. Saj je vodilna ameriška tehniška revija »Power« v članku, kjer govori o pomenu Nikole Tesle za električno industrijo, ugotavljala, da bi na vprašanje, kdo je postavil temelje sodobnemu proizvodnji in razdeljevanju elektrike, vodilni možje v industriji navedli celo vrsto imen: Edison, Bush, Thomson, Westinghouse in mnogo drugih, nihče pa ne bi imenoval Tesle. Tako omalovaževanje Teslovega imena je pa po sodbi tega časopisa izredno krivično. Saj se mora človeštvo predvsem Tesli zahvaliti, ako more danes v taki meri proizvajati električno energijo v hidro- in termocentralah in jo razpošiljati na ogromne razdalje.

Devetdeset let je, odkar je Werner Siemens izumil dinamo, ki je omogočil proizvodnjo električne energije v večji količini. V Evropi in Ameriki so začele nastajati prve električne centrale, toda njihovo delovno območje je bilo še dokaj omejeno, kajti proizvajale so le enosmerni električni tok, ki je bil prav pripraven za razsvetljavo in tudi za pogon motorjev, kateri so kljub raznim nedostatkem dobro služili svojemu namenu. Toda prenos enosmernega toka na večje razdalje je bil praktično nemogoč in generatorji takega toka so v primeri z uporabljenim gradbenim materialom dajali premalo energije. Saj je bil za napajanje 50 do 100 obločnic ali desetkrat toliko žarnic potreben poseben generator. Mnogo večje ugodnosti v tem pogledu bi lahko nudil izmenični tok. Proti uporabi takega toka za razsvetljavo pa je nastopil iz gospodarskih razlogov A. Edison, ker si je bil pravkar prisvojil nekaj monopol s centralami za enosmerni tok. Glede možnosti praktično uporabnih motorjev za izmenični tok pa so bili skrajno skeptični tudi ugledni strokovnjaki. Naj omenimo samo Teslovega profesorja na graški tehniki Pöschla in znanega fizika W. Thomsona (Lorda Kelvina).

Toda Tesla je znal premagati vse težave, ki jih je kazal izmenični tok, in vse predsodke, ki so jih navajali proti njegovi uporabi. Maja leta 1888 je imel Tesla v Ameriškem inštitutu elektrotehniških inženirjev predavanje, v katerem je opisal novi sistem za proizvodnjo, prenos in uporabo izmeničnega toka. Jedro tega je bil indukcijski motor, zgrajen na osnovi vrtilnega magnetnega polja.

Način, kako je Tesla rešil problem izmeničnega toka, nam sam jasno priča o izumiteljevi veličini. To ni bil navaden izum, temveč pravo odkritje epohalnega pomena, kakršnih srečamo v zgodovini znanosti in tehnike le prav malo pri umskih velikanih.

V Teslovih možganih se je po izredni intuiciji rodila misel o vrtilnem magnetnem polju. Tako je izumil mnogofazni generator in indukcijski motor ter iznašel najprimernejši način za pretvorbo in prenos večfaznega toka. Spoznal je problem takih tokov v vsem njihovem obsegu. Sam je dognal in izdelal vse, kar je bilo bistvenega. Svojim naslednikom je prepustil le izdelavo raznih nadržnosti. V letih 1887 do 1889 je dal registrirati preko 40 patentov, ki vsebujejo vsa načela sodobne tehnike jakih tokov in popis raznih njenih sestavnih elementov.

Na že omenjenem predavanju v Ameriškem društvu elektrotehniških inženirjev je Tesla pokazal vrtilni motor v obratu. Ognjeni krst pa je prestal njegov izum na mednarodni razstavi v Frankfurtu l. 1892. Ob reki Nekar so postavili generator, ki je pošiljal trofazni tok z napetostjo 355 voltov na razdaljo 175 kilometrov. Leto nato je Westinghouseova družba, ki je pokupila Teslove patente, pokazala na razstavi v Chicagu razne Teslove generatorje, motorje in transformatorje. Dokončno zmago velikega Teslovega odkritja pa je pokazala zgraditev velike hidrocentrale za polifazni sistem ob Niagarskih slapovih. Centrala je začela obratovati v avgustu 1895 in je že naslednje leto prenašala izmenični tok do Buffala. Prav tedaj pa so začeli v Ameriki upeljavati parno turbino, ki je omogočila zgraditev tudi večjih termocentral za proizvodnjo električne energije po Teslovem sistemu. S tem se je dejansko pričela nova doba električne energije.

Toda Tesla ni dalje sledil razvoju na tem področju elektrotehnike. Izredna intuicija mu je pravila, da čuva izmenični tok še marsikatero skrivnost. Usmeril je svoje raziskave na toke visoke in najvišje frekvence. Tu je nastopal kot pravi pionir, kajti vse je bilo novo, vse je bilo treba odkrivati in ustvarjati. Konstruiral je stroje, ki so proizvajali do 35 000 nihajev na sekundo. Visokofrekvenčne tokove je uporabljal za pridobivanje izredno visokih napetosti celo do več milijonov voltov. V ta namen je izumil poseben transformator, ki nosi po njem tudi ime. Tak transformator nima železnega jedra. Primarna tuljava sestoji le iz nekaj širokih ovojev debele žice, vanjo pa je vtaknjena sekundarna tuljava z veliko ovoji tanke žice. S takimi transformatorji je dosegel efekte, ki so silno presenetili laike in znanstvenike in po katerih je zaslovelo njegovo ime po vsem svetu. Maja 1892 je predvajal najvažnejše poizkuse s svojimi toki v Društvu ameriških elektroinženirjev v New Yorku, naslednje leto pa jih je ponovil v Londonu v tamošnjem društvu elektroinženirjev in nato še pred člani Kraljevske družbe, obakrat v delavnici in za mizo, kjer je napravil svoje znamenite preizkuse Michael Faraday. Sledilo je še predavanje v Parizu.

Tesla pa se ni omejil samo na zunanje, naravnost čarovniške efekte teh poskusov, temveč je pokazal tudi pot k uporabi teh tokov v zdravilstvu (diatermija), v metalurgiji (taljenje in ogrevanje kovin) ter k proizvodnji »idealne luči«, ki bi bila mrzla in ne bi zahtevala dovodnih in odvodnih žic.

Z odkritjem visokofrekvenčnih in visokonapetostnih tokov pa je Tesla postavil tudi bazo za sodobno radiotehniko in dejansko tudi izumil vse, kar je zanjo bistvenega. S svojimi visokofrekvenčnimi generatorji in transformatorji je lahko proizvajal neudušeno elektromagnetno valovanje. Že pred letom 1893 je izumil anteno in spoj z zemljo, uvedel induktivno spojitve antenskega in iskrilnega kroga ter odkril električno resonanco.

To naporno delo je trajalo celih 10 let, od 1893 do 1903. Čeprav ga je medtem doletela huda nesreča, ko je zgorel njegov laboratorij, je že l. 1898 lahko predložil patentnemu uradu načrt za stroj, ki bi deloval po brezžičnem prenosu električne energije. Toda patentni urad ni hotel sprejeti prijave, dokler se ni njegov zastopnik na licu mesta prepričal o resničnosti izuma. Ko pa je Tesla kmalu nato ponujal svoj izum ameriški državi, se mu je vladni uradnik, s katerim se je pogovarjal, smejal v obraz: tako neverjetna se mu je zdela novica. In vendar je Tesla že tedaj (sredi 1899) brezžično oddajal znake na več kot 1000 kilometrov razdalje in s tem dejansko pokazal, da je brezžična telegrafija z njegovim sistemom mogoča.

Že ob koncu prejšnjega stoletja je Tesla iz razdalje brezžično dirigiral ladjo na vodi. Uporabljajoč po lastnem izumu izpopolnjeni koherer, je z obrežja

po brezžičnem prenosu premikal, obračal in ustavljal ladjico in na njej užigal električne žarnice. Elektromagnetni valovi so delovali na magnete, ki so opravljali razne operacije z ladijskim vijakom in krmilom ter z raznovrstnimi drugimi napravami. Ladjico je izbral samo kot primer, na katerem je hotel pokazati, da je mogoče ustvarjati tak »avtomaton«, ki se po dirigiranju iz razdalje lahko premika po vodi, na kopnem ali v zraku. Pri njem moramo tedaj iskati začetek dirigiranih izstrelkov, ki so danes v ospredju vojaške tehnike. Avtomaton, ki ga je pokazal Tesla, je imel, kakor je sam izjavil, res samo »izposojene možgane«, toda avtor je bil prepričan, da more tak avtomaton imeti tudi svoje »lastne možgane«, tako da lahko brez tuje pomoči reagira na razne zunanje vplive, kakor da bi res imel dar razuma. Takšne možgane imajo do neke mere že današnji dirigirani izstrelki.

Prav tako je Tesla že med prvo svetovno vojno mislil na odkrivanje podmornic po odboju elektromagnetnih valov, s čimer je postal nekakšen idejni oče sodobnega radarja.

Za prikaz njegove nenavadne intuicije naj še povemo, da je že leta 1881 napovedal, da bo v dogledni bodočnosti možna komunikacija s planeti.

V poznejših letih pa so njegove zamisli postajale vse preveč kozmične in mistične. Po uspehih, ki so jih imele številne njegove napovedi, ki so se v začetku zdele nemogoče, ni izključeno, da se bo ta ali ona od teh, do sedaj neverjetnih napovedi še izpolnila, toda slava, ki si jo je pridobil Tesla kot oče sodobne elektrotehnike jakih tokov, kot iznajditelj visokofrekvenčnih in visokonapetostnih tokov ter kot ustanovitelj današnje radiotehnike, je tako velika, da je katerakoli posmrtna uresničitev njegovih »olimpijskih« napovedi ne bi mogla še bistveno povečati.

HUNDREDTH ANNIVERSARY OF NIKOLA TESLA'S BIRTH

(Summary)

Scientists from all over the world met on July 10, 1956 at Belgrade, the capital of Yugoslavia, to celebrate the hundredth anniversary of the birth of Nikola Tesla, whose work has influenced all modern electrical engineering.

As early as in 1888 Tesla described and demonstrated at the American Institute of Electrical Engineers his new system for the generation, transmission and application of polyphase currents. The essential part of this system was the inductive motor; its construction was based on Tesla's discovery of the rotating magnetic field. The first great power station at the Niagara Falls was the first public application of this system.

Later Tesla studied high-frequency currents and constructed machines which produced currents of 35 000 oscillations per second. He invented a special high-frequency transformer, named after him, by which he could reach potentials of several million volts. In 1912 he demonstrated experiments of this kind before the scientific societies of New York, London and Paris.

With his further investigations he furnished the foundations of the wireless. He invented its essential parts, and he also discovered the electrical resonance. Already in 1899 he transmitted wireless signals to a distance of over 1000 kilometres and he could, standing on the coast, steer a ship at sea.

MODERNA ALGEBRA IN KVANTNA MEHANIKA.

IVAN VIDAV

Po načelih klasične fizike lahko enolično priredimo vsaki fizikalni količini neko realno število, ki pomeni njeno velikost. Potem računamo s fizikalnimi količinami tako, da računamo z ustreznimi števili. Popolnoma drugače je v kvantni mehaniki. Tu v splošnem ni mogoče enolično prirediti števil raznim količinam, kakor so n. pr. koordinate, komponente impulza in energija katerega sistema. Zato tudi z njimi ne moremo računati v navadnem smislu. Računske operacije je treba šele smiselno uvesti. Če to storimo, dobimo neko algebrastično strukturo, ki se razlikuje od aritmetike običajnih števil. Izkaže se, da pridemo do zelo zanimive in lepe matematične teorije, do tako imenovane *Banachove algebre z involucijo*. Namen tega članka je, prikazati glavne značilnosti te algebre in njeno povezavo s kvantno mehaniko. Pri izpeljavah se ne bomo ozirali povsod na matematično strogost.

I. Vpeljava osnovnih računskih operacij.

Fizikalne količine katerega sistema (koordinate, komponente impulza, energije itd.) bomo skušali upodobiti z elementi neke abstraktne množice, ki jo bomo na kratko imenovali $\mathbf{H}$. Pri tej upodobitvi bomo zaznamovali fizikalno količino in ustrezni element v $\mathbf{H}$, kar z isto črko. Naša naloga bo najprej v $\mathbf{H}$ primerno definirati računske operacije med elementi. V ta namen bomo vpeljali nekaj splošnih principov.

1. Naj bo X ena izmed fizikalnih količin sistema, ki je v danem trenutku v določenem stanju. Znano je, da večkratno merjenje te količine ne da vedno iste vrednosti*, čeprav je sistem zmerom v istem stanju, temveč v splošnem različne vrednosti. Naj bodo vrednosti pri n merjenjih $x_1, x_2, \dots, x_n$. Tvorimo sedaj povprečje $(x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n$ in zahtevajmo, da naj eksistira limita tega povprečja, če gre število merjenj preko vsake meje. To naj velja za vsako fizikalno količino v vsakem stanju. *Limitno vrednost*

$$x = \lim (x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n, n \rightarrow \infty$$

bomo imenovali *povprečje količine X v danem stanju*. Če upodobimo fizikalne količine v množico $\mathbf{H}$, pripada vsakemu elementu X v $\mathbf{H}$ neko realno število, namreč povprečje količine X . Če priredimo vsakemu elementu X iz množice $\mathbf{H}$ neko realno število x , pravimo, da je x funkcional elementa X . To odvisnost zapišemo z enačbo $x = \varphi(X)$. Funkcional je torej neka posplošitev pojma funkcije. Pri navadni funkciji sta funkcijska vrednost in argument (neodvisna spremenljivka) realni ali kompleksni števili, pri funkcionalu pa je argument element iz množice $\mathbf{H}$, pripadajoča vrednost pa je realno število.

Imamo torej izrek: *Vsakemu stanju sistema ustreza neki funkcional $\varphi(X)$, pri čemer pomeni $x = \varphi(X)$ povprečje količine X v danem stanju. Različnim stanjem sistema pripadajo različni funkcionali.*

Na podlagi zgoraj omenjene zahteve že lahko vpeljemo nekatere računske operacije med elementi množice $\mathbf{H}$. Naj bo X kaka količina fizikalnega sistema. Z X^2 bomo zaznamovali količino, ki jo definiramo na sledeči način: X^2 merimo tako, da merimo količino X in dobljeno vrednost x_1 kvadriramo. Torej ima X^2

* Tu so mišljena le idealna merjenja, to je merjenja z največjo teoretično možno natančnostjo.

pri istem merjenju vrednost x_1^2 . Če smo v nekem stanju dobili za X vrednosti $x_1, x_2, \dots, x_n$, so $x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2$ ustrezne vrednosti za X^2 . Tudi tu zahtevamo, naj eksistira limita povprečja $\lim (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)/n$, ko gre $n \rightarrow \infty$, kar naj velja za vsako količino in za vsako stanje sistema. To povprečje je povprečje elementa X^2 v danem stanju, torej $\varphi(X^2)$. Očitno velja vedno $\varphi(X^2) \geq 0$.

Če naj množica $\mathbf{H}$ upodobi razmere v kvantnomehničnem sistemu, mora eksistirati računska operacija, ki priredi vsakemu elementu X iz $\mathbf{H}$ kvadrat, namreč element X^2 , ki seveda spada tudi v $\mathbf{H}$.

Naj bo a realno število in X fizikalna količina. Z aX in $X + a$ bomo zaznamovali količini, ki ju dobimo takole: aX in $X + a$ merimo hkrati z X . Če je x_1 dobljena vrednost za X , sta ax_1 in $x_1 + a$ vrednosti za aX in $X + a$. Očitno je povprečna vrednost elementov aX in $X + a$ enaka ax in $x + a$, pri čemer pomeni x povprečno vrednost količine X v danem stanju. Torej velja za vsako stanje

$$\varphi(aX) = a\varphi(X) \quad \text{in} \quad \varphi(X + a) = \varphi(X) + a$$

Nekatere količine, kakor n.pr. mirovna masa, električni naboj itd., pa ohranijo tudi v kvantni mehaniki značaj števil: V vsakem stanju nam da vsaka meritev isto vrednost. Posebno važen je tisti element iz $\mathbf{H}$, ki upodobi količino, ki ima v vsakem stanju vrednost 1. Ta element bomo imenovali *enoto* in ga zaznamovali na kratko kar z 1. Količine gornje vrste se upodobijo na elemente $a.1$, ki jih bomo zaznamovali z a . V vsakem stanju je $\varphi(1) = 1$ in bolj splošno $\varphi(a) = a$. Posebej za $a = 0$ dobimo *element 0*, to je tisti element iz $\mathbf{H}$, ki ima v vsakem stanju vrednost nič.

Naj bo X kaka količina našega sistema in x ustrezno povprečje v stanju φ , torej $x = \varphi(X)$. Važno vlogo ima povprečna vrednost kvadratov diferenc med x in posameznimi merjenimi vrednostmi $x_1, x_2, \dots, x_n$. To povprečno vrednost lahko zapišemo

$$n^{-1} \cdot \sum (x_i - x)^2 = n^{-1} \cdot \sum x_i^2 - 2xn^{-1} \cdot \sum x_i + x^2 \quad (1)$$

V vseh vsotah moramo sešteti od $i = 1$ do $i = n$. Če raste n preko vsake meje, limitira leva stran proti povprečni vrednosti elementa $(X - x)^2$. Na desni ima izraz $n^{-1} \cdot \sum x_i^2$ za limito povprečje elementa X^2 , vsota $n^{-1} \cdot \sum x_i$ pa gre proti x . Torej je v limiti

$$\varphi[(X - x)^2] = \varphi(X^2) - [\varphi(X)]^2. \quad (2)$$

Postavimo $\varepsilon = [\varphi((X - x)^2)]^{1/2}$. Čim manjši je ε , tem natančneje ima količina X v danem stanju vrednost x . Rekli bomo, da *ima X v stanju φ ostro vrednost x , če je $\varepsilon = 0$, torej $\varphi((X - x)^2) = 0$* . V tem primeru dobimo iz (2)

$$\varphi(X^2) = [\varphi(X)]^2 \quad (3)$$

Vsako tako stanje bomo imenovali *lastno stanje* količine X , ustrezno povprečje pa *njeno lastno vrednost*.

V splošnem pa velja za vsako stanje $\varphi(X^2) \geq [\varphi(X)]^2$, kar pokaže enačba (2), ker je tam leva stran pozitivna.

2. Naj bosta X in Y dve fizikalni količini istega sistema. Če eksistira taka količina Z , da je v vsakem stanju njena povprečna vrednost vsota povprečnih vrednosti količin X in Y , bomo za ustrezne elemente v množici $\mathbf{H}$ rekli, da je Z vsota elementov X in Y . V tem primeru bomo zapisali $Z = X + Y$. Vidimo torej, da moramo upodobiti fizikalne količine v tako množico $\mathbf{H}$, v kateri je definirana vsota. Zato zahtevamo, da *naj pripada vsakemu paru X, Y iz $\mathbf{H}$ element Z kot vsota*. Operacija, ki priredi elemen-

toma X, Y vsoto Z , naj ima običajne lastnosti vsote: namreč komutativnost in asociativnost. Torej velja

$$a) X + Y = Y + X \quad b) X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$$

Iz gornje definicije vsote dveh fizikalnih količin razvidimo, da je v vsakem stanju

$$\varphi(X + Y) = \varphi(X) + \varphi(Y)$$

Ker smo prej definirali tudi množenje elementov z realnimi števili, vidimo od tod, da *tvori množica $\mathbf{H}$ tako imenovani linearni vektorski prostor*. To se pravi: *elemente iz $\mathbf{H}$ lahko med seboj seštevamo, odštevamo in množimo s skalarnimi števili kakor navadne vektorje*. Diferenca je namreč takole definirana: $X - Y = X + (-1) \cdot Y$.

Povprečna vrednost v danem stanju pa je *linearni funkcional*, ker velja

$$\varphi(aX + bY) = a\varphi(X) + b\varphi(Y) \quad (4)$$

za poljubni realni števili a in b .

Sedaj je mogoče definirati tako imenovani *simetrizirani produkt* dveh elementov. Postavimo namreč

$$X \times Y = \frac{1}{4} [(X + Y)^2 - (X - Y)^2] \quad (5)$$

Vse operacije v oglatem oklepaju na desni smo že vpeljali. Simetrizirani produkt $X \times Y$ je komutativen: $X \times Y = Y \times X$, kar vidimo takoj iz definicije (5). Ni pa v splošnem tudi asociativen in iz te definicije ne bi mogli dokazati, da je distributiven.

V nadaljnjem se bo izkazalo, da je zelo ugodno razširiti vektorski prostor $\mathbf{H}$, in sicer tako, kakor razširimo realna števila na kompleksna števila. Naj bosta torej X in Y dva poljubna elementa iz $\mathbf{H}$. Vpeljimo element $Z = X + iY$, kjer pomeni i imaginarno enoto. Vsi možni elementi Z tvorijo kompleksni vektorski prostor, ki ga bomo zaznamovali z $\mathbf{B}$. Vsota dveh elementov iz $\mathbf{B}$ je definirana takole:

$$B \ a) Z_1 + Z_2 = (X_1 + iY_1) + (X_2 + iY_2) = (X_1 + X_2) + i(Y_1 + Y_2)$$

Produkt s kompleksnim skalarjem $a = a' + ia''$ pa je

$$B \ b) aZ = (a' + ia'')(X + iY) = a'X - a''Y + i(a''X + a'Y)$$

Če je Z kak element iz $\mathbf{B}$, torej $Z = X + iY$, spada element $X - iY$ tudi v $\mathbf{B}$. Zaznamujemo ga z Z^* in ga imenujemo *adjungirani element* k Z . Očitno je adjungiranost dveh elementov vzajemna, torej $(Z^*)^* = Z$. Če je $Z^* = Z$, je v izrazu $Z = X + iY$ komponenta $Y = 0$. Tak element, ki je samemu sebi adjungiran, bomo imenovali *hermitski element*. Vsi hermitski elementi tvorijo ravno prvotni vektorski prostor $\mathbf{H}$. Samo ti pomenijo fizikalne količine.

3. Kakor je znano, se da tudi v kvantni mehaniki vsaka količina določiti s poljubno ostrostjo. To se pravi, da za vsak element X eksistira tako stanje sistema, v katerem je pripadajoči $\varepsilon_X = [\varphi((X - x)^2)]^{\frac{1}{2}}$ poljubno majhen ali celo nič. Ni pa zmerom mogoče to doseči za dve količini X in Y hkrati. Često nastopi namreč naslednji primer: Čim ostreje je določen X , tem manj ostro vrednost ima Y , ali, drugače povedano, čim manjši je ε_X , tem večji je ε_Y , tako da produkt $\varepsilon_X \varepsilon_Y$ ne more postati poljubno majhen.

To dejstvo skušajmo sedaj matematično izraziti. V vektorski prostor $\mathbf{H}$ vpeljimo še tretjo algebrائيčno operacijo, namreč množenje dveh elementov.

Pri tem naj bo produkt XY asociativen in distributiven. Če sta faktorja enaka $Y = X$, naj se ta produkt sklada s kvadratom X^2 , ki smo ga že prej vpeljali. Vzemimo, da smo produkt XY s temi lastnostmi že definirali. Simetrizirani produkt $X \times Y$ bo po enačbi (5) s produktom XY v tejle zvezi

$$X \times Y = \frac{1}{2}(XY + YX) \quad (6)$$

Tu levo stran že poznamo. Produkt XY bi bil zato znan, če bi imeli še komutator, t. j. diferenco $XY - YX$. Sedaj pa vzemimo, naj bo matematični izraz za zgoraj omenjeno dejstvo, da namreč produkt $\varepsilon_x \varepsilon_y$ ne postane v splošnem poljubno majhen, nekomutativnost produkta XY . Narobe naj bo produkt komutativen, torej $XY = YX$, kadar se dasta količini X in Y hkrati meriti s poljubno ostrastjo.

Komutator $C = \frac{1}{2}i(XY - YX)$ naj bo torej tak element v $\mathbf{H}$, da je njegova povprečna vrednost v vsakem stanju zmerom absolutno pod $\varepsilon_x \varepsilon_y$, torej

$$[\varphi(C)]^2 \leq \varphi((X-x)^2) \cdot \varphi((Y-y)^2) \quad (7)$$

pri čemer sta $x = \varphi(X)$, $y = \varphi(Y)$. Tu smo vzeli pri komutatorju C faktor i zato, ker je potem $X^2 + Y^2 + 2C = (X - iY)(X + iY) = Z^*Z$. Ker je $\varphi((X-x)^2) = \varphi(X^2) - x^2 \leq \varphi(X^2)$, velja tudi ocena

$$[\varphi(C)]^2 \leq \varphi(X^2) \cdot \varphi(Y^2) \quad (7^*)$$

Komutator C izraža neko fizikalno dejstvo in je zato seveda hermitski element, spada torej v $\mathbf{H}$.

Na podlagi enačbe (6) definiramo produkt dveh elementov iz $\mathbf{H}$ s komutatorjem C takole:

$$XY = X \times Y - iC$$

Kakor je razvidno iz te definicije, produkt dveh hermitskih elementov v splošnem ni več element iste vrste, temveč spada v kompleksni prostor $\mathbf{B}$. Le tedaj je produkt XY hermitski element, če je $C = 0$, če je torej komutativen.

Produkt dveh poljubnih elementov iz $\mathbf{B}$ pa določimo s predpisom

$$B \text{ c) } Z_1 Z_2 = (X_1 + iY_1)(X_2 + iY_2) = (X_1 X_2 - Y_1 Y_2) + i(X_1 Y_2 + Y_1 X_2)$$

Vsi izrazi $X_1 X_2$, $Y_1 Y_2$, itd. na desni imajo že pomen. Za tako definirano množenje naj veljata asociativnostni in distributivnostni zakon:

$$B \text{ d) } (Z_1 Z_2) Z_3 = Z_1 (Z_2 Z_3)$$

$$B \text{ e) } (Z_1 + Z_2) Z_3 = Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3, \quad Z_1 (Z_2 + Z_3) = Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3$$

Če so v kaki množici elementov definirane tri računske operacije: 1. vsota dveh elementov $X + Y$, 2. produkt elementa s skalarnim številom αX in 3. produkt XY , pri čemer je vsota komutativna in asociativna, oba produkta pa asociativna in distributivna, pravimo, da tvori taka množica neko algebro. Če so skalarni množitelji le realna števila, je algebra realna, če dopuščamo tudi kompleksna števila za faktorje, je algebra kompleksna. Vidimo torej, da tvorijo z gornjimi predpisi elementi iz $\mathbf{B}$ kompleksno algebro.

Zveza med elementoma Z in adjungiranim Z^* je involucija, ker si Z in Z^* vzajemno ustrezata. Ta involucija ima naslednje lastnosti:

$$J \text{ 1. } (\lambda Z_1 + \mu Z_2)^* = \lambda^* Z_1^* + \mu^* Z_2^*$$

$$J \text{ 2. } (Z_1 Z_2)^* = Z_2^* Z_1^*$$

o čemer se prepričamo z lahkim računom. Tu pomenita λ^* in μ^* konjugirano kompleksni števili k λ in μ .

Linearni funkcional $\varphi(X)$, ki pomeni povprečno vrednost količine X v danem stanju, je bil definiran le za hermitske elemente. Postavimo sedaj splošno

$$\varphi(Z) = \varphi(X + iY) = \varphi(X) + i\varphi(Y)$$

Brez težave se prepričamo, da je $\varphi(Z)$ linearen funkcional tudi v kompleksnem prostoru $\mathbf{B}$, torej $\varphi(\lambda Z_1 + \mu Z_2) = \lambda\varphi(Z_1) + \mu\varphi(Z_2)$ za poljubni kompleksni števili λ in μ .

Ker je $Z^*Z = X^2 + Y^2 + i(XY - YX)$, je produkt Z^*Z zmerom hermitski element. Nadalje velja $\varphi(Z^*Z) = \varphi(X^2) + \varphi(Y^2) + 2\varphi(C)$. Iz ocene (7*) je razvidno, da je za vsak Z

$$\varphi(Z^*Z) \geq 0 \quad (8)$$

Linearni funkcional s to lastnostjo se imenuje pozitiven funkcional.

Tako smo dobili rezultat:

Pojavi v kvantno mehničnem sistemu se dajo opisati s kompleksno algebro, v kateri je definirana involucija adjungiranih elementov ustrezajoča lastnostim $J1$ in $J2$. V tej algebri pomenijo le hermitski elementi fizikalne količine. Stanja sistema pa so pozitivni funkcionali.

II. Temeljne lastnosti algebre $\mathbf{B}$.

V množici $\mathbf{B}$ so definirane tri računske operacije med elementi: seštevanje, množenje elementov s skalarnim številom in množenje dveh elementov. Za te operacije smo zahtevali naslednje zakonitosti, ki jih tu še enkrat na kratko ponovimo:

I. Komutativnost in asociativnost vsote:

$$a) X + Y = Y + X \quad b) (X + Y) + Z = X + (Y + Z)$$

c) Eksistira tak element, imenovali ga bomo 0, da je $X + 0 = 0 + X$ za vsak X iz $\mathbf{B}$.

II. Za množenje s skalarnimi števili veljajo pravila:

$$a) (a + \beta)X = aX + \beta X, \quad b) a(X + Y) = aX + aY$$

$$c) a(\beta X) = (a\beta)X \quad d) 1 \cdot X = X$$

III. Produkt pa je asociativen in distributiven:

$$a) (XY)Z = X(YZ), \quad b) (X + Y)Z = XZ + YZ, \quad X(Y + Z) = XY + XZ$$

$$c) (aX)(\beta Y) = (a\beta)(XY)$$

d) Eksistira enota 1, to je tak element, da je $1 \cdot X = X \cdot 1 = X$ za vsak X iz $\mathbf{B}$.

Iz lastnosti I in II sklepamo, da tvorijo elementi množice $\mathbf{B}$ kompleksen vektorski prostor: elemente smemo, kakor navadne vektorje, poljubno med seboj seštevati, odšteti in množiti s kompleksnimi števili. (Navadne vektorje smemo v realnem množiti le z realnimi faktorji). Produkt $\lambda \cdot 1$ skalarnega faktorja λ z enoto 1 smo na kratko zaznamovali kar z λ .

V $\mathbf{B}$ eksistira neka delna množica $\mathbf{H}$, katere elemente smo imenovali hermitske. Vsak element iz $\mathbf{B}$ se da zapisati v obliki $Z = X + iY$, kjer sta X in Y hermitska elementa. Elementa $Z = X + iY$ in $Z^* = X - iY$ smo imenovali adjungirana. Ker je adjungiranost vzajemna, je prehod od Z na Z^* involucija, ki ustreza pogojem

$$J\ 1. (\lambda X + \mu Y)^* = \lambda^* X^* + \mu^* Y^* \text{ in } J\ 2. (XY)^* = Y^* X^*$$

Enota 1 je hermitski element.

Naj bo A kak element iz $\mathbf{B}$. Tak element B , da je $AB = 1$, imenujemo desni inverzni element. Če pa je $CA = 1$, imenujemo C levi inverzni element elementa A . Ako ima A desni in levi inverzni element, sta le-ta med seboj enaka. Naj bo namreč $AB = 1$ in $CA = 1$. Iz prve enačbe dobimo $C(AB) = C$. Zaradi asociativnosti je $C(AB) = (CA)B = B$, ker je $CA = 1$. Od tod sledi $B = C$. Če bi bil tudi D desni inverzni element, bi ravno tako ugotovili, da je $C = D$. Tak element, ki je hkrati desni in levi inverzni element kakega elementa A , imenujemo na kratko *inverzni element elementa A* in ga zaznamujemo z A^{-1} . Inverzni element, kadar eksistira, je torej en sam.

Nimajo vsi elementi v $\mathbf{B}$ inverznega elementa. N. pr. element 0 je gotovo brez inverznega, ker je $A \cdot 0 = 0$ za vsak A .

Naj bo A kak element iz $\mathbf{B}$ in λ kompleksno število. Vsa tista kompleksna števila λ , pri katerih diferenca $\lambda - A$ nima inverznega elementa, imenujemo *spekter elementa A* .

Lastnosti pozitivnih funkcionalov. Tak linearni funkcional $\varphi(Z)$, da je $\varphi(Z^*Z) \geq 0$ za vsak element Z iz $\mathbf{B}$, imenujemo pozitiven funkcional. Zgoraj smo spoznali, da so stanja sistema pozitivni funkcionali. Naj bo sedaj $\varphi(Z)$ poljuben pozitiven funkcional. Ker je enota hermitski element, torej $1^* \cdot 1 = 1$, velja $\varphi(1) = \varphi(1^* \cdot 1) \geq 0$. Toda nikdar ni $\varphi(1) = 0$, če ni $\varphi(Z)$ enak nič za vsak Z . Postavimo namreč, da bi bilo $\varphi(1) = 0$, funkcional $\varphi(Z)$ pa ne bi bil identično enak nič. Potem bi gotovo eksistiral tak hermitski element X , da bi bilo $\varphi(X) \neq 0$. Ker je $\varphi(Z)$ pozitiven funkcional, bi morali imeti

$$\varphi((X + l)^2) = \varphi(X^2) + 2l\varphi(X) \geq 0$$

za vsako realno število l . To pa očitno ni mogoče, ker je izraz v sredi gotovo negativen, če je l absolutno dovolj velik in ima nasprotni znak kakor $\varphi(X)$. Zato je res $\varphi(1) > 0$ in vsak pozitiven funkcional, če ga množimo s primernim faktorjem, lahko tako normiramo, da je $\varphi(1) = 1$. Normirane pozitivne funkcionalne bomo imenovali *stanja*.

Vsak pozitiven funkcional ima za hermitske elemente realno vrednost. Če je namreč $X^* = X$ hermitski element, imamo $\varphi((X + 1)^2) = \varphi(X^2) + 2\varphi(X) + 1$. Ker sta izraza $\varphi((X + 1)^2)$ in $\varphi(X^2)$ pozitivna, torej realni števili, ima tudi $\varphi(X)$ realno vrednost. Od tod sledi za poljuben Z :

$$\varphi(Z^*) = \varphi(X - iY) = \varphi(X) - i\varphi(Y) = \varphi^*(Z)$$

Schwarzova neenačba. Naj bosta X in Y dva poljubna elementa iz $\mathbf{B}$, u in v pa realni števili. Če je $\varphi(Z)$ pozitiven funkcional, velja $\varphi[(uX + ve^{i\alpha}Y)^*(uX + ve^{i\alpha}Y)] = u^2\varphi(X^*X) + uv[e^{i\alpha}\varphi(X^*Y) + e^{-i\alpha}\varphi(Y^*X)] + v^2\varphi(Y^*Y) \geq 0$. Postavimo $\varphi(X^*X) = A$, $\varphi(X^*Y) = B + iC$, $\varphi(Y^*Y) = D$, kjer so A, B, C, D realna števila. Ker je $\varphi(Y^*X) = B - iC$, se gornja neenačba sedaj glasi $Au^2 + 2(B \cos \alpha - C \sin \alpha)uv + Dv^2 \geq 0$. Ker sta tu u in v poljubna, je kvadratna forma na levi pozitivno definitna. Od tod sledi, da je

njena diskriminanta $(B \cos \alpha - C \sin \alpha)^2 - AD \leq 0$ za vsak α . Za $\operatorname{tg} \alpha = -C/B$ imamo tedaj $B^2 + C^2 \leq AD$. Iz pomena števil A, B, C, D dobimo potem oceno

$$|\varphi(XY)|^2 \leq \varphi(XX^*) \cdot \varphi(Y^*Y) \quad (9)$$

To je Schwarzova neenačba, ki velja za vsak pozitiven funkcional. Ker je za stanja $\varphi(1) = 1$, imamo od tod

$$|\varphi(X)|^2 \leq \varphi(X^*X) \quad (10)$$

Če je $\varphi(Z)$ pozitiven funkcional, je tudi $\varphi_1(Z) = \varphi(X^*ZX)$, kjer je X poljuben element iz $\mathbf{B}$, pozitiven funkcional. Zares velja za vsak Z

$$\varphi_1(Z^*Z) = \varphi[X^*(Z^*Z)X] = \varphi[(ZX)^*(ZX)] \geq 0$$

Torej je $\varphi_1(Z)$ pozitiven funkcional. V posebnem primeru, ko je $\varphi(X^*X) = 0$, tedaj $\varphi_1(1) = 0$, sklepamo po prejšnjem, da je $\varphi_1(Z) = \varphi(X^*ZX) = 0$ za vsak Z .

Naj bo A tak hermitski element, da je $\varphi(A^2) = 0$. V tem primeru dobimo iz (9), da je $\varphi(ZA) = \varphi(AZ) = 0$ za vsak element Z iz $\mathbf{B}$. Posebej za $Z = 1$ sledi od tod $\varphi(A) = 0$, za $Z = A^{n-1}$ pa splošno $\varphi(A^n) = 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Element A v tem primeru nima inverznega elementa A^{-1} . Če namreč vstavimo $Z = A^{-1}$ v $\varphi(ZA) = 0$, dobimo $\varphi(1) = 0$, kar ni res. Ker je $|\varphi(ZA^n)|^2 \leq \varphi(ZZ^*) \cdot \varphi(A^{2n}) = 0$, velja tudi $\varphi(ZA^n) = 0$ za $n = 1, 2, \dots$. Odtod sklepamo, da je $\varphi[ZP(A)] = \varphi(Z) \cdot P(0)$ za vsak polinom $P(A) = a_0 + a_1A + \dots + a_nA^n$.

Naj bo sedaj bolj splošno A kak hermitski element, $\varphi(Z)$ pa njegovo lastno stanje, torej $\varphi((A - a)^2) = 0$ ali

$$\varphi(A^2) = [\varphi(A)]^2$$

kjer je $a = \varphi(A)$. Prav tako kakor zgoraj dokažemo, da je $\varphi(ZA) = \varphi(AZ) = a \cdot \varphi(Z)$ za vsak Z . Diferenca $A - a$ nima inverznega elementa. Zato spada a k spektru elementa A . Bolj splošno pa velja

$$\varphi[ZP(A)] = \varphi[P(A)Z] = P(a) \cdot \varphi(Z) \quad (11)$$

za vsak polinom $P(A)$. Če bi vpeljali v $\mathbf{B}$ razen polinomov tudi druge funkcije elementa A , bi veljala enačba (11) tudi za take funkcije.

Tak element X iz $\mathbf{B}$, da so števila $\varphi(X^*X)$ za vsa možna stanja φ navzgor omejena, imenujemo *omejen element*. Če je torej X omejen element, moremo najti dovolj veliko pozitivno število M , da je $\varphi(X^*X) \leq M$ za vsako stanje φ . V tem primeru eksistira natančna zgornja meja števil $\varphi(X^*X)$, ki pripadajo vsem možnim stanjem. Ta meja je seveda odvisna od elementa X . Pozitivni kvadratni koren natančne zgornje meje bomo zaznamovali z $\|X\|$ in ga bomo imenovali *normo omejenega elementa* X . Posebno zanimiva je taka algebra, kjer so vsi elementi omejeni. V tem primeru ima vsak element neko pozitivno število za normo. Norma ima tu vlogo absolutne vrednosti pri navadnih številih. Tako algebro imenujemo normirano algebro. Neenačbo (10) lahko sedaj zapišemo v obliki

$$|\varphi(Z)| \leq \|Z\|$$

Naj bo nadalje naša algebra taka, da za vsak element $Z \neq 0$ eksistira vsaj eno stanje, pri katerem je $\varphi(Z) \neq 0$, torej tudi $\varphi(Z^*Z) \neq 0$. Od tod vidimo, da ima normo nič le element 0, torej $\|Z\| = 0$ velja le za $Z = 0$. Ni težko dokazati, da ima norma te lastnosti:

$$N\ 1) \|aX\| = |a| \cdot \|X\| \quad (a \text{ je poljubno kompleksno število}).$$

$$N\ 2) \|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$$

$$N\ 3) \|XY\| \leq \|X\| \cdot \|Y\|$$

$$N\ 4) \|X^*X\| = \|X\|^2$$

Ker smo vpeljali normo, lahko sedaj v algebri **B** definiramo metriko in pojem konvergence. Razdalja d dveh elementov X in Y naj bo norma njihove difference: $d = \|X - Y\|$. S tem postane **B** metričen prostor in v njem je definirana topologija. Zaporedje elementov $X_1, X_2, X_3, \dots$, bomo rekli, konvergira proti elementu X , če je po predpisu vsakega pozitivnega števila ε mogoče določiti tak n_0 , da je $\|X_n - X\| \leq \varepsilon$ za vsak $n \geq n_0$. Očitno ustreza konvergentno zaporedje naslednjemu pogoju: Za vsak pozitiven ε se da dobiti tak n , da je $\|X_{n+p} - X_n\| < \varepsilon$ za vsak $p > 0$ (Cauchyjev pogoj). V obsegu kompleksnih števil je ta pogoj tudi zadosten: zaporedje, ki ustreza Cauchyjevemu pogoju, je konvergentno, ima torej limito. V našem primeru pa ni nujno, da je to res. Bomo pa kljub temu zahtevali, da je vsako zaporedje, ki ustreza Cauchyjevemu pogoju, konvergentno; rekli bomo v tem primeru, da je prostor, ki ga tvorijo vsi elementi algebre **B**, poln. *Tako algebro, v kateri je definirana norma, ki ustreza pogojem N 1), N 2), N 3) in pri kateri je prostor poln, imenujemo Banachovo algebro.* V našem primeru pa imamo Banachovo algebro z involucijo, ki zadošča pogojem J 1), J 2) in N 4). Gelfand in Neumark sta dokazala, da se da vsaka taka algebra zvezno upodobiti v neko algebro omejenih operatorjev Hilbertovega prostora. Pri tej upodobitvi se norma ohranja, adjungiranemu elementu pa pripada adjungirani operator. Hermitski elementi preidejo v hermitske operatorje.

To upodobitev dobimo v bistvu takole: Hilbertov prostor je linearni vektorski prostor, v katerem je definiran skalarni produkt (glej članek F. Križaniča, Linearni operatorji v Hilbertovem prostoru, Obzornik, IV, str. 149). Algebra **B** je tudi vektorski prostor, le da ni v njej skalarnega produkta. Vzemimo kak pozitiven funkcional $\varphi(Z)$ in priredimo elementoma X, Y kompleksno število $(X, Y) = \varphi(Y^*X)$. Takó definirano število (X, Y) ima v bistvu vse lastnosti, ki jih zahtevamo od skalarnega produkta. Če vpeljemo to število (X, Y) kot skalarni produkt elementov X in Y , postane **B** Hilbertov prostor, ki pa v splošnem ni poln. Transformacija $Z' = AZ$, kjer je A kak element iz **B**, priredi vsakemu elementu Z element Z' . Ta transformacija je linearna, saj pripada elementu $aX + bY$ element $aX' + bY'$. Če tolmačimo **B** kot Hilbertov prostor z zgoraj vpeljanim skalarnim produktom, je transformacija $Z' = AZ$ omejen linearni operator v tem Hilbertovem prostoru. Torej pripada vsakemu elementu A iz **B** neki omejen operator. S tem smo upodobili algebro **B** v algebro omejenih operatorjev Hilbertovega prostora.

Če sta $\varphi_1(Z)$ in $\varphi_2(Z)$ stanji sistema, je očitno

$$\varphi(Z) = a\varphi_1(Z) + b\varphi_2(Z)$$

tudi neko stanje, ako sta a in b pozitivni števili in je $a + b = 1$. Tak $\varphi(Z)$, ki se da pisati v gornji obliki, kjer $\varphi_1(Z) \neq \varphi_2(Z)$ in $ab \neq 0$, se imenuje *mešano stanje*. V nasprotnem primeru, ko $\varphi(Z)$ ni mogoče izraziti v tej obliki, imenujemo stanje *čisto*.

Tu smo nekoliko natančneje obravnavali tako algebro z involucijo, ki ima le omejene elemente. Žal pa v algebri, ki pride v kvantni mehaniki v poštev, niso vsi elementi omejeni. Seveda imajo algebre, ki vsebujejo tudi neomejene

elemente, bolj zamotano strukturo kakor Banachova algebra. Vsi omejeni elementi $\mathbf{B}$ pa tvorijo neko subalgebro, ki se da tedaj upodobiti v algebro omejenih operatorjev Hilbertovega prostora. Neomejeni elementi preidejo pri tem v neomejene operatorje.

Principi, ki smo jih formulirali v I. poglavju, veljajo v vsej splošnosti le za omejene elemente. Neomejeni elementi v nekaterih stanjih nimajo povprečja ali pa je povprečje neskončno veliko.

Količino X imenujemo *pozitivno*, če je v vsakem stanju njeno povprečje pozitivno, torej $\varphi(X) \geq 0$ za vsak φ . Ustrezni element v $\mathbf{B}$ imenujemo *pozitiven*. Postavimo še to zahtevo, ki naj ji zadošča algebra $\mathbf{B}$: *Za vsak pozitiven element X naj eksistira inverzni element $k \cdot 1 + X$, torej $(1 + X)^{-1}$.* Posebej je produkt Z^*Z za vsak Z iz $\mathbf{B}$ pozitiven. Zato eksistira v $\mathbf{B}$ zmerom inverzni element $(1 + Z^*Z)^{-1}$. Pri tem je lahko Z omejen ali neomejen element.

Če ima $\mathbf{B}$ samo omejene elemente, je ta zahteva odveč, ker je posledica prejšnjih postulatov.

III. Uporaba v kvantni mehaniki.

Osnovne količine kvantnomehničnega sistema so njegove generalizirane koordinate $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$ in ustrezne komponente impulza $P_1, P_2, \dots, P_m$. Struktura algebre $\mathbf{B}$ je določena, če poznamo komutacijska pravila med temi osnovnimi elementi. V kvantni mehaniki se ta pravila glase

$$Q_\alpha Q_\beta - Q_\beta Q_\alpha = 0, \quad P_\alpha P_\beta - P_\beta P_\alpha = 0, \quad P_\alpha Q_\beta - Q_\beta P_\alpha = 0, \quad \alpha \neq \beta$$

in

$$P_\alpha Q_\alpha - Q_\alpha P_\alpha = h/2\pi i \quad (I)$$

kjer je h Planckova konstanta. Indeksa α in β zavzameta vse vrednosti od 1 do m . Druge količine, n. pr. energija, vrtilna količina itd., se s temi formalno prav tako izražajo kakor v klasični fiziki. Tako dobljena mehanika je v bistvu kvantna mehanika. Osnovna naloga je sedaj poiskati stanja sistema, torej v ustrezni algebri $\mathbf{B}$ pozitivne funkcionale. Posebno važno pa je določiti lastna stanja in lastne vrednosti za energijo, vrtilno količino itd.

Naj bosta Q in P elementa v $\mathbf{B}$, ki ustrezata koordinati in konjugiranemu impulzu. Če vstavimo v (8) izraz $Z = uP + ivQ$, kjer sta u in v poljubni realni števili, dobimo oceno

$$u^2 \varphi(P^2) + (h/2\pi) uv + \varphi(Q^2) v^2 \geq 0$$

Ker je kvadratna forma na levi pozitivno definitna, je njena diskriminanta negativna, torej

$$\varphi(P^2) \cdot \varphi(Q^2) \geq (h/4\pi)^2$$

Postavimo $P' = P - p$, $Q' = Q - q$, kjer sta p in q realni števili. Tudi med P' in Q' velja komutacijsko pravilo (I), kar lahko takoj doženemo. Zato velja neenačba

$$\varphi(P'^2) \cdot \varphi(Q'^2) = \varphi((P - p)^2) \cdot \varphi((Q - q)^2) \geq (h/4\pi)^2$$

Naj bosta p in q povprečni vrednosti impulza P in koordinate Q v stanju φ : $p = \varphi(P)$, $q = \varphi(Q)$. Če postavimo $\Delta p^2 = \varphi((P - p)^2)$ in $\Delta q^2 = \varphi((Q - q)^2)$, dobimo neenačbo $\Delta p \cdot \Delta q \geq h/4\pi$. To je Heisenbergov princip nedoločenosti.

Za zgled, kako lahko algebraično izračunamo lastne vrednosti, vzemimo primer enodimenzionalnega harmoničnega oscilatorja. Izračunajmo torej lastne

vrednosti in lastna stanja za energijo, ki se formalno prav tako izraža kakor v klasični mehaniki. Zaradi enostavnosti naj bo energija kar $H = P^2 + Q^2$, kjer sta Q in P koordinata in impulz delca. Med njima velja komutacijsko pravilo (I), ki ga bomo tu vzeli v obliki

$$PQ - QP = -i \quad (12)$$

Vpeljimo $W = P + iQ$, torej $W^* = P - iQ$. Iz (12) dobimo

$$WW^* = P^2 + Q^2 + 1 \quad \text{in} \quad WW^* = P^2 + Q^2 - 1$$

Od tod je

$$W^*W - WW^* = 2 \quad (13)$$

Energija se sedaj izraža takole: $H = WW^* + 1 = W^*W - 1$.

Naj bo l kaka lastna vrednost za energijo H in $\varphi(Z)$ pripadajoče lastno stanje, torej $\varphi((H - l)^2) = 0$. Kakor smo spoznali v II. poglavju, velja potem splošno

$$\varphi[(H - l)Z(H - l)] = 0 \quad (14)$$

za vsak Z iz **B**. Če vstavimo v to enačbo $Z = WW^*$, dobimo

$$\varphi[(H - l)WW^*(H - l)] = 0 \quad \text{ali} \quad \varphi[(WW^* + 1 - l)WW^*(WW^* + 1 - l)] = 0$$

Od tod je

$$\varphi[W(W^*W + 1 - l)(W^*W + 1 - l)W^*] = 0$$

Ker je $\varphi_1(Z) = \varphi(WZW^*)$ pozitiven funkcional, imamo torej $\varphi_1[(H - l + 2)^2] = 0$. To pomeni, da je tudi $l - 2$ lastna vrednost energije. Ta sklep pa je pravilen le, če $\varphi(WW^*) \neq 0$.

Vzemimo sedaj, da je $\varphi(WW^*) = 0$. V tem primeru je $\varphi_1(1) = \varphi(WW^*) = 0$ in zaradi tega $\varphi_1(Z) \equiv 0$, torej $\varphi(WZW^*) = 0$ za vsak Z . Posebej za $Z = W^*W$ dobimo od tod

$$\varphi(WW^*WW^*) = \varphi[(H - 1)^2] = 0$$

Torej $l = 1$ je lastna vrednost energije H .

Od tod sklepamo, da ima l obliko $l = 2n + 1$, kjer je n naravno število. Če bi namreč l ne bil liho število, bi bila vsa števila $l - 2m$, $m = 0, 1, 2, \dots$, lastne vrednosti za energijo H . Torej bi bile tudi negativne lastne vrednosti, kar pa ni mogoče, saj je zmerom $\varphi(H) = \varphi(P^2) + \varphi(Q^2) \geq 0$.

Če vstavimo $Z = W^*W$ v (14), dobimo po isti poti, da je hkrati z l tudi $l + 2$ lastna vrednost. Dognali smo tedaj tole: Če ima energija $H = P^2 + Q^2$ kako lastno vrednost, so ravno vsa liha števila $l = 2n + 1$ lastne vrednosti.

Dokazati moramo še, da je $l = 1$ res lastna vrednost, da torej eksistira tako stanje $\varphi(Z)$, pri katerem je $\varphi(WW^*) = 0$. Recimo, da smo tak funkcional φ že našli. Po Schwarzovi neenačbi je $|\varphi(ZW^*)|^2 \leq \varphi(ZZ^*) \cdot \varphi(WW^*) = 0$, torej $\varphi(ZW^*) = 0$ za vsak Z . Posebej dobimo od tod $\varphi(W^n W^{*m}) = 0$, če $m \neq 0$. Če pa je $m = 0$ in $n \neq 0$, je $\varphi(W^n) = \varphi^*(W^{*n})$, torej tudi $\varphi(W^n) = 0$.

Vsak element Z iz algebre **B**, ki se izraža kot polinom elementov W in W^* , lahko pišemo s pomočjo komutacijskega pravila (13) v obliki

$$Z = a_{00} + \sum a_{nm} W^n W^{*m}, \quad m + n \geq 1$$

Potem je $\varphi(Z) = a_{00}$. S tem smo določili vrednosti funkcionala $\varphi(Z)$ za vse polinome koordinate Q in impulza P . Ni se težko prepričati, da je tako dobljeni $\varphi(Z)$ pozitiven funkcional. Preprost račun nam da $\varphi(Q) = \varphi(P) = 0$ in

$\varphi(Q^2) = \varphi(P^2) = \frac{1}{2}$. Torej je res $l = 1$ lastna vrednost energije H . S tem pa so po prejšnjem tudi vsa liha števila $l = 2n + 1$ lastne vrednosti.

Kako dobimo pozitivne funkcionale, to se pravi stanja sistema? Naj bo $\psi(q_1, q_2, \dots, q_m)$ neskončnokrat odvedljiva funkcija koordinat $q_1, q_2, \dots, q_m$. Zaznamujmo jo na kratko kar s $\psi(q)$. Vsi produkti $|q_i|^n \psi(q)$ naj gredo proti nič za vsak eksponent n , če raste $|q_i|$ preko vsake meje. Isto naj velja za vse parcialne odvode te funkcije. Vzemimo sedaj kak element iz $\mathbf{B}$, ki je polinom koordinat Q_i in impulzov P_i . Temu elementu priredimo operator, ki ga dobimo s temle predpisom: Vsaki koordinati Q_i naj pripada operator, ki pomeni množenje funkcije $\psi(q)$ s koordinato q_i . Impulzu P_i pa naj pripada odvajanje na ustrezno koordinato, namreč operator $(\hbar/2\pi i) \partial/\partial q_i$. Ti operatorji formalno ustrezajo komutacijskim pravilom (I). S tem predpisom lahko priredimo določen operator vsakemu elementu Z iz $\mathbf{B}$, ki je polinom koordinat in impulzov. Ta operator zaznamujmo tudi z Z . Postavimo sedaj

$$\varphi(Z) = \int \psi^*(q) Z \psi(q) dq$$

kjer se integral razteza po vsem prostoru s koordinatami $q_1, q_2, \dots, q_m$. Integral na desni ima pomen za vsak Z zaradi lastnosti funkcije $\psi(q)$. Izraz $\varphi(Z)$ je odvisen od elementa Z in je očitno linearen funkcional. Ni se težko prepričati, da je $\varphi(Z^*Z) \geq 0$. Če funkcijo $\psi(q)$ tako normiramo, da je $\int |\psi(q)|^2 dq = 1$, imamo $\varphi(1) = 1$ in $\varphi(Z)$ pomeni stanje. Vsaki funkciji $\psi(q)$ ustreza torej neko stanje sistema. Lastno stanje in lastno vrednost kakenga hermitskega elementa A dobimo, če v smislu gornjega predpisa poiščemo ustrezní operator in določimo funkcijo $\psi(q)$ tako, da zadošča enačbi $A\psi(q) = l\psi(q)$. To je v splošnem neka diferencialna enačba. Rešitev $\psi(q)$, ki ustreza gornjim zahtevam, eksistira le pri določenih vrednostih za l . Te vrednosti so lastne vrednosti elementa A , rešitvi $\psi(q)$ pripadajoče stanje pa je lastno stanje. S tem smo dobili formulacijo kvantne mehanike v Schrödingerjevem smislu.

Vzemimo za zgled tretjo komponento vrtilne količine: $M_z = XP_y - YP_x$. V smislu gornjih predpisov ji priredimo diferencialni operator $(\hbar/2\pi i)(x \cdot \partial/\partial y) - (y \cdot \partial/\partial x)$. Če iščemo lastna stanja za M_z , moramo funkcijo ψ tako določiti, da ustreza diferencialni enačbi

$$\frac{\hbar}{2\pi i} \left(x \frac{\partial \psi}{\partial y} - y \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = m_z \cdot \psi$$

Vpeljimo v ravnini (xy) polarni koordinati: $x = r \cos \vartheta$, $y = r \sin \vartheta$, $r^2 = x^2 + y^2$. Ta enačba preide v

$$\frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} = \frac{2\pi i m_z}{\hbar} \cdot \psi$$

Rešitev je $\psi = A \exp(2\pi m_z \vartheta / \hbar)$. Faktor A je odvisen še od spremenljivk r in z . Ker je funkcija ψ enolična, se njena vrednost ne spremeni, če ϑ povečamo za 2π . Od tod sklepamo, da je $m_z = \hbar n / 2\pi$, pri čemer je n celo število, torej $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Za $n = 1$ ustreza funkcija $\psi = (x + iy) \exp(-x^2 - y^2 - z^2)$ vsem zahtevam in določa zato stanje, v katerem ima komponenta M_z ostro vrednost $\hbar/2\pi$.

Literatura:

I. E. Segal: Postulates for general quantum mechanics. *Annals of Math.*, V. 48 (1947). Str. 930—948.

O TAUBERJEVEM IZREKU ZA POTENČNE VRSTE

Anton Suhadolc

V zadnjih petdesetih letih se je močno razvila teorija divergentnih vrst. Kaj je predmet te panoge matematike? Gre za metode, kako se vrstam, ki so v navadnem smislu divergentne, pripiše neko število kot »vsota« v posplošenem smislu. Takih metod je veliko. Ena najenostavnejših je metoda aritmetičnih sredin. Naj bo

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots \quad (1)$$

vrsta, ki jo hočemo seštetati s to metodo, $s_0 = a_0$, $s_1 = a_0 + a_1$, $s_2 = a_0 + a_1 + a_2$, ..., pa zaporedje delnih vsot. Iz tega zaporedja tvorimo zaporedje aritmetičnih sredin:

$$\sigma_0 = s_0, \quad \sigma_1 = \frac{1}{2}(s_0 + s_1), \quad \sigma_2 = \frac{1}{3}(s_0 + s_1 + s_2), \dots$$

Če je dobljeno zaporedje konvergentno, se imenuje vrsta (1) seštevna z metodo aritmetičnih sredin, njena vsota pa je limita $\sigma = \lim \sigma_n$, $n \rightarrow \infty$.

Od vsake sumacijske metode zahtevamo, da je pri konvergentnih vrstah posplošena vsota kar vsota v navadnem smislu. Metoda aritmetičnih sredin zadošča tej zahtevi. Če ima namreč zaporedje delnih vsot $s_0, s_1, \dots$ limito s , konvergira zaporedje aritmetičnih sredin $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots$ tudi proti s . Pač pa narobe ni vedno res. Vrsta je lahko seštevna z metodo aritmetičnih sredin, ne da bi bila konvergentna. V tem dejstvu tiči ravno vzrok za uporabo te metode. Isto velja za splošne sumacijske metode. V nekaterih primerih, ko ustrezajo koeficienti vrste določenim pogojem, pa se da iz seštevnosti vrste sklepati na konvergenco. Za take izreke se je udomačilo ime *Tauberjevi izreki*, po avstrijskem matematiku A. Tauberju, ki jih je prvi pričel študirati.

Tu si bomo ogledali le še tako imenovano Abelovo sumacijsko metodo, ki sešteje mnogo več divergentnih vrst kakor metoda aritmetičnih sredin. Iz členov vrste (1) tvorimo potenčno vrsto

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \quad (2)$$

Če je ta vrsta konvergentna za $|x| < 1$ in če limitira njena vsota $f(x)$ proti s , ko gre x z leve strani proti 1 (to bomo nakazali s simbolom $x \rightarrow 1-0$), imenujemo vrsto (1) seštevno z Abelovo metodo, limito s pa njeno vsoto.

Vzemimo n. pr. vrsto

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Abelova sumacijska metoda ji priredi vsoto $\frac{1}{2}$. Tu je pripadajoča potenčna vrsta

$$f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = 1/(1+x)$$

in $s = \lim f(x) = \lim 1/(1+x) = \frac{1}{2}$, če gre $x \rightarrow 1-0$. Gornja vrsta se da seštetati tudi z metodo aritmetičnih sredin. Vendar ni težko dobiti tako vrsto, ki z metodo aritmetičnih sredin ni seštevna, z Abelovo metodo pa je.

Tudi Abelova metoda priredi konvergentni vrsti vsoto v navadnem smislu. To je razvidno iz znanega Abelovega izreka o zveznosti potenčnih vrst: Če je

vrsta (2) konvergentna za $x = 1$ in ima vsoto s , limitira funkcija $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ proti s , ko gre $x \rightarrow 1 - 0$.*

Tu nas bo zanimal Tauberjev izrek za Abelovo sumacijsko metodo. Ta izrek moremo smatrati tudi za obrat zgoraj omenjenega Abelovega izreka. Prvi ga je dokazal angleški matematik Littlewood l. 1910. Dokaz je bil dolg in zelo kompliciran. Bistveno ga je poenostavil l. 1930 beograjski matematik J. Karamata. Avtor naslednjega dokaza je H. Wielandt; dokaz je izpeljan na osnovi Karamatinih idej, vendar je še enostavnejši.

Izrek. Naj bodo členi v vrsti

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots$$

realni in naj zadoščajo pogoju $na_n \leq C$, $C > 0$, za vsak n . Če eksistira limita ustrezne potenčne vrste $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$, ko gre $x \rightarrow 1 - 0$, potem je vrsta $\sum a_n$ konvergentna.

Ker je torej v tem primeru vrsta $\sum a_n$ konvergentna, je njena vsota po Abelovem izreku tudi enaka $s = \lim (a_0 + a_1 x + \dots)$, $x \rightarrow 1 - 0$.

Pri dokazovanju se smemo omejiti na primer, ko je $a_0 = 0$, $s = 0$, $na_n \leq 1$. Vrsta

$$(a_0 + a_1 - s)x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \quad (3)$$

je namreč konvergentna prav tam kakor prejšnja. Tu pa je

$$\lim (a_0 + a_1 - s)x + \lim (a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots) = (a_0 + a_1 - s) + (s - a_0 - a_1) = 0$$

Če še delimo vsak koeficient v (3) z večjim izmed števil $a_0 + a_1 - s$ in C ter dobljene koeficiente znova zaznamujemo z a_n , je izpolnjen tudi pogoj: $na_n \leq 1$.

Dogovorimo se nadalje, da bomo s simbolom $\sum a_n f(x^n)$ vedno zaznamovali vrsto

$$\sum a_n f(x^n) = a_1 f(x) + a_2 f(x^2) + \dots$$

Oglejmo si sedaj vrsto $a_1 x^k + a_2 x^{2k} + a_3 x^{3k} + \dots$, kjer je k naravno število. Ta vrsta je konvergentna za $|x| < 1$. Velja nadalje

$$\lim \sum a_n x^{kn} = \lim [a_1 x^k + a_2 (x^k)^2 + \dots] = 0, \quad x \rightarrow 1 - 0 \quad (4)$$

ker limitira x^k skupaj z x proti 1.

Tudi vrsta $\sum a_n P(x^n)$ je konvergentna in limitira proti 0, če gre $x \rightarrow 1 - 0$. Tu pomeni $P(x)$ z x deljiv polinom: $P(x) = c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_m x^m$. Napišimo enačbo (4) za $k = 1, 2, \dots, m$:

$$a_1 x + a_2 x^2 + \dots \rightarrow 0$$

$$a_1 x^2 + a_2 x^4 + \dots \rightarrow 0$$

$$\dots \dots \dots \quad x \rightarrow 1 - 0$$

$$a_1 x^m + a_2 x^{2m} + \dots \rightarrow 0$$

* Glej I. Vidav, Višja matematika I, str. 445.

Če jih pomnožimo zaporedoma s koeficienti $c_1, c_2, \dots, c_m$ in jih seštejemo, dobimo

$$\lim \sum a_n P(x^n) = \lim [a_1 P(x) + a_2 P(x^2) + \dots] = 0, \quad x \rightarrow 1 - 0 \quad (5)$$

Od tod se nam vsiljuje domneva, da limitira vrsta $\sum a_n f(x^n)$ proti 0, ko gre x proti 1, tudi za nekatere funkcije, ki so pri $x = 0$ enake 0. Vzemimo, da je to res za funkcijo, ki je takole definirana:

$$f(x) = 0, \quad 0 \leq x < \frac{1}{2}; \quad f(x) = 1, \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \quad (6)$$

Videli bomo, da v tem primeru takoj dokažemo izrek. Za to funkcijo je vrsta $\sum a_n f(x^n)$ konvergentna za $0 \leq x < 1$. Po definiciji (6) je namreč $f(x^n) = 1$ za tiste eksponente n , pri katerih je $x^n \geq \frac{1}{2}$ ali $2x^n \geq 1$. Naj bo N največji eksponent, pri katerem je še $2x^N \geq 1$, tedaj $2x^{N+1} < 1$. Očitno je N največje naravno število, ki ne presega ulomka $\log 2 / |\log x|$. Za večje eksponente pa je $x^n < \frac{1}{2}$ in zato $f(x^n) = 0$. Ko smo N tako določili, moremo pisati

$$\sum a_n f(x^n) = a_1 + a_2 + \dots + a_N = s_N$$

Če res velja za našo funkcijo (6), da limitira $\sum a_n f(x^n)$ proti 0, ko gre $x \rightarrow 1 - 0$, potem je $\lim s_N = \lim \sum a_n = 0$, saj očitno rase $N \rightarrow \infty$, ko gre $x \rightarrow 1 - 0$. Torej je izrek s tem dokazan.

Na kratko zaznamujmo vrsto $\sum a_n f(x^n)$ z $F(x)$! V tej vsoti, pa tudi v vseh naslednjih, zavzame sumacijski indeks vrednosti 1, 2, 3, ... Dokazali bomo sedaj, da limitira $F(x)$ proti 0, ko gre $x \rightarrow 1 - 0$, če ustreza funkcija $f(x)$ temle pogojem:

Za vsak $\varepsilon > 0$ moremo najti dva z x deljiva polinoma $p_1(x)$ in $p_2(x)$, da je

- a) razlika $p_2(x) - p_1(x)$ deljiva z $1 - x$.
- b) $p_1(x) \leq f(x) \leq p_2(x)$ za $0 \leq x \leq 1$
- c) $\int_0^1 q(x) dx < \varepsilon$

kjer pomeni $q(x)$ polinom

$$q(x) = [p_2(x) - p_1(x)]/x(1-x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_r x^r$$

Vzemimo, da funkcija $f(x)$ ustreza tem pogojem. Potem veljajo ocene:

$$F(x) - \sum a_n p_1(x^n) \leq \sum a_n [p_2(x^n) - p_1(x^n)] \leq \sum (1 - x^n) x^n q(x^n)/n \quad (a)$$

Tu smo uporabili dejstvo, da je $na_n \leq 1$ in $p_1(x) \leq p_2(x)$. Nadalje je

$$1 - x^n = (1 - x)(1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}) \leq n(1 - x)$$

če leži x med 0 in 1. Od tod sledi

$$F(x) - \sum a_n p_1(x^n) \leq \sum (1 - x) x^n q(x^n) = (1 - x) \sum x^n (b_0 + b_1 x^n + \dots + b_r x^{rn})$$

Vsota na desni se da pisati

$$\sum x^n q(x^n) = b_0 \sum x^n + b_1 \sum x^{2n} + \dots + b_r \sum x^{(r+1)n}$$

Če tu upoštevamo, da je

$$x^k + x^{2k} + x^{3k} + \dots = x^k/(1 - x^k)$$

dobimo

$$\sum x^n q(x^n) = \sum b_{k-1} x^k/(1 - x^k)$$

V vsoti na desni je treba sešteti člene od $k = 1$ do $k = r + 1$.

Vzemimo, da gre x od leve proti 1. Potem limitira izraz $(1-x)x^k/(1-x^k) = (1-x)x^k/(1-x)(1+x+\dots+x^{k-1}) \rightarrow 1/k$. Zato imamo za vsak x , ki je dovolj blizu 1, oceno

$$F(x) - \sum a_n p_1(x^n) \leq b_0 + \frac{1}{2} b_1 + \dots + b_r/(r+1) + \varepsilon = \int_0^1 q(x) dx + \varepsilon < 2\varepsilon \quad (\alpha)$$

zaradi pogoja c). Izraz $b_0 + \frac{1}{2} b_1 + \dots + b_r/(r+1)$ je namreč ravno integral polinoma $q(x)$ v mejah od 0 do 1.

Na prav isti način uvidimo, da je

$$\sum a_n p_2(x^n) - F(x) \leq \varepsilon + \int_0^1 q(x) dx < 2\varepsilon \quad (\beta)$$

Tudi ta ocena velja za vsak x , ki je dovolj blizu 1. Polinoma $p_1(x)$ in $p_2(x)$ sta z x deljiva. Zato limitirata vsoti $\sum a_n p_1(x^n)$ in $\sum a_n p_2(x^n)$ proti nič, ko gre $x \rightarrow 1 - 0$ [Glej enačbo (5)]. Če je x dovolj blizu 1, sta torej obe vsoti manjši od ε . Zaradi ocen (α) in (β) sledi od tod, da je

$$-3\varepsilon < F(x) < 3\varepsilon$$

za vsak x , ki je dovolj blizu 1. Ker je bil ε poljuben, limitira $F(x)$ res proti 0, torej $\sum a_n f(x^n) \rightarrow 0$, za vsako funkcijo $f(x)$, ki ustreza pogojem a), b), c).

Dokazati moramo še, da ustreza s predpisom (6) definirana funkcija zahtevam a), b), c). V ta namen tvorimo iz $f(x)$ novo funkcijo $\varphi(x)$ takole:

$$\varphi(x) = [f(x) - x]/x(1-x)$$

Torej je $\varphi(x) = 1/(x-1)$ za $0 \leq x < \frac{1}{2}$ in $\varphi(x) = 1/x$ za $\frac{1}{2} \leq x < 1$.

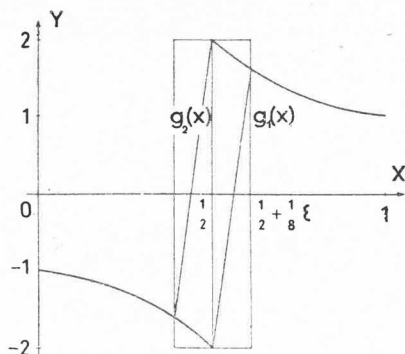
Funkcijo $\varphi(x)$ bi radi aproksimirali na intervalu $(0, 1)$ z dvema polinomoma $Q_1(x)$ in $Q_2(x)$, da bosta v veljavi neenačbi

$$Q_1(x) \leq \varphi(x) \leq Q_2(x) \quad \text{in} \quad \int_0^1 [Q_2(x) - Q_1(x)] dx < \varepsilon \quad (8)$$

Tvorimo iz $\varphi(x)$ dve zvezni funkciji $g_1(x)$ in $g_2(x)$. Druga $g_2(x)$ naj se ujema s $\varphi(x)$ od 0 do $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\varepsilon$ in od $\frac{1}{2}$ do 1. Vmes naj poteka $g_2(x)$ linearno¹⁾ (Glej pri-

¹ Enoti na koordinatnih oseh nista enaki!

čujočo sliko). $g_1(x)$ konstruiramo na prav podoben način. Očitno je $g_1(x) \leq \varphi(x) \leq g_2(x)$. S slike pa je razvidno, da je



$$\int_0^1 [g_2(x) - g_1(x)] dx < \varepsilon$$

ker je integral na levi manjši od ploščine pravokotnika s stranico $\frac{1}{8}\varepsilon$ in višino 4. Funkciji $g_1(x)$ in $g_2(x)$ sta zvezni, zato se dasta po Weierstrassovem izreku aproksimirati z dvema polinomoma $R_1(x)$ in $R_2(x)$ tako, da je ustrezno neenačbama

$$|R_1(x) - g_1(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad |R_2(x) - g_2(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

Postavimo sedaj $Q_1(x) = R_1(x) - \frac{1}{2}\varepsilon$ in $Q_2(x) = R_2(x) + \frac{1}{2}\varepsilon$. Zaradi zgornje ocene je $Q_1(x) < g_1(x)$, $Q_2(x) > g_2(x)$. Nadalje je

$$Q_2(x) - g_2(x) < \varepsilon, \quad g_1(x) - Q_1(x) < \varepsilon$$

torej

$$Q_1(x) < g_1(x) \leq \varphi(x) \leq g_2(x) < Q_2(x)$$

Od tod dobimo

$$\begin{aligned} \int_0^1 [Q_2(x) - Q_1(x)] dx &= \int_0^1 [Q_2(x) - g_2(x)] dx + \int_0^1 [g_2(x) - g_1(x)] dx + \\ &+ \int_0^1 [g_1(x) - Q_1(x)] dx < 3\varepsilon \end{aligned}$$

Pomnožimo sedaj prvo neenačbo v (8) z $x(1-x)$ ter prištejmo povsod x . Potem je $x + x(1-x)Q_1(x) < f(x) < x + x(1-x)Q_2(x)$. Pišimo še

$$p_i(x) = x + x(1-x)Q_i(x), \quad i = 1, 2$$

Polinoma $p_1(x)$ in $p_2(x)$ res zadoščata zahtevam a), b), c), saj je ustrezni polinom $q(x) = [p_2(x) - p_1(x)]/x(1-x) = Q_2(x) - Q_1(x)$. Torej je $\int_0^1 q(x) dx < 3\varepsilon$, število ε pa je poljubno majhno.

Literatura:

J. Karamata: Über die Hardy-Littlewoodsche Umkehrung des Abelschen Stetigkeitssatzes. Math. Zeit. 32, (1930), str. 318—319.

H. Wielandt: Zum Umkehrung des Abelschen Stetigkeitssatzes. Math. Zeit. 56, (1952), str. 206—207.

ANTIPROTON

BIBIJANA ČUJEC-DOBOVIŠEK

Osnovne delce¹ delimo glede na njihov spin² v dve skupini. Tiste delce, ki imajo celoštevilčen spin ($s = 0, 1, 2, \dots$), imenujemo *bosone*, tiste, ki imajo polštevilčen spin $s = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$, pa *fermione*³. Med bosone spadajo foton ($s = 0$), mezoni π ter težki mezoni. Med fermione pa spadajo elektron in pozitron, nevtrino, proton, nevtron, mezona μ^+ , μ^- in hiperoni, ki imajo vsi spin $\frac{1}{2}$.

Fermioni imajo lastnost, da obstaja k vsakemu fermionu tako imenovani *antidelec* (vsaj dosedanja odkritja in teorije kažejo, da to splošno velja). Oglejmo si to najprej na primeru, ki je najbolj poznan, namreč pri elektronu. Njegov antidelec je *pozitron* (pozitivni elektron), ki ima nasprotno enak naboj ($+e_0$) in nasprotno enak magnetni moment kot elektron. V masi in drugih lastnostih pa se elektron in pozitron ujemata. Elektron in pozitron ne moreta obstajati drug poleg drugega, ampak se kmalu združita, pri čemer oba delca izgineta, namesto njiju pa nastaneta dva ali več fotonov, ki prevzamejo vso energijo obeh delcev (to je v glavnem $2 m_e c^2$). Ta pojav je znan z imenom *anihilacija* (*uničenje*)⁴. Inverzni pojav je *nastanek elektronskega para*, ko se ob trku fotona z jedrom hkrati rodita elektron in pozitron, ki prevzameta energijo fotona (kar je več kot $2 m_e c^2 = 1,02 \text{ MeV}$, gre v prid kinetični energiji).

Teorija napoveduje, da mora nekaj podobnega kot za elektron veljati sploh za vse fermione. Zato že dolgo domnevajo, da obstajata tudi *antiproton* in *antinevtron*. Tudi *protonski par* (proton + antiproton) lahko nastane ob kakem trku, če je na razpolago dovolj energije. Upoštevajoč, da je proton 1838-krat težji kot elektron, dobimo, da je za tvorbo protonskega para potrebna energija 1838-krat večja kot pri elektronu: $2 m_p c^2 = 1838 \cdot 1,02 \text{ MeV} = 1876 \text{ MeV} = 1,876 \text{ GeV}$.

Pričakovati je, da dobimo protonske pare lahko pri trkih nukleonov (protonov in nevtronov), če so kinetične energije dovolj velike. Če naj nastane protonski par pri trku hitrega nukleona z mirujočim nukleonom, je še treba upoštevati, da se vsa kinetična energija prvega delca ne more izkoristiti za tvorbo para, ampak samo del, ki je določen z izrekom o gibalni količini. Račun⁵ pokaže, da mora imeti hitri nukleon vsaj kinetično energijo $5,6 \text{ GeV}$, da pri trku z mirujočim nukleonom lahko nastane protonski par.

Presek⁷ za tvorbo protonskega para pri takšnem trku je zelo majhen in doseže znatno vrednost šele pri zelo visokih energijah (10^8 do 10^4 GeV). Iz tega vidimo, da bo antiproton zelo redek pojav. Kajti v kozmičnih žarkih je delcev

¹ Glej Obz. mat. fiz. 3, 116 (1953)!

² Pravimo, da ima delec spin s , če ima komponenta njegove lastne vrtilne količine največjo vrednost $s \cdot h/2\pi$. Glej Obz. mat. fiz. 4, str. 116 (1956), ter I. Supek, Teorijska fizika II (Zagreb, 1952), str. 149 in dalje.

³ Imeni naj spominjata na to, da velja za bosone tako imenovana *Bose-Einsteinova*, za fermione pa *Fermi-Diracova* statistika. Glej na primer I. Supek, Teorijska fizika II (Zagreb, 1952), str. 284, 317, 325.

⁵ Glej Obz. mat. fiz. 2, 181 (1952).

⁶ Glej A. Peterlin, Obz. mat. fiz. 4, 13 (1955).

⁷ S preseki izražamo v atomski in jedrski fiziki verjetnosti raznih dogodkov pri obstreljevanju z delci. Presek jedra za neko reakcijo je verjetnost uspešnega zadetka, če leti delec skozi ploščo, v kateri je po eno jedro na ploskovno enoto.

s tako visoko energijo zelo malo, od obstoječih pospeševalnikov pa pride v poštev samo bevatron v Berkeleyu, kjer pospešujejo protone z maksimalno energijo 6,2 GeV.

Teoretično (1) so napovedali tudi pojave pri uničenju antiprotona z nukleonom. Ker nukleoni dosti močnejše sodelujejo z mezoni π kot z elektromagnetnim poljem, bodo nastali pri izginotju antiprotona namesto kvantov gama mezoni π . Možne so naslednje reakcije:

$$p + \bar{p} \rightarrow \pi^+ + \pi^-$$

$$p + \bar{p} \rightarrow 2 \pi^0$$

$$n + \bar{p} \rightarrow \pi^0 + \pi^-$$

kjer pomeni p proton, $\bar{p}$ antiproton in n nevtron. Prav tako pa so verjetne tudi reakcije, pri katerih nastane več mezonov π in ne samo dva. Medtem ko se uniči pozitron z elektronom šele potem, ko se pozitron ustavi, se more uničiti antiproton z nukleonom že med letom.

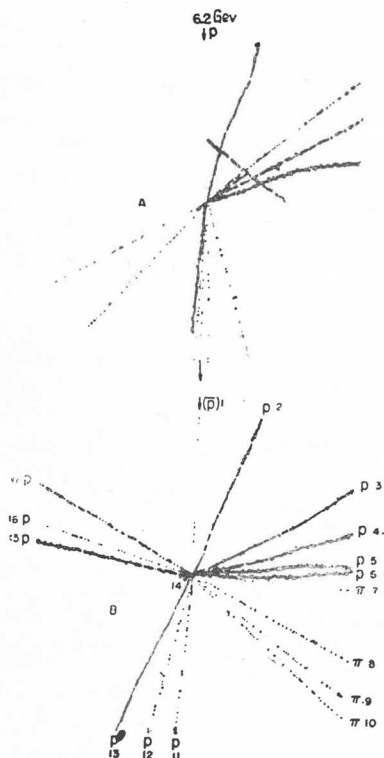
Pred kratkim so v resnici opazili pojave, pri katerih je bolj ali manj očitno, da gre za antiprotone. Leta 1947 (2) so v meglični celici, ki so jo izpostavili kozmičnim žarkom, opazili izredno močan plaz elektronov, ki ga je sprožil v svinčevi plošči delec s precej močno ionizacijo. Pri tem niso napravili nobenih kvantitativnih meritev, kljub temu pa domnevajo, da je morda snop sprožil antiproton. Leta 1954 (3) so v meglični celici, ki je bila postavljena v magnetno polje in izpostavljena kozmičnim žarkom, našli tako imenovani dogodek V: nevtralen delec razpade v 2 nabita delca, katerih sledi imata obliko narobe obrnjene črke V. Iz odklona o magnetnem polju in ionizacije so določili maso obeh delcev: Masa negativnega delca se ujema z maso protona ($= 1850 \pm 250 m_e$), masa pozitivnega delca pa z maso mezona π . Zdi se torej, da gre za nastanek mezona π^+ in antiprotona. Prav verjetno pa to ni, ker bi se v tem primeru namesto mezona π^+ moral pojaviti proton. Avtor sam dvomi o antiprotonu in omenja možnost, da sta razpadna produkta elektron in mezon π . V teh dveh primerih je torej še precej nejasnosti, ali gre v resnici za antiproton. Jasnejša sta naslednja dva primera, ki so ju tudi povzročili kozmični žarki.

Leta 1954 (4) so v meglični celici registrirali pojav, ki so ga ponovno in podrobneje analizirali letos (5). Delec z mirovno energijo $823 \pm 155 \text{ MeV}$ ($m_p c^2 = 938 \text{ MeV}$) se ustavi v medeninasti plošči in sproži vsaj tri mezone π^0 s celokupno energijo nad 1630 MeV; ta energija se pokaže v plazu elektronov, ki ga sprožijo mezoni. Ker je sproščena energija večja od mirovne energije delca, ki je pojav povzročil, je očitno, da gre za uničenje antiprotona z nukleonom, ne pa za razpad kakšnega bosona (težkega mezona), pri čemer je na razpolago samo energija tega delca.

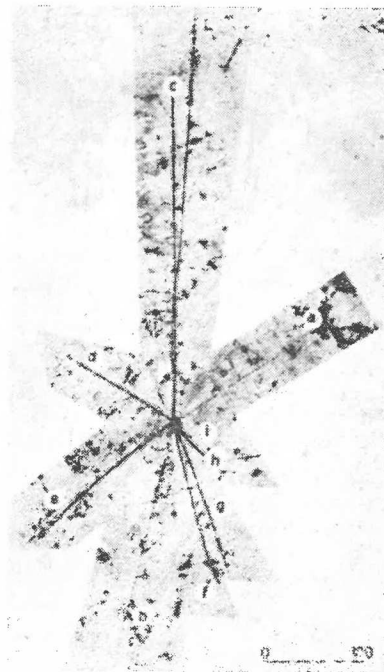
Leta 1955 (6) so v nuklearni emulziji našli naslednji pojav: Iz zvezde z energijo okrog 5 GeV izhaja 89 mikronov dolga sled (antiproton), ki sproži drugo zvezdo, ki vsebuje dva mezona, 4 protone in 1 triton s skupno energijo 1 do 2 GeV. Iz energijske bilance sledi, da je drugo zvezdo sprožil antiproton, čeprav ni mogoče izmeriti njegovo maso, ker je njegova sled prekratka.

Leta 1955 so pričeli z meritvami na bevatronu, ki so ga zgradili prav z namenom, da bi odkrili antiprotone. Merili so reakcijski presek za nastanek antiprotona (7). Protoni z energijo 6,2 GeV iz bevatrona so udarjali na tarčo

iz bakra, kjer so sproščali sekundarne delce. Z magnetnim poljem so izločili negativne delce z gibalno količino $1,19 \text{ GeV}/c$, to je mezone π^- s hitrostjo $v = 0,99 c$ in antiprotone z $v = 0,78 c$. Z večkratnimi koincidenkami se je posrečilo razlikovati mezone π^- od antiprotonov. Registrirali so tako 60 antiprotonov in ugotovili, da pride en antiproton na približno 60 000 mezonov π^- .



Sl. 1. Slike zvezde v nuklearni emulziji, ki so jo obsevali s protoni iz bevatrona. Iz zvezde A, ki jo je sprožil proton z energijo $6,2 \text{ GeV}$, izhaja antiproton (p)⁺ z energijo okrog 750 MeV , ki sproži zvezdo B. Sledi protonov so označene s p , sledi mezonov pa s π ; sled 14 je verjetno napravil delec a .



Sl. 2. Slika zvezde, ki jo je sprožil antiproton (sled L), potem ko se je ustavil v nuklearni emulziji. Sledi a in b sta od mezonov π . Ostale sledi so od protonov.

Obe sliki sta vzeti iz Physical Review [iz člankov (8) in (9)].

V nuklearnih emulzijah, ki so jih eksponirali na bevatronu, so doslej našli le 3 primere antiprotonov. Hill in drugi (8) so obsevali emulzije direktno s protoni iz bevatrona ($6,2 \text{ GeV}$). Iz ene zvezde (sl. 1), ki jo je sprožil tak proton, je odletel delec (antiproton) s kinetično energijo okrog 750 MeV , ki je sprožil zvezdo z 11 protoni in 4 mezoni π s celokupno energijo 1410 MeV . Energija vidnih sledi znaša torej okrog 660 MeV več, kot je kinetična energija vpadajočega delca.

Chamberlain in sodelavci (9) so v zvezi s prejšnjim poskusom (7) eksponirali nuklearne emulzije sekundarnim delcem, ki so jih zavrli s 132 g cm^{-2}

bakra, tako da so se antiprotoni predvidoma ustavili v emulzijah. Na teh ploščah so našli antiproton, ki se je ustavil v emulziji in sprožil zvezdo s sedmimi protoni in dvema mezonoma π s celokupno energijo 826 MeV in gibalno količino 520 MeV/c (sl. 2). Izmerili so tudi maso antiprotona, katerega sled v emulziji meri 9,3 cm, in to na več načinov. Vse meritve se v območju natančnosti ujemajo z maso protona.

Pri drugem poskusu so Chamberlain in sodelavci (10) magnetno izločili negativne delce z gibalno količino 700 MeV/c, ki so vpadli direktno na emulzijo. V teh emulzijah so našli 1 antiproton z dosegom 12,1 cm, ki se je ustavil v emulziji in sprožil zvezdo, ki vsebuje 2 protona, 1 triton in pet mezonov π (dva π^- , en π^+ in dva z neznanim nabojem) s celokupno energijo 1300 ± 50 MeV in gibalno količino 750 MeV/c (kar dokazuje, da je odpadlo na nevtrone vsaj 100 MeV energije). Maso tega antiprotona so izmerili na več načinov in dobili za razmerje med njegovo maso in maso protona srednjo vrednost $1,013 \pm 0,034$. Ta primer je prvi, v katerem je delec s protonovo maso sprožil zvezdo, pri kateri je znašala energija vidnih sledi več kot celokupna energija (kinetična in mirovna) vpadaajočega delca. Tu je povsem očitno, da je bil novi delec v resnici antiproton, to je delec, ki izgine ob združitvi z nukleonom, pri čemer se sprosti energija $2 m_p c^2$.

Čeprav so eksperimentalni podatki o antiprotonu še precej skopi, nedvomno potrjujejo obstoj antiprotona, v precejšnji meri pa tudi teoretične napovedi o njegovih lastnostih. Reakcijski presek je v resnici zelo majhen (7). Pri uničenju antiprotona se pojavijo tako nabiti mezoni π kot nevtralni mezoni π^0 , ki hitro razpadejo v žarke gama in tako povzročijo plazove elektronov. Antiproton se uniči s protonom ne le v mirovanju, ampak tudi med letom. Zdi se, da nastane pri tem pogosto po več parov mezonov π namesto enega samega para.

Literatura:

- (1) R. E. Marshak: *Meson Physics*, str. 338, 1952.
- (2) E. Hayward: *Cosmic Ray Electrons*, *Phys. Rev.* **72**, 937, 1947.
- (3) E. W. Cowan: A V-Decay Event with a Heavy Negative Secondary, *Phys. Rev.* **94**, 161, 1954.
- (4) H. S. Bridge, H. Courant, H. De Staebler, Jr. and B. Rossi: Possible Example of the Annihilation of a Heavy Particle, *Phys. Rev.* **95**, 1101, 1954.
- (5) H. S. Bridge, D. O. Caldwell, Y. Pal, B. Rossi: Further Analysis of the Massachusetts Institute of Technology Antiproton Event, *Phys. Rev.* **102**, 930, 1956.
- (6) E. Amaldi, C. Castagnoli, G. Cortini, C. Franzinetti, A. Manfredini: Unusual Event Produced by Cosmic Rays, *Nuovo Cim.* **1**, 492, 1955.
- (7) O. Chamberlain, E. Segré, C. Wiegand, T. Ypsilantis: Observation of Antiprotons, *Phys. Rev.* **100**, 947, 1955.
- (8) R. D. Hill, S. D. Johansson, F. T. Gardner: Nuclear Emulsion Observation of Annihilation of an Antiproton, *Phys. Rev.* **101**, 907, 1956.
- (9) O. Chamberlain, W. W. Chupp, G. Goldhaber, E. Segré, C. Wiegand, E. Amaldi, G. Baroni, C. Castagnoli, C. Franzinetti, A. Manfredini: Antiproton Star Observed in Emulsion, *Phys. Rev.* **101**, 909, 1956.
- (10) O. Chamberlain, W. W. Chupp, A. G. Eksping, G. Goldhaber, S. Goldhaber, E. J. Lofgren, E. Segré, C. Wiegand, E. Amaldi, G. Baroni, C. Castagnoli, C. Franzinetti, A. Manfredini: Example of an Antiproton — Nucleon Annihilation, *Phys. Rev.* **102**, 921, 1956.

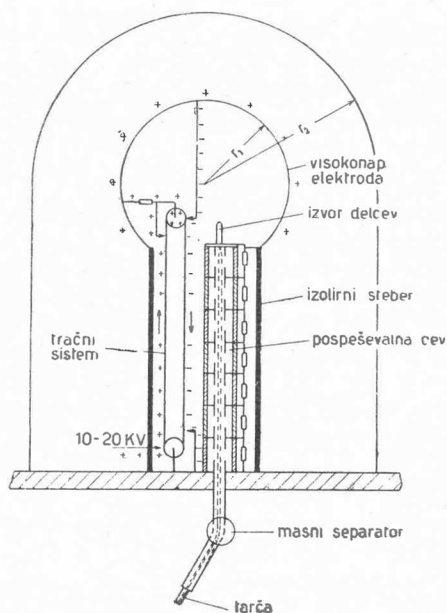
ELEKTROSTATIČNI POSPEŠEVALNIK

EDVARD CILENŠEK

Med pospeševalniki, to je stroji za pospeševanje ionov in elektronov, se po svoji preprosti zgradbi in natančno določeni energiji delcev posebno odlikuje *elektrostatični pospeševalnik*. Takšen pospeševalnik je kombinacija *elektrostatičnega generatorja* visoke enosmerne napetosti in *pospeševalne cevi* z *izvorom ionov ali elektronov*. V naslednjem se bomo po vrsti seznanili s temi sestavnimi deli pospeševalnika.

1. Elektrostatični generator

Za visoke enosmerne napetosti, ki jih tak pospeševalnik potrebuje, uporabljamo elektrostatične generatorje s tračnim prenosom naboja. Starinski torni in influenčni stroji za ta namen niso uporabni, ker dajejo premajhne napetosti in toke.



Sl. 1. Shematični prerez elektrostatičnega pospeševalnika.

Sestavo in delovanje elektrostatičnega generatorja shematično podaja slika 1. Generator obstoji iz visokonapetostne elektrode, izolirnega nosilnega stebra in tračnega sistema, s katerim elektrodo naelektrimo. Visokonapetostna elektroda je krogla ali pa valj s krogelnim nastavkom. Postaviti jo moramo tako, da je od vseh sten obdajajočega prostora približno enako oddaljena. Njen premer se ravna po napetosti, ki jo želimo doseči, in po električni prebojni trdnosti plina, v katerem generator dela. Poleg teh dveh faktorjev je seveda še važna velikost priprav, ki jih moramo vstaviti v notranjost elektrode.

Maksimalno dosegljivo napetost $U_{\max}$ ocenimo tako, da si mislimo elektrodo in okolne stene nadomeščene s koncentričnima krogla (radija r_1 , r_2). Pri maksimalni napetosti doseže poljska jakost na površini notranje krogle prebojno trdnost (E_p), torej: $U_{\max} = \int_{r_1}^{r_2} E_p (r_1/r)^2 dr = E_p r_1 (1 - r_1/r_2)$. Za odprt generator, ki dela v zraku z navadnim pritiskom ($E_p = 20 \text{ kV/cm}$ za večje razdalje), izračunamo po tej enačbi, da mora biti za napetost 1 MV radij visokonapetostne elektrode najmanj enak $r_1 = 0,5 \text{ m}$, za napetost 2 MV pa že $r_1 = 2,5 \text{ m}$ (oboje, če je r_2 zelo velik).

Električno prebojno trdnost zraka lahko močno povečamo, če ga stisnemo na nekaj atmosfer. Molekule plina se pri tem zblížajo; če naj dobi elektron na svoji skrajšani prosti poti za ionizacijo potrebno energijo, mora biti električna poljska jakost ustrezno večja. Pri tlaku 10 at znaša električna prebojna trdnost zraka že okrog 120 kV/cm. Lahko pa delamo tudi s plini ali mešanico plinov, ki imajo boljše izolacijske lastnosti kot zrak, n. pr. s freonom (CCl_2F_2) ali z žveplovim heksafluoridom (SF_6), ki imata oba trikrat večjo prebojno trdnost od zraka.

Kadar rabimo stisnjen zrak ali kak drug plin kot izolator, moramo ves generator zapreti v primeren kotel. V tem primeru govorimo o *zaprti izvedbi* stroja. Dimenzije visokonapetostnega elektrodnega sistema so pri tej izvedbi za enake napetosti znatno manjše kot pri odprti izvedbi generatorja. Ker s tem prihranimo na materialu in poleg tega omogočimo ljudem neoviran vstop in prehod skozi obratovalni prostor generatorja, tudi kadar ta dela, se v zadnjem času poslužujemo skoraj izključno tega načina gradnje.

Visokonapetostna elektroda leži navadno na treh, štirih ali šestih simetrično postavljenih stebrih, ki jih tvorijo zaporedno toga zvezani izolatorji iz porcelana ali tekstolita. Za zanesljivo izolacijo potrebna višina stebrov je odvisna od tega, ali imamo generator odprte ali zaprte izvedbe in koliko je polje v notranjosti stebra homogeno, to je, kako skrbno je izvedena enakomerna razdelitev visoke napetosti vzdolž vse višine. Polje v notranjosti nosilnega stebra homogeniziramo na ta način, da ves stebel enakomerno razdelimo na večje število segmentov. Te segmente tvorijo posamezni izolatorji, med katere vstavljamo kovinske plošče. Plošče so zaradi nevarnosti korone obdane z obroči in imajo vse potrebne izvrtine za trak, za pospeševalno cev, za krmilne palice itd. Med plošče enakomerno razdelimo vso napetost generatorja, bodisi potenciometrično z uporovno verigo ali pa s sistemom osti, od katerih je vsaka s potencialno nižje ležečega obroča uperjena proti sosednjemu, višje ležečemu obroču; preko teh osti teče koronski tok.

Najbolj kritično visokonapetostno mesto je pri takšni izvedbi prehod med visokonapetostno elektrodo, ki ima gladko površino, in koronskimi obroči. Ti namreč ne predstavljajo popolnoma gladke površine nosilnega stebra in je zato jakost polja, posebno na prvih obročih, neposredno pod visokonapetostno elektrodo zelo visoka. Polje na tem kočljivem mestu razbremenimo s tem, da naredimo premer kovinskih obročev nekaj manjši od premera visokonapetostne elektrode.

Za napetost 1 MV bi bila pri odprti izvedbi in brez homogeniziranja polja vzdolž izolirnega stebra potrebna višina stebrov okrog 2,5 m, s skrbnim homogeniziranjem polja pa le okrog 1,7 m. Za napetost 5 MV so te vrednosti seveda ustrezno večje in znašajo za prvi primer okrog 12 m, za drugi pa 8 m. Pri zaprtih izvedbah pod tlakom pa so lahko višine precej manjše, tako da bi

lahko pri tlaku 10 at zraka in skrbnem homogeniziranju polja znašala potrebna višina stebrov za napetost 1 MV le okrog 0,6 m, a za napetost 5 MV le okrog 3 m.

Prenosni trak je izdelan iz izolirnega papirja, oljnega platna, gumirane platna, pletene bombaževine, astralona, nylona ali drugega izolirnega materiala. Položen je preko dveh valjev. *Gonilni valj* je navadno na zemeljskem potencialu; drugi valj pa je nameščen v notranjosti visokonapetostne elektrode. Za nanašanje električnega naboja na trak imamo dve možnosti: *samovzbujanje* ali *tuje vzbujanje* stroja. Pri samovzbujanju je spodnji valj iz izolirnega materiala, gornji valj pa je kovinski. Pri dotiku traka se spodnji valj naelektri pozitivno, če je njegova dielektričnost večja od dielektričnosti traku (in obratno). Naboj nasprotnega predznaka pa potuje s trakom proti valju v visokonapetostni elektrodi. Nasproti temu valju je nameščen kovinski glavnik, katerega zobje so nastavljeni proti valju. Preko teh zob steče naboj v obliki koronskega toka na glavnik in dalje na visokonapetostno elektrodo, s katero je glavnik zvezan.

Pri samovzbujanju lahko jakost polnilnega toka spreminjamo le s spremembo hitrosti traku. Na mnogo bolj enostaven način pa spreminjamo polnilni tok, če uporabimo tuje vzbujanje generatorja. Ta način uporabljajo vsi veliki generatorji. Oba valja sta pri tej izvedbi kovinska. Vzporedno z gonilnim valjem, ki je uzemljen, namestimo prav tak glavnik z ostmi, kot je postavljen nasproti valju v visokonapetostni elektrodi, a ga od zemlje izoliramo. Nanj pritismo enosmerno napetost 10 do 20 kV. Naboj, ki v obliki koronskega toka brizga iz konic glavnika, bi stekel preko valja v zemljo, če ga ne bi prestrezal mimohiteči trak. Trak prenaša ta naboj do glavnika ob valju v visokonapetostni elektrodi. Ta glavnik pa spet na opisani način odvzame s traku naboj in ga dovaja na površino elektrode, ki se tako naelektri na visoko napetost. S spremembo napetosti usmernika, ki je vezan na spodnji glavnik, lahko v veliki meri vplivamo na jakost polnilnega toka in s tem na napetost, ki jo generator dosega.

Če ima trak širino b ter hitrost v in če je površinska gostota električnega naboja na traku enaka D , dobimo polnilni tok $I_p = vbD$. Maksimalna površinska gostota naboja D je odvisna od električne prebojne trdnosti obdajajočega plina in znaša pri zraku ($E_p = 30 \text{ kV/cm}$ za majhne razdalje): $D = \epsilon_0 E_p = 8,86 \cdot 10^{-12} \text{ AsV}^{-1} \text{ m}^{-1} \cdot 3 \cdot 10^6 \text{ Vm}^{-1} = 26 \cdot 10^{-6} \text{ As/m}^2$. S trakom, ki ima širino 1 m in hitrost 20 m/sek, bi dobili v odprti izvedbi generatorja teoretično okrog 500 μA polnilnega toka. Praktično pa ga dobimo le polovico, torej okrog 250 μA , in to zaradi nepopolnega delovanja konic na glavniki in zaradi drugih izgub.

Polnilni tok pa na enostaven način podvojimo s tem, da izkoristimo še drugo polovico traku, ki pa mora prenašati naboj nasprotnega predznaka. To napravimo na ta način, da valj v notranjosti visokonapetostne elektrode od nje izoliramo, prav tako pa tudi ločimo glavnik od elektrode in ga prevodno zvežemo z valjem. Na nasprotni strani valja, torej na povratni strani traku, namestimo še dodatni glavnik, ki je proti valju izoliran in zvezan z visokonapetostno elektrodo. Naboj, ki ga trak prinaša, dvigne potencial valja proti elektrodi za 10 do 20 kV. Tako nabiti valj influencira v oseh dodatnega glavnika nasprotnoimenski naboj, ki zaradi močnega električnega polja steče v obliki koronskega toka na povratno polovico traku. Generator dela pri opisani ureditvi tem bolj stabilno, čim bolj se gostoti električnih nabojev na obeh

tračnih polovicah medsebojno ujemata. To enakost dosežemo tako, da vstavimo med zgornji valj in elektrodo koronsko špranjo, ki jo lahko spreminjamo in s tem primerno uravnamo napetost med obema.

V zaprtih izvedbah pod tlakom pa je polnilni tok zaradi višje prebojne trdnosti izoliranega plina ustrezno večji. Zaradi povečane prebojne trdnosti je namreč ustrezno povečan tudi polnilni tok. Pri tlaku 10 at zraka, kjer znaša prebojna trdnost zraka že 120 kV/cm, dobimo z istim trakom štirikrat tolikšen tok kot pri odprtem stroju.

Pri tem, ko s trakom prenašamo elektrenino v notranjost visokonapetostne elektrode, narašča na njej napetost po obrazcu

$$dU/dt = (I_p - I_r)/C$$

kjer je I_p tok, ki ga trak prenese z zemeljskega na visoki potencial, I_r odvodni tok, ki teče z visokonapetostne elektrode na zemljo, in C kapaciteta elektrodnega sistema. Do prebojne vrednosti napetosti, ki je podana s konstrukcijo elektrodnega sistema, je dosegljiva napetost odvisna samo od toka, ki ga trak prenaša na visoki potencial, in od celotnega odvodnega toka, to je toka po stebrih, koronskega toka in toka v pospeševalni cevi. Vsakokratna napetost se pod probno vrednostjo ustali vedno na oni višini, ki je podana z ravnotežjem obeh tokov. Če pa je jakost odvodnega toka majhna v primeri s polnilnim tokom, ki ga trak prenaša, tedaj napetost narašča, dokler ne doseže prebojne vrednosti, ki ima za posledico preboj na najbližji uzemljeni predmet v obliki iskre. Nato napetost znova narašča do ponovnega preboja, kar se periodično ponavlja. Pri stalni potrošnji lahko s spremembo polnilnega toka napetost generatorja poljubno uravnavamo, in to v vsem njegovem napetostnem območju.

2. Pospeševalna cev

Pospeševalna cev je visokovakuumska cev, ki ima vgrajeno vrsto primerne oblikovanih elektrod iz nerjavečega jekla ali druge primerne kovine (aluminij, kovar). Takšna cev je sestavljena iz zaporedja votlih porcelanskih ali steklenih izolatorjev, med katere so vloženi kovinski kolobarji. Vakuumsko zatesnitev izvedemo ali s primernim lepilom ali pa s tesnilni iz sintetične gume ali iz svinca. Krožni kolobarji segajo na zunanji in notranji strani izolirne stene cevi nekoliko navzven. Ta nastavek služi na notranji strani za pričvrstitev elektrode, zunanjo stran pa vežemo prevodno na ustrezne koronske obroče generatorja, s čimer njegovo napetost enakomerno razdelimo med elektrode.

Oblika elektrod je v starejših izvedbah izrazito cilindrična. Takšne elektrode tvorijo s svojimi medsebojnimi špranjami zaporedje močnih elektrostatičnih leč, ki naj skrbijo za to, da ostanejo pospeševalni delci v tankem curku. Elektrode morajo biti dobro centrirane, ker se sicer zaradi nesimetrije nastalih leč velik del curka izgubi. Iz curka izpadli delci izbijajo iz elektrod sekundarne elektrone ali pa se vsedajo na notranjo steno pospeševalne cevi, kjer lahko kot ploskovni naboj onemogočajo stabilno lego curka v cevi.

Da ostanejo delci, ki jih pospešujemo, v notranjosti curka, je potrebno, da imamo v pospeševalni cevi tako visok vakuum, da je povprečna prosta pot molekul preostalega plina čim večja v primeri z razdaljo med izvorom delcev

in tarčo stroja. Pri elektrostatičnem pospeševalniku mora biti povprečna prosta pot molekul vsaj nekaj metrov dolga, kar dosežemo pri vakuumu okrog 10^{-5} tora. To zahteva močno difuzijsko črpalko s sesalno hitrostjo nekaj sto litrov na sekundo (1).

3. Ionski izvor

Ione dobimo z ionizacijo plina, n. pr. vodika, ki je pod tlakom 10^{-2} do 10^{-3} mm Hg. To se dogaja v *ionizacijski posodi*, ki ima spodaj izvrtino, skozi katero izstopajo ioni v visokovakuumsko pospeševalno cev. Ionski izvori v posameznih izvedbah pospeševalnikov se po obliki med seboj precej razlikujejo, uporabljajo pa v glavnem tri načine ionizacije: z visoko napetostjo, z električnim lokom in z visoko frekvenco.

Visokonapetostni ionski izvori rabijo nekaj deset tisoč voltov napetosti. Plin ionizirajo elektroni, ki dobe zaradi visoke napetosti dovolj energije. Nastali ioni letijo na katodo in skozi izvrtino v njeni sredini v pospeševalno cev. Za ionizacijo potrebno visoko napetost lahko znatno znižamo, če postavimo ionizacijsko posodo v polje močnega magneta. V tem primeru se poti elektronov zvijejo in s tem znatno podaljšajo; za enako močno ionizacijo so tedaj napetosti lahko znatno nižje. Izstopajoči ionski tok ima vrednost 50 do 100 μ A. Ionski curek je energijsko zelo nehomogen, ker prihajajo ioni z različnih mest v posodi. Če dela izvor na primer z napetostjo 20 kV, ima kinetična energija izstopivšega iona lahko vsakršno vrednost med 0 in 20 kV.

Izvori z električnim lokom delajo z znatno nižjo napetostjo (nekaj sto voltov). Pri njih utesnimo radi večje intenzitete ionizacije visoko ionizirani plin (*plazmo*) v kapilaro. Ioni izstopajo skozi odprtino v steni kapillare. Izstopni ionski toki ne presegajo bistveno vrednosti tokov v visokonapetostnih izvori, so pa zaradi manjše napetosti energijsko bolj homogeni.

Najmočnejši izvor ionov je *radiofrekvenčni izvor*, pri katerem stoji cev z razredčenim plinom v visokofrekvenčnem električnem ali magnetnem polju. Plin ionizirajo prosti elektroni, ki nihajo v ritmu visokofrekvenčnega polja. Uporabljajo se frekvence do nekaj sto MHz, pri čemer dobimo izstopne ionske toke do 1 mA. Tudi energijska homogenost ionov je zelo dobra. Pri tem izvoru je ugodno tudi to, da lahko ionizacijsko cev napravimo skoraj vso iz pireksovega stekla, ki ima najmanjši rekombinacijski efekt za atomarni vodik; na ta način dobimo v izstopajoči mešanici ionov preko 50 % protonov.

Iz vsakega ionskega izvora prihaja skozi njegovo izstopno odprtino v pospeševalno cev poleg ionskega žarka tudi tok neioniziranega plina, ki ga mora difuzijska črpalka na spodnjem koncu cevi sproti odstranjevati.

Če hočemo namesto ionov pospeševati elektrone, namestimo na visokopotencialnem koncu pospeševalne cevi izvor elektronov, na primer žarečo volframovo žico. Če pa imamo visokonapetostni ionski izvor ali neutesnjeni električni lok, ga lahko uporabimo tudi kot izvor elektronov na ta način, da obrnemo napetosti.

Ionski ali električni izvor z vsem potrebnim priborom napajamo s primernim generatorjem, ki je nameščen v visokonapetostni elektrodi in ki ga navadno poganja zgornji valj.

Pri delu z ionskim curkom nas navadno zanima le ena masa ionov, ki jo želimo iz preostale mešanice izločiti. To napravimo na ta način, da pod pospeševalno cev namestimo močan elektromagnet, katerega polje stoji pravo-

kotno na curku. V tem polju se ioni z različnimi masami različno odklonijo. S pravilno uravnano jakostjo magnetnega polja lahko dobimo na tarči ione zaželenne mase, pri delu z vodikom n. pr. ločeno protone in molekulske ione H_2^+ ter H_3^+ .

4. Kontrola napetosti

Visoko napetost generatorja lahko merimo na več načinov: 1. potenciometrično, z odvodnim tokom preko uporovne verige; 2. s tem da merimo pridobljeno energijo delcev s pravkar omenjenim masnim analizatorjem stroja; 3. z merjenjem dosega delcev v zraku; 4. z *rotacijskim voltmetrom*. — Prvi način ni najboljši zaradi spremenljivosti uporov in možnih koronskih izgub na visokopotencialnem koncu verige. Drugi način je zamuden in ne dovoljuje direktnega čitanja napetosti. Tretji način pa lahko služi le za grobo oceno visoke napetosti. Najboljši je zadnji način, to je z rotacijskim voltmetrom.

Rotacijski voltmeter je pri odprtem generatorju nameščen na najbližji steni, pri zaprtem pa znotraj, na vrhu kotla. Bistveni del takšnega voltmetra je vrtljiv kondenzator, katerega elektrodi imata obliko vetrnic. Uzemljeno ploščo vrtimo s stalno frekvenco in s tem periodično prekrivamo drugo ploščo, ki je izolirana. Kadar se plošči ne prekrivata, influencira močno električno polje generatorja na izolirani plošči električni naboj. Ko pa se plošči prekrivata, steče ta naboj preko visokega upora v zemljo. Ko se nato plošči zopet odkrivata, steče naboj iz zemlje preko upora na izolirano ploščo nazaj. To se ponavlja pri vsakem obratu rotirajoče plošče. Izmenična napetost, ki nastane pri tem na uporu, pa služi kot mera za električno poljsko jakost na površini izolirane plošče in s tem tudi za napetost visokonapetostne elektrode pospeševalnika. Dobljena izmenična napetost je navadno zelo majhna in jo moramo ojačiti z ojačevalnikom. Možno je tudi, da izmenični tok rotacijskega voltmetra usmerimo s komutatorjem in ga nato merimo z občutljivim galvanometrom.

Rotacijski voltmeter lahko umerimo na ta način, da pritismo na visokonapetostno elektrodo dve znani napetosti in skalo linearno ekstrapoliramo. To seveda ni vedno možno, ker morata biti napetosti razmeroma zelo visoki, če naj bo skala dovolj natančna. Navadno pa umerimo voltmeter z resonancami* nekaterih protonskih jedrskih reakcij, pri katerih se pojavijo tudi žarki γ . Takšna resonanca nastopa pri kalciju pri kinetičnih energijah protonov 862 keV in 927 keV, pri fluoru pri 334 keV in 1303 keV, pri litiju pri 440 keV, pri beriliju pri 1630 keV itd.

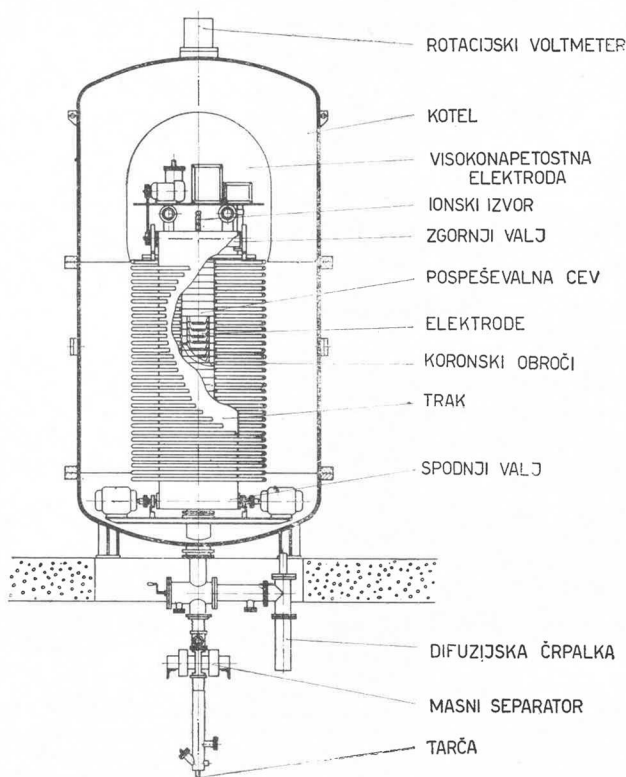
Za večino meritev na jedrskih reakcijah je važno, da je visoka napetost stroja in s tem energija pospeševanih delcev čim bolj stabilna. Za stabilizacijo visoke napetosti služi več načinov, ki so pri nekaterih izvedbah tudi medsebojno kombinirani. Vsi izkoriščajo padec napetosti na nekem uporu, ki ga na njem povzroči neki tok, ki je proporcionalen napetosti generatorja. To je lahko koronski tok konice, ki sega v bližino visokonapetostne elektrode, ali tok rotacijskega voltmetra. Pri tretjem načinu uporabimo tok, ki ga dobimo z enega od dveh paralelno ležečih kovinskih segmentov, ki sta nameščena pred tarčo stroja tako, da teče ionski žarek pri pravilni vrednosti generator-

* O jedrski resonanci govorimo, kadar je pri neki energiji vpadajočih delcev reakcija posebno pogostna. Krivulja, ki kaže odvisnost preseka (glej pripombo na strani 21 v tej številki) od energije, ima pri resonančni energiji oster vrh.

jeve napetosti točno med obema segmentoma (2). Na uporabi dobljena signalna napetost je proporcionalna napetosti generatorja. Navadno jo ojačimo in speljemo preko primerne povratnega vezja, da potem služi za uravnavanje polnilnega toka generatorja. Na ta način lahko stabiliziramo visoko napetost do 1 %. Nekateri izboljšani načini pa omogočajo stabilizacijo generatorjeve napetosti do 0,1 %.

5. Elektrostatični pospeševalnik v Ljubljani

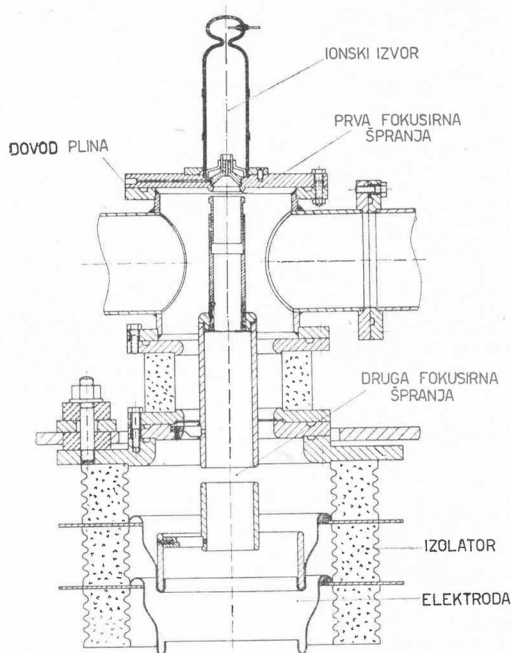
Slika 2 kaže projekt elektrostatičnega pospeševalnika, ki ga gradimo za potrebe jedrske fizike na Inštitutu Jožefa Stefana v Ljubljani (3). To je



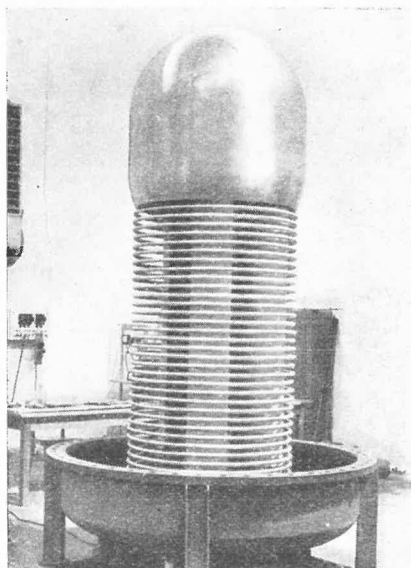
Sl. 2. Presek skozi elektrostatični pospeševalnik za napetost 2 MV v Ljubljani. Premer kotla = 1,8 m, višina = 4 m. Premer visokonapetostne elektrode = 1,1 m. Višina izolirnega stebra = 1,6 m. Število koronskih obročev = 32. Pogonska moč elektromotorjev = 6,6 kW.

pospeševalnik zaprte izvedbe, predviden za napetost 2 MV in polnilni tok 1200 μA pri tlaku 10 atmosfer. Kotel je trodelen, notranji premer znaša 1,8 m, višina pa 4 m. Srednji del kotla ima diametralno nameščeni dve okni za opazovanje notranjosti, kadar pospeševalnik dela. Tudi na dnu kotla je vgrajeno okno, ki je namenjeno predvsem za opazovanje instrumentov v visokonapetostni elektrodi.

Izolirni stéber je visok 1,6 m. Sestavljajo ga trije nosilni stebriči, ki služijo istočasno kot visokovakuumske cevi. Ena od teh cevi je namenjena za pospeševanje ionov, ostali dve pa za diferencialno črpanje ionskega izvora. Vse tri cevi so enako grajene. Sestavljene so iz 32 votlih porcelanskih izolatorjev, ki imajo zunanjo in notranjo steno nagubano. Med dva sosednja izolatorja je vstavljen kolobar iz 2 mm debele aluminijske pločevine, ki nosi elektrodo lijakaste oblike iz istega materiala. Vakuumska zatesnitev je izvedena z mrzlokaličnim aralditom. Visokovakuumske cevi nosilnega stebra so proti okolici zaščitene z 32 koronskimi obroči s premerom 1 m. Ti so izdelani iz aluminijskih cevi in pritrjeni z vijaki na kolobarje visokovakuumskih



Sl. 3. Radiofrekvenčni ionski izvor in vstopna ionska optika pospeševalnika.



Sl. 4. Pospeševalnik z odkritim kotlom. Klišé za to sliko je iz prijaznosti posodil Inštitut J. Stefan, za kar se najlepše zahvaljujemo.

cevi. Vsa napetost generatorja je enakomerno razdeljena med koronske obročé z uporovno verigo, ki ima med dvema zaporednima obročema vključen visoko-Ohmski upor 400 M Ω .

Trak je 60 cm širok in je nameščen v sredini nosilnega stebra. Napravljen je iz tkane bombaževine. S hitrostjo 19 m/s ga poganjata dva trofazna elektromotorja s skupno močjo 6,6 kW. Postavljena sta simetrično na obeh straneh spodnjega valja. Medtem ko je spodnji valj toga vezan na dno kotla, je zgornji vertikalno premakljiv, kar omogoča lahko montažo in naknadno nategnitev traku.

Ležaja gornjega valja sta izolirano pritrjena na ploščadi iz 10 mm debele železne pločevine, ki ima potrebne odprtine za prehod traku in gornjega zaključka visokovakuumskih cevi. Na rob te ploščadi je pritrjena visoko-

napetostna elektroda z enostavno bajonetno zaporo. Nad to ploščadjo je izolirano od nje pritrjena še ena ploščad enake oblike. Ta služi za namestitvev napajalnih in krmilnih delov ionskega izvora in rezervoarja za plin. Poleg tega je na njej pritrjen tudi 400 watni generator za izmenično napetost 220 V, ki ga poganja gornji valj in ki oskrbuje ionski izvor s potrebno električno energijo.

Vse tri visokovakuumske cevi segajo skozi spodnji del kotla, ki stoji nad kvadratno odprtino v stropu merilnega prostora. Vsaka cev ima spodaj preko visokovakuumskega ventila priključeno oljno difuzijsko črpalko s sesalno hitrostjo 300 m/sek. Med ventilom in difuzijsko črpalko je vgrajena past za hlajenje s tekočim zrakom. Pospeševalna cev ima pod ventilom opazovalno ohišje z okencem za kontrolo ionskega curka. V cev porinemo premično kvarčno ploščico. Ko nanjo zadene curek, se na njej pokaže fluorescirajoča pega.

Pod opazovalnim ohišjem je nameščen razklonski elektromagnet, na katerega je ves spodnji sistem čvrsto pritrjen. Ta elektromagnet je grajen za magnetno gostoto do $0,6 \text{ Vs/m}^2$ in bo odklanjal žarek na tarčo pod kotom 7° . Lego elektromagneta lahko z vijaki spreminjamo v vse smeri, s čimer lahko žarek na tarči fino centriramo.

Slika 3 kaže enostaven radiofrekvenčni ionski izvor in vstopno ionsko optiko na gornjem koncu pospeševalne cevi (4). Izvor sam je napravljen iz pireksovega stekla. Dovod plina je speljan v podnožje izvora, ki ga od visokovakuumskega prostora deli aluminijska katoda z izstopnim kanalom premera 2 mm in dolžine 6 mm. Iz izvora izstopa okrog 100 mikroamperov ionskega toka.

Neposredno pod kanalnim ustjem je nameščena prva električna leča, ki dobi primerno napetost iz suhega usmernika v visokonapetostni elektrodi. Njej sledi druga leča z višjo napetostjo, ki jo daje spremenljiva koronska špranja. Ta je vgrajena med visokonapetostno elektrodo in prvim koronskim obročem pod njo. Obe špranji imata cilindrične elektrode in služita za točno zbiranje curka na tarči.

Slika 4 nam kaže pospeševalnik z montirano visokonapetostno elektrodo in koronskimi obroči. Montažna dela na pospeševalniku še niso povsem zaključena, vendar domnevamo, da bodo končana že to leto, tako da bo stroj prihodnje leto bržkone že lahko služil svojemu namenu.

THE ELECTROSTATIC ACCELERATOR

(Summary)

An introduction about electrostatic accelerators in general is followed by a description of such a machine (for 2 MeV), which is built at the J. Stefan Institute at Ljubljana. A more detailed description has been given in reference (3).

Literatura:

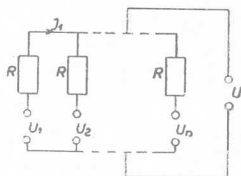
1. D. R. Goddard: Moderne vakuumске črpalke, *Obz. mat. fiz.* **2**, str. 1 (1952).
2. R. Korbar: Določitev vezalne energije devterona, *Obz. mat. fiz.* **3**, str. 167—9 (1953).
3. E. Cilenšek, A. Pečnikar: Construction of an Electrostatic Accelerator for 2 MV after Van de Graaff, *Rep. Inst. J. Stefan*, **2**, 21, 1955.
4. E. Cilenšek: Eine Hochfrequenzionenquelle mit guter Ionenausbeute, *Rep. Inst. J. Stefan*, **1**, 45 (1953).

NOVICE

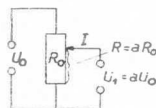
ANALOGNI RAČUNSKI STROJI ZA REŠEVANJE SISTEMOV LINEARNIH ENAČB

Kakor je znano¹, delimo računske stroje na številčne ali *digitalne* in *analogne* stroje. Analogni računski stroj ne dela s številkami, ampak izvrši dano računsko operacijo tako, da nadomesti števila s fizikalnimi količinami, n. pr. z električnimi napetostmi. S temi količinami izvrši potem stroj neki fizikalni proces, ki je računski operaciji *analogen*. Končno dobljena vrednost fizikalne količine je merilo za zahtevani rezultat računske operacije.

Poglejmo najprej, kako takšen stroj seštevja! Števila vstavimo v stroj kot napetosti U_i , s katerimi poganjamo tokove po vzporedno vezanih enakih uporih R (gl. sl. 1). Za vsak upor velja Ohmov zakon $I_i = (U - U_i)/R$. Če je vsota teh tokov enaka nič, je napetost U enaka aritmetičnemu povprečju danih napetosti U_i . Iz $I_1 = 0 = \Sigma (U - U_i)/R$ namreč sledi $U = (1/n) \Sigma U_i$. Tako dobljeno aritmetično povprečje nadomešča vsoto, kajti stalni faktor $1/n$ nič ne moti.



Sl. 1. Vezava uporov, ki služi za seštevanje: $U = (U_1 + U_2 + \dots + U_n)/n$.



Sl. 2. Neobremenjeni potenciometer.

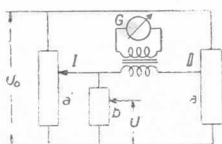
Upornosti R naj bodo dovolj velike, da lahko notranje upornosti napetostnih virov zanemarimo. Napetosti so običajno izmenične, imeti pa morajo isto frekvenco in za seštevanje realnih števil tudi isto fazo. Odštevamo tako, da prištevamo izmenične napetosti z nasprotno fazo. Za ta namen uporabimo n. pr. transformator, pri katerem je ničelna točka na sredi sekundarnega navitja. Pozitivna števila odvezamo z ene polovice navitja, negativna pa z druge.

Množenje števil, katerih absolutne vrednosti so < 1 , opravimo s potencimetri (sl. 2). Če skozi drsnik ne teče tok, raste napetost U sorazmerno z razmerjem $a = R/R_0$, pri čemer je R upornost, ki jo zajame drsnik, R_0 pa celotna upornost. Kadar odvezoma drsnik tok I , pa ni več linearne zveze; napetost U_1 je odvisna tudi od toka I . To napako popravimo z vezavo, ki jo kaže slika 3. Na posebnem dekadnem potencimetru (II) nastavimo število a (< 1) in potem premikamo drsnik I, dokler ničelni instrument G ne pokaže nobenega toka več. S tem smo na levem potencimetru dobili dolžino a' , ki je tolikšna, da je odvezta napetost U_1 sorazmerna razmerju a , ki smo ga nastavili na potencimetru II. Napetost U , ki jo vzamemo s tretjega potencimetra pri razmerju b (< 1), je potem enaka $U = abU_0$ in je torej sorazmerna produktu števil a in b .

Tak način množenja in seštevanja nam omogoča, da s primerno vezavo (sl. 4) izračunamo vrednosti poljubnih linearnih funkcij oblike: $f_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - b_i$. Skupino n takšnih vezav ($i = 1, 2, \dots, n$) lahko uporabimo za reševanje sistema n linearnih enačb. Treba je le izbrati pri-

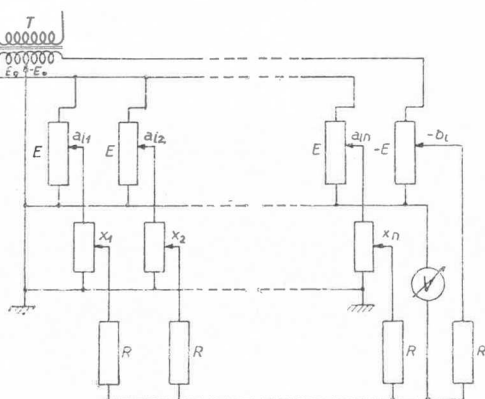
merno metodo reševanja, ki bo najhitreje dala najnatančnejši rezultat. Oglejmo si najprej Gaussovo iteracijsko metodo in metodo najmanjših kvadratov².

Pri iteracijski metodi najprej poljubno izberemo $x_2, x_3, \dots, x_n$, ki jih vstavimo v prvo enačbo sistema. V tej enačbi (torej na ustreznem potencio- metru računskega stroja) spreminjamo x_1 toliko časa, da je $f_1 = 0$; tako dobimo prvi približek za x_1 . Tega in pa $n - 2$ zadnjih x -cv vstavimo v drugo enačbo, iz katere dobimo prvi približek za x_2 . Tako nadaljujemo, dokler iz zadnje enačbe ne dobimo x_n . S tem je prva iteracija končana. Z dobljenimi prvimi približki potem enako začnemo drugo iteracijo. Število iteracij, ki jih je treba izvršiti, da dobimo zahtevano natančnost, je zelo odvisna od koefi- cientov a_{ik} . Metoda dobro konvergira, če so koeficienti glavne diagonale veliki v primeri z ostalimi koeficienti, ker ima takrat determinanta sistema raz-



Sl. 3. Vezava dveh potenciometrov, ki služi za množenje: $U = ab U_0$.

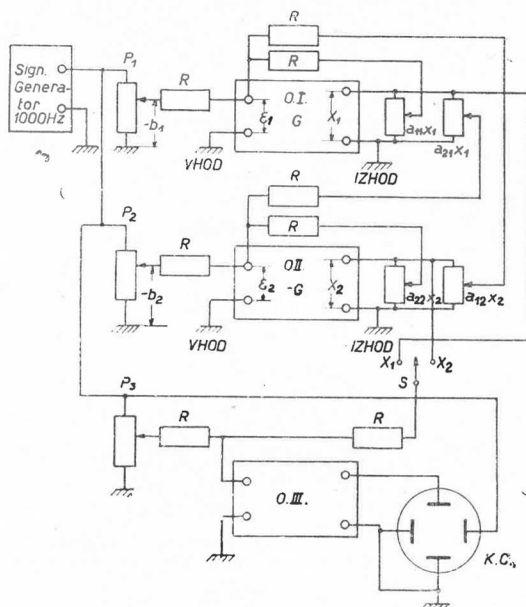
Sl. 4. Vezana uporov, ki služi za izračunavanje linearnih funkcij.



meroma veliko vrednost v primeri z velikostmi njenih elementov. Izračunana aproksimacija x_1 je takrat malo odvisna od sprememb drugih x . Če je le mogoče, skušamo s prestavljanjem vrstic in stolpcev spraviti determinanto v zaželeno obliko; vedno pa se to ne posreči. Takšna predpriprava sistema zahteva veliko časa, če hočemo dobiti zadovoljivo konvergenco. V tem je glavni nedostatek iteracijske metode. Velika prednost pa je, da eventualne vmesne napake pri računanju ne kvarijo končnega rezultata (vplivajo pa seveda na hitrost konvergence).

V neugodnih primerih je primernejša metoda najmanjših kvadratov. Če v sistemu $\sum_k a_{ik} x_k - b_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) substituiraemo za x_k neke pri- bližne vrednosti x'_k , dobimo določeno napako $\varepsilon_i = \sum_k a_{ik} x'_k - b_i$, ki je tem večja, čim bolj se izbrani x'_k razlikujejo od korenov sistema. Po principu najmanjših kvadratov so v dani množici približnih rešitev najprimernejše tiste, pri katerih doseže vsota kvadratov napak minimum. Glede na to, kako v praksi dosežemo minimum, je več metod. Eno od teh so že uporabili v Inštitutu za nuklearne nauke »Boris Kidrič« v Vinči pri Beogradu³, kjer so zgradili stroj, ki lahko rešuje sisteme do 30 enačb (nenatančnost je 2 0/0-na). Minimum dosežejo tako, da najprej s spreminjanjem x_1 dobijo minimum $\sum \varepsilon_i^2$; potem spreminjajo samo x_2 , dokler spet $\sum \varepsilon_i^2$ ni minimalen itd. Minimum odčitajo na mikroampermetru ali na katodni cevi. Napetost, ki ustreza napaki ε_i , namreč najprej ojačijo in potem priključijo na usmernik (n. pr. Westector W 6), ki ima takšno karakteristiko, da je izhodna napetost sorazmerna ε_i^2 .

Opisani računski stroj opravlja samo seštevanje in množenje; rešitev pa mora še vedno iskati človek sam. Obstajajo pa tudi taki stroji, ki sami privedejo do končnega rezultata. Treba je samo vstaviti koeficiente sistema in rezultate odčitati. Takšno ugodnost daje metoda povratnega sklopa (feedback method), ki je tudi osnova vseh servomehanizmov⁵.



Sl. 5. Shema stroja za reševanje sistema dveh linearnih enačb.

Na sliki 5 je shema takšnega stroja za reševanje sistema dveh linearnih enačb z dvema neznankama:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1, \quad (1)$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2.$$

Naj bosta x_1' in x_2' izhodni napetosti ojačevalcev O.I. in O.II. Zaradi izbrane vezave pride na vhod I napetost $\xi_1 = \frac{1}{3}(a_{11} x_1' + a_{12} x_2' - b_1)$ in na vhod drugega ojačevalca pa $\xi_2 = \frac{1}{3}(a_{21} x_1' + a_{22} x_2' - b_2)$. Ti dve napetosti se potem v ojačevalcu ojačita v $x_1' = G \xi_1$ in $x_2' = G \xi_2$, kjer je G ojačevalni faktor ojačevalca. Potem dobimo enačbi:

$$(a_{11} - \lambda) x_1' + a_{12} x_2' = b_1, \quad (2)$$

$$a_{21} x_1' + (a_{22} - \lambda) x_2' = b_2,$$

kjer je $\lambda = 3/G$. Vidimo, da lahko izhodni napetosti x_1' in x_2' smatramo kot rešitvi x_1 in x_2 našega sistema (1), če je le G dovolj velik, tako da je $\lambda \ll a_{11}$ in $\lambda \ll a_{22}$ (v nasprotnem primeru koeficienta a_{11} in a_{22} ustrezno popravimo). x_1' in x_2' izmerimo kompenzacijsko s potenciometrom P_3 , ojačevalcem O.III., ki ojači razliko med napetostjo x in napetostjo na P_3 ; kot indikator služi katodna cev (K.C.).

Zaradi povratnega sklopa je potrebno raziskati pogoje, pri katerih dobimo stabilno stacionarno stanje, t. j. stanje, kjer sta x_1' in x_2' na izhodu stalna. Jasno je, da sta x_1' in x_2' enolično določena, če je determinanta

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix}$$

različna od nič. Takrat je namreč naš homogeni sistem enačb (2) enolično rešljiv. Težave nastopijo le, če je $D = 0$. Če gre D proti 0, zrasteta v splošnem x_1' in x_2' v neskončnost. Temu primeru, ko torej sistem (2) ni rešljiv, se moramo izogniti.

Dogaja se, da tudi v primerih, ko je sistem (2) enolično rešljiv, ko je torej $D \neq 0$, stroj ne dela normalno, ampak divje niha. Ne niha pa s frekvenco, ki mu jo vsiljujemo s transformatorjem, ampak z neko svojo lastno frekvenco. Da bomo ta pojav razumeli, moramo upoštevati, da sta ojačevalni faktor G in z njim parameter λ pri vsakem ojačevalniku odvisna od frekvence. Če ojačujemo namesto sinusnega neko dušeno nihanje ($U = U_0 e^{-\beta t} \cdot e^{i\omega t}$), pa lahko računamo še, da je ojačevalni faktor odvisen tudi od koeficienta dušenja (β). Lahko se zgodi, da je sicer za frekvenco, s katero naj dela stroj, $D \neq 0$, da pa je pri neki drugi frekvenci in pri nekem β ojačevalni faktor takšen, da je $D = 0$. Iskani rešitvi nehomogene enačbe se v takšnem primeru pridruži neki mnogokratnik rešitve homogene enačbe. Ta dodatek se ob vklopitvi pokaže kot neko lastno nihanje stroja, ki je dušeno, če je β pozitiven. To še ni nobena nesreča, ker lahko počakamo, da lastno nihanje mine.

Nerodno pa je, če je katera izmed posebnih vrednosti β , ki so določene z enačbo $D = 0$, enaka nič ali celo negativna. Lastno nihanje stroja tedaj ni dušeno. Tedaj stroj divje niha. V primeru, ko je omenjena posebna vrednost β negativna, amplituda nihanja eksponentno narašča, dokler ojačevalniki ne prekoračijo meje linearnega ojačevanja.

Mnogi ojačevalniki so takšni, da je fazna premaknitev pri nihanju, ki ni dušeno ($\beta \leq 0$), vedno večja kot 90° . To pomeni, da je realni del kompleksnega ojačevalnega faktorja G pri takem ojačevalniku vedno negativen. Za stabilnost stroja v takšnem primeru zadošča, da so koeficienti a_{ik} takšni, da imajo koreni λ_i enačbe $D = 0$ pozitivne realne dele. Tedaj namreč faktor λ , ki je določen z ojačevalnim faktorjem ($\lambda = 3/G$ v zgornjem primeru), pri nobeni frekvenci in pri nobenem negativnem β ni enak kakemu korenu λ_i , tako da je pri negativnem β vedno $D \neq 0$. Vsako lastno nihanje stroja je tedaj dušeno ($\beta > 0$).

Kakor vidimo, je glavni problem, kako pripravimo sistem enačb, da bo stanje stroja stabilno. Pogosto je treba za ta namen enačbe in člene v enačbah na vse načine premetavati, kar zahteva nemalo truda. (Pri pripravljanju enačb tudi ne smemo pozabiti, da morajo biti koeficienti a_{ik} manjši kot 1.) Omenimo lahko, da problem stabilnosti, na katerega smo tu naleteli, ni specifičen za računske stroje opisane vrste, ampak je skupen vsem linearnim filtrom s povratno vezjo ter vsem servomehanizmom.*

Opisani stroj daje rešitve enačb z natančnostjo do 0,1 %, kar za večino tehniških problemov zadošča. Če pa zahtevamo večjo natančnost, združimo to metodo z iteracijsko. Izračunane x_k' vstavimo v sistem enačb, da dobimo nove

* *Servomehanizmi* so stroji, ki samega sebe regulirajo. Pri njih vpliva posledica nazaj na vzrok. Tako je mogoče doseči, da je določeno stanje stabilno kljub spremenljivim zunanjim vplivom. Preprost primer servomehanizma je centrifugalni regulator pri parnem stroju.

b_k' . Dobljene razlike $\Delta b_k = b_k' - b_k$ pomnožimo na primer s 100 in jih zopet vstavimo v sistem namesto prvotnih b_k . Novi sistem rešimo tako kot prvotnega. S tem dobimo stokratne vrednosti popravkov ($100 \Delta x_k$). Popravke je treba prišteti k prejšnjim x_k' . Postopek lahko nadaljujemo. Rudolf Kladnik

Literatura:

1. L. N. Ridenour, A. Žabkar: Digitalni računski stroji, Obzornik za mat. in fiz. **1** (1951), št. 3, str. 29.
2. E. Whittaker, G. Robinson: Tečaj numeričke matematike (srb. hrv. prevod), Beograd 1951, str. 191.
3. D. Mitrović, R. Tomović, Reports Vinča, Vol. 2, Jan. 195-, Beograd.
4. W. A. Adcock: An Automatic Simultaneous Equation Computer, Rev. Sci. Instr. **19** (1948), 181.
5. H. M. James, N. C. Nichols, R. S. Phillips: Theory of Servomechanisms, Radiation Lab. Series 25.
6. E. A. Goldberg: An Electronic Simultaneous Equation Solver, J. Appl. Phys., **19** (1948), 339.
7. C. E. Berry: A Computer for Solving Linear Simultaneous Equations, J. Appl. Phys., **17** (1946), 208.

DOLGOŽIV RADIOAKTIVEN IZOTOP ALUMINIJA

Med radioaktivnimi izotopi elementov je mnogo takšnih, ki imajo dovolj dolg razpolovni čas (vsaj nekaj ur), da jih lahko rabimo za zaznamovanje snovi (za tracersko tehniko). Tisti redki elementi, ki nimajo uporabnih radioaktivnih izotopov, ki imajo po več stabilnih izotopov, ki se dajo uporabiti v isti namen. Le pri aluminiju do pred kratkim niso poznali niti radioaktivnega niti stabilnega izotopa, primernega za tracersko tehniko. Naravni aluminij obstoji namreč z edinega stabilnega izotopa Al^{27} . Med radioaktivnimi izotopi pa do nedavnega niso poznali nobenega, ki bi imel daljši razpolovni čas kot nekaj minut.

Iz teoretičnih razlogov so že nekaj časa domnevali, da Al^{26} , ki razpada z oddajo pozitrona in razpolovnim časom 6,7 sekund, ni v osnovnem stanju, ampak da je izomer (jedro je v vzbujenem stanju). Razpolovni čas osnovnega stanja tega izomera pa naj bi po tej domnevi bil med 10^4 in 10^6 leti.

Da bi eksperimentalno potrdili gornjo domnevo, so obsevali tarčo iz naravnega magnezija z 10^{19} devteronov z energijo 15 MeV. Reakciji, s katerima je nastal Al^{26} , sta: $\text{Mg}^{25}(\text{d}, \text{n}) \text{Al}^{26}$ in $\text{Mg}^{26}(\text{d}, 2\text{n}) \text{Al}^{26}$. Po dodatku majhne množine naravnega aluminija so mogli radioaktivni Al^{26} skupaj z dodatkom kemično odločiti od magnezija. Aktivnost β so merili z Geiger-Müllerjevim števcem s sljudnim okencem, aktivnost γ pa z NaJ (Tl) scintilacijskim spektrometrom. Izkazalo se je, da je po razpadu kratkoživega izomera preostala šibka aktivnost, ki se kemično ni dala ločiti od aluminija. To aktivnost so pripisali iskanemu Al^{26} v osnovnem stanju. Iz razmerja obeh aktivnosti in s predpostavko, da sta kratkoživi in dolgoživi Al^{26} nastala v enakem razmerju, so ocenili razpolovni čas slednjega na 10^6 let.

Upajo, da bo možno pridobivati dolgoživi aluminijev izotop v večjih količinah. To bi bilo zaželeno, ker bi se dal ta izotop s pridom izkoristiti za kemične, metalurške in sorodne raziskave. Silvester Šterbal

Literatura:

1. J. R. Simanton, R. A. Rightmire, A. L. Long, T. P. Kohman: Long Lived Aluminium 26. Phys. Rev. **96**, 1711 (1954).
2. J. C. Kluyver, C. van der Leun, P. M. Endt: Ground State of Al^{26} . Phys. Rev. **94**, 1795 (1954).

RENTGENSKI ŽARKI S SONCA

Raziskovanja odboja radijskih valov na atmosferskih plasteh so dovedla do odkritja, da mora biti atmosfera v višinah nad sto kilometrov močno ionizirana. Ta del atmosfere (od 100 do 400 km višine) se zato imenuje *ionosfera*. Iz opazovanega lomnega količnika atmosfere za radijske valove so izračunali gostoto ionov v različnih višinah ionosfere. Zaradi razlik v gostoti ionov in elektronov v različnih višinah razdelimo ionosfero v plasti, ki jih imenujemo po vrsti od spodaj navzgor s črkami D , E , F_1 in F_2 . Gostota ionov v teh plasteh se sicer s časom precej spreminja, toda zaradi velikostnega reda navedimo rezultate enkratne meritve: $\varrho(E) = 1,5 \cdot 10^5$, $\varrho(F_1) = 3 \cdot 10^5$, $\varrho(F_2) = 6 \cdot 10^5$ ionov/cm³, v višinah 100, 200 in 400 km.

Vzrok ionizacije je absorpcija skrajnega kratkovalovnega ultravijoličnega in rentgenskega dela sončne svetlobe. Za teoretično obravnavanje teh pojavov moramo predvsem poznati porazdelitev energije v sončnem spektru in lastnosti atmosfere. Doslej so po navadi računali, da je spekter prvotne sončne svetlobe takšen kot spekter črnega telesa s temperaturo $T = 6000^\circ \text{K}$. Spektralna porazdelitev gostote svetlobnega toka (j), ki ga oddaja črno telo, je določena s *Planckovim zakonom*:

$$dj/d\lambda = 2 \pi hc^2 \lambda^{-5} [\exp(-hc/\lambda kT) - 1]^{-1},$$

pri čemer je h Planckova konstanta, c svetlobna hitrost, k pa Boltzmannova konstanta. (Glej Obz. mat. fiz. 1, 132, 1951!) Na posamezna valovna območja odpadejo relativni deleži ($\Delta j/j$) celotne gostote energijskega toka, ki jih podaja predzadnji stolpič naslednje tabele:

Vrsta svetlobe	λ	$\Delta j/j$	$\Delta j'$
rentgenska	0—100 Å	10 ⁻⁹⁸ %	10 ⁻⁹⁸ W/m ²
kratkovalovna ultravijolična	do 2000	0,25	3,5
dolgovalovna ultravijolična	2000—4000	12,6	180
vidna	4000—8000	46,5	650
infrardeča svetloba	8000— ∞	40,7	570
skupaj		100 %	1400 W/m ²

Zadnja kolona pove, kakšna bi bila po tej teoriji spektralna porazdelitev gostote energijskega toka (j'), ki ga Zemlja sprejema s Sonca.

Če poznamo spektrano porazdelitev in lastnosti atmosfere, lahko izračunamo, kako debela plast atmosfere absorbira določeni del svetlobe. Povzročeno ionizacijo zraka pa računamo takole:

Naj bo $h\nu_0$ ionizacijska energija, dj' gostota sončne svetlobe v intervalu $d\nu$ pri $\nu > \nu_0$, n število molekul za enoto volumna, $\sigma(\nu)$ pa molekulski presek za ionizacijo s to svetlobo! Potem je na enoto volumna zaradi ionizacije absorbirani energijski tok iz območja $d\nu$ enak $n\sigma(\nu)dj'$. Ta energijski tok delimo z ionizacijsko energijo, da dobimo število ionskih parov (dq), ki jih svetloba iz intervala $d\nu$ na sekundo ustvarja v prostorninski enoti: $dq = n\sigma(\nu)dj'/h\nu_0$. Število vseh nastalih ionskih parov (na cm³ na sek) pa dobimo, če ta izraz integramo preko vseh absorpcijskih področij. V stacionarnem stanju je ionizacija zraka tolikšna, da se na sekundo rekombinira ravno toliko ionov v nevtralne molekule, kolikor jih nastaja.

Atmosfera močno absorbira vso svetlobo, ki ima manjšo valovno dolžino kot 2000 Å. Največji delež se pri tem porabi za disociacijo kisika (ta del absorpcije je zlasti močan pri in pod 1750 Å), za ionizacijo kisika, ki je zlasti močna s svetlobo med približno 900 in 1000 Å, in za absorpcijo v dušiku pod 800 Å). Upoštevajoč vse to, so teoretično izračunali *absorpcijske karakteristike* atmosfere, to je krivulje, ki kažejo, kako posamezni spektralni deli svetlobnega toka pojemajo z globino.

Rezultati teh računov se niso ujemali z ugotovljeno ionizacijo plasti *E*. Računi na osnovi črnega sevanja Sonca s temperaturo 6000° K so namreč pokazali, da bi se morala vsa tista svetloba, ki je zmožna povzročiti ionizacijo, absorbirati že v najvišjih plasteh F_1 in F_2 . Da bi bila plast *E* dosegljiva, bi moral biti absorpcijski presek za faktor 10^3 manjši ali pa mora biti sevanje Sonca v kratkovalovnem ultravijoličnem ali rentgenskem območju relativno mnogo močnejše kot sevanje črnega telesa pri temperaturi 6000° K. Glede na opazovane absorpcijske karakteristike atmosfere so bili mnogi avtorji bolj naklonjeni domnevi, da prispevajo rentgenski žarki glavni delež k ionizaciji plasti *E*. Zato so domnevali, da mora obstajati na Soncu neki posebni izvor rentgenskih žarkov, ki ni vezan na črno sevanje Sonca. Sonce je nedvomno izvor teh žarkov, kajti ionizacija je odvisna od zenitnega kota Sonca.

Da se preskusi ta domneva, so bila potrebna direktna merjenja v višinah nad 100 km. Precej teh meritev so opravili po vojni v Ameriki. Za to so uporabljali preurejene nemške rakete V-2 ter rakete Aerobee in Viking. Te rakete so bile opremljene med drugim tudi z Geigerskimi števci za rentgenske in ultravijolične žarke. Števci štejejo fotone. Avtomatska radijska zveza pa skrbi, da se ves čas med poletom na zemlji beležijo rezultati. Spektralno območje, v katerem je števec občutljiv, omejimo na eni strani s fotoelektričnim pragom katode, na drugi pa s prepustnostjo okenca. Za okenca so uporabili berilij, aluminij, mehko steklo, nitrocelulozo in podobno. Merili so pa tudi s fotografskimi filmi ter termoluminescentnimi snovmi.

Ugotovili so, da meri gostota energijskega toka v rentgenskem območju od 7 do 60 Å približno 1 do $2 \cdot 10^{-3}$ W/m². Primerjava tega rezultata z zgornjo tabelo dovolj zgovorno pokaže, da opazovani žarki X ne morejo biti del črnega sevanja pri temperaturi 6000° K. Zanimivo je bilo tudi odkritje, da teh žarkov ni pod 87 km višine. Izračunali so prepustnost atmosfere za različne valovne dolžine in primerjali z merjeno jakostjo. Iz tega so lahko sklepali, da so opazovani rentgenski žarki omejeni na kratkovalovni strani pri približno 7 Å.

Meritve so sicer potrdile obstoj rentgenskih žarkov in njihov verjetni izvor iz Sonca, niso pa razložile njihovega postanka. Zadovoljivo razlago je našel Edlen: Sončna korona (to je najzunajnejša plast Sončeve atmosfere) je v celoti sestavljena iz elektronov in visoko ioniziranih ionov nekaterih prvov, predvsem 9 do 14-krat ioniziranega železa, manj pa niklja, kalcija, argona in še nekaterih drugih. Ionizacijske energije za zadnji izgubljeni elektron teh ionov merijo do 900 eV, čemur ustreza valovna dolžina 13 Å. Ustrezna kinetična temperatura korone meri nekaj milijonov stopinj. Ioni se od časa do časa rekombinirajo z elektroni, pri čemer se sprosti ionizacijska energija v obliki fotonov. Hoyle je s pomočjo nekaterih domnev izračunal obliko tako nastalega rentgenskega spektra in dobil, da intenziteta počasi raste do maksimuma pri 500 eV (temu ustreza $\lambda = 25$ Å), nato pa hitro pade. Izračunana absorpcijska karakteristika atmosfere za takšen spekter se popolnoma sklada z merjeno krivuljo, le da je pomaknjena za 3 km navzgor.

Z meritvami so sicer potrdili obstoj rentgenskih žarkov s Sonca, ni pa še zadovoljive razlage za postanek plasti *E*. Zdi se, da je žarkov sedaj za faktor 10 preveč, razen če domnevamo, da je rekombinacijski koeficient atmosfere precej manjši kot vrednost, s katero so doslej računali. Nekateri pa zopet skušajo razložiti postanek plasti *E* s kratkovalovnimi ultravijoličnimi žarki. Meritve so namreč pokazale, da je tudi teh več, kot so jih teoretično pričakovali po predpostavki, da sveti Sonce kot črno telo s temperaturo 6000°K . Za dokončen odgovor o ionizaciji ionosfere pa je potrebnih še več podatkov o jakosti sevanja v velikih višinah in boljše poznavanje lastnosti zraka.

Mitja Kregar

Literatura:

1. Friedman, Lichtman, Byram: Photon Counter Measurements of Solar X-rays and Extreme Ultraviolet Light. *Phys. Rev.* **83**, 1025 (1952).
2. Friedman, Byram: The Contribution of X-rays to Ionisation of E. Layer. *Phys. Rev.* **92** (1954).

VPRAŠANJA

1. UTRIPAJOČA ŽARNICA

Zaporedna kombinacija žarnice, večje dušilke s sklenjenim jedrom ter kondenzatorja s primerno kapaciteto ima zanimivo lastnost. Pri majhni izmenični napetosti žarnica ne sveti. Pri povečani napetosti pa začne utripajoče svetiti. Tako utripa le v intervalu nekaj voltov. Pri $C = 8\ \mu\text{F}$ in $L = 0,35$ henry utripa 100 vatna žarnica v intervalu efektivne napetosti od 215 V do 220 V; pri večji napetosti pa preneha utripati in stalno sveti. Kako naj si razložimo ta zanimivi pojav?

Ladislav Bevc

2. O HITROSTNI PORAZDELITVI MOLEKUL

Pri stalni temperaturi je gostota plina sorazmerna tlaku. Mislimo si, da bi bila atmosfera v popolnem ravnotežju in da bi bila povsod ista temperatura. Potem bi bila v vsaki točki gostota zraka sorazmerna tlaku, tlak pa bi bil enak teži zraka, ki je v stebriču s presekom 1 cm^2 nad tisto točko. Kako pojema tlak z višino?

Mislimo si sedaj, da bi bil zrak tako razredčen ali pa molekule tako majhne, da medsebojnih trkov ne bi bilo treba upoštevati! Molekule bi neovirano padale na tla in se od tal odbijale. Kakšna bi morala biti porazdelitev molekul glede vertikalne komponente hitrosti, da bi tudi v tem primeru gostota zraka z višino tako pojemala, kot smo prej izračunali?

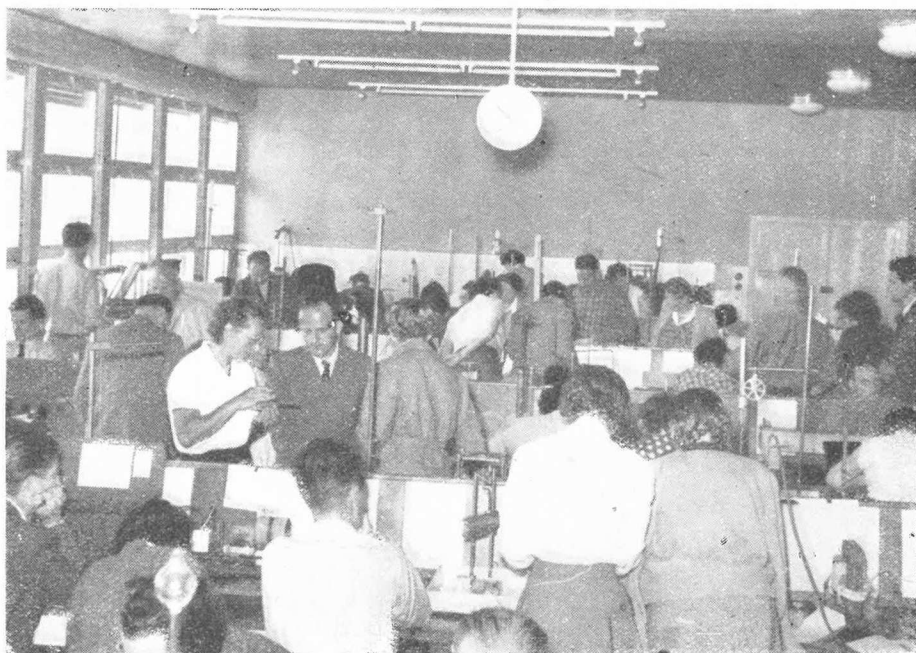
Podobno vprašanje je tole: Če vržemo kroglico vertikalno navzgor s hitrostjo v , doseže višino $v^2/2g$. Gibanje navzgor je pojemalno. Ko doseže kroglica najvišjo lego, ima hitrost nič. Če bi torej v enakih časovnih presledkih z isto hitrostjo metali kroglice navzgor, bi bila njih gostota največja v bližini najvišje lege, proti tlu pa bi pojemala. Če pa imajo kroglice različne začetne hitrosti, je njihova višinska porazdelitev lahko drugačna. Kakšna naj bo porazdelitev kroglic glede začetne hitrosti, da bo porazdelitev po višini enakomerna? (Zračni upor zanemarimo.)

Ivan Vidar

ŠOLA

TEČAJ ZA FIZIKALNO EKSPERIMENTIRANJE

Verbalizem je metoda, ki pri nobenem pouku ne more biti opravičljiva, zlasti pa ne pri pouku prirodnih ved. Vendar moramo resnici na ljubo ugotoviti, da še prav močno in široko živi po naših šolah. Ne maramo pa biti krivični do naših učiteljev fizike; zato moramo navesti vzroke, zakaj imamo danes pri fiziki še tako stanje. Eden je v tradiciji, ki je še dandanes ni mogoče temeljito izkoreniniti, da je namreč fizika narativna veda, to je, da jo je mogoče učiti le s pripovedovanjem o fizikalnih spoznanjih. Drugi je v nezadostnem šolanju



Udeleženci tečaja pri delu

Foto Vlastja

našega starejšega učnega kadra: kolikor je ta imel kako fizikalno šolo, je bila ta zelo verbalistična. Tretji vzrok je v pomanjkanju učil za fiziko po šolah, ki je ponekod tako hudo, da spravi v obup človeka, ki pride na tako šolo. Končno pa naj še poudarimo pretirano obremenitev učitelja, ki bi hotel učno normo pri pouku fizike opraviti tako, kot bi jo bilo treba, da bi bil pouk fizike sodoben in kvaliteten.

Društvo matematikov in fizikov LRS je hotelo dati pobudo, da bi se to stanje izboljšalo, ko je z materialnimi sredstvi in organizacijsko pomočjo SPK LRS in materialno podporo Združenja učiteljev in profesorjev LRS organiziralo od 28. junija do 10. julija 1956 tečaj za fizikalno eksperimentiranje na nižjih

gimnazijah. Da je bila izvedba mogoča, se mora Društvo toplo zahvaliti Fizikalnemu inštitutu Univerze v Ljubljani, ki je nudil brez odškodnine tečaju svoje prostore, potrebne priprave in instrumente.

Zanimanje za tečaj je bilo zelo veliko. Saj se ga je udeležilo 72 učiteljev fizike z nižjih gimnazij in višjih razredov osemletk, tako da so bili prostori Fizikalnega inštituta v Jadranski ulici polno zasedeni. Izmed udeležencev je bilo za pouk fizike na nižji stopnji 46 formalno kvalificiranih, 26 pa nekvalificiranih.

Tečaj je imel tele štiri sestavne dele: predavanja specialno metodičnega značaja, vsak dan po eno uro; fizikalno posvetovalnico, vsak dan po pol ure; praktično delo, vsak dan po štiri ure; štiri fizikalne ekskurzije ob popoldnevih in zabavni večer.

Težišče programa je bilo v praktičnem delu. Tu so vsi udeleženci po posebnem razporedu opravili preko dve sto poskusov po napisanih navodilih. Potrebno pomoč pri teh poskusih so nudili izkušenejši profesorji z ljubljanskih šol. Že na tečaju se je dobro videlo, kako je bil ta potreben in koristen. Udeleženci so dobili v pripravljenih poskusih pregled takih poskusov, ki so primerni za nižjo gimnazijo, in so si jih tehnično usvojili. Pri marsikaterih priročnih poskusih so dobili tudi zamisli, kako si v težkih razmerah sami lahko pomagajo. Ob delu z učili so dobili tudi dobre predstave o tem, kaj bi morala imeti njihova šolska zbirka, da bi bil z njo mogoč sodoben fizikalni pouk.

Dva popoldneva so imeli udeleženci priliko, da so si ogledali zbirko priprav za poskuse iz mehanike (po J. Battestinu) in so videli nekatere težje poskuse z njo.

V fizikalni posvetovalnici so imeli udeleženci priliko, postaviti kakršna koli vprašanja metodičnega, eksperimentalno-tehničnega ali strokovnega značaja. Odgovore na ta vprašanja so dobili od bolj izkušenih učiteljev fizike. Vprašanja so bila pretežno metodičnega značaja. Pokazala so, da je v učni praksi za vse zelo koristno, če se večkrat sestanejo in osvežijo strokovno znanje.

Vsakdanja enourna predavanja so zajela najvažnejše misli o pomenu in metodičnem izkoriščanju fizikalnega eksperimenta, o nevarnostih pri poskusih, metodične in strokovne opazke o pouku posameznih fizikalnih disciplin, o fizikalnem pouku v zvezi s politehnično izobrazbo, o načinu pouka fizike in o ocenjevanju, o svetlobni projekciji, o ekskurzijah in o atomu.

Ekskurzije so bile v Inštitut za elektrovezve, Ljubljansko elektrarno, Litostroj in Radijsko postajo.

Ker je bil take vrste tečaj pri nas prvič organiziran, je umljivo, da so bile v organizaciji še nekatere pomanjkljivosti. Vendar moramo z veseljem ugotoviti, da ni bilo ves čas nobene nesreče in nobene znatne škode. Po drugi strani pa so bili tečajniki s programom in izvedbo zelo zadovoljni. Ker letos še ni bilo mogoče zajeti na tečaju vse učitelje fizike na nižji stopnji, ga bo treba čez dve leti ponoviti.

Za prihodnje leto pa predvideva Društvo matematikov in fizikov LRS analogen tečaj za višjo gimnazijo in srednje strokovne šole.

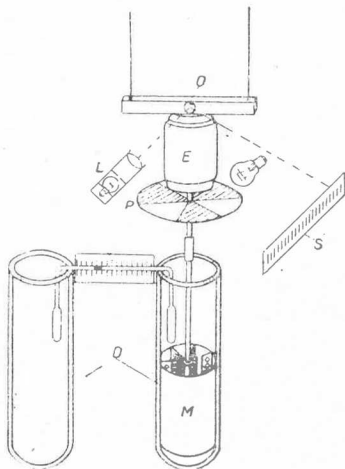
Gradivo, zbrano pri teh fizikalnih tečajih, bo služilo Društvu za osnovo pri delu Fizikalni poskusi za nižjo in za višjo gimnazijo. Tak priročnik je gotovo za vse naše šolske delavce zelo potreben, saj je Markovičeva knjiga Pokusi iz fizike že pošla, po drugi strani pa je naši šoli potrebno tudi obširnejše delo s tega področja.

Francè Ahlin

JOULOV POSKUS V ŠOLI

Med osnovne demonstracijske poskuse v nauku o toploti spada Joulova mehanična določitev specifične toplote vode. Žal je ta poskus precej zahteven. Vendar se da tudi v tem primeru doseči natančnost, ki je za šolo zadovoljiva.

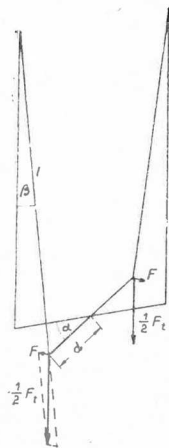
Šolsko izvedbo Joulovega poskusa sta opisala Sutton¹ in Kretschmar². V naslednjem je opisan poskus v predelani obliki, pri čemer je bila z učinkovitejšim mešanjem v krajšem času dosežena večja temperaturna sprememba.



Sl. 1. Priprava za Joulov poskus.
E — elektromotor, D — dewarski posodi, M — mešalec v ohišju, P — stroboskopska plošča, T — diferencialni plinski termometer, L — svetilo, O — ogledalce, S — skala.



Sl. 2. Mešalec v ohišju.



Sl. 3. Skica k računu vrtilnega momenta.

Pripravo kaže slika 1. V dewarski posodi se vrtil meden mešalec z lopaticami; ohišje (tudi iz medenine) ima ravno tako lopatice (slika 2). Z majhno leseno zagozdo pritrdimo ohišje na stene posode, da se med mešanjem ne premika. Mešalec vrtimo z elektromotorjem (teža F_t), ki visi na obeh dovodnih žicah (dolžina l , razmak $2d$). Frekvenco kontroliramo s stroboskopsko ploščo*, ki je pritrjena na osi elektromotorja. Ploščo osvetljujemo s tlivko. Na plošči so tri temna in tri svetla, enako velika polja. Temna polja se pri vrtenju plošče v svetlobi tlivke navidezno ustavijo, če napravi plošča 33,3 vrtljaja na sek.

Temperaturno spremembo merimo z diferencialnim plinskim termometrom. To je steklena kapilara, ki je zavita v obliki Π in je na vsakem koncu spihana v bučko. V kapilari je obarvana kapljica ksilola. Za meritev potrebujemo še eno dewarsko posodo, v kateri je voda s stalno temperaturo. Kraka termometra segata vsak v svojo posodo. Na srednjem delu kapilare, kjer je kapljica, je nameščeno stekleno merilo. Termometer moramo pred poskusom umeriti, in sicer pri približno isti temperaturi v primerjalni posodi, kakršno bomo imeli pri poskusu. Kapljico in merilo projiciramo na zid, tako da dijaki lahko vsi hkrati opazujejo spreminjanje temperature.

V dewarsko posodo nalijemo s pipeto primerno množino vode (masa = m) in poženemo elektromotor. S potenciometrom naravnamo hitrost vrtenja tako, da se temna polja na stroboskopski plošči navidez ustavijo. Pri tem se ohišje elektromotorja zavrti za majhen kot α , ki ga pokaže svetlobni kazalec.

* Glej J. Lep: Poskusi z živosrebrno svetilko. Obz. mat. fiz., 2, 68, 1951.

Iz slike 3 sledi, da je vrtilni moment elektromotorja $M = 2 F_t d$. Ker sta kota α in β majhna, je $ad = \beta l$ in $F = \frac{1}{2} F_t \beta = \frac{1}{2} F_t a d/l$. Odtod je $M = F_t a d^2/l$. Vloženo delo je $A = Pt = M \omega t = F_t a d^2 \omega t/l$. Notranja energija vode in kalorimetra pa se je spremenila za $\Delta U = (c_p m + C) \Delta T$, kjer je C toplotna kapaciteta kalorimetra, ki jo določimo s posebnim poskusom.

Elektromotor na sliki 1 ima težo $F_t = 3,48$ kp; razmak žic, ki so 73 cm dolge, meri $2d = 20$ cm; toplotna kapaciteta kalorimetra pa je $C = 225$ J/st. Pri nekem poskusu se je 300 g vode po petminutnem mešanju segrelo za $2,40^\circ$ C. Elektromotor se je odklonil za $\alpha = 7,2^\circ = 0,126$. Vloženo delo je potem $A = 3,48 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 0,126 \cdot (0,1 \text{ m})^2 \cdot 2\pi \cdot 33,3 \text{ s}^{-1} \cdot 300 \text{ s} / 0,73 \text{ m} = 3680 \text{ J}$. To delo je enako spremembi notranje energije $\Delta U = (c_p \cdot 0,3 \text{ kg} + 225 \text{ J/st}) \cdot 2,40 \text{ st}$. Odtod dobimo, da je $c_p = 4350 \text{ J/kg st}$.

Rezultat je za 4 % prevelik, kajti prav je: $c_p = 4185 \text{ J/kg st}$. Z napako se lahko kar sprijaznimo. Saj je rezultat odvisen od osmih količin, izmed katerih smo nekatere izmerili samo na 1 % natančno.

JOULE'S EXPERIMENT IN THE CLASSROOM

The experiment which has been described by Sutton¹ and Kretschmar² is adapted for classroom demonstration by the use of a projection differential thermometer.

Rajkoj Korbar

1. L. M. Sutton: Demonstration Experiments in Physics, (McGraw-Hill, 1938), str. 245.

2. G. G. Kretschmar: Improved Mechanical Equivalent of Heat Experiment. Amer. J. Phys. 19, 509, 1951.

NOVE KNJIGE

OSNOVE KVANTNE MEHANIKE

Ph. Pluvinage: Les Éléments de Mécanique quantique, Masson et Cie, 120, Boulevard Saint-Germain, Paris (6e), 1955, Prix 4000 fr.

Kvantna mehanika predstavlja danes enega najbolj bistvenih delov fizike. Novo francosko učno knjigo s tega področja bodo pozdravili vsi, ki morajo poznati principe in metode kvantne mehanike.

Knjiga se odlikuje po matematični korektnosti in po jasnem slogu. V matematičnem pogledu gre knjiga precej daleč, ker prinaša in celo izpeljuje številne formule za funkcije, ki jih pogosto rabimo pri kvantno mehaničnih računih. Zato bo knjiga gotovo služila tudi kot priročnik. Bati se je pa, da se bo iz istega vzroka študent na začetku težko znašel. Več važnih aplikacij (harmonični oscilator, potencialni lonec, vodikov atom, trk, Zeemannov efekt) je obdelanih zelo podrobno. Za tiste, ki se bodo učili iz knjige, so za kontrolo pridobljenega znanja na koncu vsakega poglavja vprašanja in računske naloge.

Snov je razdeljena v tri dele. I. Gibanje delca v eni smeri, II. Delec v prostoru, III. O sistemih delcev. — V pogledu razdelitve bi bila mogoče upravičena pripomba, da delitev na mehaniko gibanja delca v eni smeri in gibanja delca v prostoru ni umestna. Edini razlog za to bi bile matematične težave, ki pa bi jih že prej moral rešiti pouk matematike.

Resna pomanjkljivost knjige je v tem, da ne vsebuje osnov relativistične kvantne mehanike (Diracove enačbe) ter osnovnih pojmov iz kvantne elektrodinamike. Oboje spada na vsak način k izobrazbi fizika. Dejstvo, da teh poglavij po navadi ne predavajo pri rednem kurzu, ne opravičuje opuščanja, kajti s tem zastari knjiga za dvajset let.

Miodrag V. Mihailović

ODGOVORI

ODGOVOR NA VPRAŠANJE ŠT. 5 IZ IV. LETNIKA

Neka veletrgovina prodaja samo eno sorto predmetov, to pa po stalni ceni za kos. Svojo zalogo obnavlja v rednih rokih z dolžino T . Vsakokrat nabavi po N kosov, kar je toliko, kolikor v času T povprečno proda. Verjetnost $f(t)$, da je v časovnem razdobju t prodan vsaj en kos, naj bo odvisna le od dolžine t tega razdobja. Verjetnost, da je v času t prodan več kot en kos, je pri majhnem t majhna v primerjavi z verjetnostjo, da je v istem času prodan le en kos, torej gre razmerje med tema verjetnostima hkrati s t proti nič.

Kakšna je verjetnost, da med dvema zaporednima pošiljkama ne zmanjka blaga? Kaj se zgodi s to verjetnostjo, če N raste v neskončnost?

Označimo s $f_0(t)$ verjetnost, da v času t ni prodan noben kos, s $f_1(t)$ verjetnost, da je v času t prodan ravno en kos, s $f_2(t)$, da sta prodana ravno dva kosa itd. Splošno naj pomeni $f_n(t)$ verjetnost, da je v času t prodanih ravno n kosov. Vsota vseh teh verjetnosti je ena, ker v času t ena od teh možnosti gotovo nastopi. Torej je:

$$f_0(t) + f_1(t) + f_2(t) + \dots = 1 \quad (1)$$

Verjetnost, da je v času t prodan vsaj en kos, pa je enaka:

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + \dots = 1 - f_0(t)$$

Te funkcije bomo sedaj skušali zaporedoma določiti.

Verjetnost, da v času $t_1 + t_2$ ni prodan noben kos, je enaka produktu verjetnosti, da v času t_1 ni prodan noben kos, in verjetnosti, da v času t_2 tudi ni prodan noben kos, ker ne sme biti prodan niti v t_1 niti v t_2 noben kos. Zato ustreza funkcija $f_0(t)$ tejle enačbi:

$$f_0(t_1 + t_2) = f_0(t_1) \cdot f_0(t_2)$$

Če to enačbo logaritmiramo in vpeljemo $\log f_0(t) = -g(t)$, dobimo:

$$g(t_1 + t_2) = g(t_1) + g(t_2) \quad (2)$$

Ker $f_0(t)$ pomeni verjetnost, je njena vrednost za vsak t med 0 in 1. Zato je $\log f_0(t)$ negativen, $g(t)$ pa je pozitivna funkcija. Rešitev funkcionalne enačbe (2) je v tem primeru $g(t) = \lambda t$, kjer je λ konstanta. (Glej članek N. Prijatelj: O adicijskih teoremih, Obzornik za mat. in fiz., IV, str. 6—10.) Od tod sledi:

$$f_0(t) = e^{-\lambda t} \quad (3)$$

Za funkcijo $f_1(t)$, ki pomeni verjetnost, da je v času t prodan ravno en kos, dobimo naslednjo funkcionalno enačbo:

$$f_1(t_1 + t_2) = f_1(t_1) \cdot f_0(t_2) + f_0(t_1) \cdot f_1(t_2) \quad (4)$$

V času $t_1 + t_2$ je namreč prodan ravno en kos, če je v t_1 prodan en kos, v t_2 pa nobeden; ali pa narobe, če v t_1 ni prodan noben kos, v t_2 pa eden. Verjetnost $f_1(t_1 + t_2)$ je potem vsota ustreznih verjetnosti za prvi in drugi primer. S substitucijo $f_1(t) = g(t) \cdot e^{-\lambda t}$ (tu pomeni $g(t)$ neko drugo funkcijo kot zgoraj) in

upoštevajoč (3) prevedemo enačbo (4) v obliko (2): $g(t_1 + t_2) = g(t_1) + g(t_2)$. Ker je tudi tu funkcija $g(t)$ pozitivna, sledi od tod $g(t) = At$ in

$$f_1(t) = At \cdot e^{-\lambda t}$$

Ker gre razmerje verjetnosti, da je v času t prodan več kot en kos, in verjetnosti, da je v času t prodan ravno en kos, hkrati s t proti nič, gre tudi $f_i(t)/f_1(t)$ za $i = 2, 3, 4, \dots$ hkrati s t proti nič, ker smo pri tem števec le zmanjšali. Torej $\lim_{t \rightarrow 0} f_i(t)/f_1(t) = 0$, $t \rightarrow 0$. Ker pa je $f_1(t) = At \cdot e^{-\lambda t}$, imamo $\lim_{t \rightarrow 0} e^{\lambda t} \cdot f_i(t)/t = 0$, $t \rightarrow 0$. Ker gre prvi faktor proti ena, vidimo od tod, da je:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f_i(t)/t = 0, \quad i = 2, 3, 4, \dots \quad (5)$$

Sedaj pa poiščimo funkcionalno enačbo za $f_n(t)$. V času $t_1 + t_2$ je prodanih ravno n kosov, če je v t_1 prodanih n kosov, v t_2 po nobeden, ali če je v t_1 prodanih $n - 1$ kosov, v t_2 pa eden, ali če je v t_1 prodanih $n - 2$ kosov, v t_2 pa dva itd., ali končno, če v t_1 ni prodan noben kos, v t_2 pa n kosov. Verjetnost $f_n(t_1 + t_2)$ je potem vsota ustreznih verjetnosti za vse primere. Torej:

$$f_n(t_1 + t_2) = f_n(t_1) f_0(t_2) + f_{n-1}(t_1) f_1(t_2) + f_{n-2}(t_1) f_2(t_2) + \dots + f_0(t_1) f_n(t_2)$$

Sedaj tvorimo naslednji izraz:

$$[f_n(t_1 + t_2) - f_n(t_1)]/t_2 = f_n(t_1) [f_0(t_2) - 1]/t_2 + f_{n-1}(t_1) \cdot f_1(t_2)/t_2 + \dots + f_0(t_1) \cdot f_n(t_2)/t_2$$

Če gre t_2 proti nič, gredo pri tem zaradi (5) vsi sumandi na desni strani enačaja razen prvih dveh proti nič. Limita prvih dveh sumandov tudi eksistira, in sicer:

$$\begin{aligned} \lim_{t_2 \rightarrow 0} [f_0(t_2) - 1]/t_2 &= \lim_{t_2 \rightarrow 0} [e^{-\lambda t_2} - 1]/t_2 = -\lambda \\ \lim_{t_2 \rightarrow 0} f_1(t_2)/t_2 &= \lim_{t_2 \rightarrow 0} A \cdot e^{-\lambda t_2} = A \end{aligned}$$

Torej limita desne strani zgornje enačbe eksistira, zato eksistira tudi limita leve strani. Ta pa je ravno odvod funkcije $f_n(t)$.

Če sedaj pišemo namesto t_1 kar t , dobimo iz zgornje enačbe naslednjo rekurentno formulo:

$$f_n'(t) = -\lambda f_n(t) + A f_{n-1}(t)$$

S substitucijo $f_n(t) = e^{-\lambda t} \cdot u_n(t)$ jo prevedemo na preprostejšo obliko:

$$u_n'(t) = A \cdot u_{n-1}(t) \quad (6)$$

Iz znanih vrednosti za $f_0(t)$ in $f_1(t)$ dobimo:

$$u_0(t) = 1, \quad u_1(t) = At$$

Nadalje dobimo iz (6) z integracijo $u_2(t) = A^2 t^2/2!$, $u_3(t) = A^3 t^3/3!$ itd. in splošno $u_n(t) = A^n t^n/n!$. Integracijske konstante so vse nič, ker je $f_i(0) = u_i(0) = 0$, kar sledi iz pomena verjetnosti. Tako smo dobili rezultat:

$$f_n(t) = e^{-\lambda t} \cdot A^n t^n/n! \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Sedaj moramo še določiti obe konstanti A in λ . Enačba (1) nam daje prvo zvezo med njima. Če vstavimo vanjo dobljene vrednosti za funkcije $f_i(t)$ in iz vseh členov izpostavimo $e^{-\lambda t}$, dobimo:

$$e^{-\lambda t}(1 + At + A^2 t^2/2! + A^3 t^3/3! + \dots) = 1$$

Vrsta v oklepaju pa je ravno e^{At} . Zato je:

$$e^{-\lambda t} \cdot e^{At} = e^{-t(\lambda - A)} = 1$$

Torej $A = \lambda$. Drugo zvezo med A in λ dobimo iz dejstva, da je v času T število povprečno prodanih kosov N . Povprečje v času T prodanih kosov je enako:

$$N = 0 \cdot f_0(T) + 1 \cdot f_1(T) + 2 \cdot f_2(T) + 3 \cdot f_3(T) + \dots$$

Če vstavimo znane vrednosti in upoštevamo še, da je $\lambda = A$, dobimo:

$$\begin{aligned} N &= AT \cdot e^{-AT} + 2 A^2 T^2 e^{-AT}/2! + 3 A^3 T^3 e^{-AT}/3! + \dots = \\ &= AT \cdot e^{-AT} (1 + AT + A^2 T^2/2! + A^3 T^3/3! + \dots) = \\ &= AT \cdot e^{-AT} \cdot e^{AT} = AT \end{aligned}$$

Od tod najdemo: $A = \lambda = N/T$.

Vprašanje je, kolika je verjetnost, da v času T ne zmanjka blaga, t. j., da ni prodanih več kot N kosov. Označimo to verjetnost z F . Ta je očitno enaka:

$$\begin{aligned} F &= f_0(T) + f_1(T) + f_2(T) + \dots + f_N(T) = \\ &= e^{-AT} + AT e^{-AT}/1! + A^2 T^2 e^{-AT}/2! + \dots + A^N T^N e^{-AT}/N! \end{aligned}$$

Ker pa je $AT = N$, imamo končno:

$$F = e^{-N} (1 + N + N^2/2! + N^3/3! + \dots + N^N/N!)$$

Treba je še ugotoviti, kaj se zgodi s to verjetnostjo, če N raste v neskončnost. Limita izraza na desni za $N \rightarrow \infty$ je $1/2$. Torej gre verjetnost F proti $1/2$. Vendar je dokaz za to dejstvo precej kompliciran in ga tu opuščam. Bralec ga bo našel v nekoliko spremenjeni obliki v knjigi Polya-Szegő: *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I.*, str. 80, naloga 210, rešitev na strani 246—247.

Zvonimir Bohte

UTRINKI

Vpliv francoske revolucije in števila prstov na rokah na razdalje planetov. — Če primerjamo to število ($k = 1,6719 =$ deveti koren iz kvocienta srednjih razdalj Plutona in Merkurja od Sonca — op. ur.) s konstantami, ki se ponavljajo v astronomskih računih, opazimo, da dá štirikratnik količnika $1,6719$ število $6,6876$; to pa je numerična vrednost gravitacijske konstante $G = (6,685 \pm 0,011) \cdot 10^{-8}$.*

Ludvík Vagaja: *Problem planetnih razdalj*. Proteus, 17, str. 213, 1954/55.

* Avtor je izpustil enoto $\text{g}^{-1} \text{cm}^3 \text{s}^{-2}$, ki ima nekaj opraviti s francosko revolucijo. Velikost števila $6,685$ je seveda odvisna od enote, zaradi faktorja 10^{-8} pa tudi od osnove številskega sistema (10), ki je povzeta po številu prstov.

UREDNIŠTVO JE PREJELO V ZAMENO

Bulletin scientifique, Zagreb 1956, T 2, No 4; T 3, No 1.
Bulletin de la Société mathématique de France, Paris 1955, T 83.
Bulletin of the Institute of nuclear sciences Boris Kidrič, Beograd 1956, Vol 6.
Elektrotehniški vestnik, Ljubljana 1956, št. 4—5, 6—8.
Farmacevtski vestnik, Ljubljana 1956, VII, št. 3—4, 5—6.
Fotokemijska industrija, Zagreb 1956, III, št. 2.
Glasnik mat.-fiz. i astr., Zagreb 1955, T 10, No 4, T 11, No 1.
Gospodarski vestnik, Ljubljana 1956, IV, št. 44—75.
Idrijski razgledi, Idrija 1956, I, št. 2.
Le Courier de l'Unesco, 1956, No 7—8.
Matematičko fizički list, Zagreb, 1956/57, VII, št. 1.
Modern Precision, Philadelphia, Vol 15, No 2.
Nastava matematike i fizike, Beograd 1956, V, št. 1, 2.
Philip's Technische Rundschau, 1956, J. 18, N 1, 2, 3.
Physics Today, New York 1956, No 5, 6, 7.
Proteus, Ljubljana 1956/57, XIX, št. 1.
Science library bibliographical, London.
Sodobna pedagogika, Ljubljana 1956, VII, št. 3—4, 5—6.
Ukraïnskij matematičeskij žurnal, Kiev 1956, T VIII, No 1, 2.
Uspehi matematičeskikh nauk, Moskva 1956, T XI, št. 2, 3.
Varilna tehnika, Ljubljana 1955, št. 1—4.
Vestnik Leningradskogo universiteta, Leningrad 1956, No 1, 7, 10.
Zdravstveni vestnik, Ljubljana 1956, XXV, št. 5, 6—7, 8.

IZ UPRAVE

Vsem naročnikom, ki še niso poravnali naročnine za letnik IV (1955/56), smo priložili v prejšnji številki položnice. Ponovno jih prosimo, da zaostalo naročnino poravnajo. Obenem prosimo vse naročnike, da nam nakažejo naročnino za letnik V (1956/57). Naročnina je 250 din, za tiste naročnike pa, ki plačajo po računu ali pa na opomin, je naročnina 280 din.

Na zalogi imamo še vse številke I., II., III. in IV. letnika razen 1. številke I. letnika. I. letnik stane 120 din, posamezna številka 50 din, II. letnik stane 250 din, posamezna številka 90 din, III. letnik stane 250 din, posamezna številka 90 din, IV. letnik 250 din, posamezna številka 100 din.

Iz 4. številke Obzornika 1951 smo ponatisnili tabelo *Osnovne fizikalne konstante* na kartonu 32 × 33 cm. Dobite jih za ceno 20 din za kos pri prof. Štalcu Ivanu, Ljubljana, I. gimnazija, Vegova ul. 4. Prav tam lahko poravnate tudi naročnino za Obzornik.

Zveza Društev matematikov in fizikov FLRJ izdaja časopis:

Nastava matematike i fizike

Naročnina je za člane vseh republiških društev matematikov in fizikov 300 din, za ostale naročnike, šole in biblioteke 400 din. Naročila in naročnino pošiljajte podjetju »Nolit«, Beograd, Ulica Narodnog fronta 76, ali na ček, račun št. 1031-T-627 z označbo »Za časopis Nastava matematike i fizike«. Časopis naročite lahko tudi pri našem Društvu.

Društvo matematikov in fizikov NRH izdaja za vso državo »*Matematičko-fizički list* za učenike srednjih škola«. Letnik ima 4 številke, med počitnicami ne izhaja. Letna naročnina je 200 din.

Profesorji srednjih šol, priporočajte list dijakom! Naročila in naročnino pošiljajte na naslov:

Matematičko-fizički list, Zagreb, Ilica 16/III, p. p. 165 ali na čekovni račun št. 401-T-1080.

Društvo matematičara i fizičara N. R. Hrvatske poziva sve, koji se zanimaju matematičko-fizičkim naukama, da se pretplate na

Glasnik matematičko-fizički i astronomski

i sarađuju u njemu.

Zaista ne bi smjelo biti ni jednog kulturnog radnika, koji se bavi matematičko-fizičkim naukama, kao ni prosvjetne ustanove, koja nije pretplatnik Glasnika. Pretplatom i suradnjom u svojem naučnom i stručnom časopisu pokazujete u kolikoj mjeri pratite i podupirete razvitak i napredak svoje struke. Širite također Glasnik u svom krugu, jer time podupirete razvitak matematičko-fizičkih nauka u svojoj okolini.

Prijave pretplate slati na administraciju Glasnika: Zagreb, Ilica 16/III. Pretplata za god. 1956 iznosi 480.— din.

Obzornik za matematiko in fiziko izhaja vsak tretji mesec. Izdaja ga Društvo matematikov in fizikov LRS. Urejuje ga uredniški odbor: I. Kuščer, A. Moljk, N. Prijatelj, I. Vidav. Odgovorni in tehnični urednik: I. Štalec. Upravo vodi I. Štalec. — Tiska tiskarna »Ljudske pravice« v Ljubljani. — Naročnina je 250 din, za podjetja in ustanove, ki plačajo po računu in za naročnike, ki plačajo po terjatvi 280 din. Posamezna številka 100 din. Naročnino nakažite na naš čekovni račun 60-KB-1-Ž-207. Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov:

Obzornik za matematiko in fiziko, Ljubljana, poštni predal 253.