OBZORNIK
ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

MATEMATIČNA KNJIŽNICA * Ljubljana

LJUBLJANA
1955-56
IV. št. 4

VSEBINA

Članki Stran

Ob prvi obletnici Einsteinove smrti (Lavo Čermelj) 145
Spektralna teorija linearnih operatorjev v Hilbertovem prostoru (France Križanič) 149
Feroelektriki (Peter Gosar) 161

Novice

Omegatron (Janez Dekleva) 172
Magnetni ohlajevalni stroj (Sergej Pahor) 175
Celica s pregreto tekočino namesto wilsonske celice (Nikolaj Bezić) . . 179
Občutljivost kože za vibracije (Marko Žlender) 180

Šola

Ob uvedbi opisne geometrije v naš srednješolski program (Oton Sajovic) 181
Problematika pouka matematike v obveznih šolah (Jože Žabkar) 185

Dopisi 187

Nove knjige 188

Odgovori 191

Vprašanja 191

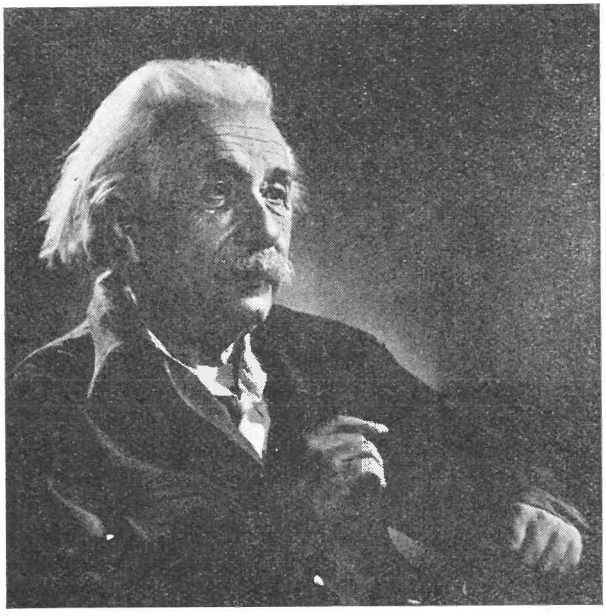
UREDNIŠTVO JE PREJELO V ZAMENO

Elektrotehniški vestnik, Ljubljana 1955, št. 11—12, 1956, št. 1—3.
Farmacevtski vestnik, Ljubljana 1956, VII, št. 1—2.
Glasnik mat.-fiz. i astr., Zagreb 1955, No 3.
Gospodarski vestnik, Ljubljana 1956, IV, št. 14—43.
Idrijski razgledi, Idrija 1956, I, št. 1.
Matematičko fizički list, Zagreb 1955-56, VI, št. 3, 4.
Nastava matematike i fizike, Beograd 1955, IV, št. 3, 4.
Philip's Technische Rundschau, 1955, 17, No 9, 10, 11, 12.
Problem, Zagreb 1956, št. 33—36.
Proteus, Ljubljana 1955-56, XVIII, št. 8, 9, 10.
Sodobna pedagogika, Ljubljana 1956, VII, št. 1—2.
Uspehi matematičeskih nauk, Moskva 1955, T X, št. 1, 2, 3, 4.
Varilna tehnika, Ljubljana 1954, III, št. 4.
Vestnik Društva matematičara i fizičara NRS, Beograd 1955, VII, št. 3—4.
Zdravstveni vestnik, Ljubljana 1956, XXV, št. 2—3, 4.
Zobozdravstveni vestnik, Ljubljana 1956, XI, št. 1—2, 3.

LETO IV 1955-56 OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO ŠTEV. 4 1. VI. 1956

OB PRVI OBLETNICI EINSTEINOVE SMRTI

LAVO ČERMELJ



Lani 18. aprila je umrl v Princetonu (New Jersey, ZDA) eden največjih genijev, Albert Einstein. Ko sem tedaj zbiral gradivo o njegovem življenju in delu, sem zapazil presenetljivo sorodnost z drugima duševnima velikanoma, z Isaacom Newtonom in Nikolo Teslo. Pri vseh treh je bila doba velikega ustvarjanja prav ozko odmerjena.

Pri Issacu Newtonu so, čeprav je dosegel visoko starost 85 let, vsa njegova epohalna dela: utemeljitev sodobne mehanike s tremi osnovnimi zakoni, ustvaritev nebesne mehanike na osnovi zakona o splošni gravitaciji, razlaga bele svetlobe kot sestavljene iz vseh spektralnih barv ter izum infinitezimalnega računa, nastala v letih 1665—1667, ki jih je zaradi razsajajoče kuge prebil v svojem kraju Woolsthrope.

Tudi pri Nikoli Tesli je bila doba velikih ustvaritev zajeta v pičlo desetletje: Misel o vrtilnem magnetnem polju je nastala v njem l. 1882 in že leta 1888 je lahko pokazal prvi trifazni motor v pogonu. Niti štiri leta pozneje je izvajal svoje znamenite poskuse z visokofrekvenčnimi in visokonapetostnimi tokovi, a že leta 1893 je v njem popolnoma dozorel načrt za brezžični prenos električne energije. V naslednjih letih (in teh ni bilo malo, saj je Tesla dosegel starost 87 let), je sicer še ustvaril marsikaj, kar je vzbudilo splošno pozornost, toda to je bilo le medel odmev prvih velikih odkritij.

Podobno je tudi Albert Einstein, ki je dočakal starost 76 let, svoja osnovna dela, s katerimi je naravnost zrevolucioniral fiziko in človeško mišljenje, objavil v enem samem desetletju. Leta 1905 so izšle njegove tri znamenite razprave: teorija brownskega gibanja, fotonska teorija svetlobe in (specialna) relativnostna teorija, a le deset let pozneje (1916) je nastala njegova splošna teorija gravitacije. Zato naj zadostuje za prikaz njegovega dela in njegove veličine, če se omejimo na tu omenjene razprave.

Teorija brownskega gibanja. Leta 1827 je botanik Robert Brown opazil, da se pelodna zrnca cvetlice *Clarkia pulchella,* suspendirana v vodi, brez pre-

stanka gibajo. Pozneje so dognali, da velja to tudi za pelod drugih rastlin in sploh za majhna telesca, plavajoča v poljubnih tekočinah. Ugotovili so, da je to gibanje sicer odvisno od viskoznosti, ne pa od kemijskega sestava tekočine, v kateri so delci suspendirani, in prav tako neodvisno od kemijske sestave samih delcev, pač pa da variira z njihovo velikostjo. Že leta 1863 je Christian Wiener izrazil domnevo, da izvira to gibanje morda od trkov suspendiranih delcev in tekočinskih molekul.

Da je bila ta domneva upravičena, sta jasno dokazala A. Einstein in M. Smoluchowski. Einstein je poenostavil Boltzmannovo teorijo o neurejenem gibanju plinskih molekul ter je l. 1905 prenesel to metodo tudi na proučevanje brownskega gibanja. Zaključil je, da je mogoče določiti vrednost Boltzmannove konstante k z merjenjem povprečnega kvadrata razdalje, ki jo v odmerjenem času prepotujejo suspendirani vidni delci, na katere udarjajo molekule tekočine. Ustrezna merjenja je kmalu nato resnično napravil Jean Perrin ter tako potrdil veljavo Einsteinove teorije in hkrati izmeril konstanto k in s tem določil tudi Loschmidtovo število ($N_L = R/k$).

Fotonska teorija svetlobe. Že od konca osemdesetih let preteklega stoletja je bilo znano, da kovine, obsevane s svetlobo primerno kratke valovne dolžine (primerno visoke frekvence), izsevajo elektrone. Pri tem pojavu, ki je znan kot fotoelektrični efekt, pa je presenečalo, da mora frekvenca svetlobe presegati neko minimalno mejo, ki je odvisna od izbrane kovine. Še bolj čudno pa se je zdelo, da raste kinetična energija posameznih izsevanih elektronov linearno s frekvenco uporabljene svetlobe, medtem ko ni nič odvisna od osvetljenosti kovine. S povečano osvetljenostjo se sicer poveča število izločenih elektronov, ne pa njihova energija.

Povsem zadovoljivo razlago tega pojava je podal Einstein s svojo fotonsko teorijo svetlobe iz l. 1905. Izhajal je od hipoteze, ki jo je pet let prej postavil Max Planck za razlago svetlobnega sevanja. Po tej hipotezi materija ne izseva in vpija svetlobno energijo v poljubnih količinah, temveč samo v določenih enotah ali kvantih, ki so sorazmerni s frekvenco izsevane oziroma vpite svetlobe. Sorazmernostni faktor je neka univerzalna stalnica, ki nosi po Plancku ime Planckova stalnica. Einstein je to Planckovo misel razpredel in predpostavljal, da svetlobna energija ni kvantizirana samo pri izsevanju in vpijanju, temveč da je kvantnost njena splošna lastnost. Svetlobna energija je združena v majhnih enotah ali svetlobnih atomih. Za te se je udomačil izraz fotoni. Vsak foton predstavlja energijo, ki je enaka zmnožku frekvence ustrezne svetlobe in Planckove stalnice ($h\nu$). Ako vpije kovina foton, se del njegove energije (w) iztrosi za izločanje elektrona iz kovine, ostali del pa odpade na kinetično energijo, s katero izleti elektron: $h\nu = w + \frac{1}{2} mv^2$.

Merjenja so pokazala, da Einsteinov obrazec resnično ustreza pojavom in da se vrednost v njem navedene stalnice h ujema z vrednostjo, ki jo je navedel Planck.

Leta 1911 je Einstein uporabil kvantno teorijo tudi za razlago pojava, da pojema specifična toplota trdnih snovi proti nič, kadar se bližamo absolutni ničli. Dokončno razlago tega pojava na osnovi kvantne teorije je podal P. Debye.

Pomen Einsteinove fotonske teorije svetlobe pa ni toliko v uspešni razlagi nekaterih konkretnih fizikalnih pojavov kakor v osnovni misli, ki je danes splošno priznana v fiziki, da ima namreč svetloba dvojen značaj: enkrat se nam pojavlja kot valovanje, drugič pa kot hitro leteča telesca.

Za svoje uspešno delo na področju kvantne teorije je Einstein leta 1922 prejel Nobelovo nagrado. Glede njegove relativnostne teorije, ki je bila prav

tako revolucionarna in ki je po svetu vzbudila celo večjo senzacijo, si pa komisija, ki podeluje te nagrade, ni bila na jasnem, ali je to resnično kako »odkritje«.

Kvantna mehanika se je v nadaljnjem poteku razvila v bohotno valovno mehaniko, ki je znala uspešno razlagati zelo mnoge pojave v mikrokozmu, t. j. v svetu atomov. Za ta svet pa je bilo treba opustiti v makrokozmu splošno priznani princip determiniranosti in uvesti indeterminizem. Na tej poti pa Einstein ni mogel in ni maral slediti novi teoriji. Zanj je bila vsa fizika trdno osnovana na determinizmu. Zato je videl v kvantni mehaniki, ki ji je sam postavil temelje, le neko prehodno, čeprav hevristično zelo pomembno fazo.

(Specialna) relativnostna teorija. Einstein sam je vsekakor imel relativnostno teorijo za svoje glavno delo. V Newtonovi mehaniki imajo vse enačbe enako obliko v vseh sistemih, ki se premikajo drug nasproti drugemu premočrtno in enakomerno (inercialni sistemi); za pretvorbo enačb iz enega sistema v drugega veljajo znane Newtonove transformacije. Težave pa so nastale pri opisovanju elektromagnetnih pojavov. Poizkusi so kazali, da tudi takim pojavom ustrezajo enaki opisi v različnih inercialnih sistemih; toda Maxwellove enačbe spremenijo svojo obliko pri uporabi Newtonovih transformacij. Posebne preglavice je delal zlasti rezultat Michelsonovega poskusa za ugotovitev gibanja nasproti etru. Za razlago tega nesoglasja je nastala specialna hipoteza o skrčenju dimenzij v smeri gibanja in Lorentz je predlagal namesto Newtonovih nove, po njem imenovane transformacije. To nesoglasje pa je odpravil šele Einstein s svojo relativnostno teorijo, ki jo je kakor obe drugi že imenovani teoriji objavil l. 1905.

Einstein je pri tem izhajal iz principa, da morajo tudi enačbe elektrodinamike ohraniti svojo obliko v vseh sistemih, v katerih veljajo enačbe Newtonove mehanike. Hitrost svetlobe v praznem prostoru je po tem principu v vseh sistemih enaka. Ta princip je Einstein imenoval princip relativnosti in odtod ima njegova teorija svoje ime. Ko je deset let pozneje objavil splošno relativnostno teorijo, so za razlikovanje to prvotno teorijo imenovali »specialno relativnostno teorijo«.

Z relativnostno teorijo je Einstein prvi dal optiki v premikajočih se medijih zadovoljivo obliko. Hkrati pa je odpravil iz sveta hipotetični eter, ki je bil sicer koristen za razlago elektromagnetnega valovanja, a je drugače delal fizikom prav hude preglavice.

Relativnostna teorija je bila plodovita tudi glede mehanskih pojavov ter je odkrila marsikaj, kar bi sicer v Newtonovi mehaniki in pri uporabi Newtonovih transformacij ostalo prikrito. Tako je Einstein iz svoje teorije zaključil, da z rastočo kinetično energijo raste tudi masa gibajočega se delca, in še več, da je namreč sploh energija telesa sorazmerna z njegovo maso, pri čemer je sorazmernostni faktor kvadrat svetlobne hitrosti: $E = mc^2$.

Praktična korist tega odkritja je pregnala vse pomisleke, ki so se v začetku uveljavljali proti novi teoriji. Na osnovi Einsteinove relacije med energijo in maso je zgrajen ves nauk o transformacijah atomskih jeder. Vsa jedrska fizika sloni na njej in najbolj zgovorni dokaz za njeno veljavnost je sproščenje silne jedrske energije v atomskih bombah in jedrskih reaktorjih. Einstein je s svojo teorijo odkril pot do tega lahko rečemo neizčrpnega vira energije, ki lahko prinese človeku blaginjo in srečo. Njemu, ki je bil v srcu prepričan pacifist, pa je bilo usojeno, da je s svojo avtoriteto vplival na odločujoče državne faktorje, da so se izrekli za uporabo te energije tudi v pogubne namene.

Splošna relativnostna teorija. V Einsteinu je že ob ustvaritvi specialne relativnostne teorije lebdela misel, ali se ne more v njej vsebovani princip relativnosti raztegniti na poljubne koordinatne sisteme. Tej misli se je pridružila še druga. Ali se ne bi dala gravitacija, ki po Newtonovem nauku deluje z neskončno hitrostjo na razdaljo, nadomestiti s čim drugim, manj mističnim. Pot do rešitve mu je pokazalo dejstvo, da je masa telesa, merjena po njegovi vztrajnosti in po njegovi teži, enaka. To enakost vztrajnostne in težnostne mase je Einstein postavil za princip. Po tem principu ne bi bilo mogoče ločiti učinke težnosti od učinkov pospeševanega gibanja.

Za teorijo, ki jo je zgradil s teh vidikov, je potreboval poseben matematični aparat in tega je našel v Riemannovi geometriji, ki sta jo v ta namen primerno priredila Ricci in Levi-Civita.

Gravitacijo je Einstein nadomestil s strukturo štiridimenzionalnega kontinua: prostor — čas. Gibanje telesa v takem kontinuu je določeno po ustreznih »geodetskih črtah«. Za mehanske pojave v zemeljskem merilu ni praktično nobene razlike med zaključki Einsteinove in Newtonove teorije. Zaradi tega nima splošna relativnostna teorija tiste dokazovalne moči kakor specialna. Pač pa so razne, čeprav silno majhne razlike v astronomskem merilu. Po Newtonovih zakonih se n. pr. mora gibati planet okoli Sonca po idealni elipsi, po Einsteinovi teoriji pa se ta elipsa počasi suče okoli Sonca. Resnično so že prej ugotovili tak premik perihela pri Merkurju. Einsteinova teorija je prinesla razlago za to gibanje in po njej določena vrednost premika se dobro ujema z opazovanjem. Drugi dokaz je prav tako z opazovanjem ugotovljeni odklon svetlobnih žarkov, kadar gredo mimo telesa z veliko maso, kakršno je n. pr. Sonce. Dalje zahteva Einsteinova teorija, da se spektralne črte pri svetlobi, ki izvira z mesta, kjer je težnost posebno jaka, premaknjene proti rdečemu koncu spektra. Resnično so ugotovili tak premik pri temnem spremljevalcu Sirija, ki ima izredno veliko gostoto.

Einsteinova splošna relativnostna teorija je omogočila tudi odgovor na razna kozmološka vprašanja, ki bi sicer ostala dalje odprta, tako vprašanje o velikosti vesoljstva in o njegovi celotni masi.

V Einsteinovi splošni relativnostni teoriji so, kakor rečeno, težnostni pojavi izraženi z geometrično strukturo Riemannovega štiridimenzionalnega kontinua. V njej pa nimajo pravega mesta elektromagnetni pojavi. Zaradi tega ni manjkalo poskusov razširiti splošno relativnostno teorijo tako, da bi bili tudi elektromagnetni pojavi prikazani kot posledica metričnega značaja tega kontinua ter da bi bila s tem vzpostavljena zveza med njimi in težnostnimi pojavi. Tudi Einstein sam se je neumorno ukvarjal s tem problemom v poznejših letih in prav do konca svojega življenja, posebno še, ker je pričakoval, da bo v novo teorijo zajel tudi vse pojave v mikrokozmu in s tem odpravil v tem področju sedaj veljavni indeterminizem.

Zadnji njegov spis o tem problemu so objavili konec marca letos. Ali vsebuje res rešitev tega vprašanja in da-li prinaša pravo nadaljnjo posplošitev splošne relativnostne teorije in ne samo zgolj neko matematično preobrazbo te teorije in Maxwellove teorije za nekakšen formalni skupni prikaz? O tem nimamo danes še nobenega glasu. Spričo matematične formulacije nove teorije, ki je, kakor pravijo, dostopna le silno ozkemu krogu izbrancev, in spričo dejstva, da bo nova teorija verjetno dopuščala še manj eksperimentalnih dokazov kakor splošna relativnostna teorija, bomo morali še delj časa čakati na odgovor. Če bo pozitiven, bi seveda v začetku tega članka omenjena primerjava z Newtonom in Teslo postala brezpredmetna.

SPEKTRALNA TEORIJA LINEARNIH OPERATORJEV V HILBERTOVEM PROSTORU

FRANCE KRIŽANIČ

Prostor z neskončno mnogo razsežnostmi je prvi uvedel David Hilbert pri obravnavanju linearnih integralskih enačb. Svoj prvi korak v ta prostor usmerimo po njegovi sledi: Zgradimo si geometrijo tega prostora po analogiji s končno razsežnim prostorom!

1. *Linearni vektorski prostori.* V n-razsežnem Evklidovem prostoru je lega točke določena z n-torico števil — krajevnim vektorjem v izbranem kartezijskem soredju. V prostoru z neomejenim številom razsežnosti bomo določili vektor z neskončnim zaporedjem števil:

$$x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$$

od katerega pa bomo zahtevali, da imej konvergentno vrsto:

$$|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + \ldots$$

(Če dopuščamo za komponente le realna števila, je to realen prostor; če pa smejo biti komponente kompleksna števila, je prostor kompleksen. Tu bomo obravnavali kompleksni prostor.)

S tako določenimi elementi računamo kakor z vektorji v končno razsežnem prostoru. Definiramo vsoto dveh elementov x in y:

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots)$$

in produkt elementa x s skalarnim številom α:

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \ldots)$$

Elementi se pri tem računanju vedejo, kakor zahtevajo znani zakoni: zakon o zameni členov, zakon o združevanju členov, zakona o zameni in združevanju skalarnih faktorjev v produktu, pa še oba razčlenitvena zakona:

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y; \qquad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$$

ki vodita računanje, kadar množimo vsoto dveh vektorjev s skalarjem, ali pa množimo vektor z vsoto skalarjev.

V prostoru je element 0 tisti element, ki ima vse komponente enake 0. Tedaj velja pri vsakem elementu x: $x + 0 = x$, pa tudi $0 \cdot x = 0$. (V zadnji enačbi je prva ničla znak za skalarni nič, druga ničla pa je element nič prostora.)

Vsakemu elementu x priredimo nasproten element $-x = (-1)x$ in določimo razliko dveh elementov: $x - y = x + (-y)$, ki se vede prav kakor razlika števil.

Tako definirani prostor je linearen prostor. Linearna kombinacija poljubnih n elementov je zopet element prostora. Pravimo, da je n-torica elementov linearno neodvisna, če ni nobena linearna kombinacija teh elementov enaka 0, razen trivijalne kombinacije, ki ima vse koeficiente enake 0. Maksimalno število linearno neodvisnih elementov je razsežnost prostora. V neskončno razsežnem prostoru lahko najdemo poljubno mnogo linearno neodvisnih elementov.

Uvedimo še binarno operacijo: skalarni produkt dveh vektorjev, ki priredi dvojici vektorjev x in y skalarno število:

$$(x, y) = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + x_3 \overline{y_3} + \ldots$$

Skalarni produkt je distributiven v obeh faktorjih, ni pa v splošnem komutativen, saj je očitno:

$$(y, x) = \overline{(x, y)}$$

Skalarni produkt dveh enakih faktorjev je pozitivno število; njegov koren imenujemo normo elementa x in jo označimo:

$$\| x \| = (x, x)^{1/2}$$

Iz definicije skalarnega produkta sledi nekaj važnih lastnosti norme. Tu sta predvsem neenačbi:

$$| (x, y) | \leqq \| x \| \cdot \| y \|, \qquad \| x + y \| \leqq \| x \| + \| y \|$$

prva Schwarzeva in druga Cauchyjeva. Elementa x in y imenujemo ortogonalna, če je njun skalarni produkt enak 0. Za ortogonalne elemente velja Pitagorov izrek:

$$\| x + y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2$$

Tako normirani prostor je metrijski prostor. Razdaljo dveh elementov definiramo z normo njune razlike:

$$d (x, y) = \| x - y \|$$

Definirajmo še limito zaporedja elementov:

$$x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \ldots$$

Pravimo, da to zaporedje konvergira k elementu x, če lahko najdemo po predpisu še tako majhnega pozitivnega števila ε dovolj pozen člen $x^{(N)}$, da je vsak nadaljnji člen zaporedja od elementa x oddaljen za manj kot ε:

$$\| x - x^{(n)} \| \leqq \varepsilon; \quad n \geqq N$$

Zaporedje imenujemo v sebi konvergentno, če zadošča Chauchyjevemu pogoju, ki zahteva, da po predpisu poljubno majhnega pozitivnega števila ε najdemo tak dovolj pozen člen zaporedja, da je razdalja poljubnih dveh nadaljnjih členov manjša od ε.

V Hilbertovem prostoru je Chauchyjev pogoj potreben in zadosten za konvergenco zaporedja. V splošnem pa lahko trdimo le, da je ta pogoj za konvergenco zaporedja potreben. Prostor, v katerem je ta pogoj tudi zadosten, imenujemo poln prostor. V polnem prostoru je vsako v sebi konvergentno zaporedje tudi konvergentno — limitira k določenemu elementu prostora.

Hilbertov prostor je torej poln prostor.

Oglejmo si sedaj tisto množico elementov, ki imajo le končno mnogo od 0 različnih komponent, vsaka komponenta pa je kompleksno število $\alpha + i\beta$, kjer sta obe komponenti α in β racionalni števili. Množica takih elementov je očitno števna. Uvideli pa bomo, da je ta množica v prostoru povsod gosta. To se pravi, da leži v vsaki okolici poljubnega elementa x vsaj en element te mno-

žice. Izberimo poljuben element x in predpišimo poljubno majhno pozitivno število ε! Uvideti hočemo, da je v omenjeni množici tak element z:

$$z = (z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, 0, 0, 0, \ldots)$$

ki je oddaljen od x za manj kot ε. Kvadrat razdalje obeh elementov je enak:

$$\| x - z \|^2 = | x_1 - z_1 |^2 + \ldots + | x_{n-1} - z_{n-1} |^2 + \Sigma | x_i |^2$$

V vrsti na desni seštevamo po indeksu i od n v neskončnost. Ker je vrsta konvergentna, lahko določimo tako velik n, da je njena vrednost vedno manjša ali kvečjemu enaka ε^2/n, komponente elementa z pa izberemo tako, da je: $| x_i - z_i |^2 \leqq \varepsilon^2/n$. To je mogoče, ker je množica kompleksnih števil z racionalnima komponentama na kompleksni ravnini povsod gosta. Torej je za tak z $\| x - z \| \leqq \varepsilon$. S tem je naša trditev dokazana.

V Hilbertovem prostoru smo našli števno množico, ki je povsod gosta. Tak prostor imenujemo separabilen.

2. *Prostor funkcij, ki imajo integrabilen kvadrat.* Druga pot v prostor z neskončno mnogo razsežnostmi nas bo vodila preko kvantne mehanike. Klasična mehanika določa stanje sistema, ki ima n prostostnih stopenj, s točko v $2n$ dimenzionalnem faznem prostoru. Iz komponent tega elementa — generaliziranih koordinat $q_1, q_2, \ldots, q_n$ in prirejenih impulzov $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — sklepa o nadaljnji usodi sistema in računa vrednosti, ki jih imajo določene fizikalne količine sistema v danem stanju.

Sistem z n prostostnimi stopnjami, ki ga obravnava kvantna mehanika, pa opišemo s funkcijo n spremenljivk: $\varphi(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, ki jo normiramo s pogojem:

$$\int\int \ldots \int | \varphi(q_1, q_2, \ldots, q_n) |^2 \, dq_1 \, dq_2 \ldots dq_n = 1$$

Tako vidimo, da se usoda kvantnomehanskega sistema zapisuje v prostoru vseh funkcij $\varphi(q)$, ki imajo konvergenten integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} | \varphi(q) |^2 \, dq$$

(n-torico $q_1, q_2, \ldots, q_n$ označimo kar s q, element prostora $dq_1, dq_2, \ldots, dq_n$ pa z dq).

Ta prostor je tudi linearen, kajti vsaka linearna kombinacija njegovih elementov je spet element prostora. Ker lahko najdemo v njem poljubno mnogo linearno neodvisnih elementov, je njegova razsežnost neskončna. Element 0 je funkcija, ki je identično enaka 0.

V tem prostoru definiramo skalarni produkt dveh elementov:

$$(\varphi, \psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(q) \overline{\psi(q)} \, dq$$

in kakor prej normo elementa:

$$\| \varphi \| = (\varphi, \varphi)^{1/2}$$

Dve funkciji imenujemo ortogonalni, če je njun skalarni produkt enak 0. Iz lastnosti integrala sledita za normo spet Schwarzova in Cauchyjeva neenačba ter Pitagorov izrek.

Sistem funkcij $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ je normiran in ortogonalen, če so norme vseh elementov enake 1, poljubna dva elementa sistema pa sta med seboj ortogonalna.

Vsaki funkciji ψ najdemo v izbranem ortogonalnem normiranem sistemu Fourierove koeficiente:

$$a_k = (\psi, \varphi_k)$$

in tvorimo pripadajočo Fourierovo vrsto:

$$\psi \sim a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + \ldots$$

Fourierovi koeficienti zadoščajo Besselovi neenačbi:

$$\Sigma \mid a_k \mid^2 \leqq \| \psi \|^2$$

Sistem normiranih ortogonalnih funkcij je zaključen, če velja za vsako funkcijo ψ Parsevalova enačba:

$$\Sigma \mid a_k \mid^2 = \| \psi \|^2$$

Parsevalovo enačbo lahko razširimo na dve funkciji φ in ψ s Fourierovimi koeficienti a_k in b_k:

$$\Sigma a_i \overline{b_i} = (\varphi, \psi)$$

Važen je Fischer-Rieszov izrek: Naj bo zaporedje števil $a_1, a_2, \ldots$ kakršnokoli, da je le vrsta $\mid a_1 \mid^2 + \mid a_2 \mid^2 + \ldots$ konvergentna, vedno je mogoče najti funkcijo ψ, ki ima ta števila za Fourierove koeficiente v danem zaključenem sistemu normiranih ortogonalnih funkcij; njena norma pa je določena s Parsevalovo enačbo.

3. *Abstraktni Hilbertov prostor.* Oba obravnavana prostora sta na videz povsem različna. Elemente obeh pa je mogoče med seboj tako prirediti, da sta izomorfna: vse operacije na elementih enega prostora se zrcalijo na prirejenih elementih v drugem prostoru.

Vsaki funkciji priredimo zaporedje njenih Fourierovih koeficientov. Tedaj preide vsota dveh funkcij v vrsto pripadajočih dveh zaporedij, produkt funkcije s številom se pa odrazi kot produkt ustreznega zaporedja s tem številom. Parsevalova enačba nam pove, da se ohranja skalarni produkt dveh elementov: ortogonalni elementi preidejo torej spet v ortogonalne elemente, dva pripadajoča si elementa imata enaki normi.

Fischer Rieszov izrek nam omogoča, da vsakemu zaporedju s konvergentno vrsto kvadratov absolutnih vrednosti priredimo neko funkcijo z integrabilnim kvadratom in ta prirejenost je spet taka, da sta oba prostora v vseh operacijah izomorfna.

Oba prostora se torej ne ločita bistveno med seboj. Oba sta realizaciji enega in istega abstraktnega prostora, ki ga imenujemo Hilbertov prostor. Hilbertov prostor definiramo kot množico elementov, ki zadoščajo petim aksiomom:

A) *Hilbertov prostor je linearen prostor.* V tem prostoru sta torej definirana vsota dveh elementov in produkt elementa s skalarjem. (Če dopuščamo kot skalarne množitelje le realna števila, je prostor realen, pri dovoljenih kompleksnih množiteljih pa govorimo o kompleksnem Hilbertovem prostoru.) Obe operaciji zadoščata zakonom:

1. $x + y = y + x$
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$
3. $\alpha (\beta x) = (\beta \alpha) x$
4. $1 \cdot x = x$
5. $\alpha (x + y) = \alpha x + \alpha y$
6. $(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$
7. Iz $x + y = x + z$ sledi $y = z$.

Definiramo še element 0 in razliko dveh elementov. Vsaka linearna kombinacija elementov:

$$\lambda_1 x^{(1)} + \lambda_2 x^{(2)} + \ldots + \lambda_n x^{(n)}$$

je spet element prostora. Če je vsaka linearna kombinacija danih n elementov različna od 0 (z izjemo trivijalne kombinacije), pravimo, da so ti elementi linearno neodvisni.

B) *Dvema elementoma x in y pripada določeno kompleksno število — njun skalarni produkt, ki ga označimo z (x, y) in ima tele lastnosti:*

1. $(x, y) = \overline{(y, x)}$
2. $(x, x) \geqq 0$, $(x, x) = 0$ le za $x = 0$.
3. $(x' + x'', y) = (x', y) + (x'', y)$
4. $(ax, y) = a(x, y)$

S pojmi, ki jih uvajata prva dva aksioma, moremo definirati normo elementa, ki ima vse prej navedene lastnosti, ortogonalnost dveh elementov in njuno razdaljo. Definiramo tudi konvergenco zaporedja elementov.

V prostoru s končno mnogo razsežnostmi ne moremo najti poljubno mnogo linearno neodvisnih elementov. Največje število linearno neodvisnih elementov je razsežnost prostora. V Hilbertovem prostoru to število ni omejeno in velja naslednji aksiom:

C) *V prostoru je mogoče najti poljubno mnogo linearno neodvisnih elementov.*

V končno razsežnem prostoru pa velja aksiom:

C^n) *Največje število linearno neodvisnih elementov je n.* Zadnja dva aksioma pa sta:

D) *Hilbertov prostor je poln.*

E) *Hilbertov prostor je separabilen.* (Torej eksistira števna množica elementov, ki je v prostoru povsod gosta.)

Aksiom C pravzaprav ni postavljen tako svobodno, kakor sta bila aksioma A in B. Prva aksioma nas že privedeta na križpotje: ali C ali C^n. Odtod naprej pa tečeta poti povsem različno: če se odločimo za C^n, sta D in E že izreka, ki ju je mogoče dokazati na osnovi prvih treh aksiomov, odločitev za C pa nam pušča v tem pogledu popolno svobodo. Da ohranimo podobnost z Evklidovim prostorom, privzamemo D in E kot samostojna in od ostalih neodvisna aksioma. Zgradba aksiomatike je torej nekako takale:

$$\begin{tikzcd}
 & A, B \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
C^n \arrow[d] & & C, & D, \quad E \\
D \arrow[d] & & & \\
E & & &
\end{tikzcd}$$

4. *Podprostori.* V Hilbertovem prostoru lahko definiramo zaprte množice elementov. Element x je stekališče dane množice, če lahko po predpisu vsakega ε najdem v množici neki element y, ki zadošča pogoju: $\| x - y \| \leqq \varepsilon$.

Množica, ki vsebuje vsa svoja stekališča, je zaprta množica.

K dani množici elementov privzemimo vse možne linearne kombinacije njenih elementov. Tako dobljeno množico imenujemo linearno lupino prvotne množice. V končno razmernem prostoru je taka linearna lupina zaprta, v Hilbertovem prostoru pa to ni vedno tako. Privzemimo k tej lupini še vsa njena stekališča, pa dobimo zaprto linearno lupino prvotne množice.

Tako smo dobili množico elementov, ki vsebuje vse možne linearne kombinacije svojih elementov in vsa njihova stekališča. Taka množica je spet neki Hilbertov prostor, ker zadošča vsem petim aksiomom. Imenujemo jo podprostor prvotnega prostora. Trivijalna primera podprostorov sta ves prostor in prazna množica. V navadnem prostoru so primeri takih podprostorov premice in ravnine.

Če sta dva podprostora taka, da je vsak element prvega podprostora ortogonalen na vsak element drugega podprostora, ju imenujemo ortogonalna podprostora. Vsota dveh podprostorov je množica vseh elementov z, ki jih lahko pišemo v obliki vsote: $z = x + y$, kjer je prvi člen x element prvega podprostora, drugi člen y pa leži v drugem podprostoru.

Naj bo $\mathfrak{H}_1$ podprostor Hilbertovega prostora $\mathfrak{H}$. Tedaj je vsak element prostora mogoče zapisati v obliki:

$$x = y + z$$

kjer je y element podprostora $\mathfrak{H}_1$, element z pa je na ta podprostor ortogonalen. Element y imenujemo projekcijo elementa x na podprostor $\mathfrak{H}_1$. Vsi elementi z pa tvorijo podprostor, ki je ortogonalen podprostoru $\mathfrak{H}_1$; označimo ga s $\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_1$ in prostor $\mathfrak{H}$ je vsota dveh ortogonalnih podprostorov:

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 + (\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_1)$$

Vsoto podprostorov razširimo na poljubno mnogo členov, pa tudi na vrsto s števno mnogo členi. Posebno važen je primer, ko lahko razčlenimo prostor na same enorazsežne, med seboj ortogonalne podprostore:

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2 + \ldots$$

Vsak tak podprostor $\mathfrak{H}_k$ lahko smatramo za zaprto linearno lupino množice, ki vsebuje en sam element x_k z normo enako 1. To je element enote v tem prostoru. Elementi enote vseh podprostorov gornje vsote: $x_1, x_2, x_3, \ldots$ tvorijo ortogonalen normiran sistem elementov, ki je tudi zaključen; edini element, ki je ortogonalen na vse elemente sistema, je element 0. Lahko je dokazati, da je v separabilnem prostoru tak sistem kvečjemu števen.

Vsak element v podprostoru $\mathfrak{H}_k$ lahko pišemo v obliki $a_k x_k$ in vsak element Hilbertovega prostora:

$$x = \Sigma\, a_k x_k$$

Pitagorov izrek da enačbo zaključenosti:

$$\| x \|^2 = \Sigma \mid a_k \mid^2$$

Podprostor $\mathfrak{H}_2$ je del podprostora $\mathfrak{H}_1$, če je vsak element podprostora $\mathfrak{H}_2$ tudi element podprostora $\mathfrak{H}_1$. Produkt ali presek dveh podprostorov je množica vseh podprostoroma skupnih elementov. Očitno je presek dveh podprostorov spet podprostor.

5. *Operatorji v Hilbertovem prostoru.* Operator A v Hilbertovem prostoru je zakon, ki priredi vsakemu elementu x določen element y:

$$y = Ax$$

Operator A je distributiven, če velja:

$$A(x + y) = Ax + Ay$$

in omejen, če je mogoče najti táko pozitivno število N, da je pri vsakem elementu x:

$$\| Ax \| \leqq N \| x \|$$

Najmanjše táko število imenujemo normo operatorja A in zapišemo $\| A \|$:

$$\| Ax \| \leqq \| A \| \cdot \| x \|$$

Operator, ki je hkrati distributiven in omejen, je linearni operator. Vsak linearni operator je zvezen: če konvergira zaporedje elementov $x_1, x_2, x_3, \ldots$ k elementu x, stremi zaporedje $Ax_1, Ax_2, Ax_3, \ldots$ k elementu Ax.

V končno razsežnem prostoru pripada vsakemu linearnemu operatorju določena matrika: komponente elementa Ax se linearno izražajo s komponentami transformiranega elementa x. V Hilbertovem prostoru neskončnih zaporedij se komponente elementa, ki ga dosežemo z operatorjem, prav tako linearno izražajo s komponentami elementa, na katerem smo udejstvili operator: operatorju pripada v tem primeru neskončna matrika. Seveda ne predstavlja vsaka matrika linearnega operatorja; elementi matrike morajo zadoščati določenim pogojem, da je operator omejen.

Naj bosta x in y dva poljubna elementa; tedaj je skalarni produkt (Ax, y) operatorju A prirejena bilinearna forma; (Ax, x) pa je operatorju A prirejena kvadratna forma.

Operatorja A in B sta si adjungirana, če velja pri vsakem paru elementov x in y: $(Ax, y) = (x, By)$. Vsakemu linearnemu operatorju A pripada en sam adjungiran operator, ki ga označimo z A^*:

$$(Ax, y) = (x, A^* y)$$

Operator A^* je spremljevalec operatorja A. Če je $A = A^*$, je A hermitski operator ali operator samotar. Spremljevalko matrike A z elementi A_{ik} dobimo tako, da matriko zrcalimo preko glavne diagonale in vsak člen matrike nadomestimo s konjugirano kompleksno vrednostjo. Torej je $A^*_{ik} = \overline{A}_{ki}$. Matrika samotarka je matrika, ki zadošča pogojem: $A_{ki} = \overline{A}_{ik}$. Elementi na glavni diagonali so torej pri hermitski matriki realni.

Kvadratna forma, ki pripada hermitskemu operatorju, ima pri vsakem elementu x realno vrednost. Oceniti jo moremo z neenačbo:

$$m \| x \| \leqq (Ax, x) \leqq M \| x \|$$

števili m in M sta meji operatorja A in njegova norma je enaka večjemu od števil $| m |$ in $| M |$.

Dvema operatorjema priredimo vsoto in produkt. Vsota dveh operatorjev $A + B$ je operator, ki je določen s pogojem:

$$(A + B) x = Ax + Bx$$

Produkt dveh operatorjev BA je operator, ki ga dobimo, če uporabimo najprej operator A, nato pa udejstvimo še operator B:

$$BA\,x = B\,(Ax)$$

Vsota dveh operatorjev je komutativna in asociativna, produkt pa je v splošnem le asociativen, komutativen pa ne. Veljata pa razčlenitvena zakona:

$$A\cdot(B + C) = AB + AC, \qquad (A + B)\cdot C = AC + BC.$$

Definirati moremo tudi zaporedje operatorjev in njegovo limito. Zaporedje operatorjev A_1, A_2, ... konvergira k operatorju A, če pri vsakem elementu x konvergira zaporedje elementov A_1x, A_2x, ... k elementu Ax.

Poiščimo sedaj danemu operatorju A obratne operatorje; to so operatorji, ki zadoščajo vsaj enemu od obeh pogojev:

$$BA = E; \quad AC = E$$

kjer je E identiteta: $Ex = x$.

B je levi, C pa je desni obratni operator operatorja A. V končno razsežnih prostorih nas iskanje privede na razpotje:

1. Operator A ima en in en sam obratni operator, ki je hkrati levi in desni obratni operator; označimo ga A^{-1}. ($AA^{-1} = A^{-1}A = E$).
2. Operator A nima obratnega operatorja.

V Hilbertovem prostoru pa morejo nastopiti primeri, ki nimajo analogije v končnih prostorih. Kar štiri možnosti so:

1. Operator A ima en sam omejen obratni operator A^{-1}.
2. Operator A ima neskončno mnogo neomejenih levih obratnih operatorjev in nima obratnega operatorja z desne strani.
3. Operator A ima neskončno mnogo neomejenih desnih obratnih operatorjev in nima obratnega operatorja z leve strani.
4. Operator A nima obratnih operatorjev.

6. *Projektorji.* Naj bo $\mathfrak{H}_1$ določen podprostor Hilbertovega prostora $\mathfrak{H}$. Tedaj moremo vsakemu elementu x prirediti njegovo projekcijo v podprostor $\mathfrak{H}_1$: y. Operator P, ki priredi elementu x njegovo projekcijo v podprostor $\mathfrak{H}_1$:

$$y = Px$$

je projektor v podprostor $\mathfrak{H}_1$. Projektor je linearen operator z normo enako 1. Je hermitski operator in zadošča pogoju $P^2 = P$. Pa tudi obratno je res: vsak hermitski operator, ki zadošča pogoju $P^2 = P$, je projektor v določeni podprostor, ki ga tvorijo vsi elementi $y = Px$, ko preteče x ves Hilbertov prostor.

Dva projektorja P_1 in P_2 imenujemo ortogonalna, če sta pripadajoča podprostora med seboj ortogonalna; tedaj moremo pisati $P_1P_2 = 0$. (Operator 0 priredi vsakemu elementu prostora element 0.)

Vsota dveh projektorjev je spet projektor tedaj in le tedaj, če sta projektorja ortogonalna. V tem primeru pripada vsoti projektorjev vsota podprostorov, ki pripadata členoma vsote.

Produkt dveh projektorjev je spet projektor, če je komutativen. $P_1 P_2 = P_2 P_1$ je projektor na presek podprostorov, ki pripadata njegovim faktorjem.

Projektor P_1 je del projektorja P_2 ($P_1 \leqq P_2$), če je $P_1 P_2 = P_1$. Ta pogoj pa je izpolnjen tedaj in le tedaj, če je podprostor $\mathfrak{H}_1$ del podprostora $\mathfrak{H}_2$.

Limita zaporedja projektorjev je spet projektor. Uvideti moremo, da je vsako monotono zaporedje projektorjev: $P_1 \leq P_2 \leq P_3 \leq \ldots$ vedno konvergentno.

7. *Lastne vrednosti in lastni elementi operatorja.* Osnovna naloga, s katero se bomo ubadali odslej, je reševanje homogene enačbe:

$$Ax = \lambda x$$

kjer je A določeni operator, x je iskani element Hilbertovega prostora, λ pa je kompleksni parameter. Vrednosti parametra λ, pri katerih je enačba rešljiva, so lastne vrednosti operatorja A, pripadajoče rešitve pa so njegovi lastni elementi.

Geometrijska vsebina problema je očitna: Iščemo tiste smeri v prostoru, ki jih operator A ohranja: operator A pomnoži svoj lastni vektor s pripadajočo lastno vrednostjo.

Reševanje homogene enačbe pa je tudi temeljni problem kvantne mehanike. Rekli smo že, da kvantna mehanika opiše stanje sistema z neko normirano funkcijo — elementom Hilbertovega prostora, vsaki fizikalni količini pa priredi določen operator. Iz lastnosti tega operatorja spozna vse, kar more zvedeti o dani fizikalni količini. Troje jo zanima pri tem:

1. Vrednosti, ki jih more zavzeti dana količina, in stanja, v katerih lahko te vrednosti izmerimo. Pri tem razglablja tudi, ali je mogoča absolutno točna meritev ali pa samo meritev z določeno natančnostjo.

2. Verjetnost, da leži vrednost količine na določenem intervalu.

3. Povprečna vrednost količine v danem stanju φ.

Odgovor na prvo vprašanje najde vprav z reševanjem navedene homogene enačbe. Za primer izberimo materijsko točko s tremi prostostnimi stopnjami. Klasična mehanika opiše stanje te točke s krajevnim vektorjem $\mathbf{q}$ in impulzom $\mathbf{p}$, energijo pa za vsako stanje izračuna po formuli: $U = \mathbf{pp}/2\,m + V(\mathbf{q})$, kjer je $V(\mathbf{q})$ potencialna energija točke v legi $\mathbf{q}$.

Kvantna mehanika opiše stanje točke s funkcijo $\varphi(\mathbf{q})$, energiji U pa priredi operator H (Hamiltonov operator), ki ga dobi iz klasičnega izraza za energijo tako, da nadomesti impulz $\mathbf{p}$ z operatorjem $(h/2\,\pi\,i)\,\nabla$:

$$H = (h^2/8\,\pi^2\,m)\,\Delta + V(\mathbf{q})$$

Schrödingerjeva enačba:

$$H\psi = U\psi$$

da tedaj lastne vrednosti in lastne funkcije energije. Lastne funkcije energije predstavljajo stacionarna stanja sistema — stanja, v katerih moremo energijo meriti, lastne vrednosti energije pa so vprav vrednosti energije v teh stanjih.

Homogeno enačbo pišemo v obliki:

$$(A - \lambda E)\,x = 0$$

(E je identični operator). Ta enačba je rešljiva samo trivijalno, kadar ima operator $A - \lambda E$ omejen obratni operator:

$$R(\lambda, A) = (A - \lambda E)^{-1}$$

Operator $R(\lambda, A)$, ki je funkcija parametra λ, imenujemo resolvento operatorja A. Množico točk na kompleksni ravnini (λ), v katerih resolventa ni regularna (ni omejen operator), imenujemo spekter operatorja A. Očitno so vse

lastne vrednosti operatorja A člani njegovega spektra. Spekter pa more poleg lastnih vrednosti obsegati še druge točke. Lastne vrednosti, pri katerih je rešljiva homogena enačba netrivijalno, so tiste točke, v katerih $(A - \lambda E)$ nima obratnega operatorja, spekter pa more obsegati še točke, kjer ima operator $A - \lambda E$ le leve ali le desne neomejene obratne operatorje. Množico vseh lastnih vrednosti imenujemo diskretni del spektra, ostanek pa zvezni del spektra.

Odslej se bomo omejili na obravnavanje hermitskih operatorjev. Lahko je uvideti, da so vse lastne vrednosti hermitskega operatorja realne, prav tako pa tudi, da so lastne funkcije, ki pripadajo različnim lastnim vrednostim, med seboj ortogonalne. Isti lastni vrednosti pa lahko pripada več linearno neodvisnih lastnih funkcij. Tedaj tudi vsaka linearna kombinacija teh funkcij pripada isti lastni vrednosti. Vse lastne rešitve, ki pripadajo isti lastni vrednosti λ, tvorijo neki podprostor, ki ga imenujemo lastni vrednosti λ pripadajoči lastni prostor operatorja A. Razsežnost podprostora je večkratnost lastne vrednosti. Lastna vrednost, ki ima večkratnost večjo od 1, je izprijena lastna vrednost. Vsi lastni prostori operatorja A so med seboj ortogonalni.

Spekter hermitskega operatorja leži na realni osi ravnine (λ) med obema mejama operatorja.

8. *Spektralna razčlenitev operatorja.* V končno razsežnem prostoru se matrika A prav preprosto izrazi s svojimi lastnimi vrednostmi in projektorji v lastne podprostore. Poglejmo najprej, kaj napravi matrika A z vektorjem x, ki leži v lastnem podprostoru $\mathfrak{H}_k$ ($\mathfrak{H}_k$ naj ustreza lastni vrednosti λ_k). Element x je po definiciji rešitev enačbe $Ax = \lambda_k x$, ki nam pove, da matrika A vektor x samo λ_k-krat poveča. V kaj preide pod vplivom transformacije A poljubni element prostora, pa uvidimo takole: Najprej poiščemo projekcije elementa x na lastne podprostore in element x zapišemo kot vsoto: $x = P_1 x + P_2 x + \ldots + P_n x$. Za posamezne projekcije velja: $A(P_k x) = \lambda_k P_k x$, sliko elementa x pa dobimo z vsoto $Ax = \lambda_1 P_1 x + \lambda_2 P_2 x + \ldots + \lambda_n P_n x$.

Hermitsko matriko A moremo pisati kot linearno kombinacijo projektorjev v njene lastne prostore, koeficienti pa so ustrezne lastne vrednosti:

$$A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \ldots + \lambda_n P_n$$

Vsota vseh lastnih projektorjev je identiteta: $P_1 + P_3 + \ldots + P_n = E$. To vsoto imenujemo operatorju A ustrezajočo razčlenitev enote.

Vsoto, v katero smo razčlenili matriko A, pa moremo zapisati tudi kot Stieltjesov integral po stopničasti funkciji $\mathscr{E}(\lambda)$, ki je definirana takole:

$$\begin{aligned} \mathscr{E}(\lambda) &= 0 && \lambda < \lambda_1 \\ \mathscr{E}(\lambda) &= P_1 + P_2 + \ldots + P_k; && \lambda_k \leqq \lambda < \lambda_{k+1} \\ \mathscr{E}(\lambda) &= E && \lambda \geqq \lambda_n \end{aligned}$$

(Lastne vrednosti λ_k pri tem uredimo po velikosti, tako da je: $m = \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n = M$.) Matriko A zapišemo tedaj takole:

$$A = \int_{\lambda_1}^{\lambda_n} \lambda \, d\mathscr{E}(\lambda) = \int_m^M \lambda \, d\mathscr{E}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d\mathscr{E}(\lambda) \quad .$$

Matriko $\mathscr{E}(\lambda)$ imenujemo spektralno funkcijo matrike A.

Podobno je mogoče izraziti tudi vsak hermitski operator v Hilbertovem prostoru. Dakazati se da, da pripada vsakemu hermitskemu operatorju neka razčlenitev enote, torej spektralna funkcija $\mathscr{E}(\lambda)$, s temile lastnostmi:

$\mathscr{E}(\lambda)$ je projektor.

$\mathscr{E}(\lambda)$ se spreminja le med obema mejama operatorja $A: m$ in M, pri $\lambda < m$ je $\mathscr{E}(\lambda) = 0$, pri $\lambda \geqq M$ pa je $\mathscr{E}(\lambda) = E$.

$\mathscr{E}(\lambda)$ je monotono naraščajoča funkcija: $\mathscr{E}(\lambda) \geqq \mathscr{E}(\mu)$, če je $\lambda > \mu$.

$\mathscr{E}(\lambda)$ je z desne zvezna: $\mathscr{E}(\lambda + 0) = \mathscr{E}(\lambda)$.

Operator A izrazimo spet kot Stieltjesov integral parametra λ po spektralni funkciji $\mathscr{E}(\lambda)$. Funkcija $\mathscr{E}(\lambda)$ vobče ni več stopničasta, s svojim vedenjem do argumenta λ pa lepo določa razprostiranje spektra. Tole velja:

Točke, ki leže na intervalih, kjer se $\mathscr{E}(\lambda)$ ne spreminja, so regularne. Množica vseh regularnih točk je torej odprta, spekter pa je zaprta množica točk. Točke, kjer se $\mathscr{E}(\lambda)$ zvezno spreminja, tvorijo zvezni del spektra; točke, kjer doživi $\mathscr{E}(\lambda)$ skok, so lastne vrednosti operatorja $\mathscr{E}(\lambda)$ in skok $\mathscr{E}(\lambda) - \mathscr{E}(\lambda - 0)$ je projektor v lastni prostor, ki pripada lastni vrednosti λ.

Vsi lastni prostori so med seboj ortogonalni, v vsakem uvedemo normiran ortogonalni sistem elementov in tako dobimo normiran ortogonalni sistem elementov v Hilbertovem prostoru $x_1, x_2, x_3, \ldots$ Ta sistem je gotovo končen ali pa kvečjemu števen, ker je prostor separabilen. Torej je tudi lastnih vrednosti hermitskega operatorja le števno mnogo. Vsota vseh lastnih podprostorov je neki podprostor, projektor nanj pa je enak vsoti vseh skokov spektralne funkcije:

$$P = \Sigma [\mathscr{E}(\lambda) - \mathscr{E}(\lambda - 0)]$$

Če je sistem ortogonalnih in normiranih lastnih elementov zaključen, je vsota vseh lastnih podprostorov ves Hilbertov prostor in projektor P je identiteta:

$$\Sigma [\mathscr{E}(\lambda) - \mathscr{E}(\lambda - 0)] = E$$

Spektralna funkcija je v tem primeru stopničasta, operator A ima pa čist diskreten spekter.

Naj bo spet $x_1, x_2, x_3, \ldots$ normiran in ortogonalen sistem lastnih elementov operatorja A s čistim diskretnim spektrom. Tedaj moremo (zaradi zaključenosti sistema) vsak element x prostora razviti v Fourierovo vrsto:

$$x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots$$

Bilinearna forma (Ax, y) in kvadratna forma (Ax, x) se prav preprosto izražata s Fourierovimi koeficienti elementov x in y. Naj bo:

$$y = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots$$

Najprej poiščemo element, v katerega preide vektor x pod vplivom operatorja A. Ker je $Ax_k = \lambda_k x_k$, dobimo takoj:

$$Ax = \lambda_1 a_1 x_1 + \lambda_2 a_2 x_2 + \ldots$$

nato pa obe formi:

$$(Ax, y) = \lambda_1 a_1 \overline{b}_1 + \lambda_2 a_2 \overline{b}_2 + \ldots$$

$$(Ax, x) = \lambda_1 |a_1|^2 + \lambda_2 |a_2|^2 + \ldots$$

Z rešitvijo lastnega problema smo v primeru, ko ima operator A čist diskreten spekter, prevedli pripadajočo kvadratno formo na vsoto samih kvadratov.

Primer čistega zveznega spektra zahteva posebno obdelavo, saj nima analogije v navadnem prostoru. Sredstva teorije realnih funkcij, ki jih zahteva obravnava tega primera, pa presegajo meje našega članka. Če pa ima operator mešan spekter, moremo razčleniti Hilbertov prostor v dva med seboj ortogonalna podprostora: $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}' + \mathfrak{H}''$. V prvem ima operator A čist diskreten spekter, v drugem pa ima zvezen spekter.

9. *Spektralna razčlenitev in kvantna mehanika.* Na koncu skušajmo odgovoriti na vprašanja, ki nam jih je zastavila kvantna mehanika. Odgovore podajmo v obratnem vrstnem redu:

Povprečno vrednost količine Z z operatorjem A v stanju φ izračuna kvantna mehanika po pravilu:

$$< A > = (A\varphi, \varphi)$$

Verjetnost, da bo ležala vrednost izmerjene količine na intervalu $\triangle$, ko je sistem v stanju φ, pa določa izraz:

$$w = (\varphi, \triangle \mathscr{E}(\lambda)\, \varphi) = \| \triangle \mathscr{E}(\lambda)\, \varphi \|^2$$

kjer je $\triangle \mathscr{E}(\lambda)$ prirastek spektralne funkcije $\mathscr{E}(\lambda)$ operatorja A na intervalu $\triangle$. Obe pravili nam pomagata odgovoriti tudi na prvo vprašanje. Merjenje določene količine na kvantno-mehanskem sistemu je bistven poseg v stanje sistema. Da to uvidimo, se vprašajmo po verjetnosti, da ima dana količina v stanju φ točno določeno vrednost λ^*. Po definiciji je: $w = (\varphi, \triangle \mathscr{E}(\lambda^*)\, \varphi)$, kjer je sedaj $\triangle \mathscr{E}(\lambda^*)$ skok $\mathscr{E}(\lambda)$ v točki λ^*. Tako vidimo, da je ta verjetnost različna od 0 le v točkah, kjer je spektralna funkcija nezvezna, torej samo pri lastnih vrednostih operatorja $A : \lambda^* = \lambda_k$. Tedaj pa je skok spektralne funkcije vprav projektor v lastni prostor; verjetnost, ki jo moremo pisati v tem primeru $w = (\varphi, P_k \varphi)$, je v lastnih stanjih enaka 1. V lastnih stanjih lahko izmerimo vrednost količine popolnoma natančno. Količina, katere operator ima čist diskreten spekter, je tedaj vedno natančno merljiva. Meritev količine prevede sistem v lastno stanje in z meritvijo izmerimo lastno vrednost količine v tem stanju.

Kako pa je s količino, ki ima mešan spekter? Hilbertov prostor razstavimo v dva ortogonalna podprostora $\mathfrak{H}' + \mathfrak{H}''$; v prvem ima operator čist diskreten spekter, v drugem pa čist zvezen spekter. Verjetnost, s katero moremo izvesti eksaktno meritev, je $w = (\varphi, P' \varphi)$, kjer je P' projektor v podprostor $\mathfrak{H}'$. Ta verjetnost pa je manjša od 1 in eksaktna meritev ni več možna v vsakem primeru.

V našem članku smo obravnavali le omejene operatorje, operatorji kvantne mehanike pa so v veliki meri neomejeni. Spektralna teorija takih operatorjev se ne razlikuje bistveno od spektralne teorije omejenih operatorjev. Zahteva le nekaj več priprav, zato smo se ji na tem mestu morali odpovedati.

Literatura:

M. H. Stone: Linear transformations in Hilbert Space and their application to analysis. (New York 1932)

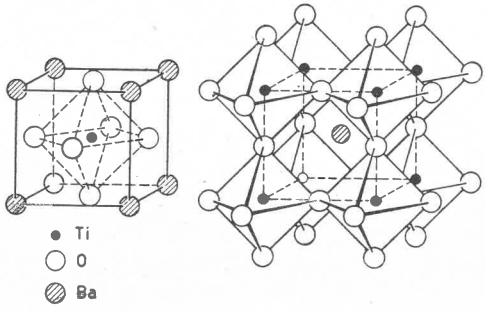
J. v. Neumann: Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik. (Berlin 1932)

V. I. Smirnov: Kurs vysšej matematiki, tom V. (Moskva 1947)

FEROELEKTRIKI

PETER GOSAR

Običajni dielektriki se šele v električnem polju polarizirajo. V kristalih teh dielektrikov so pozitivni in negativni naboji tako razporejeni, da ni samo prostorsko povprečje naboja, ampak tudi rezultirajoči dipolni moment kristala enak 0. Šele pod vplivom zunanjega polja se pozitivni in negativni naboji razmaknejo na tak način, da dobi kristal dipolni moment. Prostorski gostoti nastalega dipolnega momenta pravimo *polarizacija* P in je, kot znano, $P = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) E$, kjer je ε dielektričnost snovi, E pa električna poljska jakost. Pri teh snoveh je polarizacija premo sorazmerna E, ker je dielektričnost neodvisna od poljske jakosti.



Sl. 1. Idealna perovskitska kristalna struktura. Sliki 1 in 2 sta iz knjige A. von Hippel, Dielectrics and Waves.

V naravi najdemo tudi kristale, ki so že sami od sebe polarizirani, tudi če ni zunanjega električnega polja. Govorimo o *spontani polarizaciji*. Smer spontane polarizacije se v takih kristalih ujema s smerjo glavne simetrijske kristalne osi. Samo z močnim zunanjim poljem lahko smer spontane polarizacije obrnemo za 180°. Polje, ki je za to potrebno, je pri nekaterih kristalih, n. pr. pri turmalinu, tako veliko, da nastopi prej preboj skozi kristal, kot da bi se spontana polarizacija preorientirala. Pri drugih dielektrikih te vrste je pa mogoče z zunanjim poljem obrniti smer spontane polarizacije. Tem dielektrikom so vzdeli ime *feroelektriki*.

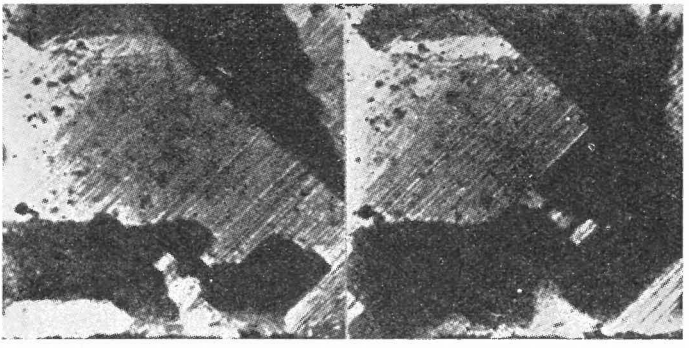
Najbolj znani feroelektriki so: Seignettova sol NaK $(C_4H_4O_6) \cdot 4\,H_2O$ v temperaturnem intervalu od 255°—297° K, kalijev dihidrofosfat KH_2PO_4 pri temperaturah pod 123° K, barijev titanat $BaTiO_3$ pod 391° K ter razni drugi kristali, ki imajo perovskitsko* in podobno ilmenitsko** kristalno strukturo. Feroelektriki s perovskitsko kristalno strukturo so $BaTiO_3$, $PbTiO_3$, $KTaO_3$, $NaTaO_3$, $KNbO_3$, $NaNbO_3$, $NaCbO_3$, $KCbO_3$. Feroelektrika z ilmenitsko kristalno strukturo pa sta $LiTaO_3$ in $LiCbO_3$. Tudi WO_3 s kristalno strukturo, ki sliči perovskitski kristalni strukturi, je feroelektrik.

Feroelektriki imajo marsikatere električne lastnosti, ki so analogne magnetnim lastnostim feromagnetnih snovi. Od tod so tudi dobili svoje ime, saj sicer z železom nimajo ničesar opraviti. Mi si bomo ogledali te lastnosti na barijevem titanatu, ker je ta praktično najvažnejši feroelektrik in imajo

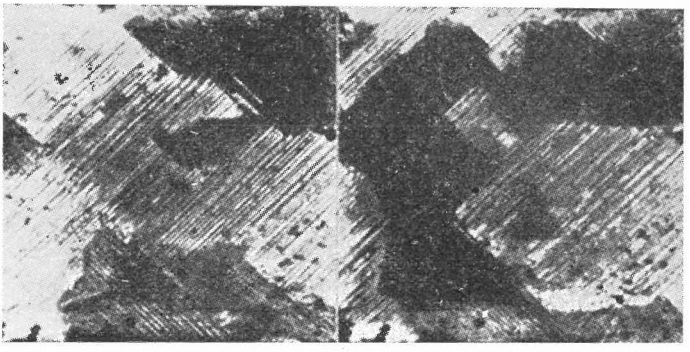
* po mineralu perovskitu ($CaTiO_3$)
** po mineralu ilmenitu ($FeTiO_3$)

ostali važni feroelektriki enako ali podobno kristalno strukturo. Perovskitsko kristalno strukturo kaže sl. 1.

Če opazujemo večji kristal barijevega titanata s polarizacijskim mikroskopom, vidimo, da je pri sobni temperaturi razdeljen na več področij (1, 2). Izkaže se, da so to področja spontane polarizacije v različne smeri, ki so med seboj pravokotne. Področja spontane polarizacije ustrezajo Weissovim obsegom, ki jih poznamo iz magnetizma. Razlika je v tem, da so tu obsegi mnogo večji,



$E = 0$ $E = +2000 V/cm$



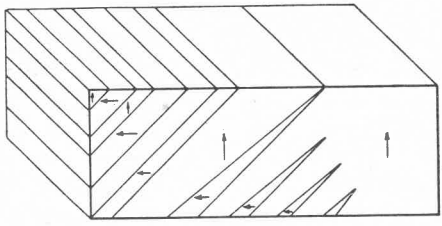
Odstranjeno polje $E = 0$ $E = -2000$ V/cm

Sl. 2 Vpliv električnega polja na velikost posameznih obsegov pri kristalu barijevega titanata.

reda velikosti 0,1 mm, tako da jih je prav lahko opazovati z mikroskopom. Spontana polarizacija pri sobni temperaturi je $16 \cdot 10^{-6}$ As/cm^2. To je velika vrednost, saj bi tolikšno polarizacijo v praznem prostoru dobili šele pri poljski jakosti $2 \cdot 10^8$ V/cm. V zunanjem električnem polju se delež obsegov, orientiranih v smer polja, povečuje na račun obsegov, orientiranih v nasprotno smer. To nastane deloma z rastjo obsegov, ki so pravilno orientirani, deloma pa s preorientacijo polarizacije celega obsega v pravilno smer. Oboje lahko lepo opazujemo z mikroskopom, če je vzorec med kondenzatorskima ploščama. Glej sl. 2! Koercitivna poljska jakost za spremembo polarizacije iz ene smeri v drugo je reda velikosti 10^3 V/cm. Odvisna je od nečistoč in nepravilnosti v kristalni

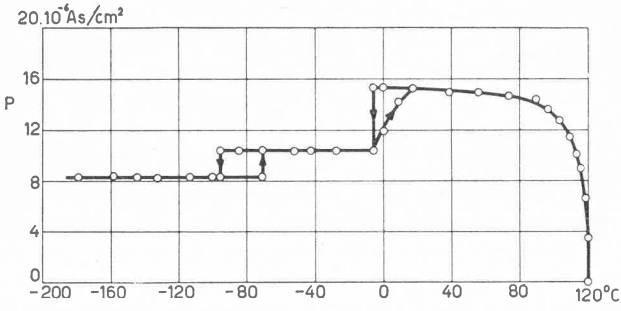
mreži. V polju nekaj tisoč voltov na cm lahko torej dosežemo, da bo ves kristal polariziran v eno smer. Po odstranitvi polja kristal običajno razpade nazaj v področja različnih smeri polarizacije.

Na meji posameznega obsega se pojavi polarizacijski naboj s površinsko gostoto $\sigma = P \cos \alpha \sin \alpha$. Tu pomeni α kot med normalo na mejno ploskev in smerjo spontane polarizacije. Če bi ostali ti polarizacijski naboji na mejah obsegov med seboj nekompenzirani, bi bila energija nastalih elektrostatičnih polj zelo velika. V resnici so pa polarizacijski naboji skoraj popolnoma kompenzirani. Mejne ravnine med posameznimi obsegi namreč oklepajo kot približno 45^0 s smerjo polarizacije na eni in drugi strani mejne ploskve. S tem je kot α med smerjo polarizacije in normalo na mejno ploskev za oba sosednja



Sl. 3. Razpad kristala barijevega titanata na obsege. Slike 3 do 7 so iz knjige C. Kittel, Introduction to Solid State Physics.

obsega enak 45^0. Polarizacijska naboja dveh sosednjih obsegov sta torej enaka, toda nasprotnega znaka in se kompenzirata. Shematsko ponazoritev razdelitve kristala barijevega titanata na posamezne obsege vidimo na sl. 3. Puščice kažejo

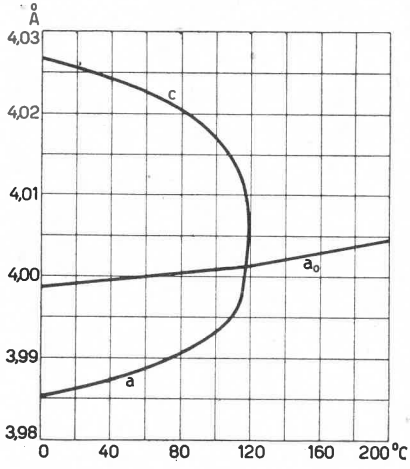


Sl. 4. Potek spontane polarizacije v kristalu barijevega titanata v odvisnosti od temperature.

smer spontane polarizacije. Razpad kristala na obsege nastane navadno tako, da se najprej pojavi na robu kristala ozek klin, ki je drugače polariziran kot ostali del kristala. Mejne ploskve klina oklepajo približno kot 45^0 z osjo kristala. Velikost klina s premikanjem mejnih ravnin hitro narašča, tako da ostrina klina kmalu doseže nasprotno mejno ploskev kristala. Premikanje mejnih ravnin se še nadaljuje, dokler se ne doseže primerno ravnotežje med velikostmi posameznih obsegov.

Spontano polarizacijo opazujemo pri temperaturah pod Curiejevo temperaturo 391^0 K. Pri tej temperaturi polarizacijski obsegi izginejo in postane kristal električno izotropen. Nad Curiejevo temperaturo kristalizira barijev

titanat kubično. Pri 391° K nastopi spontana polarizacija v smeri ene izmed treh osi kubne strukture. Jakost polarizacije je tem večja, čim dlje smo od Curiejeve temperature in se pri 80° C že zelo približa vrednosti nasičenja (3). Potek spontane polarizacije v odvisnosti od temperature podaja sl. 4. Pri Curiejevi temperaturi se spremeni tudi kristalna struktura. Titanat preide iz kubičnega kristalnega sestava v tetragonalni sestav z osjo v smeri spontane polarizacije. V resnici gre le za majhno podaljšanje kristala v smeri polarizacije ter za skrčitev v prečni smeri, kar lahko smatramo za pojav elektrostrikcije v močnem lastnem notranjem polju (4). Kajti razmerje med dolžinama robov osnovne celice kristalne mreže se spreminja točno sorazmerno s kvadratom spontane polarizacije, kar jasno kaže na pojav elektrostrikcije. Razmerje med dolžino daljšega robu c in krajšega robu a je pri 0° C 1,010 ($c = 4{,}027$ Å, $a = 3{,}986$ Å).



Sl. 5. Temperaturna odvisnost dolžine robov c in a osnovne celice kristalne mreže pri barijevem titanatu.

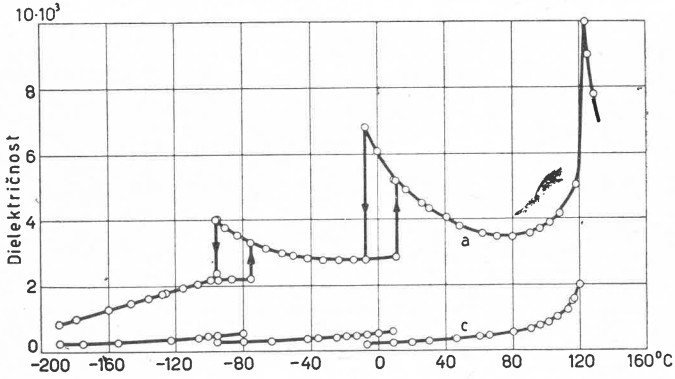
Temperaturna odvisnost dolžin robov c in a je razvidna iz sl. 5 (5). Na tej sliki je narisan tudi temperaturni potek dolžine robu a_0 osnovne celice kubne kristalne strukture barijevega titanata za temperature nad Curiejevo točko, za temperature pod to točko pa vidimo iz volumna osnovne celice izračunano dolžino robu kocke, ki bi imela isti volumen. Iz teh dveh krivulj sklepamo na nezvezno spremembo temperaturnega razteznostnega koeficienta pri Curiejevi temperaturi.

Če zasledujemo temperaturni potek spontane polarizacije pri barijevem titanatu v smeri glavne osi kristala, opazimo pri 0° C znatno zmanjšanje polarizacije. Še nadaljnje zmanjšanje polarizacije se pojavi v bližini temperature — 80° C. Tema dvema temperaturama ustrezata tudi majhni spremembi v kristalni strukturi. Iz razmerja polarizacij nad in pod mejnima temperaturama lahko sklepamo, da se je pri 0° C smer polarizacije spremenila od smeri glavne osi v smer ploskovne diagonale mejne ploskve kristala. Pri — 80° C se pa smer polarizacije orientira vzdolž telesne diagonale kristala. Zaradi elektrostrikcije v teh smereh slede ustrezne spremembe v kristalni strukturi. Barijev titanat kristalizira med 0° C in — 80° C ortorombsko, pod — 80° C pa

trigonalno. Iz sl. 4 je tudi razvidno, da lahko nastopi pri mejnih temperaturah znatna zakasnitev prehoda iz enega kristalnega sestava v drugi.

Barijev titanat je predvsem zanimiv zaradi svojih dielektričnih lastnosti. Dielektričnost je odvisna od jakosti polja, temperature, od smeri v kristalu (če imamo opraviti z enojnim kristalom), in končno tudi od predzgodovine. Pri močnih poljih postanejo tudi polikristalinični vzorci električno anizotropni. Nadalje nastopijo tu histerezni pojavi čisto analogno, kot to poznamo pri feromagnetikih.

Najprej si oglejmo dielektričnost monokristala, ki je spontano polariziran v smeri glavne osi *c*. Tu se pokaže, da zveza med vektorjema **D** in **E** ni navadna skalarna, ampak tenzorska. Vektor **D** nima več iste smeri kot vektor **E** in je zato dielektričnost tenzorska količina. Glavne osi tenzorja dielektričnosti se ujemajo z glavnimi osmi kristala. Dielektričnost je nadalje odvisna tudi od jakosti polja. Na sl. 6 je pokazan temperaturni potek dielektričnosti monokristala barijevega titanata v smeri osi *c* in *a*. Meritve so narejene pri šibkih poljih, kjer odvisnost od jakosti polja še ne pride do izraza. Dielektričnost ε_a



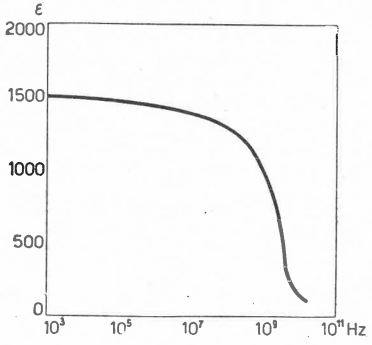
Sl. 6. Temperaturni potek dielektričnosti monokristala barijevega titanata v smeri osi *c* in *a*.

v smeri pravokotno na smer spontane polarizacije je mnogo večja kot dielektričnost ε_c v smeri spontane polarizacije. To se zdi na prvi pogled čudno, vendar se nam bo pozneje razjasnilo. ε_a je izredno velik. Pri 0° C doseže ε_a okoli 6000, nato pa z rastočo temperaturo pada proti vrednosti okoli 3500 pri 80° C; od tod naprej pa zopet zelo hitro narašča in doseže svoj maksimum pri Curiejevi temperaturi T_c, in sicer okoli 10 000. ε_c za smer osi *c* pa na vsem intervalu od 0° C pa do Curiejeve temperature raste in je pri tej temperaturi že enak ε_a. Nad Curiejevo temperaturo je kristal izotropen in je torej $\varepsilon_c = \varepsilon_a$. Tu dielektričnost s temperaturo pada po Curiejevem zakonu $\varepsilon = C/(T - T_c)$. Na sl. 6 ponovno zasledimo zakasnitev prehodov iz enega kristalnega sestava v drugi pri mejnih temperaturah 0° C in — 80° C, če kristal segrevamo oziroma ohlajamo.

V praksi imamo običajno opraviti s polikristalinično keramiko iz barijevega titanata (6). Taka keramika je na zunaj seveda električno izotropna, ker so vse orientacije posameznih spontano polariziranih kristalčkov in obsegov v snovi enako verjetne. Tudi pri polikristaliničnih vzorcih velja Curie-Weissov zakon nad Curiejevo temperaturo. Pod to temperaturo do približno 65° C se dielektričnost za šibka polja podreja podobnemu zakonu, samo da je tu kon-

stanta C polovico manjša. Pri močnejših poljih keramika iz barijevega titanata ni več električno izotropna. Z močnim poljem namreč dosežemo preorientacijo spontane polarizacije. Pri takem dielektriku, ki je v močnem zunanjem polju, je diferencialna dielektričnost $\frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{dD}{dE}$ za smer zunanjega električnega polja **E** znatno manjša kot za smer pravokotno na polje.

Pri močnejših poljih ne narašča vektor **D** z rastočim poljem **E** le zaradi povečanja polarizacije v smeri polja v posameznih pravilno orientiranih obsegih ter zmanjšanja polarizacije v nasprotno orientiranih, ampak tudi zaradi rasti pravilno polariziranih obsegov na račun nepravilno polariziranih. Meje med posameznimi obsegi se pod vplivom polja premikajo. Poleg tega nastopi tudi preorientacija polarizacije v posameznih obsegih, če zunanje polje premaga koercitivno poljsko jakost. To je čisto podobno kot pri feromagnetikih. Razlika je le v tem, da je tu prvi delež, namreč sprememba polarizacije v posameznih obsegih pod vplivom polja, zelo velik, česar pri feromagnetikih skoraj ni. Zaradi nezvezne preorientacije polarizacije v močnem električnem polju zveza med vektorjem **D** in poljsko jakostjo **E** ni enolična. Kot pri feromagnetikih



Sl. 7. Frekvenčna odvisnost dielektričnosti keramike iz barijevega titanata.

dobimo tudi tu histerezno krivuljo. V močnem izmeničnem polju se dielektrik zaradi tega greje. Tudi pri šibkem izmeničnem električnem polju nastopijo izgube, čeprav so na splošno majhne. Pravi vzrok za te izgube menda še ni znan. J. C. Slater je predlagal razlago, češ da so izgube posledica zvočnega nihanja kristalov v izmeničnem polju. Energija zvočnega valovanja, ki nastane zaradi krčenja in širjenja kristalov v električnem polju, se deloma oddaja v okolico, deloma pa pretvarja v toploto. Drugi zopet razlagajo, da so izgube posledica vztrajnosti pri gibanju meja med obsegi v izmeničnem polju. Značilno je, da nad Curiejevo temperaturo padejo v čistem materialu izgube skoraj na nič.

Dielektričnost barijevega titanata je pri šibkih poljih, kjer še ni histerezne zanke, skoraj neodvisna od frekvence do 10^8 Hz. Potek dielektričnosti keramike iz barijevega titanata v odvisnosti od frekvence vidimo na sl. 7.

Za prakso zelo važna lastnost barijevega titanata in sploh feroelektrikov je njihov zelo veliki piezoelektrični efekt. Žal je odvisen zelo močno od temperature.

Za zaključek naj omenim še optično dvolomnost feroelektričnih kristalov.

*

Podali smo glavne lastnosti feroelektrikov. Preostane nam fizikalna razlaga teh pojavov. Pojasniti moramo, zakaj pride pri barijevem titanatu ter drugih dielektrikih, ki imajo isto ali podobno kristalno strukturo, do spontane polarizacije. Perovskitska in ilmenitska kristalna struktura sta namreč prav ugodni za nastop spontane polarizacije. Na to kaže tudi dejstvo, da je dielektričnost cele vrste titanatov, ki niso feroelektrični, n. pr. magnezijevega, kalcijevega in stroncijevega titanata, zelo velika. Tudi dielektričnost rutila (TiO_2), katerega kristalna struktura sliči na perovskitsko, je velika (7). Nadalje bomo odgovorili na vprašanje, zakaj je pri teh feroelektrikih dielektričnost tako velika in v toliki meri odvisna od smeri v kristalu. Razpravljali bomo tudi o temperaturni odvisnosti dielektričnosti, itd.

Za razumevanje teh pojavov moramo najprej pogledati, kakšen vpliv ima električno polje na navaden dielektrik. Ker je pri titanatih vezava med posameznimi atomi v kristalu v glavnem ionskega tipa, vzemimo tudi za navadni dielektrik kak ionski kristal, n. pr. natrijev klorid NaCl. V polju se kristal polarizira in je njegova polarizacija P enaka vsoti vseh induciranih dipolnih momentov v enoti prostornine kristalne mreže. Če je N_i število ionov i-te vrste v enoti prostornine kristala in p_i njihov inducirani dipolni moment, je torej $P = \Sigma N_i p_i$. Tu seštevamo po vseh vrstah ionov. Inducirani dipolni moment p_i je sorazmeren lokalnemu polju na mestu i-tega iona. Pod lokalnim poljem razumemo tisto polje, ki ga dobimo na mestu nekega iona, če poleg zunanjega električnega polja upoštevamo še polje, ki ga povzroče na tem mestu inducirani dipolni momenti p_i vseh ostalih ionov. Če označimo lokalno polje za i-ti ion z E_i, je $p_i = \alpha_i E_i$. Sorazmerna konstanta α_i se imenuje polarizirnost iona tipa i. Lokalno polje izračunamo iz lege posameznih ionov v kristalni mreži ter medsebojnih razdalj, saj je polje dipola znano (8). Jasno je, da je lokalno polje dipolov (če ni kakih drugih komplikacij, kot bomo pozneje videli) sorazmerno polarizaciji P. Torej je $\mathbf{E}_i = E + \lambda_i P$, kjer je pri danem kristalu konstanta λ_i za vsako vrsto ionov drugačna. Ker je nadalje $P = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) E$, velja

$$P = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) E = \Sigma N_i \alpha_i E + \Sigma N_i \alpha_i \lambda_i P$$

ali

$$\varepsilon_0 (\varepsilon - 1) = \frac{\Sigma N_i \alpha_i}{1 - \Sigma N_i \alpha_i \lambda_i}$$

To je Clausius-Mossottijeva enačba. Faktor λ_i je pri izotropni razdelitvi induciranih dipolov okoli iona i in pri navadni kubični mreži enak $\frac{1}{3} \varepsilon_0$, α_i pa dobimo iz meritev.

Polarizirnost α_i sestoji iz dveh delov, iz elektronske polarizirnosti α_{el} in ionske polarizirnosti α_{ion}. Elektronska polarizirnost izvira iz deformacije elektronskega oblaka v ionu pod vplivom zunanjega polja, tako da se težišče pozitivnih in negativnih nabojev premakne. Ionska polarizirnost pa je posledica premika iona iz mirovne lege. V ionsko polarizirnost je vštet poleg navadnega dipolnega momenta, ki nastane zaradi premika iona kot celote, tudi delež k dipolnemu momentu, ki nastane zaradi deformacije elektronskega oblaka v ionu ob premiku iona iz mirovne lege. Če namreč v kristalu premaknemo neki ion iz mirovne lege, dobimo na tistem mestu dipolni moment, ki je enak produktu iz naboja iona in premika iz mirovne lege. V resnici se nastali dipolni moment nekoliko razlikuje od tako dobljene vrednosti, ker se ob premiku

deformira tudi elektronski oblak iona zaradi vpliva sosednjih ionov, ki ovirajo prost premik. Tako moramo k zgoraj izračunanemu dipolnemu momentu prišteti še dodatni dipolni moment, ki je posledica deformacije elektronskega oblaka.

Obe vrsti polarizirnosti je v kristalu lahko ločiti, ker je frekvenčna odvisnost za α_{el} druga kot za α_{ion}. Pri frekvencah okoli 10^{15} Hz, n. pr. pri elektromagnetnem valovanju vidne svetlobe, pride v poštev samo elektronska polarizirnost, ker ioni tako visokim frekvencam ne morejo slediti. Mejna frekvenca za ionsko polarizirnost je podana z maksimalno lastno frekvenco nihanja iona v kristalni mreži. Kot prvi približek lahko vzamemo, da je ion vezan na mirovno lego s silo F, ki je sorazmerna odmiku iz mirovne lege. Torej $F = -k \cdot x$. Najvišja frekvenca nihanja iona okoli mirovne lege je tedaj $\omega = (k/m)^{\frac{1}{2}}$, če je m masa iona. Najbolj enostaven primer nihanja kristalne mreže s to frekvenco je elastično valovanje, ki se širi v neko smer in ima valovno dolžino $2\,a$, kjer je a razdalja med dvema sosednjima atomoma kristalne mreže. Hitrosti elastičnega valovanja so nekaj tisoč metrov na sekundo. To da za frekvenco nihanja ionov kristalne mreže okoli 10^{13} Hz. To je tudi maksimalna frekvenca nihanja, ki jo ima ion. Z zasledovanjem frekvenčne odvisnosti dielektrične konstante torej lahko ločimo elektronsko in ionsko polarizirnost. Ti dve polarizirnosti sta istega reda velikosti in n. pr. pri natrijevem kloridu skoraj enaki. Ionska polarizirnost je precej natančno določena s konstanto k, ker je dipolni moment zaradi premika iona v polju za razdaljo x enak $e \cdot x = e^2 \cdot E/k$, ali $\alpha_{ion} = e^2/k$.

Iz Clausius Mossottijeve enačbe vidimo, da dobimo pri dielektriku veliko dielektričnost v primeru, če je vsota $\Sigma\, N_i \alpha_i\, \lambda_i$ blizu vrednosti 1. Pri natrijevem kloridu z dielektričnostjo 5,62 je ta vsota 0,606, torej še daleč od 1. Kadar bi dosegla ta vsota 1, bi dobili neskončno veliko dielektričnost, oziroma spontano polarizacijo dielektrika. V tem primeru govorimo o dielektrični katastrofi, ali $4\,\pi/3$ katastrofi, ker je v starem merskem sistemu ta vsota za navaden kubični kristal enaka 1, če je $\Sigma\, N_i\, \alpha_i = (4\,\pi/3)^{-1}$.

Do neskončne polarizacije jasno ne pride, ker inducirani dipolni moment pri zelo velikih notranjih poljih ni več linearno sorazmeren polju, tako da dobimo manjši dipolni moment, kot bi sklepali iz polarizirnosti pri šibkih poljih. Pri dielektrični katastrofi postane notranje polje, ki ga povzroče inducirani dipoli, tako močno, da že samo vzdržuje polarizacijo brez prisotnosti zunanjega polja. Kristal se spontano polarizira. Primer za to imamo ravno pri feroelektrikih.

Oglejmo si razmere pri barijevem titanatu! V osnovni celici kristalne mreže barijevega titanata je v centru kocke ($a \doteq 4$ Å) štirivalentni titanov ion Ti^{4+}. Na ogljiščih so dvovalentni barijevi ioni Ba^{2+}. V središčih stranskih ploskev pa leže dvovalentni kisikovi ioni O^{2-}. Dimenzije kristalne mreže so v glavnem določene z dotikom ionov Ba^{2+} in O^{2-} in ne z dotikom ionov T^{4+} ter O^{2-}, ker je štirikrat nabiti pozitivni titanov ion razmeroma majhen. Od tod sklepamo, da ima ion Ti^{4+} v perovskitski kristalni strukturi precej prostora za gibanje in bo zato njegova ionska polarizirnost velika.

Da poiščemo vzroke dielektrične katastrofe pri barijevem titanatu, moramo izračunati lokalna polja na mestih posameznih ionov kristalne mreže. Zunanje polje naj ima smer enega izmed robov osnovne celice kristalne mreže. Lokalno polje E (Ba) na mestu izbranega iona Ba^{2+} sestoji iz zunanjega polja E

ter polj, ki jih povzroče na tem mestu inducirani dipolni momenti ostalih ionov Ba^{2+}, Ti^{4+} in O^{2-}. Jasno je, da so ta dodatna polja sorazmerna velikosti induciranih dipolnih momentov posameznih vrst ionov in s tem njihovemu deležu k celotni polarizaciji P. Če označimo s P (Ba), P (Ti) ... delež posameznih vrst ionov k polarizaciji P, je torej

$$E\,(\mathrm{Ba}) = E + q_{11}\,P(\mathrm{Ba}) + q_{12}\,P\,(\mathrm{Ti}) + q_{13}\,P\,(\mathrm{O}') + q_{14}\,P\,(\mathrm{O}'')$$

in analogno

$$E\,(\mathrm{Ti}) = E + q_{21}\,P\,(\mathrm{Ba}) + q_{22}\,P\,(\mathrm{Ti}) + q_{23}\,P\,(\mathrm{O}') + q_{24}\,P\,(\mathrm{O}'')$$

$$E\,(\mathrm{O}') = E + q_{31}\,P\,(\mathrm{Ba}) + q_{32}\,P\,(\mathrm{Ti}) + q_{33}\,P\,(\mathrm{O}') + q_{34}\,P\,(\mathrm{O}'')$$

$$E(\mathrm{O}'') = E + q_{41}\,P\,(\mathrm{Ba}) + q_{42}\,P\,(\mathrm{Ti}) + q_{43}\,P\,(\mathrm{O}') + q_{44}\,P\,(\mathrm{O}'')$$

Ione O^{2-} smo ločili v dve vrsti, v ione O′ na premicah, ki gredo v smeri polja skozi ione Ti^{4+}, ostali ioni O^{2-} so pa O″. Sorazmernostne faktorje q_{ik} je možno razmeroma enostavno izračunati, ker so poznane razdalje in lega posameznih ionov v kristalni mreži. Osnova za račun je polje električnega dipola, pri tem pa še privzamemo, da se smeri induciranih dipolov ujemajo s smerjo zunanjega polja. Če tvorijo istoimenski ioni, ki obdajajo izbrani ion, popolno kubično mrežo, je za tako razporeditev faktor q_{ik} enak Lorentzovemu faktorju $\frac{1}{3}\,\varepsilon_0$. V našem primeru velja to za ione Ba^{+2} in Ti^{4+}. Za ione O^{2-} pa ne več. Z računom dobimo naslednje vrednosti za faktorje q_{ik}:

$$q_{11} = q_{22} = q_{33} = q_{12} = q_{21} = \tfrac{1}{3}\,\varepsilon_0$$

$$q_{13} = q_{31} = (1 - 2{,}069)\cdot\tfrac{1}{3}\,\varepsilon_0$$

$$q_{23} = q_{32} = (1 - 7{,}181)\cdot\tfrac{1}{3}\,\varepsilon_0$$

$$q_{24} = q_{42} = (1 - 3{,}591)\cdot\tfrac{1}{3}\,\varepsilon_0$$

$$q_{34} = q_{43} = q_{14} = q_{41} = (1 - 2{,}069)\cdot\tfrac{1}{3}\,\varepsilon_0$$

$$q_{44} = (1 - 1{,}035)\cdot\tfrac{1}{3}\,\varepsilon_0$$

Iz teh faktorjev vidimo, da je izredno močan sklop med ioni Ti^{4+} in O′ in je zato notranje polje na mestu teh ionov približno 8-krat močnejše, kot bi ga dobili z običajnim Lorentzovim faktorjem $\frac{1}{3}\,\varepsilon_0$. V vsoti $\Sigma\, N_i\, \alpha_i\, \lambda_i$ je faktor λ_i za ione Ti^{+4} in O′ mnogo večji kot za ostale ione. Ker je elektronska polarizirnost ionov O^{2-} velika, ionska polarizirnost ionov Ti^{4+} pa znatna, postane razumljivo, da bi mogla gornja vsota doseči in prekoračiti vrednost 1 ter bi nastopila dielektrična katastrofa. Gornji račun za notranje polje v kristalu barijevega titanata je napravil J. C. Slater (9). Na osnovi tako dobljenih vrednosti za faktorje λ_i je nato J. C. Slater izračunal iz enačbe $\Sigma\, N_i\, \alpha_i\, \lambda_i = 1$, kakšna bi morala biti ionska polarizirnost iona Ti^{+4} za nastop dielektrične katastrofe pri predpostavki, da imajo ostali ioni samo elektronsko polirizirnost, njihova ionska polarizirnost pa je 0. Ker je elektronska polarizirnost ionov O^{2-}, B^{+2}, Ti^{4+} znana, dobimo s takim računom za potrebno ionsko polarizirnost iona Ti^{4+} vrednost $1{,}06\cdot 10^{-40}\ \mathrm{Asm^2\,V^{-1}}$. Ta vrednost pade v običajni velikostni red polarizirnosti ionov. S tem je vzrok za nastop dielektrične katastrofe razjasnjen.

Resnična ionska polarizirnost iona Ti^{4+} je v resnici manjša, ker moramo računati s tem, da imajo tudi ostali ioni upoštevanja vredno ionsko polarizirnost.

Tu je potrebno poudariti tudi precejšnji vpliv ionov Ba^{2+} na notranje polje pri ionih O′ ter na nastop dielektrične katastrofe (10). Ioni Ba^{2+} znatno zmanjšujejo notranje polje pri ionih O′, kot je to razvidno iz vrednosti koeficienta q_{13}, in s tem tudi inducirani dipolni moment ionov O′. To seveda ovira nastop spontane polarizacije. Nadalje pa ioni Ba^{2+} v veliki meri odločujejo o ionski polarizirnosti ionov O′. Čim močnejša je vez med ioni Ba^{2+} in O′, tem manjša je gibljivost ionov O′ in s tem tudi njihova ionska polarizirnost. Vpliv te vezi na feroelektrične lastnosti lepo vidimo, če primerjamo različne titanate. Vez med ionom na mestu iona Ba^{2+} v perovskitski kristalni strukturi in ionom O′ pri različnih titanatih je podobna vézi pri ustreznem oksidu, n. pr. barijevem oksidu BaO, ker so medatomske razdalje skoraj iste v obeh primerih. Čim močnejša je ta vez, tem manj verjetno je, da je tisti titanat feroelektrik. Kot mero za moč vezi lahko vzamemo temperaturo tališča. Pri svinčevem oksidu PbO je tališče (888° C) najnižje, zato je svinčev titanat $PbTiO_3$ feroelektrik s precej visoko Curiejevo temperaturo (490° C). Barijev oksid BaO ima že višje tališče (1923° C) in je zato Curiejeva temperatura nižja (118 ° C). Pri stroncijevem oksidu je vez še močnejša (tališče 2430° C). Temperaturni potek dielektričnosti stroncijevega titanata $SrTiO_3$ je takšen, kot da bi imel Curiejevo temperaturo pod absolutno ničlo. Stroncijev titanat ni več feroelektrik. Nadaljnja titanata, kalcijev $CaTiO_3$ in magnezijev $MgTiO_3$, sta že zelo daleč od tega, da bi bila feroelektrika. (Temperaturi tališča kalcijevega oksida CaO in magnezijevega oksida MgO sta 2572° C, oziroma 2500°—2800° C.)

Velikost dielektričnosti pri feroelektrikih si najlaže razložimo s Clausius-Mossottijevo enačbo, čeprav tu ne drži več točno. Dielektričnost je tako velika, ker je vsota $\Sigma N_i \alpha_i \lambda_i$ blizu 1.

Kristal se zaradi notranje elektrostrikcije raztegne v smeri polarizacije, v pravokotni smeri se pa skrči. Zato je medsebojni vpliv od zunanjega polja induciranih dipolov v smeri polarizacije manjši kot v pravokotni smeri. Torej je dielektričnost v prvem primeru manjša kot v drugem. S tem smo razložili električno anizotropnost kristala. To je tudi vzrok za optično dvolomnost.

Temperaturni potek dielektričnosti nad Curiejevo temperaturo lahko izračunamo iz Clausius-Mossottijeve enačbe. Pri Curiejevi temperaturi je $\Sigma N_i \alpha_i \lambda_i = 1$. Če temperaturo povišujemo, se ta izraz manjša, ker se zaradi raztezanja kristalne mreže gostota ionov N_i manjša in ker se tudi ionska polarizirnost z raztezanjem kristala spreminja. Za razlago hitrega pojemanja dielektričnosti z rastočo temperaturo se zdi, da je treba privzeti, da ionska polarizirnost ionov Ti^{4+} in O^{2-} z rastočo medsebojno razdaljo pada. To si razlagamo na ta način, da vezi v kristalu z raztezanjem kristala izgubljajo ionski značaj in postajajo vedno bolj kovalentne. Elektroni, ki sodelujejo pri kovalentni vezavi, pripadajo v časovnem povprečju enako obema atomoma vezi in s tem zmanjšujejo ionski naboj ionov kristalne mreže. S tem se pa seveda zmanjšuje njihova ionska polarizirnost. Ob prvem približku smemo pisati, da je nad Curiejevo temperaturo $\Sigma N_i \alpha_i \lambda_i = 1 - k (T - T_c)$, kjer je k konstanta. Če to vstavimo v Clausius-Mossottijevo enačbo, vidimo, da je v okolici Curiejeve temperature T_c dielektričnost podana z izrazom $\varepsilon - 1 \doteq \varepsilon = C/(T - T_c)$. Konstanta C je reda velikosti 10^5. S podobno izpeljavo dobimo analogen zakon za temperaturni potek dielektričnosti pod temperaturo T_c. Tam dobimo $\varepsilon = C/2\,(T_c - T)$. Od tod vidimo, da imajo feroelektriki pod Curiejevo temperaturo pozitiven temperaturni koeficient, nad to temperaturo pa negativen.

Obratni piezoelektrični efekt in s tem tudi piezoelektrični efekt si razlagamo pri feroelektrikih kot spremembo notranje elektrostrikcije v zunanjem električnem polju. Elektrostrikcija je, kot vemo, sorazmerna kvadratu polja, v našem primeru notranjega polja ali, kar je ekvivalentno, kvadratu polarizacije P. Razteg robu c v osnovni celici kristalne mreže je torej $\Delta c = KP^2$, kjer je K sorazmernostna konstanta. Ta razteg je pri barijevem titanatu približno 1/100 dolžine. Za toliko je dolžina robu c daljša od dolžine robu a. V zunanjem polju se kristal še bolj raztegne. Dodatni razteg je $d(\Delta c) = 2\,KPdP$, kjer je povečanje polarizacije $dP = \varepsilon_0\,\varepsilon\,E$. Torej $d(\Delta c) = 2\,KP\,\varepsilon\,\varepsilon_0\,E = konst.\,E$. Ta efekt je, kot vidimo, premo sorazmeren poljski jakosti kot pri običajnem piezoelektričnem efektu. Sorazmernostna konstanta je precej večja kot pri kremenjaku. Konstanta je tako velika zaradi velike spontane polarizacije P in dielektričnosti ε. Vzrok temperaturni odvisnosti tega piezoelektričnega efekta najdemo v temperaturni odvisnosti ε in P.

Literatura:

1. P. W. Forsberg, Jr.: Domain Structures and Phase Transitions in Barium Titanate. Phys. Rev. **76**, 1187 (1949).

2. B. Matthias and A. von Hippel: Domain Structure and Dielectric Response of Barium Titanate Single Crystals. Phys. Rev. **73**, 1378 (1948).

3. W. J. Mertz: The Electric and Optical Behavior of $BaTiO_3$ Single-Domain Crystals. Phys. Rev. **76**, 1221 (1949).

4. P. W. Anderson: Theory of ferroelectric behavior of barium titanate. Ceramic Age **57**, 29 (1951).

5. H. D. Megaw: Temperature changes in crystal structure of barium titanium oxide. Proc. Roy. Soc. (London) **A 198**, 261 (1947).

6. A. Moljk: Ultrazvočni izvori iz feroelektrične keramike. Obzornik za matematiko in fiziko I, 61 (1951).

7. S. Dular: Titanati zemeljskih alkalij kot dielektriki (I). Elektrotehniški vestnik, dec. 1954, 192.

8. J. A. Straton: Electromagnetic Theory, McGraw-Hill Company, Inc., New York, 1941.

9. J. C. Slater: The Lorentz Correction in Barium Titanate. Phys. Rev. **78**, 748 (1950).

10. A. von Hippel: Piezoelectricity, Ferroelectricity, and Crystal Structure. Z. Physik **133**, 158 (1952).

Splošno:

11. A. von Hippel: Dielectrics and Waves, Jon Wiley & Sons, Inc., New York, 1954.

12. C. Kittel: Introduction to Solid State Physics, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1953.

POPRAVEK

Pri odgovoru na vprašanje o centrifugalni verižnici v letošnji prvi številki sta v tekstu pod sliko 2 (str. 46) zamenjani obe krivulji. V resnici je črtkana krivulja sinusna, polna krivulja za predstavlja funkcijo sinus amplitudinis.

NOVICE

OMEGATRON

Ione z različnim specifičnim nabojem (e/m) lahko ločimo tako, da pošljemo ionski curek skozi primerno kombinacijo stalnega električnega in magnetnega polja. Po tem načinu delujejo *Mattauch-Herzogov masni spektrograf, Nierov masni spektrometer, trohotron* in podobne naprave. Drugi način pa je, da z visokofrekvenčnimi električnimi polji sortiramo monoenergijske ione po njihovi hitrosti (Bennettov *radiofrekvenčni masni spektrometer*).

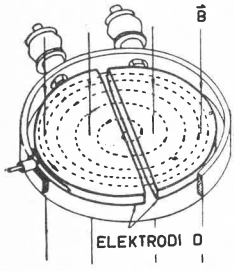
S tema dvema načinoma pa nikakor niso še izčrpane vse možnosti. Tudi ciklotron se da uporabiti kot masni spektrometer. Ima namreč to lastnost, da prižene do tarče samo tiste ione, katerih specifični naboj je primeren za dano magnetno poljsko gostoto in dano pospeševalno frekvenco. Leta 1939 sta Alvarez in Cornog s 60 palčnim kalifornijskim ciklotronom odkrila lahki izotop helija (He^3) in določila, da je njegova izotopska koncentracija v podzemeljskem heliju manjša kot 10^{-5} %. Za masno spektrometrijo je seveda čisto nepotrebno, da bi delec s ciklotronom pospeševali do visokih energij. Zato so posebej za ta namen zgradili nekakšen miniaturni in nekoliko modificirani ciklotron, tako imenovani *omegatron* (1949, Hipple, Sommer, Thomas). Največji premer poti je tu samo 2 cm.

Delovanje ciklotrona in omegatrona je zasnovano na *magnetnem resonančnem principu*. Mislimo si, da se nabiti delec z maso m in nabojem e giblje v homogenem magnetnem polju s hitrostjo v pravokotno na magnetno polje. Pri tem opiše delec krožnico s polmerom r. Newtonov zakon pove za ta primer: $Bev = mv^2/r$. Sledi: $\omega = v/r = (e/m)B$. Če to še delimo z 2π, dobimo tako imenovano *ciklotronsko frekvenco*, ki je določena z magnetno poljsko gostoto B in specifičnim nabojem delca. Ta frekvenca je konstantna in neodvisna od hitrosti delca, torej od radija poti, seveda pri pogoju, da so poljska gostota, naboj in masa konstantni. Iz navedene enačbe še sledi, da je radij krožnice sorazmeren hitrosti. Končno sledi za masno spektrometrijo najvažnejši zaključek: Razmerje e/m merimo lahko tako, da izmerimo frekvenco kroženja v znanem magnetnem polju.

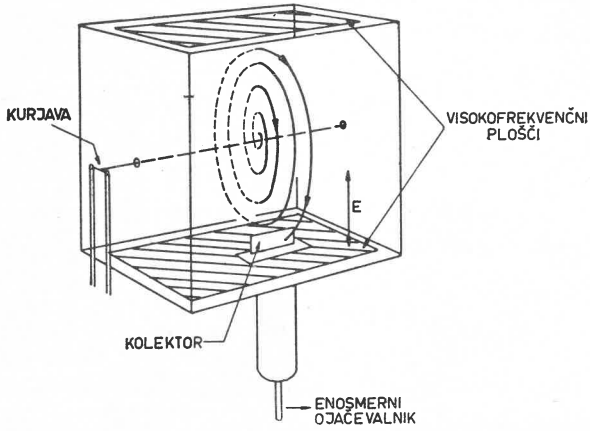
Pri ciklotronu sta med poloma elektromagneta v vakuumski komori nameščeni dve votli elektrodi z obliko črke D, kot kaže slika 1. Ti dve elektrodi sestavljata kondenzator resonančnega kroga močnega visokofrekvenčnega generatorja. Ionski izvor, ki daje protone, devterone ali druge delce, je nameščen na sredi med obema elektrodama. Protone, ki pridejo iz tega izvora ob trenutku, ko je električno polje obrnjeno v eno smer, potegne polje v tisto stran. Pri tem prejmejo energijo eU, če je U napetost, ki jo ioni prepotujejo. Znotraj elektrod ni električnega polja; zato gre delec dalje z nespremenjeno hitrostjo po polkrogu. Če je frekvenca generatorja enaka ciklotronski frekvenci delca, se je v času $T/2$ polje med elektrodama obrnilo in je delec potem ponovno pospešen. Dalje sledijo prehodi delca preko medelektrodnega prostora vedno pri taki smeri električnega polja, da delec venomer prejema energijo in se potem giblje znotraj elektrod po polkrogih z vedno večjim radijem vse dotlej, dokler jih posebna elektroda na robu vakuumske komore ne izvleče iz magnetnega polja.

Omegatron je enostavnejši. Votli elektrodi ciklotrona zamenjata dve paralelni plošči, na kateri je pritisnjena visokofrekvenčna napetost. Delec je sedaj ves čas v homogenem električnem in v homogenem magnetnem polju.

Poti delcev, katerih ciklotronska frekvenca se ujema s frekvenco električnega polja, so Arhimedove spirale. Delec tedaj ves čas prejema energijo od električnega polja. V tem je bistveni razloček med ciklotronom in omegatronom. V ciklotronu se ne pospešujejo samo delci, katerih masa ustreza zgoraj navedenemu pogoju, ampak tudi tako imenovane *višje harmonične mase,* to je delci s trikratno, petkratno, sedemkratno ... maso. Ciklotronska frekvenca teh delcev je enaka tretjini, petini, sedmini ... frekvence pospeševalne napetosti. Delec preživi 3, 5 ali 7 ... polovičnih nihajnih časov v votlini, kjer ni električnega polja. To mu nič ne škoduje, ker pride v polje vedno spet o pravem času, ko je polje tako obrnjeno, da ga pospeši. Pri omegatronu je drugače. Omegatron ne more pospeševati višjih harmoničnih mas, ker je delec v njem ves čas v homogenem električnem polju, ki niha sinusno.



Sl. 1. Poti delcev v ciklotronu.



Sl. 2. Poenostavljena slika omegatrona. Magnetno polje ima smer od desne proti levi. Slika je vzeta iz članka (3) (J. Appl. Phys.).

Slika 2 kaže princip omegatrona. Levo je elektronska brizgalka (kakor pri katodni cevi), ki vbrizgava elektrone v smeri magnetnega polja B. Elektroni s trki ionizirajo plin, ki je v omegatronu. Izmenično električno polje v omegatronu je homogenizirano s serijo obrobnih elektrod. Na spodnji plošči je odprtina za sprejemno elektrodo, tako imenovani *kolektor.* Tok ionov, ki prihajajo na kolektor, merimo z enosmernim ojačevalnikom.

Gibanje iona v omegatronu je določeno z naslednjima enačbama:

$$m\ddot{x} = eE \cos \omega t + eB\dot{y} \text{ in } m\ddot{y} = -eB\dot{x},$$

pri čemer ima električna poljska jakost ($E \cos \omega t$) smer osi x, magnetna poljska gostota B pa smer osi z. Zanima nas resonančni primer, ko se frekvenca generatorja ujema s ciklotronsko frekvenco, tako da je $\omega = (e/m)B$. Z vpeljavo kompleksne spremenljivke $z = x + iy$ ter količine $a = (e/m)E$ se enačbi združita v eno samo

$$\ddot{u} + i\,\omega\,\dot{u} = a \cos \omega t.$$

Splošno rešitev te enačbe ni težko dobiti:*

$$u = A + Be^{-i\omega t} + i\,(a/2\,\omega)\,te^{-i\omega t} - (a/4\,\omega^2)\,e^{+i\omega t}.$$

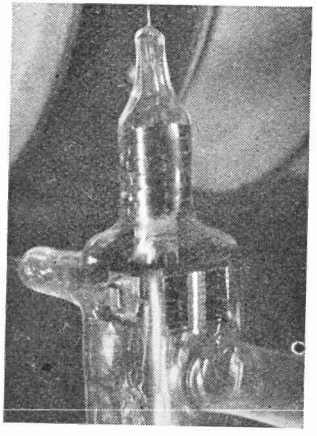
Konstanti A in B določimo iz začetnih pogojev.

* Glej I. Vidav: Višja matematika II, str. 345, zgled 2.

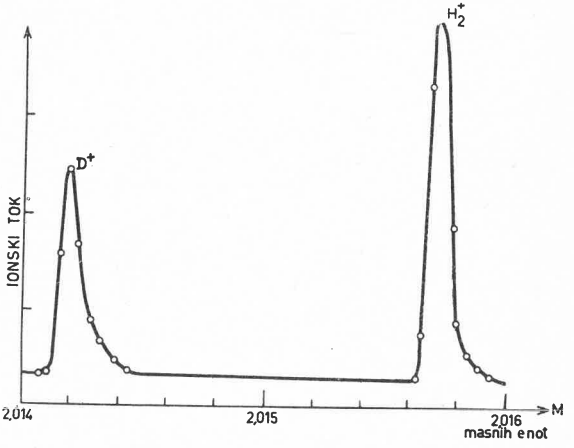
Za ion, ki je v času $t = 0$ (torej v času največje poljske jakosti) v izhodišču ($u_0 = 0$) in katerega začetna hitrost je nič ($\dot{u}_0 = 0$), dobimo na primer:

$$u = (\mathrm{i}\, a/2\, \omega)\, t e^{-\mathrm{i}\omega t} - (\mathrm{i}\, a/2\, \omega^2) \sin \omega\, t.$$

Prvi člen opisuje neko »kroženje«, pri katerem raste radij sorazmerno s časom (torej tudi sorazmerno s številom obhodov). To pa je v resnici gibanje po Arhimedovi spirali. Drugi člen opisuje dodatno sinusno nihanje v smeri električnega polja. Ker amplituda tega nihanja ne raste, ga že po nekaj obhodih lahko zanemarimo v primeru s prvim gibanjem. Kadar pride ion iz izhodišča v nekem drugem trenutku in če njegova začetna hitrost ni enaka nič, je rezultat



Sl. 2a. Omegatron, zgrajen na Inštitutu Jožef Stefan v Ljubljani.



Sl. 3. Dublet H_2—D, posnet z omegatronom. Pri tem dubletu je $\Delta m = (15{,}45 \pm 0{,}08) \cdot 10^{-4}$ masnih enot. Isti dublet sta merila z masnim spektrometrom z dvojno fokusacijo Roberts in Nier in dobila $\Delta m = (15{,}49 \pm 0{,}06) \cdot 10^{-4}$ M. E. Slika je vzeta iz članka (1) (Phys. Rev.).

nekoliko bolj zapleten. Zaradi začetne hitrosti pride zraven še en člen, ki bi sam zase predstavljal kroženje po stalnem krogu. Radij tega kroga je majhen, če začetna hitrost ni prevelika.

Kadar se frekvenca, s katero niha električna poljska jakost, ne ujema natančno s ciklotronsko frekvenco iona, gibanje ni več takšno kot v resonanci. Nekaj časa gre ion približno po spirali, potem pa pade iz resonance. Energija in z njo radij poti zato ne moreta zrasti preko neke meje. Če je ta meja premajhna, ion ne pride do kolektorja in ga zato ne zaznamo. To se da vse izračunati in tako končno ugotovimo, kako ostra je resonanca in od česa je ostrina resonance odvisna.

Ostrino resonance opišemo z *relativno širino resonančne konice*, to je s kvocientom $2\, \Delta\, \omega/\omega$. Diferenca $\Delta\, \omega/2\, \pi$ pove, za koliko najmanj se mora frekvenca električnega polja razlikovati od ciklotronske frekvence ionov, da ravno noben ion ne pride več do kolektorja. Recipročna relativna ostrina resonance, to je kvocient $R = \omega/2\, \Delta\, \omega$ predstavlja *ločljivost* omegatrona. Račun pokaže, da je

$$R = r\, \omega^2/2\, a = reB^2/2\, Em.$$

Pri tem je r razdalja kolektorja od ionskega izvira. Če je t čas, ki ga potrebuje ion do kolektorja, in je N celotno število obhodov, velja $\omega t = 2 N \pi$. Iz izraza za Arhimedovo spiralo dobimo, da je $r = | u (t) | = a t/2 \omega$. Potem pa sledi:

$$N = \omega^2 r/a \pi = 2 R/\pi.$$

Povprečna dolžina posameznega obhoda je $\frac{1}{2} (0 + 2 \pi r) = \pi r$. Celotna dolžina poti resonančnega iona je torej

$$L = N \pi r = 2 Rr.$$

Zadnji podatki povedo marsikaj, kar je važno za konstrukcijo omegatrona kot tudi za merjenje z njim. Ločljivost raste s kvadratom magnetne poljske gostote, je obratno sorazmerna masi iona in električni poljski jakosti. To pomeni, da je za ločljivost ugodnejše, če je pot ionov daljša. Zato pa so potem zahteve po dobrem vakuumu strožje.

Masne spektre lahko snemamo na dva načina: s spreminjanjem frekvence električnega polja ali pa s spreminjanjem magnetne poljske gostote. Navadno se uporablja zadnji način. Pri dosedanjih izvedbah običajno uporabljajo magnetno poljsko gostoto 0,5 Vs/m^2 ter efektivno visokofrekvenčno napetost 0,05 V. Vakuum je okrog $5 \cdot 10^{-7}$ mm Hg. Dosežena je bila ločljivost 30 000, kar se lepo vidi iz slike dubleta H_2 — D (sl. 3). Razen za natančno merjenje mas se v zadnjem času uporablja omegatron tudi za merjenje tesnosti v tehniki visokega vakuuma, v kemiji pa ga rabijo za analizo zmesi ogljikovodikov.

Janez Dekleva

Literatura:

1. H. Sommer, H. A. Thomas and J. A. Hipple: The Measurement of e/m by Cyclotron Resonance. Phys. Rev. **82**, 697 (1951).
2. C. E. Berry: Ion Trajectories in the Omegatron, J. Appl. Phys. **25**, 28 (1954).
3. D. Alpert and R. S. Buritz: Ultra High Vacuum, J. Appl. Phys. **25**, 202 (1954).
4. A. G. Edwards: Some Properties of a Simple Omegatron Type Mass Spectrometer, J. Appl. Phys. **6**, 44 (1955).

MAGNETNI OHLAJEVALNI STROJ

Za vzdrževanje nizkih temperatur uporabljamo kopeli tekočega helija, kjer s hitrim črpanjem helijevih par pridemo približno do 1^0 K. Dosti niže na ta način ni mogoče priti, ker postane parni tlak helija pri nižjih temperaturah tako majhen, da je izhlapevanje prepočasno.

Zato so prišli na misel, da bi za vzdrževanje zelo nizkih temperatur uporabili adiabatno razmagnetenje (1). Z enkratnim adiabatnim razmagnetenjem lahko snov močno ohladimo. Ne moremo pa dosežene nizke temperature stalno vzdrževati, ker se zaradi toplotnega vpliva okolice snov zopet segreje. Za stalno vzdrževanje temperatur dosti pod 1^0 K potrebujemo ohlajevalni stroj, ki ponavlja neko magnetno krožno spremembo (2). Shemo takega stroja kaže slika 1. Idealizirana krožna sprememba tega stroja je analogna kot pri Carnotovem stroju in obsega naslednje štiri faze (sl. 2):

a) Paramagnetno snov izotermno namagnetimo po poti 1—2. Oddano toploto odvajamo preko odprtega stikala S_1 v rezervoar T_1. Stikalo S_2 je tedaj zaprto.

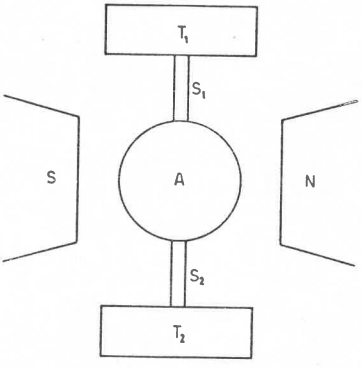
b) Stikalo S_1 zapremo in paramagnetno snov adiabatno razmagnetimo po poti 2—3, tako da se ohladi od T_1 na T_2.

c) Stikalo S_2 odpremo in paramagnetno snov izotermno razmagnetimo po poti 3—4. Pri tem toplotni rezervoar T_2 oddaja toploto paramagnetni snovi.

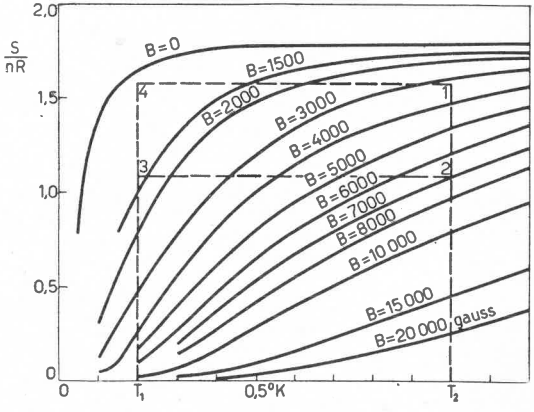
d) Stikalo S_2 zapremo in snov adiabatno namagnetimo po poti 4—1, pri čemer se paramagnetna snov segreje od T_2 na T_1.

Najtežji tehnični problem pri realizaciji takšnega stroja so bila primerna toplotna stikala. Šele ko so jih iznašli, so magnetni ohlajevalni stroj res naredili. Za toplotna stikala so uporabili supraprevodnike. Ti imajo lastnost, da postanejo v dovolj močnem magnetnem polju spet normalno prevodni, s čimer se njihova toplotna prevodnost zelo zveča (3). Razmerje toplotnih prevodnosti v supraprevodnem in normalnem stanju je na primer pri tantalu nekaj manj kot 1 : 60 pri 0,55° K, pri kositru pri 0,65° K pa približno 1 : 40 (4).

Oglejmo si te vrste toplotni stroj, ki ga že izdeluje tvrdka Arthur D. Little, Inc. (30 Memorial Drive, Cambridge 42, Mass.)! Idejo za ta ohlajevalni stroj s supraprevodniki kot toplotnimi stikali sta prva dala Dr. J. G. Daunt in Dr. C. V. Heer na Državni univerzi v Columbusu, Ohio (4). Glej sliko 3!



Sl. 1. Shema magnetnega ohlajevalnega stroja. T_1 je toplotni rezervoar z višjo temperaturo, T_2 pa toplotni rezervoar z nižjo temperaturo. S_1 in S_2 sta toplotni stikali, A paramagnetna snov, S in N pa pola magneta.



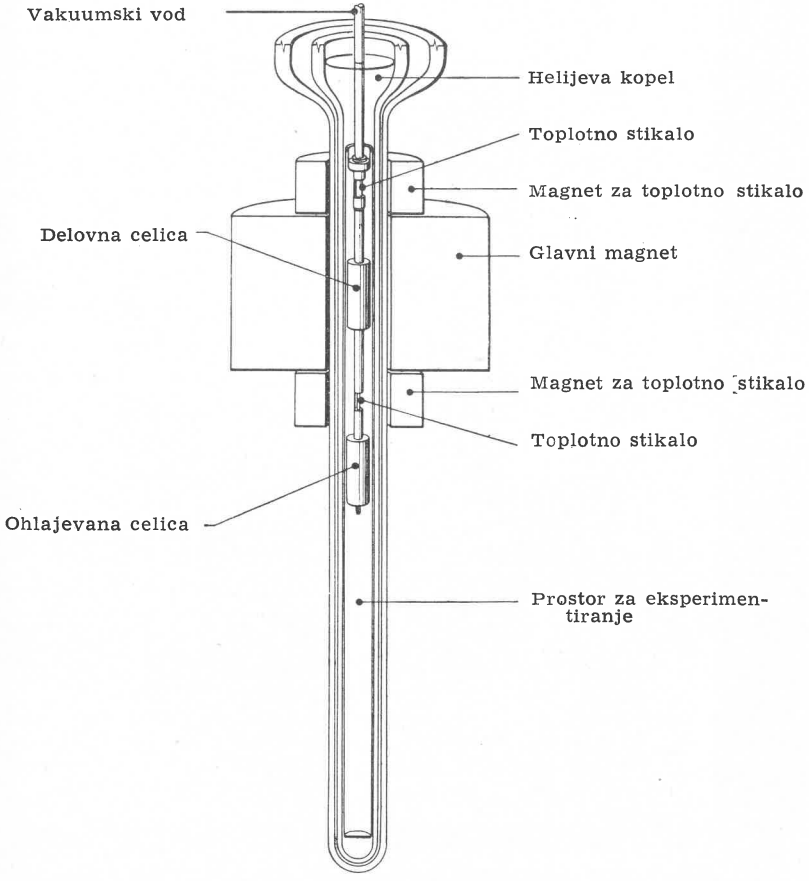
Sl. 2. Diagram idealizirane krožne spremembe magnetnega ohlajevalnega stroja. Krivulje kažejo odvisnost entropije feriamonijevega sulfata od temperature in magnetne poljske gostote. Vzete so iz članka (2), fig. 2.

Delovna celica vsebuje 23 gramov zdrobljenega feriamonijevega sulfata $NH_4Fe(SO_4)_2 \cdot 12\,H_2O$, ohlajevana celica po 23 g manganovega amonijevega sulfata $(NH_4)_2Mn(SO_4)_2 \cdot 6H_2O$. Obe celici sta enaki (21 mm $\phi \times$ 65 mm). Obe paramagnetni soli sta vtisnjeni v medeninasta modela z bakrenimi strženi zaradi boljšega toplotnega stika.

Toplotna stikala so iz svinčenih trakov, ki so dolgi približno 16 mm in so prilotani na bakrene konce celic. Presek stikala S_1 je približno 23 mm², stikala S_2 pa 2,3 mm².

Elektromagneti za magnetenje delovne celice in za upravljanje toplotnih stikal so trije z železom obdani solenoidi. Glavni magnet je hlajen z oljem in lahko ustvari v osi magnetno polje 9000 gauss. Stranski magneti so manjši, z maksimalnim poljem približno 1000 gauss. Vklapljanje in izklapljanje magnetov in s tem delovanje stroja je avtomatično.

Temperatura kopeli tekočega helija je 1,15° K. Temperature v stroju merijo z grafitnimi uporovnimi termometri. Pri vsakem krožnem procesu pa izmerijo temperaturo hlajenega toplotnega rezervoarja še z merjenjem magnetne susceptibilnosti in s tem umerjajo uporovni termometer hlajenega toplotnega rezervoarja. Slika 4 kaže kompletni stroj.

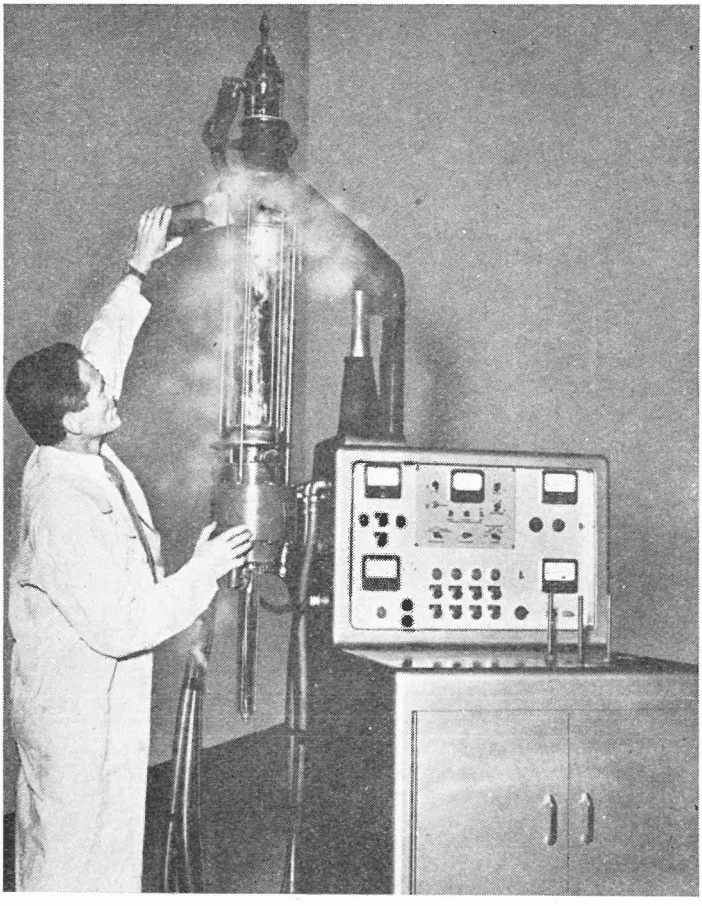


Sl. 3. Načrt ohlajevalnega stroja brez pomožnih naprav. Delovna celica s paramagnetno soljo in celica, ki jo ohlajamo (ta ustreza toplotnemu rezervoarju T_2 na sl. 1), visita v evakuirani Dewarovi posodi. Ta je potopljena v kopel tekočega helija, ki obenem služi kot drugi toplotni rezervoar. Zaradi boljše toplotne izolacije je več Dewarovih posod ena v drugi.

Dejanska krožna sprememba tega stroja se razlikuje od idealizirane. Vzrok temu je predvsem nezadostna toplotna prevodnost sestavnih delov, ki služijo za prevajanje toplotnih tokov, za prevajanje toplote skozi zaprto stikalo, v kovinskih delih inducirani (»vrtinčasti«) tokovi ter nepopolna toplotna izolacija celotne naprave.

Toplotni tok, ki ga črpa ohlajevalni stroj iz hlajene celice, se izračuna iz znane toplotne kapacitete hlajenega toplotnega rezervoarja in iz merjene hitrosti ohlajevanja (dT/dt). Kot termometer služi manganov amonijev sulfat, pri katerem je odvisnost magnetne susceptibilnosti od temperature dobro znana.

Pri $T = 0{,}5^0$ K črpa stroj toplotni tok $4{,}0 \cdot 10^{-5}$ W, pri $0{,}25^0$ K pa $0{,}83 \cdot 10^{-5}$ W. Pri $0{,}20^0$ K pade črpani toplotni tok na nič. Nižje temperature torej stroj ne more doseči.



Sl. 4. Kompletni magnetni ohlajevalni stroj tvrdke A. D. Little.

V primeri s črpanim toplotnim tokom je moč, ki jo troši stroj, ogromna. Že sam pogon glavnega magneta zahteva okrog 10 kW.

Sergej Pahor

Literatura:

(1) B. Povh: Temperatura $0{,}0014^0$ K. Obz. mat. fiz. **3**, 169 (1953).

(2) C. V. Heer, C. B. Barnnet and J. G. Daunt: The Design and Operation of a Magnetic Refrigerator for Maintaining Temperatures below 1^0 K. Rev. Sci. Instr. **25**, 1088, 1954.

(3) F. Cirkler — F. Ahlin: Supraprevodnost. Obz. mat. fiz. **3**, 155 (1953).

(4) C. V. Heer and J. G. Daunt: Heat Flow in Metals below 1^0 K and a New Method for Magnetic Cooling. Phys. Rev. **76**, 854, 985 (1949).

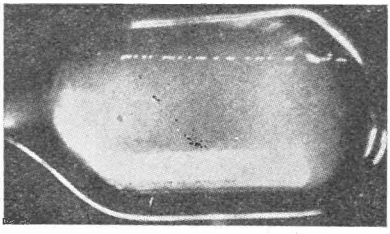
J. G. Daunt, C. V. Heer, H. O. McMahon, J. Reitzel and I. Simon: A Continuous Magnetic Refrigerator for Temperatures Below 1^0 K. Conférence de physique des basses températures. Paris, 1955.

Uredništvo Obzornika se najlepše zahvaljuje tvrdki Arthur D. Little, ki nam je preskrbela slike in podatke o stroju ter dovolila objavo.

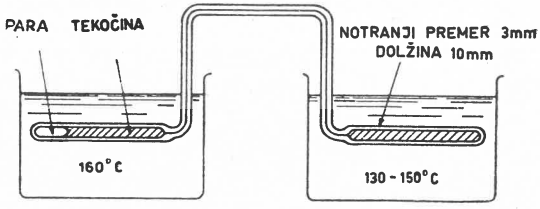
CELICA S PREGRETO TEKOČINO NAMESTO WILSONOVE CELICE

V Wilsonovi celici je nasičeno vlažen zrak. Ko s hitrim odmikom dna celice povečamo volumen, se zrak ohladi, tako da postane prenasičeno vlažen. Če v zraku ni prahu in če prenasičenost ni ne premajhna, ne prevelika, se kondenzira vodna para samo na stenah in na ionih v zraku. Ako v času ekspanzije preleti prostor v celici električno nabit delec, dobimo na njegovi poti veliko ionov. Na ionih nastale kapljice vode potem kažejo sled delca.

Prenasičeno vlažen zrak je metastabilen. Ion pospeši prehod v stabilno stanje (nasičeno vlažen zrak + kapljica). Lahko se vprašamo, če so tudi druga metastabilna stanja za isti namen uporabna — na primer pregreta tekočina (1). To vprašanje je vodilo do iznajdbe novega instrumenta, ki se uporablja za registriranje delcev visokih energij in ki mu Anglosaksonci pravijo *bubble chamber*, ali po naše *celica na mehurčke*. To je celica s pregreto tekočino, v kateri po-



Sl. 1. Fotografski posnetek celice ob prehodu delca. Ta in naslednja slika sta vzeti iz članka D. A. Glaserja v Nuovo Cimento (2).



Sl. 2. Eter v desni celici postane pregret, kadar dovolj zmanjšamo pritisk (z znižanjem temperature v levi celici).

kažejo sled delca mehurčki pare, ki nastanejo na precej podoben način kakor kapljice v Wilsonovi celici. D. A. Glaser (2) pravi, da se lastnosti celice na mehurčke deloma ujemajo z lastnostmi Wilsonove celice, deloma pa z lastnostmi jedrske emulzije. Bistvena razlika med to in Wilsonovo celico je ta, da gostota tekočine približno tisočkrat presega gostoto zraka; zato je doseg delcev v tekočini mnogo manjši. Celica s tekočino je uporabna za opazovanje hitrih delcev, zlasti mezonov. Ti delci imajo v zraku prevelik doseg in zrak premalo ionizirajo, tako da so sledi v Wilsonovi celici slabo vidne in predolge.

Pri prvih poskusih s celico na mehurčke so uporabili dietilni eter, ki ima to prednost, da ga lahko hitro dobimo v čistem stanju in da ne vsebuje težkih elementov. Eter segrejemo do 150° C pri pritisku 20 atm. Kadar hočemo registrirati delec, zmanjšamo pritisk na 0,6 atm, tako da je potem eter pregret. V tem stanju se v etru tvorijo mehurčki, najraje ob ionih.

Po Frenkeljevi (5) in Loebovi teoriji se ioni pridružujejo jedrom izparevanja in povzročajo zaradi spremembe površinske napetosti rast mehurčkov. Premeri mehurčkov so velikostnega reda nekaj desetink milimetra, najmanjša gostota mehurčkov na sledi delca pa je 25 na centimeter (sl. 1).

Poleg etra so uporabili tudi nekatere druge organske tekočine. V novejšem času so delali poskuse tudi s pregretim tekočim vodikom (6—9) in dušikom. V osnovi je celica na mehurčke cilindrična buča iz stekla pyrex z zelo debelimi stenami. Buča je dolga 3 do 10 cm, z notranjim premerom 1 cm. Po

kapilari je zvezana z regulatorjem za pritisk (sl. 2). Buča je v termostatu s takšnim mineralnim oljem, ki je prozorno in ima majhen parni pritisk. Pritisk v buči spreminjamo s spremembo temperature v regulatorju pritiska ali s pomikom bata.

Nikolaj Bezić

Literatura:

1. J. Strnad: Pregreta voda. Obz. mat. fiz. **4**, 121 (1956).
2. D. A. Glaser: Progress Report on the Development of Bubble Chambers. Nuovo Cimento, Supl. 11 (1954), str. 360.
3. D. A. Glaser: Some Effects of Ionizing Radiation on the Formation of Bubbles in Liquids. Phys. Rev. **87**, 665 (1952).
4. D. A. Glaser: Bubble Chamber Tracks of Penetrating Cosmic-Ray Particles. Phys. Rev. **91**, 762 (1953).
5. Ja. I. Frenkelj: Kinetičeskaja teorija židkostej (Moskva 1945), str. 336, 370.
6. R. Hildebrand, D. Nagle: Operation of a Glaser Bubble Chamber with Liquid Hydrogen. Phys. Rev. **92**, 517 (1953) .
7. G. Wood: Bubble Tracks in a Hydrogen-Filled Glaser Chamber. Phys. Rev. **94**, 731 (1954).
8. D. Paramentier, A. J. Schwemin, L. W. Alvarez, F. S. Crawford, Jr., and. M. L. Stevenson: Four-Inch Diameter Liquid Hydrogen Bubble Chamber. Phys. Rev. **98**, 284 (1955).
9. D. Paramentier, Jr. and A. J. Schwemin: Liquid Hydrogen Bubble Chambers. Rev. Sci. Instr. **26**, 954 (1955).

OBČUTLJIVOST KOŽE ZA VIBRACIJE

Z merjenjem je Toshihiko Ohno iz instituta Kobayasi v Tokiu pokazal, da lahko človek s svojo kožo občuti in razloči nihanje presenetljivo majhnih amplitud. Uporabil je vibrator na gibljivo tuljavo s kristalom $BaTiO_3$; frekvence so obsegale območje od 50 do 1000 Hz. Velikost amplitud je ugotavljal s tem, da je meril piezoelektrično napetost kristala. Vibrator se je dotikal kože na površini 0,7 cm^2.

Najmanjša amplituda, ki jo koža še zaznava, je 10^{-2} mm pri 60 Hz, 10^{-4} mm pri 400 Hz in 10^{-3} mm pri 1000 Hz. Te vrednosti variirajo pri različnih normalnih osebah za približno $\pm$ 5 db* (to je za faktor 0,3 do 3). Najmanjša zaznavna amplituda pospeška ($a = \omega^2 A$) je pri frekvencah do 300 Hz skoraj konstantna in sicer enaka 60 cm/s^2. Pri višjih frekvencah pa ta vrednost narašča za približno 20 db (za faktor 10) na oktavo.

Pri merjenju sposobnosti kože za razlikovanje amplitud so ugotovili, da se morata amplitudi razlikovati najmanj za 2 db (to je približno za 20 %), da ju more koža še ločiti. Ta meritev je bila izvršena s pomočjo vibratorja, ki je lahko izmenično proizvajal dve različni amplitudi. Sposobnost kože za razlikovanje frekvenc pa so merili z vibratorjem, ki je izmenično proizvajal dve različni frekvenci. Ugotovili so, da lahko koža loči frekvenci, če se ne razlikujeta manj kot za 7 %. Med eksperimentom so dojemanje z ušesi onemogočili s hrupom.

Marko Žlender

Toshihiko Ohno, The vibratory sensation of skin, Bulletin of the Kobayasi Institute of Physical Research, vol. 5, No. 2, 1955, stran 115.

---

* Decibel (db) je enota logaritemske skale za zvočno energijo ali sploh za energijo nihanja. Razlika za 1 db ustreza faktorju $10^{0,1}$ pri energiji, torej faktorju $10^{0,05}$ pri amplitudi.

ŠOLA

OB UVEDBI OPISNE GEOMETRIJE V NAŠ SREDNJEŠOLSKI PROGRAM

Že kar pogosto naletimo pri sodobnih avtorjih, ki razglabljajo o matematičnem duhu, o vlogi matematike v družbenem življenju in miselnosti človeka ter o vplivu matematike na našo kulturo, na mnenje, da se pojavlja vtis, da matematika izgublja svojo vlogo kot sestavni del naše kulture (R. Courant v predgovoru k Klineovi knjigi »Mathematics in Western Culture«, London 1954) ter da stopa matematično stališče v miselnosti človeka dandanes zelo v ozadje (A. Speiser, Die mathematische Denkweise, Basel 1952, str. 9). Po drugi strani pa smo priče stalno rastočemu uveljavljanju matematike na najrazličnejših področjih človeške dejavnosti, predvsem v tehniki in gospodarstvu. Težko si je prav pojasniti to stanje. Morda bi bilo možno iskati vzroka v veliki spremembi v načinu našega življenja, ko nam je zaradi hitrega razvoja tehnike ter od tega v veliki meri odvisnega splošnega družbenega stanja in hotenja vsiljena veliko večja hitrica in mehanizacija, kot je obstajala še pred nekaj desetletji. Hitrica in mehanizacija pa prav gotovo nista v prilog niti matematičnemu načinu razmišljanja, kaj šele intenzivnemu intelektualnemu delu, kot je značilno za delo v matematiki.

Kakor hitro pa so vzroki za navedeni sodobni odnos do matematičnega mišljenja res splošno družbenega značaja, se morajo njih posledice občutiti tudi na zadržanju mladine do dela, ki ga terja od nje šolanje. Mislim, da lahko trdim, da je tudi pri njej občutna manjša dúhovna usmerjenost in manjša poglobitev v učenju, kot bi jo ob intelektualnem nivoju, ki je bil do nedavnega normalen, mogli pričakovati in morali zahtevati od študentov. Nikakor pa ni možno trditi, da bi bila prizadevnost mladine pri študiranju majhna, le da se ni mogoče iznebiti vtisa, da pri njej prevladuje smisel za mehanično delo, brez pravega poglabljanja. Nedavno mi je prišla v roke knjiga o rešenih in nerešenih matematičnih problemih, ki jo je izdal l. 1949 znani münchenški profesor matematike H. Tietze in kjer piše v predgovoru: »Še v začetku tridesetih let so bile naše predavalnice prenapolnjene in za vstop v poklic je bila pot celo najboljšim določenega letnika zaradi preobilice absolventov prejšnjih letnikov za leta in leta zaprta. Ako so bile visoke šole skoraj nekako ponosne na to, da so v statistiki števila študirajočih od semestra do semestra prekašale sebe in se prekašale med seboj, je bil to iz razlogov, o katerih tu ne bo govora, nezdrav pojav, proti kateremu se je bilo težko bojevati in pri katerem je kvaliteta učnega uspeha zaostajala za kvantiteto. Vendar je bilo pri predavanju dve sto slušateljem možno računati na dvajset skrajno sposobnih in deloma izredno nadarjenih. Prenapolnjenost je bila nato vsekakor zavrta. Ako je bilo potem namesto onih dve sto slušateljev tu le dvajset ter je izvršena izbira privedla v predavalnice najboljše njihovega letnika, bi mogli pričakovati v nadaljnjem znatno izboljšanje v storitvah. Tega pa *ni bilo*. In čeprav je delovno prizadevanje študentov v primeri s prejšnjim skorajda naraslo, je povprečna storitev celo padla, namesto da bi se bila dvignila. Izredno nadarjenih, pri katerih bi se morda utegnila pojaviti zmožnost lastnega raziskovanja, pa skoraj ni bilo. Namesto da bi bilo potem, ko je odpadlo sto osemdeset povprečnih in slabih, napredovanje v snovi hitrejše, je moral docent hitrost svojega podajanja od leta do leta zmanjševati, ako je hotel obdržati stik s slušatelji. To je dalo misliti.«

Pri presojanju, koliko časa bo trajala ta intelektualna depresija, se ne moremo opreti na kake napovedi, vendar pa je glede na zgoraj povedano možno sklepati, da preveč kratkotrajen ta pojav ne bo in da moramo pri vzgajanju mladine kar računati na povprečno nižji intelektualni nivo za neko nedoločljivo dobo še vnaprej. Ker se je potrebno že pri začetnem pouku matematike, ako se nočemo izpostaviti nevarnosti zastoja in zastaranja znanstvenega razvoja ali celo propadanja znanstvene misli, ozirati na matematiko v njenih najvišjih predelih in do neke mere ugladiti mladini pot do razumevanja sodobnih smeri v matematičnem razvoju, smo ob navedeni intelektualni depresiji pred težavami, ki se zde nepremostljive. Vsekakor je težko predvidevati, v koliki meri in na kakšen način bo možno ob poudarku na splošno izobrazbeni vlogi matematike, stremljenju za tem, da dobi študent tudi zadosti znanja in spretnosti za praktično uporabo učne snovi ter pobijanju šablonističnih in mehanističnih tendenc še misliti na znanstveni razvoj matematike. Na dlani pa je, da je potrebno skrbno premisliti vse, kar je v zvezi z osnovnim poukom matematike, ter upoštevati vsako možnost, ki naj vodi k izboljšanju pouka.

Seznanjati mladino z načinom dela in mišljenja v sodobni matematiki je pa najlaže in najbolj nazorno mogoče z geometrijo. Sicer je sodobni matematiki botrovala algebra (Galois, Boole), toda k spoznanju, da so ob tradicionalnih sistemih možne še druge matematične strukture, je odločilno pripomogla geometrija s konstrukcijo abstraktnih geometrij (Lobačevskij, Riemann), ki so tradicionalni Evklidovi geometriji matematično povsem ekvivalentne, ter s poglobljenim študijem osnov geometrije (Hilbert). Geometrija navaja na naraven in lahko dostopen način na sodobne metode, poleg tega pa je z njo možno odvračati mladino od šablone ter jo usmerjati k vrednotam, ki imajo splošno izobrazbeni pomen in med katerimi sta poudarka vredni zmožnost pravilnega in hitrega razumevanja problematike, ki se javlja v življenju, ter zmožnost logičnega razsojanja ob pravilnih osnovah. Zadnje sem omenil ob misli na to, da nadaljuje precejšen del absolventov naših srednjih šol svoj študij na visokih šolah. Ta pa zahteva razvit smisel za zbrano in poglobljeno duševno delo.

Ako pogledamo na posamezne predele pouka geometrije na naši srednji šoli tako z matematičnega stališča kot tudi s stališča koristi, ki naj jih z vzgojnega stališča matematika nudi mladini, bi si bili verjetno precej edini v mnenju, da planimetriji, trigonometriji in analitični geometriji, z nobenega omenjenih stališč gledano, ni kaj očitati, ako je le pouk teh panog pravilno urejen, pač pa bi se utegnili pojaviti pomisleki ob stereometriji. V našem pouku stereometrije, izvajanem na dosedanji način, je bil namreč poudarek manj ali celo nič na prostorskem momentu kot na računsko-tehnično izvajani metriki na osnovnih prostorskih objektih. Vsakdo, ki se ukvarja s tako »stereometrijo«, gotovo čuti, da je ta v primeri s pravilno podajano planimetrijo nekam bleda in prazna, taka nekako, kot bi bila planimetrija, ako bi se v njej omejili v glavnem na računanje obsegov in ploščin likov. V stereometriji ni prišel do sedaj do izraza sicer predpisani uvodni del, ki splošno obravnava medsebojno lego premic in ravnin. V nasprotju s planimetrijo je stereometriji namreč manjkal konstruktivni del, čeprav je ta v obliki opisne geometrije že zdavnaj obstajal. Ta pomanjkljivost v pouku geometrije je v nekaterih deželah narekovala uvedbo elementov opisne geometrije v srednje šole in je bila po vsej priliki tudi vzrok nedavni uvedbi teh elementov v matematični pouk slovenskih srednjih šol, vendar v manjšem obsegu, kot je to napravljeno drugje. Sicer pa so poleg misli na dopolnitev pouka stereometrije uvedbi opisne geo-

metrije v srednješolske učne programe gotovo povsod ugladili pot še drugi momenti. Naj v nadaljnjem nekoliko opozorim tudi na te!

Ko je ob koncu 18. stoletja opisna geometrija postala javna in širšim, posebno tehničnim krogom poznana grafična disciplina ter ji je Monge dal značaj samostojne matematične znanstvene panoge, se je zaradi svojega velikega praktičnega pomena že v prvi polovici preteklega stoletja razširila po Evropi. Njej pripisujejo, da je kot osnova grafičnih metod, ki kot nenadomestljiva pomoč predvsem omogočajo strojno tehniko, v veliki meri pripomogla, da se je strojništvo v devetnajstem stoletju tako razmahnilo. (E. Bell, Men of Matematics II, str. 200; Pelican B.). Toda to bo verjetno bolj zanimalo le tehnično zainteresirane kroge, medtem ko ima za nas pomen splošno-izobrazbena stran opisne geometrije in njen značaj kot matematična disciplina. Da je bila v svojih početkih opisna geometrija na načelu projiciranja osnovana metoda povratno enoličnega transformiranja tridimenzionalnega prostora na dvodimenzionalno ravnino, je znano. Prav tako je znano, da je do take vrste predočbe prostorskih tvorov vedla potreba predočanja prostorskih tvorov in nemožnost risanja v prostoru. Manj znano pa bo najbrž, da je opisna geometrija danes le del *grafične geometrije,* ki obsega poleg opisne geometrije vse grafične metode čiste in uporabne matematike, in da je po svoji strani grafična geometrija odsek najširše zajete *konstruktivne geometrije.* Pod konstruktivno geometrijo pa razumemo ono pojmovanje in metodo geometrije, ki se ukvarja z nazorno v duhu zasnovanim in po možnosti grafično predočenim geometričnim tvorom v tem smislu, da ta tvor s konstrukcijo in računom zgraja ter na ta način prodira v njegovo metriko in strukturo (E. Kruppa, Darstellende Geometrie — einst und jetzt; Dunaj TWH 1953).

Grafično ukvarjanje z adekvatnimi slikami prostorskih tvorov zahteva popolno poznanje osnovnih stereometrijskih zakonov in odnosov ter sega pri obravnavanju krivulj in krivih ploskev tja v algebro in algebrajsko ter diferencialno geometrijo. Brez takega poznanja opisnogeometrične konstrukcije niso možne, kot niso možne planimetrične konstrukcije brez poznanja zakonov, ki veljajo za ravninske tvore. Kakor je izvajanje planimetričnih konstrukcij neprecenljivo pomagalo pri osvajanju odnosov in zakonov ravninske geometrije, prav takega pomena je grafično konstruktivno delo za aktivno spoznavanje odnosov in zakonov prostorske geometrije. Že ta razlog je dovolj tehten za uvedbo opisne geometrije v pouk srednješolske stereometrije, ako nam je na tem, da dobi mladina, kolikor je na tej stopnji mogoče, zaokroženo in dobro osnovno poznanje geometrije. Opisna geometrija je sredstvo na poti intelektualne rasti študirajočih in odpira tudi možnosti aktivnega spoznanja s pojmi sodobne matematike (aksiomatika, množice, grupe).

So pa še drugi razlogi, predvsem vzgojnega in splošno izobrazbenega značaja, ki to uvedbo nujno priporočajo. V tej zvezi je na prvem mestu večkrat omenjana vzgoja čuta za prostorsko predstavljanje. Kdor se ukvarja z opisno geometrijo, ima stalno posla s prostorskimi tvori in pri upodabljanju le-teh zasleduje neprestano njih nastanek in razvoj iz podanih elementov ter dobiva na ta način vedno boljši vpogled v prostorske oblike in njihovo zgradbo. Dalje je skoraj prisiljen, da si to, kar mu sproti nastaja na sliki, predoča v prostoru na mestu, ki mu ga določajo podatki. Sprva mu bo ta postopek povzročal verjetno težave, ki jih bo skušal premagati z različnimi mehaničnimi pripomočki za predstavljanje, kasneje pa mu bo stalno prizadevanje v tej smeri in stalno ponavljanje istih predočevalnih postopkov toliko izvežbalo čut za nameščanje elementov v prostor, da bo pripomočke lahko pogrešal. Pridobil si bo tako

izvežban čut za (metrično) prostorsko gledanje ali prostorsko predstavljanje, kar vse je nujno potrebno ne le onemu, ki ima s prostorskimi objekti in njih konstrukcijo stalno posla (tehnik-konstrukter, zdravnik-internist, kirurg ali rentgenolog, ipd.), temveč vsakemu človeku. Saj je tako predstavljanje v vsakdanjem življenju pogosto potrebno, ne da bi bili pri roki in ne da bi bili celo možni modeli ali pripomočki, ki bi nadomeščali »gledanje v mislih«. Kot primer uporabe tega »šestega« čuta bi lahko navedel n. pr. izbiranje čim krajše poti med dvema oddaljenima točkama v mestu, ne da bi imeli na razpolago načrt mesta. Slabovidnim in slepim je čut za gledanje v mislih glavni orientacijski pripomoček.

Šolanje v prostornem predstavljanju moramo smatrati za važen doprinos k splošni izobrazbi vsakega posameznega. Ne bom trdil, da je opisna geometrija edino sredstvo za tako šolanje. Skoraj vsaka človekova dejavnost doprinaša svoj delež k razvijanju čuta za prostorsko predstavljanje, vendar je prav opisna geometrija najuspešnejše in najvažnejše sredstvo takega šolanja. Ako pa pomislimo, da spada dandanes k splošni izobrazbi tudi zmožnost čitanja najraznovrstnejših načrtov in da je to čitanje z opisno geometrijo v neposredni zvezi, imamo z vsem navedenim dovolj razlogov za trditev, da je opisna geometrija kot vzgojni faktor velikega pomena. Ob vsem tem ni potrebno še navajati, da je tudi odlično sredstvo za šolanje v logičnem razmišljanju, navajanje k doslednosti, točnosti, skrbnosti in koncentraciji ter za šolanje v estetičnem dojemanju oblik, torej sredstvo za vzgajanje vrednot, ki bi moralo biti last vsakega izobraženega človeka.

Opisno-geometrično šolanje čuta za prostorsko predstavljanje sem omenil nekoliko bolj na široko, to pa zaradi očitkov, ki jih slišimo ob vsaki priliki, da je namreč sposobnost za prostorsko predstavljanje pri naši mladini slabo razvita in da se pri študiju predmetov, ki vse to potrebujejo, študentje v splošnem težko znajdejo. Slišal sem celo mnenje, da dojemajo dijaki izrazito tridimenzionalne pojave (fizika, kemija, tehnika) nekako ploskovno, dvodimenzionalno. Sam si tega ne morem prav predstavljati, zdi se mi pa, da po drugi strani pogoji, ob katerih se šola naša (in morda ne samo naša) mladina, vzgajanju pojmovanja tridimenzionalnosti prostorskih pojavov res niso preveč naklonjeni. Že pouk geometrije, nauk o prostoru, kaže v tem pogledu velike hibe, saj sem že omenil, da niti stereometrija preveč ne vzpodbuja k prostorskemu mišljenju in predstavljanju. Neizbežno bi bilo tako vzpodbujanje n. pr. pri sferni trigonometriji in njenih uporabah v geografiji in astronomiji, toda sferne trigonometrije že dolgo ni več v naših učnih programih. Poleg geometrije vzpodbuja k prostorskim predstavam v veliki meri tudi prostoročno risanje po naravi. Toda kaj ko risanje pri nas ne pride več preko osemletke, kolikor pa ga je, je pretežno ploskovno ornamentalno ter tudi barvno nerealno. Prav ob tem risanju je možno dobiti vtis, da risarji v veliki meri nimajo prave sodbe o zgraji in legi najpreprostejših objektov, ki so risani le prečesto nekoliko preveč naivno in neperspektivno ter zaradi svojega ploskovnega značaja ne vzbujajo pravega vtisa. Ali ni ta pojav posledica slabo razvitega čuta za prostor in če je to tako, ali ni morda le potrebno, s smotreno vzgojo ta čut okrepiti?

V vsem, kar sem navedel, sem hotel poudariti zlasti pomen pouka opisne geometrije za zaokroženje splošnega osnovnega matematičnega znanja mladine in vpliv na razvijanje nekih vrednot, ki se zdijo vredne uvaževanja. H koncu bi hotel pripomniti še nekaj, kar zadeva zvezo med srednješolskim poukom opisne geometrije in študijem na tehniki. Tehniki potrebujejo več različnih opisnogeometričnih predočevalnih metod in vse bi jim bilo treba podati v eno-

letnem tečaju v taki meri, da si bodo mogli s podano snovjo pomagati v praksi. Če študentje ne prihajajo na tehniko že s poznanjem osnovnih pojmov in zadostno prakso v izvajanju konstrukcij opisne geometrije, je tej zahtevi težko ugoditi. Predavatelj opisne geometrije je v tem primeru pred alternativo, ali se naj omeji v glavnem na osnove opisne geometrije in le v majhni meri upošteva uporabe, ali naj pa elemente predela bežno ter si tako dobi časa za praktične ilustracije. Naj bo tako ali tako, niti prvo niti drugo ne vodi ob težavah, ki so lastne temu napol teoretičnemu in napol praktičnemu predmetu, do cilja, ki bi ga moral doseči študent tehnike, potem ko je absolviral tečaj opisne geometrije. S tega stališča gledano in zaradi stiske v času, ki vlada pri študiju na tehniki in zaradi katere ni mogoče pouka posameznih predmetov razširjati, je edino na mestu, da pride študent na tehniko že z nekim aktivnim znanjem iz opisne geometrije, tako da je tu možno to znanje že uporabiti in ga le še tehničnim zahtevam primerno razširiti. V nekaterih deželah v inozemstvu je tako predznanje pogoj za vpis na tehniko, medtem ko je bilo potrebno pri nas dosedaj pričenjati z osnovnimi pojmi. Dvomim pa, da se bo glede na našo obliko uvedbe opisne geometrije v srednješolski pouk stanje na tehniki opazno izboljšalo in bistveno vplivalo na opisnogeometrična predavanja. Ob vestnem in strokovno ter metodično pravilno izvedenem pouku na srednji šoli bo najbrž doseženo pač nekoliko boljše in aktivnejše znanje geometrije ter nekoliko večja spretnost v praksi geometričnega risanja. Vpliv na tehniški pouk opisne geometrije bo tedaj le posreden, medtem ko bo ostala bistvena opisnogeometrična predpriprava absolventov naših srednjih šol za študij na tehniki še vedno odprto vprašanje.

Oton Sajovic

PROBLEMATIKA POUKA MATEMATIKE V OBVEZNIH ŠOLAH

Če primerjamo v predmetnikih obvezne šole tedensko število ur matematike z urami drugih predmetov, vidimo, da je ta predmet poleg materinščine med najbolj uvaževanimi, saj predstavljajo te ure na nižji stopnji obvezne šole 24 % celotnega števila ur v predmetniku, na višji stopnji pa nekaj nad 13 %.

Pomen predmeta za pravilen razvoj mladega rodu je razviden tudi iz vzgojnih in izobraževalnih nalog, ki jih učni načrt predvideva in predpisuje.

Statistični podatki učnih uspehov ob redovalnih konferencah pa kažejo, da so učni uspehi prav v tem, za življenje tako važnem predmetu, najslabši. Če pregledamo letošnje podatke o učnih uspehih v I. polletju na nižjih gimnazijah, n. pr. v celjskem okraju, ki vključujejo 20 šol s 5485 učenci, vidimo, da je matematika po številu slabih ocen z 21 % na prvem mestu pred tujimi jeziki, slovenščino in zgodovino, čeprav je tu spominskega utrjevanja in domačega dela morda manj kot pri omenjenih predmetih.

Iz statističnega poročila za murskosoboški okraj za isto obdobje spoznamo, da je procent slabih ocen iz matematike v I. razr. 19 %, v II. 21 %, v III. 18 % in v IV. razr. 19 %. Poročilo obsega 16 šol s 4800 učenci.

Na nekaterih posameznih šolah in razredih je procent slabih ocen tudi višji, celo nad 50 %.

Stalni slabi uspehi in pomanjkljivo matematično znanje ne izvirajo le iz predmeta samega, nenadarjenosti in brezbrižnosti otrok, ampak so vzroki tudi v neustrezni organizaciji in pripravi šolskega dela. Proučevanje teh pojavov, zlasti pa možnosti zboljšanja znanja dijakov, je naša naloga prav v tem času, ko razpravljamo o naši šoli in pripravljamo njeno reformo.

Izredno pomemben faktor v učnem procesu je brez dvoma učitelj. Zanimanje otrok do reševanja matematičnih problemov more vzbuditi le tak učitelj, ki temeljito obvlada strokovno vsebino in pri posredovanju učnega gradiva stalno upošteva otrokov razvoj, njegovo zmogljivost in dojemljivost. Kakor povzroči slabo poznavanje teoretskih osnov veliko škodo pravilnemu pojmovanju strokovne vsebine, prav tako lahko privede nepoznavanje in neupoštevanje otrokovega razvoja in zmogljivosti do popolne apatije do predmeta. Vsiljevanje nedoumetega znanja pospešuje samo učenje na pamet in je v nasprotju z naravo in nalogami predmeta.

Usposobljenost učnega osebja, ki poučuje matematiko na nižjih gimnazijah v LR Sloveniji v šol. l. 1955/56, je razvidna iz naslednjih podatkov:

Od 4792 ur matematike na teden na 163 samostojnih nižjih gimnazijah poučuje le 28 % kvalificiranega osebja (profesorji in predmetni učitelji), od 1890 ur v nižjih razredih popolnih gimnazij pa 60 %. Če pomislimo, da obiskuje 40 986 dijakov samostojne zavode in 16 944 popolne gimnazije, vidimo, da je vprašanje kvalificiranih moči izredno važno za kvaliteten pouk tako velikemu številu naše mladine.

Za boljšo presojo vzrokov učnih uspehov v matematiki v navedenih okrajih je zanimiva tudi usposobljenost kadra, ki poučuje ta predmet: v celjskem okraju je 17,4 %, v murskosoboškem pa 13,3 % kvalificiranih učiteljev.

Zvračanje odgovornosti in krivde za neuspehe in neznanje samo na »uradno usposobljenost« je gotovo krivično, kajti številne izkušnje kažejo, da lahko tudi slabše kvalificirani učitelj dobro in uspešno poučuje in obratno.

Za pritegnitev otroka k pouku je potrebna čustvena prizadetost; to pa more razviti le učitelj, ki pri svojem delu v zadostni meri upošteva otrokov razvoj. S pravilno organizacijo učne ure, s pritegnitvijo celotnega razreda k sodelovanju lahko doseže, da večina otrok snov razume in osvoji. Domače delo je omejeno potem na minimum, zlasti če učitelj snov isto uro še ponovi in utrdi.

Izbiro in zaporednost snovi narekuje učitelju znanje učencev in ne učni načrt ali učbenik; prav tako ni vedno uspešna ista pot pri poučevanju v več paralelkah. Potrebna je tudi pravilna koordinacija algebrajskega in geometričnega gradiva, kjer je učitelj večkrat v zadregi, kako naj obdela računske operacije in pojme, za katere nima še teoretskih osnov. Previdnost v izbiri zaporednosti je važna posebno zaradi tega, ker uporabljamo za aritmetiko in geometrijo posebne učbenike. Ovire v razumevanju lahko nastanejo zlasti v I. in III. r.

Ker je pomanjkanje usposobljenega kadra tako pereče in se večina učnega osebja naslanja pri šolskem delu na učbenik, ki jim je tudi edini strokovni svetovalec, ne bi bilo napačno, če bi se grupacija in pedagoško pravilna koordinacija aritmetičnega in geometrijskega gradiva izvedli v učbeniku samem. Tak način obravnavanja matematičnega gradiva na tej stopnji se v inozemskih šolah in učbenikih že dalj časa izvaja in je zelo koristen za koordinacijo aritmetike in geometrije.

Pomanjkljivost vzgojnega dela na tej stopnji izvira še iz premajhne uporabe grafičnih in drugih ponazorilnih sredstev. Pojasnjevanje matematičnih odnosov sloni še preveč na simboliki, grafične oblike in možnosti pa se zanemarjajo. Tako se zapostavlja vzgoja prostorskega gledanja in predstavljanja in onemogoča razumsko dojemanje in pojmovanje. Zaradi teh nedostatkov je marsikateri učenec prisiljen, da se uči na pamet, da verbalno utrjuje snov,

ki bi jo lahko ob boljši metodi razumsko osvojil. Interes za matematične probleme bi se ob takem dojemanju samo povečal.

Problemov pri pouku matematike po naših šolah je mnogo. Kritično stanje učnih uspehov in znanja zahteva, da teh pojavov ne omalovažujemo, temveč da resno proučimo možnosti boljšega dela. Le na ta način se bomo otresli zastarelih oblik šolskega dela in gledanja na matematično vzgojo in izobrazbo. Že sama primerjava naših učbenikov za matematiko z inozemskimi kaže, da marsikje uporabljajo privlačnejše oblike za posredovanje in razumevanje abstraktne matematične snovi na tej stopnji šolanja. *Jože Žabkar*

DOPISI

KAM GRE ENERGIJA?

Kam gre potencialna energija napete vzmeti, če jo raztopimo v kislini? Vzmet naj bo zvezana s trakom, ki ga kislina ne razjeda! *F. G.*

Odgovor: Najprej se ustavimo ob izrazu »potencialna energija«! Mislim, da zgornja raba tega izraza ni pravilna, ker se ne ujema s terminologijo, ki je v navadi v termodinamiki. Če napnemo toplotno izolirano vzmet, potem je opravljeno delo enako spremembi notranje energije. Če pa napravimo enak poskus pri konstantni temperaturi, je delo enako spremembi proste energije. Razlika obeh energijskih sprememb je po navadi malenkostna. Zato ni napačno, če govorimo v srednji šoli v tej zvezi samo o notranji energiji. O potencialni energiji pa govorimo samo, kadar je telo v polju zunanjih sil, ki imajo svoj potencial. Za utež, ki je pritrjena na koncu vijačne vzmeti, bi lahko rekli, da ima potencialno energijo $\frac{1}{2}kx^2$, če je x podaljšek vzmeti. Vendar je bolje, da je v srednji šoli potencialna energija samo mgz. Utež obravnavamo z vzmetjo vred in povemo, da je $\frac{1}{2}kx^2$ del notranje energije vzmeti.

Napravimo opisani poskus z vzmetjo dvakrat, enkrat z nenapeto vzmetjo, drugič z napeto! Obakrat držimo temperaturo konstantno, tako da je končno stanje obakrat enako! Ker je imel sistem v drugem primeru na začetku za $\frac{1}{2}kx^2$ večjo energijo kot je v prvem, je moral po energijskem zakonu oddati pri raztapljanju za $\frac{1}{2}kx^2$ več toplote. Ta razlika pa v najboljšem primeru ne doseže niti tisočinko celotne oddane toplote, tako da bi jo bilo težko izmeriti.

I. K.

TEHTANJE PRAŠIČA

Bilo je jeseni, pri sorodnikih tam daleč nekje na kmetih. Mnogo se ni dalo lenariti in tako sem se moral naučiti krave pasti in še kaj. Zares nepomembna se mi je tedaj zazdela vsa matematična učenost, ki jo med letom tako vneto oznanjam svojim učencem. Nekoč pa mi je matematika vendarle koristila.

Teta je hotela vedeti, koliko tehtata pujsek in prašič, ki ju je nameravala prodati. Pujska smo z malimi težavami stehtali na rimski tehtnici, prašič pa je bil za tehtnico pretežak. »Spominjam se,« je dejala teta, »kako je neki želez-

ničar stehtal prašiča sploh brez tehtnice. Takole čez trebuh ga je pomeril in še dolžino od tilnika do repa, težo pa je potem izračunal. Ti moraš to tudi znati. Saj si rekel, da si prefesar za računstvo!«

Ne vem več dobro, kakšno pojasnilo sem izjecljal v zadregi. Teta je pričela resno dvomiti: »Če niti tega ne znaš, že ne moreš biti prefesar; saj zna to čisto navaden železničar.« Nič ni pomagalo ženino pojasnilo, češ da to gotovo znam in da samo ne vem na pamet tistega koeficienta. Teta ni kazala nobenega razumevanja za koeficiente. »Vzemi meter, izmeri prašiča in izračunaj težo, pa amen!«

Cviljenje pujska, ki si še ni čisto opomogel od tehtanja, me je šele spravilo na rešilno misel. Ali nismo v peti šoli nekaj slišali o podobnih si telesih? Gotovo se da to uporabiti pri svinjereji, čeprav so nam to takrat pozabili povedati.

Račun se opira na hipotezo, da je povprečna gostota vseh prašičev enaka in da postanejo vsi prašiči (debeli in mršavi) med seboj podobni, če si mislimo vsakega primerno po dolgem raztegnjenega. Tedaj namreč velja enačba

$$m = ks^2 l,$$

pri čemer je s obseg trebuha, l dolžina, m masa prašiča, k pa neki koeficient. Enaka enačba velja za vsako vrsto teles z navedenima lastnostima, tako na primer za pokončni valj ($k = \varrho/4\pi$) in za rotacijski elipsoid ($k = \varrho/6\pi$).

Pomeril sem torej ne samo prašiča, ampak tudi že stehtanega pujska, da sem določil koeficient k. Teža prašiča je bila potem takoj izračunana. Kasneje, ko so prašiča zares stehtali, so me pohvalili, da sem se pri 150 kilogramih uštel samo za 2 kg. Seveda sem previdno zamolčal, da je za tolikšno natančnost potrebna dobršna merica sreče.

Če se prav spominjam, je omenjeni koeficient $k = 10^{-4}$ kg/cm^3. Ako izrazimo maso v kilogramih, obseg in dolžino pa v centimetrih, velja torej za prašiča enačba

$$m = s^2 l/10\,000.$$

Odpuščeno naj mi bo, da sem enačbo zapisal tu v obliki, ki je navezana na posebne enote. Kakor znano, so takšne oblike enačb izven svinjereje strogo prepovedane.

A. B.

NOVE KNJIGE

NOVA IZDAJA BRUHATOVE OPTIKE

G. Bruhat, Cours de Physique Générale, Optique, 4. izdaja. Masson et Cie, Paris, 1954. 1 vol. 906 strani, 723 slik. Cena 4840 din.

Knjiga vsebuje kurz optike, ki v glavnem ustreza potrebam študentov fizike v višjih letnikih. Žal pa je geometrijske optike mnogo premalo, medtem ko je poglavje o spektroskopiji, v katerem je močno zastopana tudi rentgenska spektroskopija, nesorazmerno razširjeno (323 strani!). A. Kastler, profesor pariške Univerze, ki je pripravil novo izdajo tega znanega učbenika, se je potrudil, da je vključil mnoge novosti iz časa, odkar je izšla prejšnja izdaja

(1942). V prvem delu knjige so dodana nova poglavja, predvsem pri uklonu svetlobe in interferenci (sipanje svetlobe v snoveh, uklon na ultrazvočnih valovih, teorija mikroskopa, fazni mikroskop, interferenčni filtri). Dodana so še tri nova poglavja: spektralna analiza v astrofiziki, radiofrekvenčna spektrografija (na koncu tega poglavja je obdelana celo jedrska magnetna resonanca), radioastronomija.

Novi dodatki so tako povečali knjigo, da jo bo slušatelj težko uporabljal kot učbenik (to velja posebno za poglavje o spektroskopiji). Z druge strani pa knjiga ni zrasla toliko, da bi mogla služiti kot priročnik. Saj tudi ni napisana na tak način (nima citatov!). Knjiga nima abecednega kazala; tudi zato je kot priročnik neuporabna.

Gradivo iz prejšnjih izdaj ni bilo reducirano. Pri tem pa moramo pomisliti, da knjiga lahko zastari ne samo zaradi tega, ker ne vsebuje dovolj novega gradiva, temveč tudi, če se v njej predolgo ohranjajo zastarela manj važna poglavja.

Knjiga je napisana jasno, v lepem slogu, matematično korektno. Opremljena je z velikim številom dobrih in zelo nazornih skic. Povsod so navedeni tudi eksperimentalni rezultati ter podana ocena metod in aparatov.

Miodrag V. Mihailović

GEOMETRIJA

R. E. Bee, B. Sc. and G. E. Gray, M. A.: Numerical geometry and trigometry; Macmillan & Co., London 1956, 234 strani, 185 slik.

Knjiga je namenjena srednješolski mladini in je izrazit učbenik, ki dopolnjuje razlago v šoli. Ima 19 poglavij; 10 jih obravnava planimetrijo, 5 trigonometrične funkcije in njihovo uporabo pri razreševanju trikotnikov, v 3 poglavjih je govora o analitični geometriji v ravnini (enačba premice in kroga), le v enem pa o stereometriji. V knjigi je okrog 1500 izvirnih nalog, ki so razporejene na koncu vsakega poglavja. Kot dodatek so še tabele za trigonometrične funkcije in zbirka obrazcev.

Posamezni deli elementarne geometrije niso tako ločeni kot v naših učbenikih, ampak se prepletajo. Knjiga je zaradi nazorne razlage in velikega števila vaj koristen pripomoček za študij elementarne geometrije.

STATISTIČNI RAČUNI ZA UČITELJE

J. E. Jayasuriya: Statistical Calculations for Teachers; MacMillan and Co. Madras 1955, 100 strani.

Vsebina: 1 Narava mentalnih meritev. 2. Tabeliranje ocen. 3. Grafično prikazovanje ocen. 4. Statistični opis ocen. 5. Primerjanje ocen. 6. Kombiniranje ocen. 7. Normalna krivulja. 8. Posploševanje iz vzorcev. 9. Uporaba percentilov. 10. Merjenje stopnje odvisnosti.

V zadnjih desetletjih se vedno močneje uveljavljajo statistične raziskovalne metode, med drugim tudi v psihologiji pri ocenjevanju duševnih sposobnosti individuov in kolektivov. Dandanes so statistične metode nepogrešljive, n. pr. v poklicnih posvetovalnicah, koristno pa jih tudi lahko uporablja učitelj pri merjenju uspehov svojega pedagoškega dela, pri merjenju napredka posameznih učencev pa tudi pri merjenju napredka celih razredov.

Pričujoča knjiga ima namen, posredovati učiteljem elementarne statistične metode, ki se uporabljajo pri merjenju in proučevanju duševnih sposobnosti.

Knjiga obravnava le najbolj elementarne statistične pojme, ne predpostavlja pa nikakršne posebne matematične izobrazbe in je zato čitljiva za vsakogar, ki ima nižješolsko izobrazbo. Podano snov obravnava avtor ob praktičnih numeričnih primerih.

Alojzij Vadnal

IZ NAŠIH ZALOŽB

Matematika, potsetnik za učenike srednjih škola. Založba Naučne knjige, Beograd 1955, 128 strani.

Skupina profesorjev matematike je sestavila zbirko pravil in obrazcev kot pregled celotne srednješolske snovi. Knjižica žepnega formata vsebuje naslednja poglavja: Sistem metrskih mer, Matematični znaki, Kvadrati, kubi, kvadratni in kubni koreni števil 1—100, Aritmetika, Algebra, Planimetrija, Stereometrija, Trigonometrija, Analitična geometrija.

Zbirka pitanja i zadataka iz matematike za osmogodišnje škole. Založba Nolit, Beograd 1955, 116 strani.

Uredniški odbor je sestavil zbirko vprašanj in nalog, ki naj služi učencem osemletnih šol ob koncu obveznega šolanja za ponavljanje predelane snovi. Zbirka ima naslednja poglavja: Vprašanja iz aritmetike in algebre, Vprašanja iz geometrije, Naloge iz aritmetike in algebre, Naloge iz geometrije, Rešeni primeri in slike. Večina nalog ima rešitve. Na koncu knjige je 16 strani obrazcev iz aritmetike, algebre in geometrije. Obrazce pojasnjujejo slike. Knjižico bi mogli z uspehom uporabljati tudi naši učitelji matematike pri obnavljanju snovi za nižjo gimnazijo.

Iskustva i problemi. Radovi Više stručne pedagoške škole u Rijeci. Založba Više stručne pedagoške škole, Rijeka 1956, 275 strani, 310 din.

Knjiga ima naslednje članke: O pouku opisne geometrije (T. Gjivović), Pouk mehanske tehnologije (I. Videc), Pouk strojnih elementov (Ž. Kuštreba), Pouk enciklopedije strojev (A. Čevra), Pouk tehnične mehanike (V. Sabljić), Izobraževalni potencial sodobnega industrijskega dela (M. Petančić), Ob anketi (F. Starčević), Informativni prikaz dela VSPŠ (N. Cuculić).

SLEPA KURA ZRNO NAJDE

Shortley in Williams imata v svoji knjigi »Elements of Physics« (2. izd., str. 74) naslednjo nalogo:

Izstrelki nekega topa padajo na ravnem 15 milj daleč, če je top nagnjen za 30^0 nad vodoravnico. Kako visoko letijo izstrelki, če streljamo navpično? (Upor zanemarimo!).

Neki študent me je zelo presenetil z naslednjim odgovorom, ki je osnovan na sklepnem računu in ki je vzvišen nad vsemi zakoni fizike:

Če je r opazovani doseg ($r = 15$ milj), h pa iskana višina, velja $h : r = v_y : v_x$, pri čemer sta v_y in v_x komponenti začetne hitrosti. Očitno je torej

$$h = 15 \text{ milj} \cdot \operatorname{tg} 30^0 = 8{,}66 \text{ milj}$$

Rezultat je pravilen!

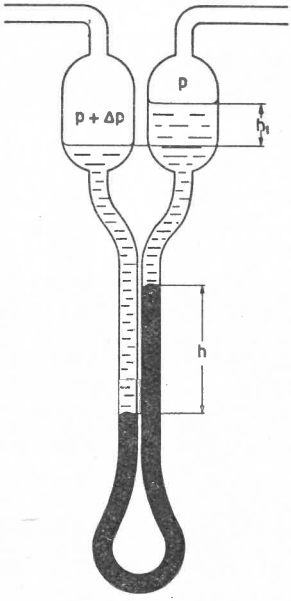
Vedno sem sumil, da s kotom 30^0 nekaj ni v redu. Tu pa sem našel nov dokaz, da temu posebnemu kotu pri šolskih nalogah ne smemo zaupati.

E. H. Weinberg

(American Journal of Physics, 24, 10, 1956)

ODGOVORI

3. MIKROMANOMETER Z ANILINOM



Kadar sta pritiska na obeh vodnih gladinah enaka, naj stojita ti gladini enako visoko, ravno tako pa gladina anilina. (Glej sliko pri vprašanju, str. 96!) Razlika pritiskov Δp povzroči premik gladin, kakršnega kaže slika na desni. Spodaj je do leve gladine anilina pritisk v isti višini v obeh krakih enak Upoštevaje pritiske, ki jih prispevajo posamezni stebri tekočin na obeh straneh, dobimo enačbo $\Delta p + \varrho_v gh = \varrho_a gh + \varrho_v gh_1$, pri čemer sta ϱ_v in ϱ_a gostoti vode in anilina. V enačbi smo izpustili tista dela vodnega stebra, ki sta na obeh straneh vštric. Ker se prostornini obeh tekočin nista spremenili, velja $Sh = nSh_1$, torej $h_1 = h/n$, pri čemer sta S in nS preseka cevi spodaj in zgoraj (v našem primeru je $n = 50$). Iz obeh enačb dobimo končno naslednji rezultat:

$$\Delta p = \varrho_v gh \left[\frac{\varrho_a}{\varrho_v} - 1 + \frac{1}{n} \right]$$

Izraz v oglatem oklepaju ima v našem primeru ($\varrho_a/\varrho_v = 1{,}024$) vrednost $= 0{,}024 + 1/50 = 0{,}044$; njegova recipročna vrednost je $1/0{,}044 = 22{,}7$. Pri nas je torej $h = 22{,}7\,(\Delta p/\varrho_v g)$, medtem ko je pri navadnem vodnem manometru $h = \Delta p/\varrho_v\, g$. Opisani manometer je 22,7-krat tako občutljiv kot navaden vodni manometer.

Ivan Filipič

VPRAŠANJA

8.

Obseg elipse, če sta znani obe osi $2\,a$ in $2\,b$, se izraža z eliptičnim integralom. Pri majhni ekscentričnosti pa je obseg približno enak $O \doteq \pi\,(a + b)$. Dokaži, da je razlika $O - \pi\,(a + b)$ zmerom pozitivna. Poišči oceno za to razliko!

9.

V nekaterih priročnikih najdeš za prostornino soda tole formulo: $V = \pi\,[\frac{1}{3}(2\,R + r)]^2\,v$. Tu pomeni v dolžino soda, R polmer največjega preseka, r pa polmer ene izmed osnovnih ploskev. Kakšno obliko morajo imeti doge, da bo ta formula natančno veljala za vsak r? Vprašanje naj bo isto, če je dana prostornina s formulo $V = \frac{1}{3}\,\pi\,(2\,R^2 + r^2)\,v$.

10. ENERGIJA ELASTIČNIH TELES

Z idealno prožno vrvico, ki je na enem koncu privezana, napravimo naslednja dva poskusa: Najprej vrvico raztegnemo za s in jo potem tordiramo, s tem da zasučemo prosti konec za kot φ. Pri drugem poskusu pa najprej zasučemo prosti konec za kot φ in šele potem raztegnemo vrvico za s. Pri obeh poskusih dosežemo isto končno stanje. Obakrat izmerimo skupno delo, ki je potrebno, da spravimo vrvico iz nenapetega stanja v omenjeno končno stanje. Izkaže se, da je to delo obakrat enako.

Po katerem osnovnem fizikalnem zakonu mora tako biti?

Pojasnilo: Ko pravimo, da je vrvica idealno prožna, hočemo samo reči, da ni nič plastična, da se torej po vsaki dopustni obremenitvi skrči v začetno stanje, ko sile popustijo. Nikakor pa ni treba, da bi veljal Hookov zakon, ampak je odvisnost deformacije od sil že lahko nelinearna. Dobra gumijeva vrvica je še do precej velikih raztezkov skoraj idealno prožna, medtem ko velja Hookov zakon le za majhne raztezke.

Ivan Kuščer

Mnogi prerokujejo, da znanost in industrija gradita babilonski stolp in da bo ta gradnja ravno tako zaustavljena kakor v svetopisemskih časih. Kajti delavci, ki bodo bolj in bolj specializirani, navsezadnje ne bodo več razumeli drug drugega. S tem mračnim mišljenjem pa ne soglašam. Ravno nasprotno je res; ko naše znanje raste, izginjajo stare meje in naš pogled se razširja do širšega obzorja. Res pa je tudi, da ljudje, ki so navajeni na stare meje, te meje še vedno spoštujejo, tudi ko jih ni več. Njim naj knjigi pomagata, da se bodo počutili po domače s svojimi novimi sosedi. V knjigi »Dielectrics and Wawes« smo poskusili spraviti skupaj fizika, kemika in elektroinženirja. V »Dielectric Materials and Applications« pa upamo, da bomo vzpostavili povezavo med raziskovalcem, inženirjem, izdelovalcem in uporabljalcem »nekovin«.

Pogosto trdijo, da znanstvenik ne bi smel misliti na uporabo. Toda saj je treba vsako novo spoznanje preizkusiti, da se odkrijejo vrzeli v našem znanju. Ko je Pasteur udomačil mikrobe, je hodil iz laboratorija na ovčjo farmo, v vinsko klet in v pivovarno. Vračal se je podkrepljen z uspehi (ovce so preživele, vino se je izboljšalo) ali pa ponižan zaradi neuspeha (francosko pivo je še vedno obupno). Stalno je preoblikoval svoje ideje na osnovi praktičnih izkušenj. To je bilo potrebno, da je lahko razvil svojo mikrobno teorijo bolezni in za razumevanje pojavov infekcije ter pridobljene imunosti. Mi sicer nismo Pasteurji, upamo pa, da naše ideje zdržijo nekaj praktične preizkušnje.

Arthur von Hippel

v predgovoru h knjigi »Dielectric Materials and Applications«.

OBZORNIK
ZA
MATEMATIKO
IN
FIZIKO

1955-56 LJUBLJANA LETNIK IV

Uredniški odbor

Ivan Kuščer, Anton Moljk, Ivan Vidav, Niko Prijatelj
Ivan Štalec (tehnični in odgovorni urednik)

Izdalo Društvo matematikov in fizikov Ljudske republike Slovenije
Natisnila tiskarna »Ljudske pravice« v Ljubljani

Članki

Zgodovinski razvoj topologije (Alojzij Vadnal) 1
O adicijskih teoremih (Niko Prijatelj) 6
Protonski sinkrotron za 30 GeV (Anton Peterlin) 11
Nevtrino (Mara Švikaršič) 20
Enrico Fermi (S. D.) 49
Diskretum i kontinuum (Djuro Kurepa) 52
Paraanalitične funkcije (Ivan Molinaro) 58
Oksidna katoda (Evgen Kansky) 62
O definicijah matematične verjetnosti (Alojzij Vadnal) 97
Radioastronomija (Silvo Breskvar) 105
Molekulski elektronski spektri (Savo Bratož) 115
Ob prvi obletnici Einsteinove smrti (Lavo Čermelj) 145
Spektralna teorija linearnih operatorjev v Hilbertovem prostoru (France Križanič) 149
Feroelektriki (Peter Gosar) 161

Matematična služba

Računanje vodnega toka v prepustni plasti pod jezom (Ivan Kuščer) . . 26

Novice

Elektret (Juvencij Kalan) 33
Fotoelektrično otipavanje krivulj (Miran Ralca) 34
Elementarna metoda za računanje vrednosti integrala $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ (Bogdan Krušič) 68
Težki mezoni (Bibijana Dobovišek) 69
Lupinasta struktura atomskega jedra (Ladislav Bevc) 72
Nov stabilni izotop (Janez Strnad) 73
Nov hladilni stroj (Mitja Rosina) 75
Peti Hilbertov problem (France Križanič) 119
Pregreta voda (Janez Strnad) 121
Radioaktivni tulij namesto rentgenske cevi (Juvencij Kalan) 123
Lasasti kovinski kristali (Matija Žumer) 125
Merjenje hrapavosti (Jože Pahor) 127
Omegatron (Janez Dekleva) 172
Magnetni ohlajevalni stroj (Sergej Pahor) 175
Celica s pregreto tekočino namesto wilsonske celice (Nikolaj Bezić) . . 179
Občutljivost kože za vibracije (Marko Žlender) 180

Domače vesti in šola

Jožef Reisner (Jože Povšič) 35
Dvestoletnica rojstva Jurija Vege (Jože Povšič) 36
Koliko fizike znajo slušatelji v začetku leta na univerzi (Anton Moljk) . 37
Sklepi II. kongresa matematikov in fizikov 38
O srednješolski matematiki (Niko Prijatelj) 79
Instrumentarij za osnovne poskuse iz optike (Anton Peterlin in Rajko Korbar) 81
K obravnavanju toka skozi kondenzator v srednji šoli (France Ahlin) . . 84
Magnusov efekt najpreprosteje (France Ahlin) 84
Nazornost v šoli (France Ahlin) 85
Kaj bodo delali inženirji fizike (Niko Bezić) 86
Opis dela pri fizikalnih vajah na učiteljišču v Ljubljani (Ljuba Kozina) . 87
Občni zbor Društva matematikov in fizikov LRS (Tomo Skubic) 89
Meritev toplotne prevodnosti kot šolski poskus (Rajko Korbar, I. Kuščer) 129
Model kristalne mreže — z milnimi mehurčki (Marjan Ribarič) 130
Kakšno je znanje fizike pri izpitih na univerzi (Ivan Kuščer) 134
Delo sekcije za dvig pouka in predavanja Društva matematikov in fizikov LR Slovenije v letih 1954 in 1955 (Marta Klopčičeva) 135
Ob uvedbi opisne geometrije v naš srednješolski program (Oton Sajovic) 181
Problematika pouka matematike v obveznih šolah (Jože Žabkar) 185

Dopisi 187

Nove knjige 48, 90, 188

Odgovori 41, 91, 137, 191

Vprašanja 48, 96, 144, 191

IZ UPRAVE

S 4. številko zaključujemo IV. letnik. Vsem, ki niso poravnali naročnine, smo priložili položnico. Prosimo jih, da naročnino čimprej nakažejo, ker nam s tem prihranijo nepotrebno delo opominjanja, sebi pa nezaželene stroške.

V prihodnjem šolskem letu 1956-57 bomo izdali Obzornik v 4 številkah in v enakem obsegu kot letos, naročnina bo ostala ista — 250 din, za tiste naročnike pa, ki plačajo po računu ali pa na opomin, je naročnina 280 din.

Na zalogi imamo še vse številke I., II., III. in IV. letnika razen 1. številke I. letnika. I. letnik stane 120 din, posamezna številka 50 din, II. letnik stane 250 din, posamezna številka 90 din, III. letnik stane 250 din, posamezna številka 90 din, IV. letnik 250 din, posamezna številka 100 din.

Iz 4. številke Obzornika 1951 smo ponatisnili tabelo *Osnovne fizikalne konstante* na kartonu 32 × 33 cm. Dobite jih za ceno 20 din za kos pri prof. Štalcu Ivanu, Ljubljana, I. gimnazija, Vegova ul. 4. Prav tam lahko poravnate tudi naročnino za Obzornik.

Društvo matematikov in fizikov NRH izdaja za vso državo »*Matematičko-fizički list* za učenike srednjih škola«. Letnik ima 4 številke, med počitnicami ne izhaja. Letna naročnina je 200 din.

Profesorji srednjih šol, priporočajte list dijakom! Naročila in naročnino pošiljajte na naslov:

Matematičko-fizički list, Zagreb, Ilica 16/III, p. p. 165 ali na čekovni račun št. 401-T-1080.

Zveza Društev matematikov in fizikov FLRJ izdaja časopis:

Nastava matematike i fizike

Naročnina je za člane vseh republiških društev matematikov in fizikov 300 din, za ostale naročnike, šole in biblioteke 400 din. Naročila in naročnino pošiljajte podjetju »Nolit«, Beograd, Ulica Narodnog fronta 76, ali na ček. račun št. 1031-T-627 z označbo »Za časopis Nastava matematike i fizike«. Časopis naročite lahko tudi pri našem Društvu.

Društvo matematičara i fizičara N. R. Hrvatske poziva sve, koji se zanimaju matematičko-fizičkim naukama, da se pretplate na

Glasnik matematičko-fizički i astronomski

i sarađuju u njemu.

Zaista ne bi smjelo biti ni jednog kulturnog radnika, koji se bavi matematičko-fizičkim naukama, kao ni prosvjetne ustanove, koja nije pretplatnik Glasnika. Pretplatom i suradnjom u svojem naučnom i stručnom časopisu pokazujete u kolikoj mjeri pratite i podupirete razvitak i napredak svoje struke. Širite također Glasnik u svom krugu, jer time podupirete razvitak matematičko-fizičkih nauka u svojoj okolini.

Prijave pretplate slati na administraciju Glasnika: Zagreb, Ilica 16/III. Pretplata za god. 1956 iznosi 480.— din.

Obzornik za matematiko in fiziko izhaja vsak tretji mesec. Izdaja ga Društvo matematikov in fizikov LRS. Urejuje ga uredniški odbor: I. Kuščer, A. Moljk, N. Prijatelj, I. Vidav. Odgovorni in tehnični urednik: I. Štalec. Upravo vodi I. Štalec. — Tiska tiskarna »Ljudske pravice« v Ljubljani. — Naročnina je 250 din, za podjetja in ustanove, ki plačajo po računu in za naročnike, ki plačajo po terjatvi 280 din. Posamezna številka 100 din. Naročnino nakažite na naš čekovni račun 60-KB-1-Ž-207. Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov:

Obzornik za matematiko in fiziko, Ljubljana, poštni predal 253.