OBZORNIK
ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA
1955-56
IV. št. 3

VSEBINA

Članki

Stran

O definicijah matematične verjetnosti (A. Vadnal) 97
Radioastronomija (S. Breskvar) 105
Molekulski elektronski spektri (S. Bratož) 115

Novice

Peti Hilbertov problem (F. Križanič) 119
Pregreta voda (J. Strnad) 121
Radioaktivni tulij namesto rentgenske cevi (J. Kalan) 123
Lasasti kovinski kristali (M. Žumer) 125
Merjenje hrapavosti (J. Pahor) 127

Šola

Meritev toplotne prevodnosti kot šolski poskus (R. Korbar, I. Kuščer) . . 129
Model kristalne mreže — z milnimi mehurčki (M. Ribarič) 130
Kakšno je znanje fizike pri izpitih na univerzi (I. Kuščer) 134
Delo sekcije za dvig pouka in predavanja Društva matematikov in fizikov LR Slovenije v letih 1954 in 1955 (M. Klopčičeva) 135

Odgovori 137

Vprašanja 144

Na III. strani ovitka je obvestilo o tečajih za opisno geometrijo in fizikalno eksperimentiranje.

UREDNIŠTVO JE PREJELO V ZAMENO

Elektrotehniški vestnik, Ljubljana 1955, XXIII, št. 9—10.
Farmacevtski vestnik, Ljubljana 1955, VI, št. 9—10, 11—12.
Glasnik mat.-fiz. i astr., Zagreb 1955, T. 10, No 1—2.
Gospodarski vestnik, Ljubljana 1955, IV, št. 87—101; 1956, V, št. 1—13.
Matematičko fizički list, Zagreb 1955-56, VI, št. 2.
Philip's Technische Rundschau, 1955, 17, No 5, 6, 7, 8.
Proteus, Ljubljana 1955-56, XVIII, št. 3, 4—5, 6, 7.
Sodobna pedagogika, Ljubljana 1955, VI, št. 9—10.
Zdravstveni vestnik, Ljubljana 1955, XXIV, št. 11—12; XXV, št. 1.
Zobozdravstveni vestnik, Ljubljana 1955, X, št. 5—6.

LETO IV 1955-56 OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO ŠTEV. 3 1. III. 1956

O DEFINICIJAH MATEMATIČNE VERJETNOSTI

A. VADNAL

1. *Splošna oznaka verjetnostnega računa*

Verjetnostni račun je posebna panoga uporabne matematike in je po svoji metodi soroden vsem drugim njenim panogam, kakor n. pr. geometriji, teoretični mehaniki itd. Kakor vsaka panoga uporabne matematike obravnava tudi verjetnostni račun določeno področje našega izkustva; njegova naloga je, zgraditi svojemu področju izkustva ustrezen model ali sliko, ki kolikor mogoče dobro in adekvatno upodablja realne pojave in odnose s tega področja. Pravilnost in uporabnost takega modela preverjamo s prakso, ki nam edina lahko daje potrdilo o vrednosti kakega modela ali teorije.

Na prvih stopnjah svojega razvoja je bil verjetnostni račun dokaj pomanjkljiv: njegove metode so bile logično še nedognane, njegove osnove slabo utemeljene, povrh pa se je še ukvarjal s problemi, ki marsikdaj niso imeli niti teoretične niti praktične vrednosti. To pa nikakor ne velja za verjetnostni račun na današnji stopnji, ker sedaj po logični dognanosti prav nič ne zaostaja za drugimi panogami matematike. Tudi praksa je docela potrdila uporabnost verjetnostnega računa; dokaze za to daje zlasti njegova uporabnost v zavarovalstvu, v ekonomiji, v statistiki, v biologiji, v teoretični fiziki, v tehniki, pri najrazličnejših hazardnih igrah itd.

Verjetnostni račun se ukvarja z verjetnostmi posameznih dogodkov ter skuša odkrivati zakone in odnose, po katerih je mogoče iz danih znanih verjetnosti izračunati nove neznane verjetnosti. Določevanje ali merjenje izhodiščnih verjetnosti ni naloga verjetnostnega računa, ampak je stvar prakse; podobno je n. pr. v geometriji, ki se pravzaprav tudi ne ukvarja s praktičnim merjenjem realnih obravnavanih tvorov, temveč le z medsebojnimi odnosi.

2. *Nekaj važnejših pojmov verjetnostnega računa*

V verjetnostnem računu imamo pogostoma opraviti s pojmi, ki jih poznamo že iz vsakdanjega življenja, ki pa imajo tam drugačno, zlasti pa bolj nedoločeno vsebino kakor isti pojmi verjetnostnega računa. V naslednjem bomo najprej definirali nekaj takih pojmov.

1. Poskus (vzorec). Pojem poskus ima v verjetnostnem računu mnogo širšo vsebino kakor v fiziki. V verjetnostnem računu je poskus vsako hote ali nehote napravljeno dejanje, vsak izbor, vsak nastop, vsako nehanje itd. Poskusi so n. pr. met kocke. potegnitev karte, potegnitev krogle iz žare, nastop molekule v določenem delu prostora, rojstvo otroka itd. Opraviti imamo zlasti

s takimi poskusi, ki se vsaj v načelu lahko poljubno mnogokrat ponove pri pogojih, ki so praktično bistveno enaki.

2. Znak (spremenljivka). Vsak poskus se lahko konča z nekim izidom, ki ga lahko obravnavamo z različnih vidikov. Vidik, s katerega obravnavamo izide poskusov, imenujemo znak. Rojstvo otroka lahko obravnavamo n. pr. glede na spol novorojenca, na njegovo težo, na starost matere, na poklic očeta itd. Poskuse obravnavamo vedno po kakem znaku, ki ga predpišemo vnaprej.

3. Vrednost znaka (spremenljivke) ali dogodek. Glede na predpisani znak ima poskus lahko več izidov; vse mogoče izide imenujemo vrednosti znaka ali dogodke. Ako obravnavamo mete kocke po številu pik, ki jih vržemo pri posameznem metu, ima ta znak 6 različnih vrednosti, to se pravi, da lahko nastopi 6 različnih dogodkov, in sicer naslednja števila pik: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

4. Slučajni dogodek. Ako je pri določenem poskusu in pri upoštevanih pogojih mogoče vnaprej napovedati, kateri dogodek bo nastopil, tedaj sta poskus in dogodek v kavzalni zvezi in je dogodek nujna posledica poskusa; ako pa je iz kakršnihkoli razlogov nemogoče v naprej napovedati, ali bo dogodek nastopil ali izostal, tedaj imenujemo tak dogodek slučajen. Ker imamo v verjetnostnem računu opraviti povečini s slučajnimi dogodki, jih kar na kratko imenujemo dogodke.

5. Kolektiv (populacija). Kolektiv je vsaka množica poskusov, ki zadošča sledečima zahtevama: a) Glede na predpisani znak ustreza vsakemu poskusu samo po ena vrednost tega znaka ali: vsakemu poskusu ustreza samo po en dogodek; b) število poskusov je mogoče pri vseh enakih bistvenih pogojih poljubno večati. Meti kocke n. pr. tvorijo kolektiv, ker ustreza vsakemu metu samo eno število pik in ker je mogoče število metov poljubno večati, ne da bi se pri tem pogoji metov bistveno spremenili.

6. Vzorčni prostor. Dogodke, ki ustrezajo glede na kak znak določenemu kolektivu poskusov, si lahko geometrično ponazorimo s točkami ali pa z množicami točk. Vsakemu enostavnemu ali elementarnemu dogodku ustreza po ena točka; sestavljenim dogodkom pa ustrezajo množice točk, katerih točke ustrezajo elementarnim dogodkom, iz katerih so ti dogodki sestavljeni. Pri metu kocke n. pr. so enostavni dogodki vsa mogoča števila pik 1, 2, 3, 4, 5, 6; te dogodke upodobimo s šestimi točkami. Dogodek, da vržem s kocko sodo število pik, pa je sestavljen dogodek in sicer iz dogodkov 2, 4, 6; ta dogodek upodabljajo tri točke.

Vse točke, ki upodabljajo pri določenem kolektivu vse mogoče elementarne dogodke, imenujemo vzorčni prostor tega kolektiva. Vsaka množica točk, ki je del vzorčnega prostora, upodablja kak dogodek, ki pa seveda ni elementaren, ampak sestavljen.

Kolektiv je alternativa, ako ima ustrezni vzorčni prostor samo dve točki; alternativo tvorijo n. pr. rojstva otrok, ki jih proučujemo glede na spol. Kolektiv je končen, ako ima ustrezni vzorčni prostor končno mnogo točk. Kolektiv je zvezen, ako je ustrezni vzorčni prostor zvezna množica točk; zvezni kolektiv tvorijo n. pr. rojstva otrok, ki jih proučujemo glede na njihovo težo.

7. Relativna frekvenca. Ako je dogodek A nastopil pri m poskusih n-krat, tedaj imenujemo ulomek n/m relativno frekvenco dogodka A.

3. *Apriorna definicija verjetnosti*

Prvi začetki verjetnostnega računa se nanašajo na probleme, pri katerih je bilo mogoče definirati in izračunati verjetnosti na osnovi kakih očividnih hipotez o geometrični ali fizikalni naravi poskusov. To je bilo n. pr. mogoče pri metih kocke, pri potegnitvah raznobarvnih krogel iz žare, pri potegnitvah kart itd., torej pri shemah, ki očitujejo kake geometrične ali fizikalne pravilnosti. Ker temelji taka definicija verjetnosti na kakih hipotetičnih geometričnih in fizikalnih lastnostih obravnavanih shem in pri tem ne upošteva dejansko napravljenih poskusov, jo imenujemo apriorno definicijo verjetnosti.

Laplace je v svojem delu: *Théorie analytique de probabité* leta 1812 prvi natančno formuliral to definicijo verjetnosti, izhajajoč pri tem iz hipoteze o simetriji, indiferenci oziroma enaki verjetnosti dogodkov. Glede globljega pomena teh pojmov, ki tvorijo osnovo in izhodišče za apriorno definicijo verjetnosti, obstajata dve diametralno nasprotni mnenji. Po prvem mnenju sta dva dogodka simetrična, indiferentna oziroma enako verjetna, ako nimamo nobene informacije za to, da bi prvi dogodek prej nastopil kot drugi. Po drugem mnenju pa sta dva dogodka simetrična, indiferentna ali enako verjetna, ako poznamo vse pogoje za nastop obeh dogodkov in ako so vsi ti pogoji po parih enaki. Tako sta n. pr. dogodek, da vržemo s kocko 3 in dogodek, da vržemo 6, simetrična, ker lahko predpostavimo, da so vsi pogoji za met 3 ali za met 6 enaki. Nasprotno pa ne moremo predpostavljati simetrije med dogodkom, da je novorojenec deček, in dogodkom, da je novorojenec deklica, ker nimamo za tako predpostavko nobenega razloga.

Laplace je apriorno verjetnost definiral takole: Verjetnost dogodka A je enaka kvocientu števila n za dogodek A ugodnih možnosti in števila m vseh možnosti, pri pogoju, da so vse možnosti simetrične, indiferentne oziroma enako verjetne:

$$(A) = n/m \tag{1}$$

Po tej definiciji je verjetnost, da vržemo s kocko 6, enaka 1/6. Iz definicije verjetnosti (1) sledi, da je:

$$0 \leqq (A) \leqq 1. \tag{2}$$

Verjetnost nemogočega dogodka je enaka 0, verjetnost gotovega dogodka pa 1.

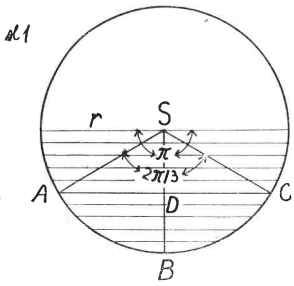
Apriorna definicija verjetnosti se je v praksi prav dobro obnesla zlasti pri hazardnih igrah, pri mnogih za potrebe verjetnostnega računa umetno napravljenih shemah, pa tudi v teoretični fiziki. Po tem pojmovanju matematična verjetnost ni neka subjektivna kategorija, ki bi bila odvisna od opazovalca, ampak je realna, objektivna fizikalna količina, ki pripada obravnavani shemi. Po tem pojmovanju je n. pr. verjetnost 1/6, da vržemo s pravično kocko 6, neka fizikalna količina, ki pripada kocki in ki jo je mogoče meriti ter izraziti s številom, analogno kakor dolžino ali specifično težo kocke.

Apriorna definicija verjetnosti pa ima tudi nekaj pomanjkljivosti. Zaradi teh pomanjkljivosti, zlasti pa zaradi nekritične uporabe te definicije, je prišel v prejšnjih stoletjih verjetnostni račun na tako slab glas, da so mu nekateri odrekali znanstveno vrednost. Ta definicija je preozka, ker dopušča uporabo verjetnostnega računa samo v primerih, ko lahko predpostavljamo simetrijo, indiferenco oziroma enako verjetnost dogodkov, to pa je v praksi mogoče pravzaprav samo pri enostavnih shemah, ki si jih je človek ustvaril za potrebe

hazardnih iger in pa pri shemah, ki se dajo na te sheme reducirati. Nasprotno pa je zaradi take ozkosti izključena iz verjetnostnega računa vsa statistika.

Apriorna definicija verjetnosti pa je preozka tudi zato, ker obravnava samo končne kolektive, za neskočne pa izgubi vsak smisel. Nepravilno posplošev anje apriorne definicije verjetnosti na zvezne kolektive je privedlo do znanih Bertrandovih paradoksov, ki so brez dvoma precej doprinesli k slabemu ugledu verjetnostnega računa v prvih razdobjih njegovega razvoja. Za primer navajamo Bertrandov paradoks, ki ga srečamo pri reševanju sledeče naloge: Kolika je verjetnost, da je tetiva, ki jo na srečo potegnemo v krogu s polmerom r, manjša od $r\sqrt{3}$? Ne da bi na splošnosti kaj izgubili, študiramo tetive, ki stoje pravokotno na radiju SB. Tetiva AC je enaka $r\sqrt{3}$, tetive med D in S so večje od $r\sqrt{3}$, tetive med D in B pa so manjše od $r\sqrt{3}$. Točka D razpolavlja radij SB. Upoštevajoč središčno razdaljo tetiv je po definiciji (1) verjetnost, da je tetiva manjša od $r\sqrt{3}$ enaka:

$$BD/BS = (r/2)/r = 1/2.$$



Izračunajmo zahtevano verjetnost še s pomočjo središčnih kotov. Tetivi AC pripada središčni kot $2\pi/3$, manjšim tetivam pripadajo koti, ki so manjši od $2\pi/3$, večjim tetivam pa pripadajo koti od $2\pi/3$ do π. Po definiciji (1) je verjetnost, da je tetiva manjša od $r\sqrt{3}$, enaka:

$$(2\pi/3)/\pi = 2/3.$$

Izhajajoč iz apriorne definicije verjetnosti smo torej dobili dva protislovna rezultata.

Apriorna definicija verjetnosti ima še ta bistveni nedostatek, da temelji na hipotezi enake verjetnosti dogodkov. Dejanske veljavnosti take hipoteze namreč ne moremo nikdar geometrično ali fizikalno preveriti. Zaradi tega je apriorna definicija verjetnosti pravzaprav tavtologija. Njeno utemeljenost lahko potrdi samo praksa, in sicer z dejansko napravljenimi poskusi; k problemu take preveritve s prakso pa se bomo vrnili pozneje pri razmotrivanju aposteriorne definicije verjetnosti.

V naslednjem navajamo primer iz fizike, ki kaže, da lahko na različne načine predpišemo posameznim dogodkom enake verjetnosti.

V statistični mehaniki se razdeli fazni prostor, ki ustreza hitrostim delcev, na določeno število enakih celic, tako da pride vsak delec v eno celico. Denimo, da imamo n celic in r delcev, ki jih pa drugega od drugega razlikujemo. Rešimo nalogo, na koliko različnih načinov je mogoče te delce porazdeliti po celicah! Vse mogoče različne porazdelitve delcev po celicah tvorijo variacije n elementov reda r s ponavljanjem; teh variacij pa je n^r. Če predpostavimo, da ustreza vsaki izmed teh različnih možnosti, t. j. vsaki izmed teh variacij, enaka verjetnost, je le-ta enaka $1/n^r$. Statistika, ki razlikuje posamezne delce in ki predpostavlja navedeno hipotezo o enaki verjetnosti vseh teh možnosti, se imenuje Maxwell-Boltzmannova statistika. Ta statistika se je odlično obnesla v raznih panogah fizike delcev.

Moderna fizika pa je pokazala, da te hipoteze in na njej sloneče statistike ne smemo posplošiti na vse delce in da veljajo za nekatere delce

drugačne statistike. Izkazalo se je, da velja n. pr. za fotone Bose-Einsteinova statistika, katere bistvo je v naslednjem: Tu ne razlikujemo delcev med seboj, zato nas zanima samo, koliko delcev je v posameznih celicah, ne pa, kateri so ti delci. Zaradi tega tvorijo vse mogoče porazdelitve delcev po celicah kombinacije n elementov reda r s ponavljanjem; vseh teh različnih kombinacij oziroma porazdelitev pa je $\binom{n+r-1}{r}$. Če vzamemo po Bose-Einsteinu, da so vse te možnosti enako verjetne, ima vsaka izmed njih verjetnost $1/\binom{n+r-1}{r}$.

Za elektrone n. pr. pa velja Fermi-Diracova statistika, katere bistvo je v naslednjem: Tu ne razlikujemo delcev med seboj; zato nas zanima samo, koliko delcev je v posameznih celicah, ne pa, kateri so ti delci. Nadalje ne more biti v eni celici več kot po en delec; zaradi tega je število celic vedno večje od števila delcev. Posledica teh zahtev je, da tvorijo vse mogoče porazdelitve delcev po celicah kombinacije n delcev reda r brez ponavljanja; vseh teh različnih kombinacij ali porazdelitev pa je $\binom{n}{r}$. Če so vse te možnosti enako verjetne, ima vsaka izmed njih verjetnost $1/\binom{n}{r}$.

4. *Subjektivistično pojmovanje verjetnosti*

Z zgodovinskega vidika je subjektivistično pojmovanje verjetnosti najstarejše in sega daleč nazaj v XVII. stoletje, v čas, ko je verjetnostni račun pravzaprav šele nastajal. Prvi vidnejši predstavnik subjektivističnega pojmovanja verjetnosti je Bernoulli, ki je razložil svoje nazore v knjigi *Ars coniectandi* l. 1713. Med modernimi subjektivisti navajamo naslednje avtorje z njihovimi deli: J. M. Keynes: A Treatise on Probability, 1921; H. Jeffreys: Scientific Inference, 1931 in Theory of Probability, 1939; R. Carnap: Logical Foundation of Probability, 1950.

Po subjektivističnem pojmovanju je verjetnost kakega dogodka številčna mera za stopnjo našega pričakovanja tega dogodka. Po tem pojmovanju verjetnost ni nekaj objektivnega, ni fizikalna lastnost obravnavane sheme, ampak je nekaj subjektivnega in nekaka mera opazovalčevega psihološkega stanja.

Izhajajoč iz takega pojmovanja verjetnostnega računa so subjektivisti razširili njegovo področje na sodbe, s čemer so hoteli doseči zadostno širino računa, ki so jo pogrešali pri Laplaceovi definiciji. Subjektivisti pripisujejo določeno verjetnost ne samo dogodkom, ampak tudi sodbam. Zanimajo jih n. pr. taka vprašanja: Kolika je verjetnost, da govori zaslišana priča resnico? Kolika je verjetnost, da bo sklenjeni zakon srečen? itd.

Glede pojmovanja pa tudi glede predmeta verjetnostnega računa je subjektivistična smer v ostrem nasprotju z objektivistično smerjo, zlasti pa s statističnim pojmovanjem verjetnostnega računa.

5. *Aposteriorna definicija verjetnosti*

V sredi prejšnjega stoletja se je začelo polagoma razvijati docela novo pojmovanje verjetnosti, in sicer z razvojem statistike, ki se je vedno močneje uveljavljala kot raziskovalna metoda v raznih znanostih, pa tudi kot samostojna znanost. Po tem novem pojmovanju je verjetnostni račun pravzaprav statistična znanost. Najvidnejši predstavnik te nove smeri je R. von Mises, ki je v svojem delu *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen Physik* l. 1919 utemeljil in razvil statistično pojmovanje verjetnostnega računa.

Po tem pojmovanju se verjetnostni račun ne more ukvarjati z verjetnostmi sodb, pač pa se ukvarja z verjetnostmi dogodkov v kolektivih poskusov, ki jih dejansko napravimo ali opazujemo. Zaradi tega je verjetnostni račun statistična in empirična znanost. Po tem pojmovanju ni verjetnost dogodka nekaj subjektivnega, ampak je neko število, ki izraža objektivno fizikalno lastnost sheme, s katero delamo poskuse.

O izidu posameznega poskusa ali pa o izidih prav majhnega števila poskusov ne more verjetnostni račun ničesar naprej napovedati; zato za te primere ne veljajo zakonitosti verjetnostnega računa; le-ti veljajo šele za razmeroma velika števila poskusov, in sicer tem bolj natančno, čim večje je njih število. Naloga verjetnostnega računa je odkrivati zakone, ki veljajo za zelo velika števila poskusov, oziroma, natančneje rečeno, za kolektive poskusov.

Osnovo verjetnostnega računa tvori kolektiv; brez njega je nesmiselno govoriti o verjetnosti kakega dogodka. Kolektiv pa raziskujemo s pomočjo relativne frekvence dogodka. Pri najrazličnejših serijah poskusov je izkušnja pokazala, da se razmeroma zelo pozne relativne frekvence obravnavanega dogodka med seboj le malo razlikujejo, in to tem manj, čim večja je serija poskusov. Pri dovolj velikem številu poskusov je relativna frekvenca dogodka skoraj konstantna in se približuje z naraščajočim številom poskusov neki konstanti. To pravilnost v kolektivih poskusov so opazili že Pascal, Fermat, Huygens, Bernoulli itd., kar jim je dalo povod za prva razmotrivanja v verjetnostnem računu. To izkustvo je uporabil zlasti Mises pri svoji utemeljitvi verjetnostnega računa. Izhajajoč iz tega izkustva, je formuliral svoj I. aksiom verjetnostnega računa, ki se glasi takole:

I. Če narašča število poskusov čez vse meje, tedaj konvergira relativna frekvenca dogodka proti neki limiti.

Izkušnja pa je pokazala še tole: Relativna frekvenca se približuje isti konstanti, pa naj vzamemo katerokoli zaporedje poskusov, pri edinem pogoju, da izbira ni odvisna od izidov poskusov. Isto konstanto dobimo n. pr., če upoštevamo vsak drugi poskus, vsak deseti itd. To izkustvo je uporabil Mises pri formulaciji svojega II. aksioma, ki se glasi takole:

II. Ako izbor poskusov ni odvisen od izida poskusov, tedaj limita relativne frekvence dogodka ni odvisna od izbora poskusov.

Ta aksiom je zelo daljnosežen in mu igralci hazardnih iger nočejo verjeti. Ta aksiom pomeni, da ni mogoče najti pri določenem tipu pravične ali neugodne igre kak sistem igranja, ki bi zagotovil dobiček. Iskati sistem igranja, ki bi zagotovil dobiček pri pravični ali neugodni hazardni igri in ki bi ovrgel veljavnost navedenega aksioma, je prav tako prazen posel, kakor iskanje perpetuum mobila, ki bi ovrgel fizikalni aksiom o ohranitvi energije.

Izhajajoč iz navedenih dveh aksiomov, definira Mises verjetnost takole: Verjetnost dogodka je enaka limiti relativne frekvence dogodka pri pogoju, da narašča število poskusov čez vse meje in da so vsi poskusi napravljeni pri enakih bistvenih pogojih:

$$(A) = \lim_{m \to \infty} \frac{n}{m} \tag{3}$$

To definicijo imenujemo aposteriorno definicijo verjetnosti, ker temelji na dejansko opravljenih poskusih, torej na izkustvu. Po njej je torej verjetnost

neko število med 0 in 1, pri čemer ustreza gotovemu dogodku verjetnost 1, nemogočemu dogodku pa verjetnost 0. Obratno pa ne drži! Ni namreč vsak dogodek, ki ima verjetnost 1, gotov. Tako ima n. pr. dogodek A, ki je v alternativi nastopil v naslednjem zaporedju:

ABAABAAAABAAAAAAAABAAAAAAAAAAAAAAAB...

relativno frekvenco, ki konvergira proti 1 in zato verjetnost 1, toda ni gotov, ker ne nastopi pri vsakem poskusu. Analogno velja tudi za verjetnost 0. Glavne zasluge Misesa so v tem, da je uvedel v verjetnostni račun pojem kolektiva, da je uvedel kolektivu ustrezni vzorčni prostor, s čemer je omogočil uporabo metod teorije množic, in da je odstranil iz verjetnostnega računa mnoge nematematične in intuitivne elemente ter ga postavil na trdna in realna tla izkustva.

Toda tudi to pojmovanje ima še nekaj nedostatkov. Pri aposteriorni definiciji verjetnosti se zahteva ponavljanje poskusov pri popolnoma enakih pogojih, kar je praktično pravzaprav nemogoče. Nadalje pa tudi ni mogoče natančno določiti verjetnost dogodka, ker števila poskusov praktično ne moremo večati čez vse meje.

Kljub temu, da je ta definicija verjetnosti z relativno frekvenco dokaj enostavna in privlačna in se je zato hitro uveljavila, je pri nadaljnji izgradnji verjetnostnega računa privedla do resnih težav in do tako velikih komplikacij, ki so zameglile prvotno enostavnost. Aposteriorna definicija verjetnosti ima še to neugodnost, da meša teoretični model z empiričnimi elementi s tem, da definira verjetnost z limito neke empirične količine.

Težave, ki so nastale pri aposteriorni definiciji verjetnosti zaradi limitnega procesa, so nekateri zagovorniki aposteriornega pojmovanja verjetnosti skušali odpraviti tako, da so opustili limitni proces.

Kakor smo že omenili, pokaže izkustvo, da se dovolj pozne relativne frekvence dogodka razmeroma malo med seboj razlikujejo in da se stekajo okoli neke konstante. Izkušnja torej pokaže, da gre pri tem za nekaj konstantnega, kar je bistveno obravnavanim poskusom. Ta fizikalna konstanta, za katero je relativna frekvenca njena eksperimentalno izmerjena vrednost, je po tej koncepciji verjetnost dogodka v obravnavanem kolektivu poskusov. Pri tem pojmovanju torej verjetnost ni natančno definirana pa tudi ne natančno izmerljiva, vendar pa jo je mogoče poljubno natančno izmeriti, če le večamo število poskusov. Glede merljivosti verjetnosti velja torej isto kar glede merljivosti vsake druge fizikalne količine.

Tako pojmovanje verjetnosti, ki je eksplicitno pravzaprav niti ne definira, tvori nekak prehod k eksaktno zgrajenemu verjetnostnemu računu, ki ga bomo obravnavali v naslednjem poglavju.

Vrnimo se k empiričnemu preverjanju apriorne definicije verjetnosti, katerega smo omenili v 3. poglavju. Aposteriorna verjetnost namreč omogoča empirično preverjanje apriorne verjetnosti. To preverjanje temelji na Bernoullijevem izreku, ki ga ne bomo dokazovali in ki se glasi takole:

Če je m število poskusov, pri katerih more nastopiti dogodek A, če je apriorna verjetnost dogodka A pri vseh poskusih konstantno enaka (A), če je n

število poskusov, pri katerih je dogodek A nastopil in če je h poljubno majhno pozitivno število, tedaj se približuje verjetnost veljavnosti neenačbe:

$$\left| \frac{n}{m} - (A) \right| < h \tag{4}$$

enoti, t. j. gotovosti, če je le število poskusov zadosti veliko.

Po Bernoullijevem izreku se torej apriorna verjetnost dogodka poljubno malo razlikuje od relativne frekvence, če je le število poskusov zadosti veliko. Zaradi tega preverimo upravičenost hipoteze o enaki verjetnosti dogodkov tako, da napravimo zadosti veliko število poskusov; hipotezo imamo za utemeljeno tedaj, če se relativna frekvenca le malo razlikuje od apriorne verjetnosti. Zaradi praktičnega preverjanja te hipoteze so bili napravljeni številni poskusi, ki so v mnogih primerih potrdili pravilnost suponirane hipoteze. Kot primer navajamo števila metov in ustrezne relativne frekvence, s katerimi so preverjali simetrijo obeh strani novca naslednji eksperimentatorji:

Eksperimentator	Število metov	Relativna frekvenca grbov
Buffon	4040	0,51
Morgan	4092	0,5005
Griffith	8175	0,5004
Pearson	12 000	0,5016
Pearson	24 000	0,5005

6. Eksaktna utemeljitev verjetnostnega računa

Mnoge težave, ki so nastopale v zvezi z eksaktno utemeljitvijo verjetnostnega računa, so v zadnjih 30 letih premostili zlasti ruski in francoski matematiki. Med temi so se odlikovali zlasti A. N. Kolmogorov, A. J. Hinčin, M. Fréchet.

Tej generaciji matematikov je uspelo, sledeč aksiomatični metodi, utemeljiti verjetnostni račun tako precizno, da je postal čista matematična teorija, ki zadošča vsem zahtevam moderne aksiomatike.

Po modernem pojmovanju se ukvarja verjetnostni račun s statističnimi verjetnostmi dogodkov v kolektivih poskusov, ki jim ustrezajo določeni vzorčni prostori. Ker naj vsebuje verjetnostni račun samo matematične elemente, ni potrebno dajati nobene spoznavno teoretske ali filozofske definicije verjetnosti. Verjetnosti so kratko malo dane ter ne razpravljamo o njihovem bistvu, analogno kakor tudi v geometriji ne razpravljamo o tem, kaj je točka, ali v fiziki, kaj je masna točka.

Moderni verjetnostni račun je zgrajen na sistemu aksiomov, ki zadošča vsem zahtevam aksiomatike.

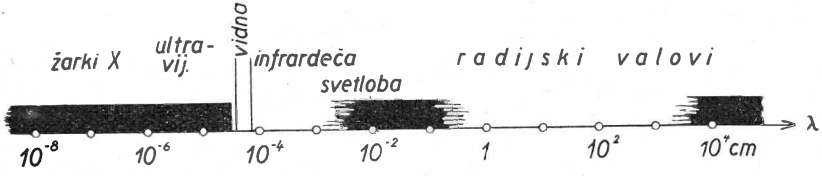
Tako zgrajen verjetnostni račun subsumira na eni strani apriorno pojmovanje verjetnosti, kar je v primeru, ko predpišemo vsem točkam vzorčnega prostora enake verjetnosti; na drugi strani pa subsumira tudi aposteriorno pojmovanje verjetnosti, kar nastopi v primeru, ko predpišemo posameznim točkam vzorčnega prostora verjetnosti oziroma relativne frekvence, ki jih dobimo po dejansko opravljenih poskusih.

RADIOASTRONOMIJA

S. BRESKVAR

Za astronomska opazovanja je ozračje naše Zemlje velika ovira. Neprestano prelivanje različno toplih in zato različno gostih zračnih plasti spači zvezdoslovcu slike v daljnogledu in na fotografski plošči. Nadaljnje težave mu povzročata ekstinkcija in refrakcija, zaradi katerih se mora pri natančnih opazovanjih omejiti le na razmeroma majhno okolico zenita. Vodne pare in razni trdni delci, ki jih vsebujejo v glavnem najnižji predeli ozračja, ga silijo, da si poišče mesta za svoja opazovanja visoko v gorah, kjer se vse te hibe občutijo v manjši meri. Neprimerno večja nevšečnost ozračja od navedenih pa je, da absorbira ali odbija večino elektromagnetnih valov ali žarkov, prihajajočih iz vesolja. In vendar so ti valovi, če odštejemo redke izpodnebnike, ki tu pa tam padejo na Zemljo, edina vez med nami in nebesnimi telesi!

Do sedaj poznamo dvoje presledkov, dvoje »oken« v absorpcijskem spektru zraka, skozi kateri predirajo elektromagnetni valovi bolj ali manj neovirano. Eno je odprto vidnim ter sosednim ultravijoličnim in infrardečim



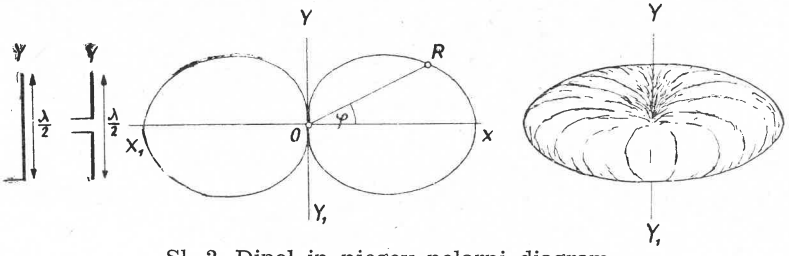
Sl. 1. Absorpcijski spekter ozračja.

žarkom. Na strani krajših valovnih dolžin je meja tega »optičnega« okna — do pred dvajsetimi leti edinega, ki nam je dopuščalo razgled po svetovnem prostoru — zelo ostra in leži že pri $\lambda = 0{,}3\ \mu$. Povzroča jo ozon, ki na tem mestu močno absorbira. Na drugi strani je meja bolj zabrisana, ker je tam precej absorpcijskih pasov, ki jih ustvarjajo CO_2, ozon in vodni hlapi. V povprečju je ta meja nekje pri $\lambda = 16\ \mu$. Širina optičnega okna v logaritemskem merilu meri tedaj 5 do 6 oktav. V zadnjih letih se je Amerikancem posrečilo s pomočjo raket prebiti ozonsko zaporo in fotografirati sončni spektrum do približno $\lambda = 0{,}24\ \mu$. Drugo okno v spektru ozračja pa prepušča žarke, ki so že v območju kratkih in ultrakratkih radijskih valov. Njihova dolžina meri nekako od 0,25 cm do 20 m. Krajše valove absorbirajo predvsem vodne molekule, daljši se pa odbijajo od ionosfere nazaj v prostor. Širina »radijskega« okna, ki sta mu meji močno zabrisani, je veliko večja od optičnega, saj meri najmanj enajst oktav (slika 1). Vse tisto, kar vstopa skozi to okno, je predmet nove veje zvezdoslovja — *radioastronomije*. V sledečih vrstah si bomo ogledali na kratko sredstva in uspehe te najmlajše veje raziskavanja nebesnih teles.

Naravno je, da so sredstva in načini tako mlade znanosti obremenjeni z otroškimi boleznimi. Sprejemniki radijskih valov imajo še precej pomanjkljivosti, ki jih pa tehnika počasi in vztrajno premaguje. Njihova najhujša hiba je premajhna smerna ločljivost, ki meri v večini primerov po več kotnih stopinj; le redko se zostri na nekaj kotnih minut ali celo del minute. (Z največjimi daljnogledi pa ločimo še stotinke sekunde!) Pregroba ločljivost silno ovira istovetenje nebesnih radijskih oddajnikov z morebitnimi že znanimi objekti na nebu. Nekateri sprejemniki morejo nadzorovati le ozek pas na

nebu in so uglašeni samo na eno valovno dolžino. Precejšnje preglavice povzroča tudi lastno šumenje sprejemne priprave, ki je posledica toplotnega gibanja njenih elektronov in njihovega nezveznega pretakanja in ki je pogosto po jakosti skoraj enako šumenju sprejetih radijskih valov.

Organ sprejemnika, ki prestreza elektromagnetne valove, je *dipol*, t. j. cela ali dvodelna ravna kovinska palica z dolžino $\lambda/2$ (slika 2 levo), tako da je uglašena na val, katerega želimo ujeti. Relativna jakost sprejema ali *sprejemljivost* enega samega dipola je za radioastronomske namene prešibka. Tudi ločljivost je premajhna; to se pravi, smer, v kateri ima dipol najboljši sprejem, je premalo poudarjena. Obe lastnosti dipola in anten sploh najlaže spoznamo iz njihovega *polarnega diagrama*. Polarni diagram dipola je rotacijsko telo, ki je podobno svitku (sl. 2 desno). Osni presek tega diagrama kaže srednja slika, na kateri je dipol v točki O. YY_1 je njegova os, XX_1 pa pravokotno stoječa somernica. Osni presek polarnega diagrama tvorita dva, v točki O dotikajoča se lista, ki ležita somerno glede na obe premici XX_1 in YY_1. Če je OR poljubna smer, ki oklepa s premico XX_1 kot φ, je daljica OR sorazmerna



Sl. 2. Dipol in njegov polarni diagram.

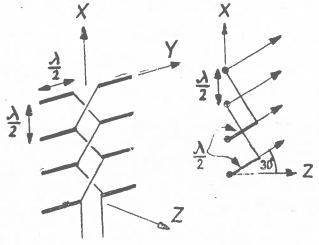
s sprejemljivostjo v tej smeri. Razumevanje si olajšamo, če smatramo dipol kot oddajnik, kajti polarna diagrama za sprejemanje in oddajanje valov sta za isto anteno enaka. Daljica OR je tedaj tudi sorazmerna *svetilnosti** dipola v tej smeri. Iz diagrama vidimo, da dipol v smeri svoje osi, torej za $\varphi = 90^0$, ne oddaja in ne sprejema. Sposobnost oddajanja in sprejemanja je največja za $\varphi = 0^0$, t. j. v smeri somernice XX_1. Ločljivost dipola pa je premalo izostrena. Zaradi tega ni mogoče z enim samim dipolom natančno določiti lege izvirov radijskih valov na nebu.

V radioastronomiji si želimo anten z veliko sprejemljivostjo in ostro ločljivostjo, torej takih, ki so jim listi polarnega diagrama čim daljši in čim ožji. To dosežemo s primerno vezavo večjega števila dipolov ali, kar je tudi tehnično priročnejše, parov dipolov. Zaznaven uspeh dobimo šele pri štirih parih (slika 3). Dolžina vsakega dipola je $\lambda/2$, pari so vzporedni med seboj in oddaljeni za $\lambda/2$ drug od drugega. Mislimo si to anteno kot oddajnik! Dipoli so vezani tako, da nihajo v fazi. V smeri X antena ne oddaja, ker se valovi zaradi fazne razlike $\lambda/2$ med seboj uničujejo. V smeri Z, ki je pravokotna na ravnini dipolov, je oddajanje najjačje. Če je φ zopet kot med smerjo najjačje oddaje in poljubno drugo smerjo, vidimo iz slike 3 b, ki kaže presek antene s pravokotno ravnino, da se valovi za $\varphi = 30^0$ zaradi interference uničujejo. V tej smeri tedaj ni oddaje in sprejema. Pri nadaljnjem večanju kota φ se jakost zopet malenkostno dvigne in izgine za $\varphi = 90^0$, kakor smo že prej omenili. Polarni diagram take antene je sestavljen iz dveh daljših listov, ki ji-

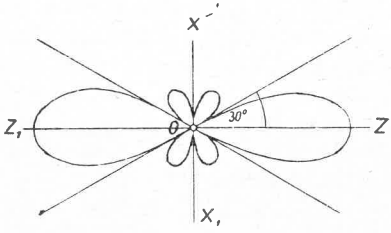
* S to besedo smo tu zaznamovali oddani energijski tok na enoto prostorskega kota, torej kvocient $d\Phi/d\Omega$.

ma tangenti v točki O oklepata kot 60^0, in iz dveh parov stranskih lističev, somernih na smeri X in Z (slika 4). Ta antena, ki ima boljšo sprejemljivost in ločljivost kakor en sam dipol, nam kaže pot, po kateri pridemo do zgoraj omenjenega smotra. Ako dodamo anteni nadaljnje pare dipolov, ustvarja vsak par novo smer, v kateri se valovi uničujejo, glavnemu listu pa se pridružita somerno ležeča nova lističa. Glavna lista se zožita in podaljšata — sprejem v smeri Z se ojači in ločljivost izostri. Obe lastnosti antene pa moremo stopnjevati še naprej. Poleg ene skupine dipolov namestimo v njeni ravnini drugo skupino, pa tretjo itd., zadaj, za anteno pa postavimo — navadno v razdalji $\lambda/8$ — vzporedno z njo ravno kovinsko ploščo, ki deluje kot zrcalo. Jasno je, da so vsemu temu postavljene neke meje; iz tehničnih vzrokov ne moremo poljubno zvečati sprejemljivost antene in zožiti njeno ločljivost na poljubno majhen kot.

Pomanjkljivost take antene je v tem, da jo moremo uglasiti samo na določeno valovno dolžino. Tej hibi se izognemo z uporabo paraboličnega zrcala iz kovine. V gorišču zrcala je pritrjen eden ali več dipolov, ki jih po potrebi



Sl. 3. a) Sistem štirih parov dipolov. — b) V smeri $\varphi = 30^0$ tak sistem ne seva.



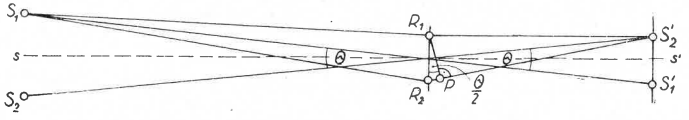
Sl. 4. Polarni diagram sistema štirih parov dipolov.

zamenjamo z daljšimi ali krajšimi. Izdelava takega zrcala je lažja kakor optičnega. Velika dolžina valov dovoljuje večje odstopanje zrcalnega površja od terjane geometrične ploskve. Odbojno ploskev smemo brez škode za kakovost »slike« nadomestiti s primerno gosto kovinsko mrežo. Pravimo, da je *ločljivost* zrcala tem večja, čim manjši je kot Θ med dvema radijskima izviroma, ki ju moremo z zrcalom ravno še ločiti med seboj. Za kot Θ (izražen v radianih) pa velja $\Theta = \lambda/d$, kjer je d premer zrcala. Ločljivost je tedaj tem večja, čim manjša je uporabljena valovna dolžina in čim večji je premer zrcala. Zato je razumljiva želja po vedno večjih zrcalih, posebno še, ker je pri velikih odbojnih ploskvah občutljivost sprejemnika večja in lastno šumenje priprave manj nadležno. Pri sedaj največjem zrcalu, ki je v opazovališču Jodrell Bank pri Manchestru na Angleškem, s premerom skoraj 80 m in pri uporabi dvometrskih valov je $\Theta = 1/40$ radiana ali skoraj poldrugo stopinjo, kar je enako trem navideznim premerom Lune! Z astronomskega stališča je taka ločljivost neznansko groba! Polarni diagram zrcala je podoben polarnemu diagramu skupine dipolov. Prednost zrcala je tudi v njegovi lažji gibljivosti, hiba pa v premajhni ločljivosti.

Višek ločljivosti dosežemo z interferenčno metodo (Ryle in Vonberg, 1946), ki je analogna Michelsonovi optični metodi za določevanje kotnega razstoja komponent dvojnih zvezd in kotnega premera zvezd stalnic. Osnova obeh načinov je *Youngov uklonski poskus* (1802):* Če s točkastim svetilom posvetimo skozi ozko režo, dobimo zadaj na zaslonu zaradi uklona in interference zaporedje svetlih in temnih prog. Če pa vzamemo namesto ene reže

* Gl. n. pr. R. W. Pohl: Optik und Atomphysik (9. izd., 1954), str. 72 i. d.

dve sosednji in vzporedni reži, se vsaka prejšnja svetla proga razdrobi na ožja maksima in minima. Kajti v tem primeru interferirajo med seboj tudi žarki iz obeh rež. Sedaj pa nadomestimo svetilo z dvojico sosednjih svetil S_1 in S_2, kakor kaže slika 5, kjer sta R_1 in R_2 obe reži. Svetili ustvarjata na zaslonu, vsako zase, popolnoma enaki uklonski sliki, ki se deloma prekrivata in katerih osrednja maksima sta S_1' in S_2'. Najprej naj bosta svetili tako blizu skupaj, da padejo maksima in minima ene slike na maksima in minima druge slike. Če potem večamo razmak svetil, se pripeti, da pridejo maksima enega svetila na minima drugega. Uklonski sliki na ta način druga drugo razmažeta, kajti zaradi nekoherentnosti svetil ni medsebojne interference. Drobni maksimi in minimi izginejo, tako da preostane zopet slika, ki jo je dala že posamezna reža. Nadaljnje razmikanje svetil pokaže zopet prvotno uklonsko sliko, ki zopet izgine itd. Enake prikazni opazujemo, če večamo medsebojno razdaljo obeh rež. Pri Michelsonovi uporabi Youngovega poskusa sta S_1 in S_2 komponenti zvezdnega para ali približno krajišči premera kake stalnice. Reži sta postavljeni pred objektiv daljnogleda ali pa nadomeščeni z dvema paroma zrcal, ki na način periskopa pošiljata žarke skozi objektiv v okular, v katerem opazujemo uklonsko sliko. Gre nam tedaj za določitev kota Θ (slika 5). Določimo ga tako, da reži razmikamo toliko časa, dokler uklonska slika prvikrat ne izgine. V tem primeru je prvi minimum svetila S_1 prišel v maksimum

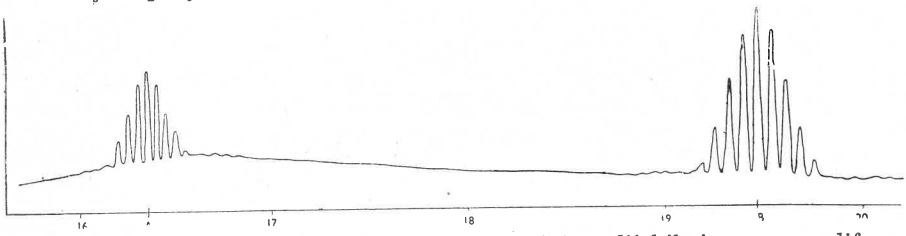


Sl. 5. Shema Michelsonove interferenčne metode.

drugega svetila S_2, t. j. v S_2' in obratno. Ker je tedaj $R_2 P = \lambda/2$, velja $\sin(\Theta/2) = \lambda/2\,d$, kjer je d razmak obeh rež. Zaradi majhnosti kota Θ moremo pisati $\Theta = \lambda/d$. Pri določevanju premera zvezde stalnice, ki ga vidimo pod kotom Θ, nam da natančnejše razmotrivanje, da je $\Theta = 1{,}22 \cdot \lambda/d$ in pri upoštevanju robne potemnitve, da je $\Theta = 1{,}33 \cdot \lambda/d$. Za λ vstavimo navadno 550 $m\mu$; to je namreč valovna dolžina zeleno-rumene barve, za katero je oko najobčutljivejše.

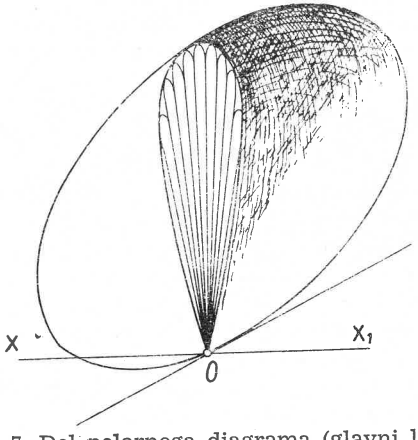
Pri radijskih valovih prevzameta nalogo rež dve enaki anteni — skupini dipolov ali parabolični zrcali — postavljeni v smeri E—W čim bolj vsaksebi in zvezani z istim sprejemnikom, v katerem interferirajo prestrežena nihanja. Interferenčna ureditev sprejemanja je zaradi obsežnosti — razdalja med antenama meri več sto metrov — malo gibljiva. Premika jo Zemlja s svojim vrtenjem! Interferenca se kaže v periodičnih spremembah na izhodu sprejemnika (sl. 6). Glavni list polarnega diagrama je sedaj sestavljen iz ožjih listov, ki jim je glavni list envelopa (slika 7). Širina ožjih listov ali razmak dveh sosednjih maksimov je zopet podana z enačbo $\Theta = \lambda/d$, kjer je d medsebojna razdalja obeh anten. Padanje sprejemljivosti na nič in njeno dviganje do maksima opazujemo samo takrat, kadar je kotna velikost izvira manjša od Θ; če je velikost enaka ali večja kot Θ, niha sprejemljivost v veliko manjšem obsegu ali je pa skoraj konstantna (razmikanje svetil pri Youngovem poskusu!). Če anteni razmikamo, se kot Θ manjša; kadar sta anteni toliko vsaksebi, da je Θ zmanjšan na velikost izvira, se ublaži nihanje sprejemljivosti. Velikost izvira določimo iz kvocienta maksimalne in minimalne jakosti sprejema pri različnih medsebojnih razdaljah anten. Tudi tej metodi so glede ločljivosti zaenkrat postavljene določene meje.

Največja in najvažnejša radioastronomska opazovališča so v Angliji in Avstraliji, nadalje v ZDA, Kanadi, Nizozemski in Franciji. Najmarljivejši so zaenkrat Angleži in Avstralci. Kakor smo že omenili, imajo največje gibljivo parabolično zrcalo v opazovališču Jodrell Bank pri Manchestru, ki ima odprtino skoraj 80 m; popolnoma enak sprejemnik gradijo v Avstraliji v okolici Sydneya. Prvi nadzoruje severni del neba, drugi bo pa južnega. Kar naprej pa prihajajo novice iz raznih delov sveta o novih načrtih in o izgradnjah vedno večjih sprejemnikov.



Sl. 6. Posnetek interferenčnega sprejema dveh ozkih radijskih izvorov na difuznem ozadju radijskega sevanja Rimske ceste. Točki A in B označujeta čas, ko sta šla izvira skozi ravnino najjačjega sprejema.

Opazovanje je do sedaj nagrmadilo lep kup dejstev, ki pa izvečine še čakajo primerne obdelave. Prvo, kar so ugotovili, je bilo šumenje Rimske ceste (Jansky, 1931). Šumenje je tem jačje, čim večja je gostota zvezd, in doseže v sami ravnini Rimske ceste največjo mero. Jakost šumenja pa je odvisna tudi od valovne dolžine; čim daljši so valovi, tem jačje je. Radijsko sevanje Rimske ceste se precej točno ujema z njenimi obrisi. Najjačje šumenje pa prihaja iz tistih njenih predelov, kjer leži jedro ali središče našega osvetja, torej



Sl. 7. Del polarnega diagrama (glavni list) za sprejemanje z interferenčno metodo.

iz ozvezdja Strelca in iz sosednjih ozvezdij. Naša galaksija je tedaj orjaški oddajnik radijskih valov. Takoj se je porodila misel, da utegnejo biti tudi ostala osvetja podobni oddajniki. Opazovanja so to domnevo potrdila. Leta 1950 se je Hanburyju Brownu in Hazardu z opazovališča Jodrell Bank posrečilo odkritje radijskega sevanja naše kozmične sosede, meglice *M* 31 v Andromedi. Tudi pri tem osvetju prihaja najjačje šumenje iz njenega jedra. Pozneje so podobno radijsko sevanje odkrili tudi na drugih meglenicah (NGC 589, 891,

3031, 4258, 5195 in 5457). Prevladuje prepričanje, da so spiralne meglenice z dobro diferenciranimi kraki (razreda *Sb* in *Sc*) redni oddajniki radijskih valov.

Mimo galaktičnega jedra so našli v Rimski cesti še druga mesta, ki se odlikujejo po jakosti šumenja. Dva, posebno jaka izvira radijskih valov sta v Kasiopeji in v Labodu. Posamezne izvire so ugotovili tudi drugod na nebu. Za vse te oddajnike rabimo izraz *nebesni radijski izviri* ali katerikrat tudi *radijske zvezde*. Danes je znanih že okoli 2000 radijskih izvirov in njihovo število stalno narašča. Večino odkritij so prispevali opazovalci v Angliji in v Avstraliji. Tudi Sonce se je izkazalo kot zelo mikaven radijski oddajnik. Tako nam je radioastronomija odkrila »radijsko« nebo z »radijskimi« zvezdami, »radijsko« Rimsko cesto in »radijsko« Sonce. Pomembno je, da se radijske zvezde ne krijejo z optičnimi; ko so na svetlejše stalnice usmerili sprejemnike, niso ugotovili nikakega šumenja.

Premajhna ločljivost sprejemnikov je poglavitni vzrok, da je do sedaj istovetnih komaj kakih dvajset radijskih izvirov z vidnimi objekti na nebu. V nekaterih primerih pa je istovetenje celo nemogoče. Radijski valovi se morejo z večjim ali manjšim uspehom prebiti skozi kozmične oblake plinov in prahu, optični pa ne. Zato nam taki oblaki zastirajo tiste radijske izvire, ki leže za njimi. V tem pa je tudi neprecenljiva prednost radioastronomije, ker nam more odkriti objekte, ki bi jih z optičnimi sredstvi ne mogli nikoli izslediti. Izkazalo se je tudi, da imajo nekateri vidni radijski izviri tako jakost, da bi jih sprejemniki še v desetkrat večji razdalji lahko odkrili; optično bi jih pa že v dvakratni razdalji ne zaznali več!

Dosedanja raziskovanja so omogočila do neke meje razčistiti vprašanje značaja radijskih izvirov. Baade in Minkowski sta jih razvrstila v naslednje skupine: 1. preostanki supernovih, 2. posebne emisijske meglice našega osvetja, 3. posebna osvetja in 4. normalna osvetja. Sonce je zaenkrat edina znana stalnica, ki oddaja radijske valove. Verjetnost je velika, da obstajajo tudi druge radijske zvezde, ni pa znano, kakšne bi take stalnice utegnile biti. Oglejmo si nekatere radijske izvire, za katere je zvezdoslovcem uspelo istovetenje z vidnimi objekti!

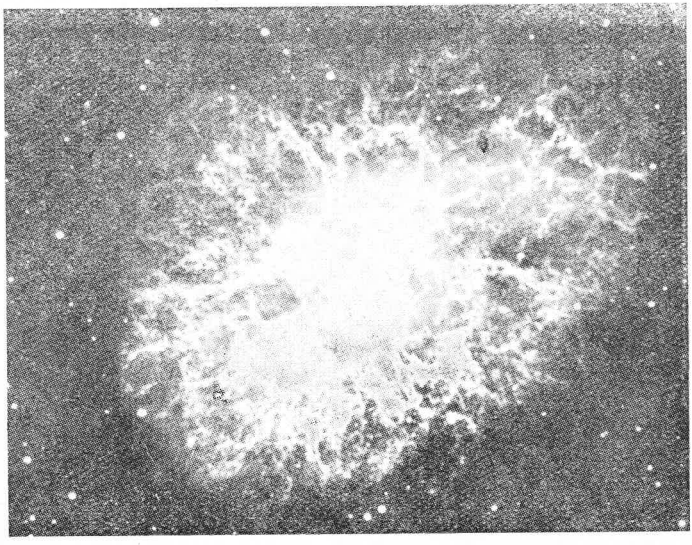
Prvi istoveteni radijski izvir je Taurus *A*. To je planetarna meglica *M* 1 (sl. 8), znana po imenu »Rakova meglica« (Crab nebula), o kateri so zvezdoslovci soglasnega mnenja, da je nastala ob izbruhu supernove iz leta 1054. Še danes nosi pečat katastrofe, ki se je pripetila pred 900 leti: z veliko hitrostjo se meglica razpenja na vse strani. Letno raztezanje meri 0,13″; iz Dopplerjevega premika spektralnih črt pa sledi, da se širi s hitrostjo 1300 km/sec. Od nas je oddaljena kakih 1000 parsekov.* Njen premer meri približno 1 parsek. Na fotografijah v rdeči svetlobi ima meglica izrazit vlaknast ustroj (gl. sl. 8). Spektrum vlaken je sestavljen iz emisijskih črt.

Tudi najmočnejši radijski izvir, Cassiopeia *A*, ki se je dolgo upiral istovetenju, je spoznan. Fotografski posnetki Baadeja s 5-metrskim Palomarskim orjakom so pokazali, da gre v tem primeru za novo vrsto emisijske meglice našega osvetja. Posnetki v modri svetlobi niso pokazali kaj prida, pač pa posnetki v rdeči svetlobi. Iz slednjih so spoznali, da je meglica zgrajena iz vlaknatih tvorb in iz zgostitev, ki imajo videz zvezd. Deli meglice so razmetani v notranjosti kroga s premerom 6,3′. Sevanje meglice v rdeči svetlobi je nekaj posebnega, kakor tudi velikanske notranje hitrosti, ki segajo od —1000 do + 2200 km/sec. Niso pa našli znakov, da bi se meglica kot celota znatno raz-

* 1 parsek = 3,26 svetlobnih let = $30{,}8 \cdot 10^{12}$ km.

penjala. To dejstvo in izredno velike hitrosti snovi v meglici sami jo postavlja v ostro nasprotje s tistimi, ki so, podobno kakor Rakova meglica, nastale ob izbruhu supernove. Domneva, da je ta veliki radijski izvir preostanek nove zvezde, ki je zažarela leta 369 po n. št., tedaj ne drži. Enakega značaja kakor pravkar opisana meglica je tudi radijski izvir Puppis *A* na južnem nebu; njeno radijsko sevanje pa je šibkejše in tudi notranje hitrosti v meglici so veliko manjše.

Zgled meglice *M 1* je nakazal neko sled, po kateri sta jo ubrala že imenovana Hanbury Brown in Hazard v Jodrell Banku (1952). Obrnila sta zrcalo tega opazovališča v tisto smer, v kateri se je leta 1572 pokazala Tychova supernova. Bila sta na pravem potu, odkrila sta radijski izvir šibkejše vrste. Niso pa dosedaj uspeli najti kak vidni ostanek te supernove; zelo verjetno je, da je zastrta z optično neprozornimi kozmičnimi oblaki.

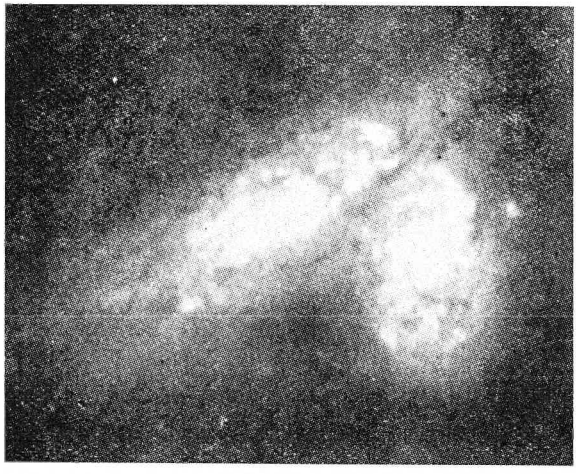


Sl. 8. Rakova meglica v rdeči svetlobi (Mt. Wilson Observatory).

Drugi najmočnejši radijski izvir Cygnus *A* je tudi spoznan. Baade je fotografiral objekt s Palomarčanom in dognal, da pripada neki jati osvetij. Odlikuje se po emisijskih črtah ioniziranih prvin in je skoraj brez zveznega ozadja, izvirajočega od zvezd, kar je za spektrum osvetja nekaj nenavadnega. Po premiku spektralnih črt sodeč, se objekt oddaljuje od nas s hitrostjo 1700 km/sec. Njegova razdalja meri $33 \cdot 10^6$ parsekov, če vzamemo za recesijsko konstanto 540 km/sec na vsakih 10^6 parsekov. Njegova kotna velikost meri $1' \times 2'$, resnična velikost pa najmanj 10000 parsekov. Iz teh podatkov in iz velike jakosti radijskega sevanja sledi, da gre pri tem objektu res za nekaj posebnega. Zato pa je tudi Baadejeva podoba o tem radijskem izviru prav posebne vrste. Dve spiralni meglenici, po velikosti in po številu sonc podobni Rimski cesti, sta treščili druga v drugo! Približevali sta se s hitrostjo, ki je merila najmanj 500 km/sec in smer trka se je skladala s smerjo vrtilnih osi obeh meglenic. Ker sta sploska zadeli skupaj, je prišla največja množina njune snovi naenkrat v stik, kar je povzročilo tako orjaško sevanje radijskih in tudi posameznih optičnih žarkov, ki pa daleč zaostajajo za radijskimi. Za zvezde

obeh meglenic tak trk ni nevaren; kajti povprečna razdalja med zvezdami je tako velika, da se zvezde izognejo medsebojnim trkom. Pač pa so pri tem prizadeti oblaki plinov in prahu obeh sestavov. Ti treščijo drug v drugega in se jim zaradi tega močno zviša temperatura, kar ima za posledico izredno močno sevanje žarkov v radijskem in optičnem območju. Spitzer ml. in Baade sta mnenja, da so trki med osvetji, ki so združena v jate, razmeroma pogosti. Za jati v Severni kroni in v Bereničinem kodru sta izračunala, da trešči vsako osvetje povprečno z dvajsetimi drugimi v obdobju $3 \cdot 10^9$ let! Po vsem tem je verjetno, da nam »dvojčki« spiralnih meglic, kot je dvojica *NGC* 4567-68 v severnem delu Device, ne predstavljajo idiličnega sožitja dveh galaksij, temveč pošastno kozmično katastrofo! — Podobno kakor Cygnus *A*, predstavlja tudi radijski izvir Centaurus *A* trk dveh galaksij. V tem primeru sta eliptična in spiralna meglenica treščili skupaj. Njihova oddaljenost od nas pa ni znana.

V zadnjem času posvečajo zvezdoslovci posebno pozornost sevanju vodika. V nevtralnem atomu vodika moreta biti magnetna momenta protona in elektrona



Sl. 9. Dvojček meglenic *NGC* 4567—68 v ozvezdju Device (Mt. Wilson Observatory).

ali paralelna ali antiparalelna. V drugem primeru je energijski nivo atoma nižji. Če prideta magnetna momenta iz paralelne lege v antiparalelno, odda atom določeno energijo v obliki fotona, ki mu pripada valovna dolžina 21 cm ali frekvenca 1420 MHz. 21-centimetrsko sevanje vodika so odkrili leta 1951, kot absorpcijsko črto na ozadju drugega radijskega sevanja pa leta 1954. Študij sevanja nevtralnega vodika in njegove absorpcije je izrednega pomena za spoznavanje zgradbe našega osvetja, kajti iz raziskav sosednjih galaksij, predvsem Andromedine meglenice, vemo, da je vodik glavna sestavina krakov spiralnih meglenic. Pri tem delu so dosegli zvezdoslovci pomembne in kar revolucionarne uspehe. Posrečilo se jim je izslediti dobršen potek obeh krakov našega osvetja. Predirnost 21-centimetrskih in sosednjih žarkov je tako velika, da gredo skoraj neovirano skozi kozmične oblake plinov in prahu. Zato moremo s temi žarki raziskovati domala ves sestav Rimske ceste, torej tudi predele onkraj njegovega jedra! Z optičnimi sredstvi pa sežemo v najboljšem primeru komaj do razdalje, ki je samo tretjina razdalje Sonca do središča našega zvezdnega sestava!

Na sestanku radioastronomov avgusta 1955 v Jodrell Banku so ruski zvezdoslovci G. G. Getmancev, K. S. Stankevič in V. S. Troicki naznanili presenetljivo vest, da so odkrili absorpcijsko črto vodikovega izotopa devterija v mogočnem radijskem sevanju, ki prihaja iz jedra naše galaksije. Valovna dolžina devterijeve črte meri 91,6 cm in frekvenca 327 MHz. Glede pomembnosti je to odkritje, ki ga bodo morali seveda še preveriti, gotovo tako važno, kakor odkritje 21-centimetrskega sevanja nevtralnega vodika.

Jakost sevanja nekaterih istovetenih radijskih izvirov je naslednja:

Cassiopeia *A*:	$2200 \cdot 10^{-25}$ watt/m^2 hertz pri	$\lambda = 3{,}7$ m in 1,4 m.
Cygnus *A*:	$1350 \cdot 10^{-25}$ watt/m^2 hertz pri	$\lambda = 3{,}7$ m in 1,4 m.
Centaurus *A*:	$160 \cdot 10^{-25}$ watt/m^2 hertz pri	$\lambda = 3$ m.
Crab nebula:	$125 \cdot 10^{-25}$ watt/m^2 hertz pri	$\lambda = 3{,}7$ m in 1,4 m.

Kako nastanejo dolgi elektromagnetni valovi nebesnih teles, še ni pojasnjeno. Verjetno je, da je nekaj teh žarkov termičnega izvira; v večini primerov so pa izračunane ekvivalentne temperature veliko previsoke in so v nasprotju z drugimi opazovalnimi dejstvi. Pri Rakovi meglici meri ekvivalentna temperatura $2{,}5 \cdot 10^6$ st. K., iz njenega spektra izvedena temperatura pa je kakih $5 \cdot 10^4$ st. K! Pri objektih, kjer sta si temperaturi navzkriž, moramo domnevati obstoj nekega mehanizma, ki povzroča, da izvršujejo električni delci koherentno nihanje, to se pravi, da nihajo v fazi. Pomislimo samo na urejeno nihanje elektronov v anteni oddajne postaje! Kakšen naj bi bil ta mehanizem, ni jasno. Mogoče je sevanje dolgovalovnih žarkov v kaki zvezi z velikimi hitrostmi ($>$ 1000 km/sec), ki so bile ugotovljene pri doslej istovetenih radijskih izvirih. Mogoče pa je tudi, da nam prikazni na najbližjem nebesnem oddajniku, na našem Soncu, prineso luč v to temo.

Sonce je na splošno zelo šibak vir radijskih valov; jakost njegovega sevanja znaša pri 3 metrskih valovih povprečno $2000 \cdot 10^{-25}$ W/m^2 Hz. Ta jakost je tako majhna, da bi ga v razdalji par svetlobnih let nikakor ne mogli opaziti. Zato je bil odkrit kot oddajnik razmeroma pozno (Southworth, 1945, na centimetrskih valovih). Le od časa do časa se njegovo radijsko sevanje za zelo kratko dobo močno poveča. Raziskovanje dolgovalovnih sončnih žarkov je dovedlo do spoznanja, da moramo razlikovati troje radijskih sevanj Sonca: 1. sevanje v dobi sončnega mirovanja, 2. sevanje, izvirajoče iz predelov peg in 3. izredno jako sevanje, ko je Sonce na višku delovanja.

Radijski žarki mirnega Sonca izvirajo v koroni in so prav gotovo termičnega nastanka. Teorija terja zanje ekvivalentno temperaturo od 10^4 do 10^6 st. K. Že delj časa nam je znano, da znaša temperatura korone okoli milijon stopinj in da je ta skrajni ovoj sončnega ozračja sestavljen iz prostih elekronov in visoko ioniziranih atomov. Radijsko sevanje za časa mirovanja je povzročeno tedaj po termičnem gibanju elektronov in obsega žarke od $\lambda = 10$ cm do $\lambda = 10$ m. Značilna je odvisnost njihove valovne dolžine od višine koronske plasti, iz katere prihajajo. Čim višje je plast nad fotosfero (vidnim sončnim površjem), tem daljša je povprečna dolžina žarkov. Zato je premer »radijskega« Sonca tem večji, čim daljši so valovi, s katerimi ga merimo. Pri najdaljših je v premeru nekako dvakrat večje od vidnega Sonca.

Kadar se pokažejo pege, se navedenim žarkom katerikrat pridružijo novi, centimetrskih in decimetrskih dolžin. Odlikujejo se po silno hitrem in obsežnem nihanju jakosti. V eni sami sekundi se jakost tudi po večkrat spremeni in more pri tem doseči petkratno do desetkratno normalno vrednost. Ti žarki izvirajo

najbrž iz tistih plasti notranje korone, ki objemajo področje peg. Pri vsaki pegi jih ne moremo ugotoviti; verjetnost ugotovitve pa je tem večja, čim obsežnejša je pega. Jakost žarkov je odvisna od lege, ki jo ima pega nasproti osrednjemu poldnevniku Sonca. Kadar gre pega preko njega, je jakost največja. To je dovedlo Heya do zaključka, da prihajajo žarki iz svojega izvira v obliki stožca, ki ima kot 30^0 do 40^0 ob vrhu in katerega os stoji pravokotno na sončnem površju. Druga posebnost teh žarkov je njihova cirkularna polarizacija. Smisel polarizacije je ali pozitiven ali negativen. Ekvivalentna temperatura je kakih 10^9 st. K. Za omenjena področja je to število veliko previsoko, saj vemo, da je temperatura peg za nekako 2000^0 K nižja od fotosfere, ki ima 6000^0 K. Termičen nastanek je tedaj malo verjeten. Pege so mesta vrtincev ioniziranih plinov in elektronov in mesta močnih krajevnih magnetnih polj, katerih silnice stoje pravokotno na sončnem površju. Zelo verjetno je, da se v teh vrtincih porajajo polarizirani radijski žarki. Treba pa bo še vzporediti njihovo polarizacijo s polarnostjo peg. Težave nastanejo pri razlagi, kako se ti žarki prebijajo skozi sončno ozračje.

Najjačje radijsko sevanje Sonca je v obsegu metrskih valov in je povezano s kromosferskimi izbruhi (*kromosfera* je najnižja plast sončnega ozračja). Izbruhi se javljajo v predelu večjih peg, ki so v zgodnji dobi razvoja. Pri močnih izbruhih je kromosferska snov pognana v velike višine s hitrostmi po več sto km/sec. Hkrati z radijskimi valovi oddaja Sonce ob priliki izbruha zelo mnogo ultravijolične svetlobe in zelo verjetno tudi električno nabite delce, ki potujejo s hitrostjo 1600 km/sec od Sonca proč. Prav močni izbruhi so redki; za časa sončnega maksima jih je komaj troje ali četvero; manjši so pa veliko bolj pogosti, kakor smo mislili do sedaj. Iz opazovanj sledi namreč nepričakovani zaključek, da nastane v dobi aktivnosti na celem površju Sonca kakih 20 izbruhov v 24 urah! Potek izbruha je silno nagel; od nenadnega začetka do viška preteče katerikrat samo nekaj sekund. Upadanje prikazni je počasnejše. Po jakosti so radijski žarki, ki spremljajo izbruhe, 10^3 do 10^5-krat močnejši od žarkov v dobi mirovanja. Mehanizem njihovega nastanka tudi še ni pojasnjen. Termični izvir je izključen, ker je ocenjena ekvivalentna temperatura okoli 10^{14} st. K! Pogosto so opazili, da prične radijsko sevanje ob izbruhih s krajšimi valovi in nadaljuje z valovi večjih dolžin. Z valovno dolžino vred pa narašča tudi jakost žarkov. Ta posebnost spominja na šumenje Rimske ceste.

Lansko leto je veliko začudenje vzbudila vest, da se je tudi planet Jupiter uvrstil med nebesne radijske oddajnike. Pred kratkim je C. A. Shain ugotovil, da so se izbruhi radijskega sevanja na tem planetu v določenih obdobjih omejevali na neko njegovo pego, katero so tudi istovetili. Če te izbruhe povzročajo viharji v Jupitrovem ozračju, potem so razelektritve na največjem planetu našega osončja bilijonkrat jačje kakor na Zemlji!

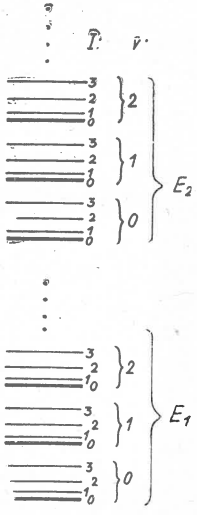
Literatura:

L. Čermelj: Radioastronomija, Proteus, XIII—1951, str. 315.
M. Ryle in J. A. Ratcliffe: Radio-Astronomy, Endeavour, XI—1952, str. 117.
B. Lovell in J. A. Clegg: Radio Astronomy, London, 1952.
H. Siedentopf: Astrophysikalische Forschung im Radiofrequenzgebiet, Physikalische Blätter, VII—1952, str. 442.
Isti: Fortschritte der Radioastronomie, istotam, IX—1953, str. 24.
W. Baade in R. Minkowski: Identification of the Radio Sources in Cassiopeia, Cygnus *A* and Puppis *A*, The Astrophysical Journal, Vol. 119—1954, str. 206.
Ista: On the Identification of Radio Sources, istotam, str. 215.
A. Peterlin: Radioastronomija, Proteus, XVII—1955, str. 201.

MOLEKULSKI ELEKTRONSKI SPEKTRI

S. BRATOŽ

Molekulski elektronski spektri se od atomskih bistveno razlikujejo. Električno polje, v katerem se elektroni gibljejo, v molekuli nima centralne simetrije kot v atomih; to izpremeni položaj energijskih nivojev. Nadalje lahko jedra nihajo okrog mirovne lege, kar povzroča razcep vsakega elektronskega nivoja v precejšnje število *elektronsko nihajnih* nivojev. V plinu se molekula lahko tudi vrti, kar povzroča nadaljnji razcep energijskih nivojev (slika 1). Molekulski spekter je torej zelo bogat na črtah, ki so po navadi razvrščene v obliki pasov, od koder je ime *pasovni spekter* (slika 2). Molekule pa imajo lahko tudi *difuzne spektre;* tukaj spektralne linije niso več ostre, temveč bolj ali manj zabrisane. Temu je vzrok povečana nestabilnost vzbujenega stanja molekule zaradi možnosti disociacije. Ker je življenjski čas Δt takega stanja zelo majhen, na primer 10^{-11} sek (medtem ko je drugače po navadi $\Delta t \sim 10^{-8}$ sek), je po relaciji[1] $\Delta\nu \cdot \Delta t \sim 1$ tak nivo razmazan; pripadajoče črte ne morejo biti ostre. Pri poliatomskih molekulah so difuzni spektri zelo pogosti.



Sl. 1. Shema energijskih nivojev diatomske molekule. E_1 in E_2 označujeta dve elektronski stanji, v kvantno število za nihajna stanja, I pa za rotacijska stanja.

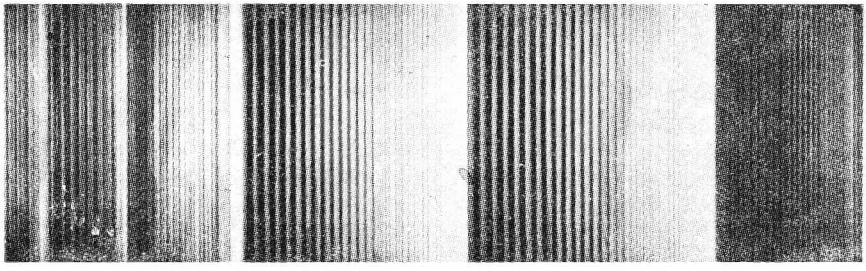
Molekulske spektre po navadi opazujemo v absorpciji, redkeje v emisiji. Spektralno črto lahko vzbudimo tudi z obsevanjem s svetlobo, ki ima ravno zadostno frekvenco, da omogoča prehod. Po absorpciji se molekula kmalu ($\Delta t \sim 10^{-8}$ sek) vrne nazaj v osnovno stanje, pri tem pa izseva svetlobo iste frekvence, kot jo je prej absorbirala. Pojav nosi ime *resonančna fluorescenca.* Včasih pa preide molekula brez sevanja iz enega vzbujenega stanja v neko drugo, za katerega je prehod v osnovno stanje *prepovedan.* V tem primeru lahko molekula dolgo vztraja v vzbujenem stanju ($\sim 10^{-2}$ sek), potem pa šele odda svetlobo. Tako zadržano emisijo imenujemo *fosforescenco.*

Teoretska napoved molekulskega spektra zahteva rešitev izredno komplicirane Schrödingerjeve enačbe; saj že najenostavnejše molekule vsebujejo po več desetin gibajočih se delcev (elektronov in jeder). Problem pa je možno poenostaviti zaradi velike razlike med masami elektronov in jeder. To namreč omogoča, da pri obravnavi elektronskega gibanja smatramo jedra kot nepremična, pri obravnavi jedrskega gibanja pa si lahko mislimo elektrone razmazane v oblak (*Born-Oppenheimerjev približek*). To je zelo koristno pri računanju gibanja jeder; gibanja elektronov pa po navadi kljub temu ne moremo določiti. Zato smo pri ocenitvi elektronskih nivojev skoraj vedno navezani na bolj ali manj intuitivna razmišljanja in zelo nenatančne računske ocene. Kljub tem težavam se danes približno spoznamo pri molekulskih spektrih, kakor bomo videli v nadaljnjem. Za lažje razumevanje začnimo s kratkim opisom atomskih spektrov.

V atomih je električno polje jedra krogelno simetrično; sila je centralna (v kolikor ne upoštevamo vpliva magnetnih momentov). Zato je skupna *orbi-*

[1] Ta relacija se dobi s Fourierovim integralom. Iz nje izpeljemo Heisenbergovo relacijo $\Delta E \cdot \Delta t \sim h$.

talna vrtilna količina vseh elektronov (t. j. vrtilna količina, ki pripada njihovemu gibanju) konstanta gibanja.[2] Pri opisu elektronskega gibanja rabimo kvantno število L, s katerim je določena ta vrtilna količina. Če merimo komponento te vrtilne količine v neki smeri, dobimo lahko vrednosti $M(h/2\pi)$, pri čemer je M eno izmed celih števil $-L$, $-L+1$, ... -1, 0, 1, ... $L-1$, L. Energijske nivoje, pri katerih je $L = 0, 1, 2, 3$ itd. označujemo po vrsti s simboli S, P, D, F itd. Vsako atomsko stanje je poleg tega karakterizirano še z vrednostjo skupne *spinske vrtilne količine,* ki jo opisujemo, podobno kot prej orbitalno vrtilno količino, s kvantnim številom S. Če je $L \geqq S$ je obe vrtilni količini možno sestaviti na $2S+1$ načinov, kajti celotna vrtilna količina je spet na enak način določena z novim kvantnim številom J. Če je $L \geqq S$, ima število J lahko $2S+1$ različnih vrednosti, namreč $L+S$, $L+S-1$, $L+S-2$, ... $L-S$. Ker se energije pripadajočih stanj med seboj ne razlikujejo mnogo, dobimo skupine energijskih nivojev. Vsaka skupina, pri kateri je $L \geqq S$, ima $2S+1$ nivojev. To število se imenuje *multipliciteta* nivoja. Pri označbah nivojev zaznamujemo multipliciteto s številko levo zgoraj, na pr. ^2P ali ^1S (spin $\frac{1}{2}$ oz. 0). Po navadi dodajamo desno spodaj še število J, na pri-



Sl. 2. Pasasti spekter dušikove molekule. Vzeto iz Westphal: Lehrbuch der Physik. Berlin (Springer), 1941.

mer $^2P_{\frac{3}{2}}$ in $^1S_{\frac{1}{2}}$. Take označbe popolnoma zadoščajo za klasifikacijo atomskih energijskih nivojev in spektralnih črt. V nekoliko izpremenjeni obliki moremo tako zaznambo uporabiti tudi za opis molekulskih elektronskih spektrov.

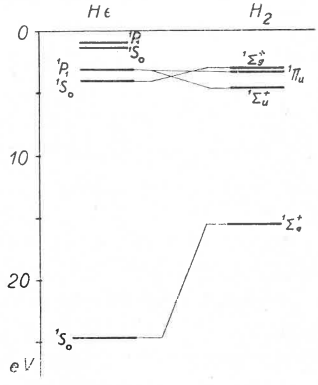
V diatomskih molekulah kaže električno polje jeder osno simetrijo z ozirom na *molekulsko os,* t. j. premico, ki spaja obe jedri. Na ta način imamo v diatomski molekuli neko prednostno smer, ki je v krogelno simetričnem električnem polju atoma nismo imeli. Orbitalna vrtilna količina elektronov v diatomski molekuli sicer ni več konstanta gibanja, njena projekcija na smer spojnice obeh jeder pa je še vedno konstanta.[3] Za opis diatomske molekule je torej prikladno kvantno število Λ, ki meri to projekcijo v enotah $h/2\pi$. Nivoje, pri katerih je $\Lambda = 0, 1, 2, 3$ itd., označujemo s simboli Σ, Π, Δ, Φ itd. Vsako molekulsko stanje karakterizira poleg tega še celokupen elektronski spin; označujemo ga spet s črko S. Ta zopet povzroča razcep nivojev; kot pri atomih je možno Λ in S sestaviti na $2S+1$ načinov (če je $\Lambda \geqq S$). Vsak tak nivo ima multipliciteto $2S+1$. Pri označbi nivoja napišemo multipliciteto s številko

[2] Isto velja za vsako centralno gibanje, n. pr. za gibanje planetov okrog Sonca. (Za osamljen planet pove to drugi Keplerjev zakon.)

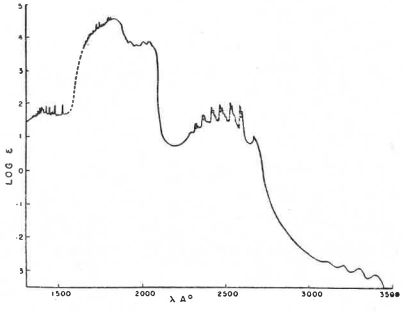
[3] Projekcija gibanja na ravnino, ki je pravokotna na molekulski osi, predstavlja namreč še vedno centralno gibanje.

levo zgoraj, na pr. $^2\Pi$ ali $^1\Sigma$ (spin $\frac{1}{2}$ oz. 0). Na ta način lahko klasificiramo elektronske nivoje diatomske molekule.

Za napoved lege in tipa nivoja so koristni trije postopki. Prvi od njih vzporeja molekulske nivoje z nivoji *združenega atoma,* t. j. tistega atoma, ki ima enako število elektronov kot vsa molekula. Tako vzporedimo na primer H_2 in He. Iz stanja L, S združenega atoma dobimo molekulske nivoje tako, da vzamemo za Λ kar projekcije vrtilne količine združenega atoma na molekulsko os (te imajo vrednosti L, $L-1$, $L-2 \ldots 0$), spina in multiplicitete pa ne izpremenimo. Ta postopek omogoča vzporejanje molekulskih in atomskih nivojev (sl. 3). Drugi postopek sloni na *izoelektronskem načelu,* ki trdi, da so si elektronske konfiguracije različnih molekul z istim številom elektronov bolj ali manj podobne. To omogoča vzporejanje elektronskih nivojev različnih molekul (na pr. N_2 in CO). Tretji postopek je v bistvu podoben Bohrovemu



Sl. 3. Primerjave med singulentnimi nivoji He in H_2; črte vežejo sorodne nivoje.



Sl. 4. Elektronski spekter benzena (C_6H_6) med 1500 in 3000 A. Vzeto iz: K. S. Pitzer: Quantum Chemistry, New York (Prentice Hall), 1953.

za atome, pri katerem golemu jedru dodajamo zapovrstjo elektrone in pri tem pazimo na Paulijevo prepoved; razlika je tu le ta, da imamo dve jedri, ki ju držimo nepremični. Ta postopek dopušča postopno zgradbo molekulskega elektronskega plašča.

Za obravnavanje molekulskih spektrov se je najbolj obnesel postopek, pri katerem smatramo, da smemo elektronsko valovno funkcijo pisati v obliki produkta enoelektronskih valovnih funkcij. S tem zanemarjamo vsakršno korelacijo med legami posameznih elektronov. Ko računamo valovno funkcijo enega elektrona, vzamemo, da so ostali elektroni razmazani (metoda »Self Consistent Field«). Črte v posameznem spektralnem pasu nastanejo vse z enako spremembo valovne funkcije enega od elektronov; valovne funkcije ostalih elektronov pa ostanejo neizpremenjene. Jasno je, da je tak opis zelo enostaven in koristen, nikakor pa ni popolnoma natančen. V resnici namreč ni mogoče razcepiti valovne funkcije za n elektronov na n primerno izbranih faktorjev. Ne glede na te načelne težave s produktno valovno funkcijo pri diatomskih molekulah po navadi dobro shajamo.

Pri prehodu od diatomskih molekul k poliatomskim se pojavijo nove težave. Električno polje jeder ima v splošnem tem manj elementov simetrije, čim več atomov ima molekula. Elektronski nivo lahko tukaj klasificiramo

samo še po simetrijskih lastnostih pripadajoče valovne funkcije in po vrednosti celokupnega spina.[4] Tako zaznamujemo na pr. osnovno stanje benzena (C_6H_6) s simbolom $^1A_{1g}$, kar pomeni stanje s spinom 0 (multipliceta 1, številka levo zgoraj) in z valovno funkcijo, ki je istega simetrijskega tipa, kot mirovna konfiguracija jeder v obroču (simbol A_{1g}).

Za interpretacijo spektrov poliatomskih molekul so, ob primerni modifikaciji, uporabni isti trije postopki, ki so bili uspešni pri interpretaciji spektrov diatomskih molekul. Tako je pojem združenega atoma uporaben tudi pri poliatomskih molekulah za zunanje elektrone. Tudi izoelektronski princip je koristen pri vzporejanju spektrov molekul, ki se med seboj ločijo le po legi kakega substituenta. Podobno velja za tretji od omenjenih postopkov, ki pa dobi v novih razmerah pogosto precej drugačno obliko. V poliatomskih molekulah imajo namreč valovne funkcije nekaterih elektronov znatne vrednosti le vzdolž kake valenčne vezi *(lokalizirani elektroni)*, druge pa segajo lahko tudi čez celo molekulo *(delokalizirani elektroni)*. Valovne funkcije prve vrste so vsaj v glavnem podobne valovnim funkcijam pri diatomskih molekulah, valovne funkcije druge vrste pa so popolnoma drugačne. Molekule, ki imajo konjugirane dvojne vezi, imajo vsaj enega ali več parov delokaliziranih elektronov. Take molekule, kot na pr. butadien, benzen, naftalen itd., imajo zato tudi popolnoma drugačne spektre kot molekule brez takšnih vezi.[5] Približno oceno razmer v takih molekulah dobimo z ločeno obravnavo delokaliziranih elektronov. Najenostavnejši tak postopek *(Free Electron Model)* nadomešča resnični potencial z medsebojno povezanim sistemom potencialnih jarkov vzdolž valenčnih vezi; v teh jarkih se delokalizirani elektroni gibljejo neodvisno drug od drugega. Tak opis je podoben opisu nihajoče strune. Čeprav je ta slika izredno enostavna, rezultati niso slabi. S to metodo so uspeli celo pri velikih aromatskih molekulah.

Vkljub očitnemu napredku pri razlagi elektronskih spektrov poliatomskih molekul s trenutnim stanjem še ne moremo biti zadovoljni. Osnovni steber razlage je namreč produktna oblika valovne funkcije. Kot smo že omenili, je to le približek, za molekule s konjugiranimi dvojnimi vezmi celo precej slab približek. Zato so v zadnjem času poskušali nadomestiti valovno funkcijo elektrona z linearno kombinacijo več valovnih funkcij. To pa popolnoma pokvari enostavno sliko, ki je bila tako koristna. Če pa že opuščamo neko enostavno in slikovito razlago, je nujno, da najdemo kak drug enostaven model, ki nam služi kot vodilo; v nasprotnem primeru bo težko doseči nagel napredek. Zato lahko rečemo, da je to področje še sredi razvoja.

Literatura:

H. Sponer, E. Teller, Rev. Mod. Phys. **13** (1941), 76.

B. Pullman, A. Pullman: Les théories électroniques de la chimie organique, Masson & Co., Paris, 1952, stran 449.

---

[4] Ker kvantno število Λ določa simetrijske lastnosti elektronske valovne funkcije diatomske molekule, smemo simbole Σ, Π itd. pravtako smatrati za simetrijske označbe.

[5] Molekule s konjugiranimi dvojnimi vezmi tvorijo nekak prehod od navadnih molekul h kovinam, kjer se nelokalizirani elektroni lahko gibljejo po vsem kosu kovine (prosti elektroni).

NOVICE

PETI HILBERTOV PROBLEM

D. Hilbert je leta 1900 objavil seznam dvaindvajsetih nerešenih problemov, ki so po njegovem mnenju vredni pozornosti matematikov. Posebno znamenit je problem, ki ga je Hilbert postavil na peto mesto v seznamu. O tem problemu, ki je bil dokončno rešen šele pred nekaj leti, bomo spregovorili v pričujočem sestavku. Ob preprostem primeru bomo skušali nabrati tiste osnovne pojme, ki nam bodo omogočili formulacijo problema v njegovi sodobni obliki.

V erlangenskem programu je F. Klein izpovedal načelo, da je vsaka geometrija določena s svojo transformacijsko grupo. Evklidsko geometrijo moremo po tem načelu izvesti iz lastnosti, ki odlikujejo grupo gibanj: to je grupo vseh premikov in vrtenj. Študiju transformacijskih grup se je posvetil S. Lie, po njem so se transformacijske grupe vključile v obsežnejšo družino Liejevih grup. In prav v aksiomatični določitvi Liejeve grupe tiči peti Hilbertov problem.

Lastnosti transformacijske grupe si oglejmo na preprostem primeru; svojo pozornost posvetimo ravninski geometriji in omejimo se na eno samo vrsto transformacij: obravnavajmo vrtenje okoli določene točke — tečaja O! Zakaj pravimo, da tvorijo vsi vrteži okoli dane točke grupo? Dva zapored izvršena vrteža V_1 in V_2 moremo nadomestiti z enim samim vrtežem, ki ga imenujemo produkt V_2V_1 vrtežev V_1 in V_2. Transformacija, ki vrne točke po izvršenem vrtežu V v prvotno lego, je spet neki vrtež, imenuje se obratni vrtež V^{-1}. Tudi transformacijo, ki ohranja lego vseh točk, moremo prišteti v skupnost vseh vrtežev kot identični vrtež I. Lahko se prepričamo, da zadoščajo vrteži pri pravkar definiranem množenju naslednjim pogojem:

I. Produkt je asociativen: $V_3(V_2V_1) = (V_3V_2)V_1$.

II. Eksistira tak vrtež I, da je $I \cdot V = V$ pri vsakem V.

III. Vsakemu vrtežu V pripada tak vrtež V^{-1}, da je $V^{-1}V = I$.

Množica elementov, v kateri je za poljubna dva elementa enolično določen produkt z navedenimi tremi lastnostmi, se imenuje *grupa*. Zaradi svoje algebrske strukture je tedaj množica vseh vrtežev grupa.

Preidimo k drugi skupini lastnosti — k topologiji dane množice. Izberimo v ravnini enkrat za vselej neko točko T, ki ne sovpada s tečajem O. Vrtež V naj prevede točko T v točko T_V. Izberimo poljubno okolico točke T_V (n. pr. krožec s središčem v T_V in polmerom ε). Vsi vrteži V', ki obkrožijo tečaj O v istem smislu in enakomnogokrat kot V in ki prevedejo točko T v točke izbrane okolice T_V, tvorijo ustrezno okolico vrteža V. Prav lahko se prepričamo, da zadoščajo tako določene okolice vsem aksiomom za okoliški prostor:*

1. Vsak vrtež ima vsaj eno okolico in pripada vsaki svoji okolici.
2. Vsaka množica vrtežev, ki vsebuje vsaj eno okolico vrteža V, je tudi njegova okolica.
3. Presek dveh okolic vrteža V je tudi okolica vrteža V.

---

* Primerjaj članek A. Vadnala: »Zgodovinski razvoj topologije«, Obzornik za matematiko in fiziko, leto IV, str. 1.

Množica vseh vrtežev je torej *topološki prostor*. Topologija, ki smo jo uvedli, nam omogoča, da govorimo o konvergenci zaporedij, katerih členi so vrteži in o zveznosti funkcij, definiranih na množici vrtežev. Zaporedje vrtežev V_1, V_2, V_3, ... konvergira k vrtežu V, če moremo v vsaki okolici vrteža V najti skoraj vse člene zaporedja. (Le končno mnogo členov zaporedja ostane zunaj okolice.) Funkcija v okviru vrtežev je predpis, po katerem pripada vsakemu vrtežu določen vrtež. Funkcija je zvezna, če priredi zaporedju vrtežev, ki konvergira k vrtežu V, zaporedje vrtežev, ki konvergira k vrtežu, v katerega preslika funkcija vrtež V. Podobno bi mogli definirati zveznost za funkcije več spremenljivk. Z grupno strukturo sta določeni dve funkciji: produkt dveh elementov (funkcija dveh spremenljivk) in obratni element (funkcija ene spremenljivke). Lahko se prepričamo, da sta obe funkciji zvezni.

Ponovimo vse doslej navedene lastnosti:

α) Vsi vrteži tvorijo grupo.

β) Vsi vrteži tvorijo topološki prostor.

γ) V dani topologiji sta produkt dveh vrtežev in inverzni vrtež zvezni funkciji.

Množica elementov, ki se odlikuje z navedenimi tremi lastnostmi, je *topološka grupa*. Množica vseh vrtežev je torej topološka grupa.

Vsak vrtež moremo izraziti analitično kot funkcijo nekega parametra t. V ravnini uvedimo polarni koordinatni sistem z vrhom v tečaju O, os koordinatnega sistema naj veže tečaj O in točko T, ki smo si jo izbrali pri določitvi topologije, za daljico enote pa izberimo daljico OT. Tedaj je vsak vrtež V določen z lokom, ki ga pri tem vrtežu opiše točka T, ta lok označimo s črko t! Vsak vrtež moremo tedaj zapisati kot funkcijo $V(t)$. Prav lahko se prepričamo, da je $V(t)$ enolična zvezna funkcija, pa tudi obratna funkcija $t(V)$ je zvezna in enolična. Tako medsebojno pripadnost, kakršna je med V in t, imenujemo v topologiji homeomorfizem. Pravimo tudi, da je grupa vrtežev homeomorfna slika premice realnih števil.

Parameter, ki določa vrtež, imenujmo odslej koordinato vrteža! Kompozitum vrtežev $V(x)$ in $V(y)$ naj bo vrtež $V(z)$, torej: $V(x)V(y) = V(z)$. Koordinata kompozita se prav preprosto izraža s koordinatama obeh faktorjev. Velja namreč $z = x + y$.

Vse doslej spoznane lastnosti moremo povzeti v tri stavke:

a) Množica vseh vrtežev je topološka grupa.

b) Množica vseh vrtežev je homeomorfna slika premice realnih števil, pri čemer ustreza identični vrtež številu 0.

c) Koordinata kompozita je vsota koordinat obeh faktorjev.

S posplošenjem teh lastnosti bomo uvedli pojem Liejeve grupe. Prva lastnost je že določena v vsej splošnosti. Drugače pa je z drugo lastnostjo. Premica je le najpreprostejši primer evklidskega prostora, je enorazsežni evklidni prostor. Drugo lastnost bomo torej posplošili tako, da bo premico zamenjal neki večrazsežni evklidski prostor. Liejeva grupa bo torej homeomorfna slika nekega n-razsežnega evklidskega prostora, ali vsaj nekega dela tega prostora. Element a Liejeve grupe bo tedaj določen z n koordinatami, če uvedemo v evklidskem prostoru koordinatni sistem. Za izhodišče koordinatnega sistema izberimo točko, ki po homeomorfizmu pripada grupni enoti (identiteti) I. Tedaj bomo zapisali $a = a\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ in še posebej: $I = I\ (0, 0,$

..., 0). Produkt elementov $a\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ in $b\,(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ naj bo element $c\,(z_1, z_2, \ldots, z_n)$. Koordinate produkta so tedaj določene kot funkcije:

$$z_k = f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

Funkcije f_k, ki v izbranem koordinatnem sistemu določajo kompozitum dveh grupnih elementov, v splošnem niso več tako preproste, kakor so bile pri grupi vrtežev. Njihovo poljubnost pa bomo omejili z zahtevo, da naj bodo analitične. To bo posplošitev tretje lastnosti. Povzemimo sedaj definicijo Liejeve grupe:

A. Liejeva grupa je topološka grupa.

B. Liejeva grupa je homeomorfna slika nekega dela n-razsežnega evklidskega prostora, pri čemer ustreza grupna enota izhodišču koordinatnega sistema v evklidskem prostoru. (Pravimo, da je grupa n-razsežna.)

C. Koordinatni sistem moremo izbrati tako, da so funkcije, ki izražajo koordinate kompozita s koordinatami faktorjev, analitične funkcije.

Sedaj pa že moremo zastaviti peti Hilbertov problem, ki slove:

Ali je lastnost C posledica lastnosti A in B?

Danes vemo, da je odgovor na zastavljeno vprašanje pritrdilen. Dokaz je vsebovan v delih Gleasona, Montgomeryja in Zippina (1952) ter H. Yamabe (1953). Prej je bil izrek dokazan le za posebne primere, ko je bil krog obravnavanih grup zožen z dodatnimi algebrskimi ali topološkimi zahtevami. Dokaze so podali: Pontrjagin za komutativne grupe (1934), von Neumann pa leto dni prej za kompaktne grupe. Chevalley (1941) in Iwasawa (1949) sta rešila problem za razrešljive grupe. V splošnem je bil problem rešen le za določena števila dimenzij: za 1 ali 2 (Kerekjarto 1939), 3 (Montgomery 1948) ali 4 (Montgomery-Zippin 1951).

F. Križanič

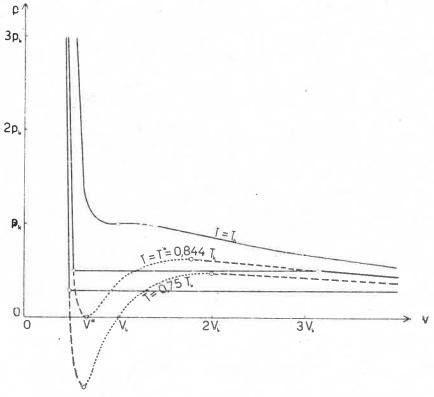
PREGRETA VODA

Vodo, iz katere smo s kuhanjem izgnali raztopljeni zrak, lahko v posodi brez ostrih robov segrejemo nad vrelišče, ne da bi zavrela. Takšna *pregreta* voda je v metastabilnem stanju. Že majhna motnja povzroči nastanek mehurčka, ki potem zraste z veliko hitrostjo; voda sunkovito vzkipi. Če kane kaplja vode v mast, ki je segreta čez 100° C, pregreta kaplja čez nekaj časa s pokom zavre. (Gospodinje ta pojav dobro poznajo.) Prav na ta način se je že v prejšnjem stoletju posrečilo Defouru pregreti vodo do temperature 180° C. Pozneje se je pojavilo vprašanje, kolikšna je najvišja temperatura, do katere je mogoče segreti vodo pri atmosferskem pritisku.

V novejšem času so z drugačnimi metodami dosegli veliko višje temperature. E. N. Harveyu in sodelavcem je uspelo pri atmosferskem pritisku pregreti vodo do 206° C, če so jo prej za 15 do 30 minut izpostavili pritisku 1000 atm, zaradi katerega so se raztopili mikroskopski plinski mehurčki. F. B. Kenrick in sodelavci so uporabljali kapilare v obliki črke U, ki so jih, napolnjene s prekuhano vodo, za 5 sekund potopili v vročo kopel. Če voda

v kapilari v tem času ni zavrela, so zvišali temperaturo kopeli in ponovili poizkus. Tako so opazili tekočo vodo že pri 270° C.

V zadnjem času je J. L. Briggs zelo skrbno ponovil Kenrickove poizkuse.[1] Najprej se je z drobnim termočlenom prepričal, da zadostujejo 3 do 4 sekunde za izenačitev temperatur kopeli in tekočine v kapilari. Pri 5 sekund trajajoči potopitvi je torej tekočina v kapilari za 1 do 2 sekundi zares izpostavljena visoki temperaturi. Za kopel je vzel Briggs silikonsko olje, kakršnega uporabljajo v difuzijskih vakuumskih črpalkah. To olje je prozorno, vre šele pri 450° C in pri 270° C zelo počasi izhlapeva. Olje je dal v steklen valj, ki ga je zunaj električno segreval. Za enakomernost temperature je skrbel motorček z mešalom. Kapilare je Briggs napravil tik pred poizkusom iz pireksovega stekla in jih do treh četrtin napolnil s prekuhano vodo. V celoti je preizkusil več kot 30 cevk z notranjimi premeri od 0,2 do 0,5 mm in z debelinami sten



Po van der Waalsovi enačbi izračunane izoterme.

okrog 0,2 mm. S tremi cevkami je dosegel najvišje temperature pregretja 264°, 266°, 267° C. V ostalih cevkah je voda zavrela med 200° in 245° C, čemur so bile vzrok najbrž nepravilnosti notranjih sten cevke. Prezgodnjo tvorbo mehurčka lahko povzročijo tudi kozmični žarki in žarki iz radioaktivnih atomov v okolici in v vodi sami. Na novo narejene kapilare so dale višje vrednosti in pogosto je bila dosežena pri prvi polnitvi višja temperatura kot pri nadaljnjih. Z vodo, ki so jo kuhali pri znižanem pritisku, in z vodo, iz katere so najskrbneje odstranili prašne delce, pa niso dosegli višjih temperatur. Platinska kapilara se je izkazala za slabšo od steklenih.

Teoretično se da iz enačbe stanja napovedati najvišja možna temperatura pregretja pri danem pritisku. Oglejmo si to na sliki, na kateri je narisanih nekaj izoterm! Izvlečeni odseki izoterm predstavljajo stabilna stanja, črtkani odseki metastabilna stanja (levo spodaj pregreta tekočina, desno zgoraj prenasičena para), pikčasti pa nestabilna stanja.[2] Skrajno, kar je še mogoče doseči z eksperimentom, je ekstrem sam. Za določitev maksimalne temperature pregretja T je zato treba poiskati tisto izotermo, ki ima minimum pri atmosferskem pritisku. Ne napravimo velike napake, če računamo namesto s pritiskom

1 atm s pritiskom nič.* Napravimo ta račun z van der Waalsovo enačbo $(p + a/V^2)(V - b) = RT$! Postavimo vanjo $p = 0$! Po ureditvi preostane kvadratni izraz za V. Izoterma T^* se dotika osi V, tako da imamo tam dvojen koren $V = V^*$. Zato postavimo, da je diskriminanta omenjenega kvadratnega izraza enaka 0. Sledi, da je $T^* = a/4\,bR$. Upoštevaje,[3] da je $a = 3\,V_k^2 p_k$, $b = V_k/3$ in $R = 8\,V_k p_k(3\,T_k)$, dobimo končno $T^* = 27\,T_k/32 = 0{,}844\,T_k$. Za vodo je $T_k = 374^0$ C $= 647^0$ K, torej $T = 546^0$ K $= 273^0$ C. Ujemanje teoretične vrednosti z vrednostmi, ki so jih dobili s kapilarami, je tu presenetljivo dobro. Za druge tekočine pa je ujemanje slabše; dosežene temperature pregretja so mnogo nižje od izračunanih vrednosti.

J. Strnad

* Za vodo napaka ni večja kot nekaj desetink stopinje.

[1] L. J. Briggs: Maximum Superheating of Water as a Measure of Negative Pressure. J. Appl. Phys., **26**, 1001 (1955).

[2] M. Ribarič: Negativni pritisk v tekočinah. Obz. mat. fiz., **2**, 184 (1952).

[3] F. Bošnjaković: Nauka o toplini I., Zagreb 1950, str. 111.

RADIOAKTIVNI TULIJ NAMESTO RENTGENSKE CEVI

Že mnogokrat se je pokazala potreba po lahkih prenosnih napravah za rentgensko slikanje, tako za medicinske kot tudi za industrijske potrebe. Taka naprava je posebno velikega pomena za kraje, kjer ni mogoče uporabljati običajnih rentgenskih naprav. Poljske bolnišnice na frontah, manjše ladje in težko pristopna gradbišča so kraji, kjer je lahko taka naprava posebno dragocena. Zelo enostavno in lahko napravo te vrste so izdelali v Argonne National Laboratory v Chicagu. Kot vir žarkov so uporabili radioaktivni tulij 170, ki je med vsemi izotopi za ta namen najbolj primeren. Tulij sicer nikakor ne more na splošno nadomestiti navadnega rentgena, verjetno pa ga bodo kmalu uporabljali za navedene izjemne namene.

Naravni tulij 169 (100 %) ima za termične nevtrone absorpcijski presek 118 barnov. Pri absorpciji nevtrona nastane tulij 170, ki ima razpolovni čas 129 dni. Iz njega nastaja stabilni iterbij 170. Razpadno shemo tulija 170 kaže slika. 90 % vseh jeder Tm^{170} razpade brez sevanja gama, 10 % pa tako, da nastane najprej jedro Yb^{170} v vzbujenem stanju. To vzbujeno jedro preide takoj v osnovno stanje, in sicer na dva načina: z oddajo fotona gama, ki ima energijo 84 keV, ali pa s tako imenovano notranjo konverzijo. Pri tem procesu se energija, ki jo odda jedro, prenese na enega izmed atomskih elektronov, največkrat na elektron iz lupine K ali L. V nastalo vrzel pade kateri izmed zunanjih elektronov, pri čemer se sprosti foton karakteristične rentgenske svetlobe.* Zaradi notranje konverzije oddaja torej radioaktivni tulij razen prej omenjenih žarkov beta in gama še konverzijske elektrone** in karakteri-

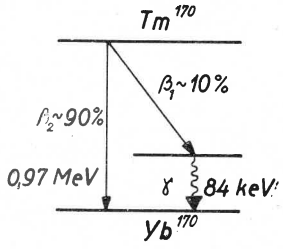
* K terminologiji je potrebno naslednje pojasnilo. Žarki gama in rentgenski žarki so žarki iste vrste, z dvojnim poimenovanjem pa jih ločimo po njihovem nastanku. Če prihajajo žarki iz jedra, se imenujejo žarki gama, če iz atomske lupine, pa rentgenski žarki (žarki X). Podobno razlikovanje je v navadi tudi pri elektronih. Žarki beta so le tisti elektroni, ki jih oddajajo radioaktivna jedra.

** Iz navedenega sledi, da je spekter konverzijskih elektronov črtast, medtem ko imajo žarki beta zvezen spekter.

stične rentgenske žarke iterbija. Med temi žarki prevladujeta spektralni črti $K\alpha_{1,2}$, z energijo 53 in 51 keV. Poleg vsega tega oddaja tulij 170 tudi nekaj zavorne rentgenske svetlobe, ki nastaja zaradi zaviranja žarkov beta v preparatu samem.

Tulijevo sevanje leži v območju, kjer je občutljivost fotografske emulzije za rentgenske žarke največja. Približno ga lahko primerjamo s sevanjem rentgenske cevi pri napetosti 80 kV. Za počrnitev Eastmanovega »Blue Brand« filma s fluorescenčnimi folijami je potrebno le 7 milirentgenov. 50 mR pa počrni običajni rentgenski film že brez folije. Z nekim tulijevim izvorom, ki vsebuje 200 mg tulija in ki daje v razdalji 30 cm 2 rentgena na uro, je za običajni film s folijami potrebni čas osvetlitve samo 12 sekund.

Ker je tulij zelo redek element, ga je treba čim bolje izkoristiti. Zato uporabljajo za njegovo obsevanje najmočnejši nevtronski fluks $2 \cdot 10^{14}$ nevtronov v sekundi, ki ga daje reaktor *MTR* (Materials Testing Reactor). Obsevanje traja približno pol razpolovne dobe (65 dni), pri čemer se aktivira kakih 25 % tulijevih atomov.



Razpadna shema za Tm^{170}.

Aktiviranje ne predstavlja posebne težave. Preparat zavarijo v tenak aluminijev ovoj. Cena obsevanja za en preparat je okrog 170 dolarjev. Cena za sam tulij pa je bila preteklo leto še blizu sto dolarjev za gram. Ker izžareva tulij po obsevanju le mehko žarkovje, ni potrebno mnogo zaščite. V večini primerov zadošča 25 mm debela plast svinca.

Za uporabo teh tulijevih izvorov je potrebna zelo enostavna naprava. V cilindričnem svinčenem oklepu je jeklena cev, po kateri se pomika izvor s pomočjo žičnega nastavka. Cev je tako zavita, da je takrat, ko se nahaja preparat v sredini, pot žarkom v vseh smereh zaprta s svincem. Teža cele naprave je le 3,1 kg. Gostota rentgenskega toka na površini svinčenega oklepa pa je 75 mR/h.

S to napravo so mogoča vsa klinična slikanja in dobimo z njo še kar dobre slike. Ker je žarkovje razmeroma trdo, pa pri tankih kosteh kontrast ni popolnoma zadovoljiv. Zelo uporabna je ta naprava tudi za preiskavo kovin. Najboljše rezultate daje za železo z debelino 25 mm in za aluminij z debelino 75 mm.

J. Kalan

S. Untermyer: Portable Thulium X-ray Unit, Nucleonics **12**, 35, 1954.

LASASTI KOVINSKI KRISTALI

Vse kovine in zlitine nahajamo vedno v kristaliziranem stanju. Kovinski izdelki so kompaktna skupnost, sestavljena iz drobnih kristalnih zrn. Mineralni svet je kristaliziran zelo komplicirano, kovinski pa je organiziran preprosto. Večina kovin kristalizira v obliki kock, le nekaj kovin še v heksagonalnem sistemu. V kristalnih zrnih so atomi razvrščeni v ravnih vrstah in prostorsko razporejeni v pravilnih mrežah. V taki mreži je na 1 mm dolžine železovega kristala 3 500 000 atomov.

Iz teorije poznamo sile, ki medsebojno vežejo atome v kovinskih kristalih. Za dani prerez vemo tudi, koliko je tam atomov, in iz tega lahko teoretično določimo trdnost, s katero se kovina upira, da bi jo zunanja sila zlomila. Redko kje se pa tako razlikujeta teoretični račun in praktični rezultat merjenj kot prav v trdnosti kovin. Dejanske trdnosti kovin (do 250 kp/mm^2 pri najboljši jekleni žici) dosežejo le nekaj odstotkov vrednosti, ki jih dobimo z računi.

V praktičnih kovinskih izdelkih je vedno vse polno napak, ki nastanejo v kovini med ulivanjem in med predelavo. Tako se ne moremo izogniti različnim nečistočam, ki se strdijo v kovinah, pa tudi ne majhnim prazninam. Delno so te napake vzrok premajhne trdnosti. Vendar s tem ne moremo razložiti tako velikih razlik med teoretičnimi in praktičnimi vrednostmi trdnosti kovin. Danes znamo vzgojiti s posebnimi fizikalnimi metodami velike, *enovite* kristale. Toda tudi taki pravilni kristali imajo v primeri s teorijo še vedno veliko premajhno odpornost proti zunanjim silam.

Prav v zadnjem desetletju se je fiziki kovin posrečilo v mnogočem pojasniti veliko nesoglasje med teorijo in dejanskimi lastnostmi kovin. Danes vemo, da, kot nimamo idealnega plina, tudi nimamo idealnega kristaliziranega stanja. V kristalni mreži razvrstitev atomov še zdaleč ni tako urejena, kot jo pokaže preiskava z rentgensko analizo. V mreži kristala so zelo majhne napake atomskih dimenzij, ki jih rentgen ne more odkriti. Posamezni atomi so odmaknjeni od svojih ravnotežnih leg. Nekatera mesta v mreži so napačno zasedena in tudi prazna. Tri, pet ali osem atomov se razvrsti v večjih razdaljah, kot bi jih zahtevale njihove privlačne in odbojne sile. Takšno napačno razvrstitev atomov v prostorski mreži imenujemo *dislokacijo*. V čistih enovitih kovinskih kristalih je po naši sodbi navadno na 1 cm^3 kovine okoli 10^8 dislokacij.

Kovinska mreža s tolikimi napakami je močno različna od idealno sestavljene mreže. Seveda ne poznamo nobene poti, po kateri bi mogli vplivati na razvrstitev atomov ob kristalizaciji. Kristalne mreže s svojimi napakami vred pa določajo tudi vse značilnosti in lastnosti, ki jih imajo kovine. Prav dislokacije atomov so glavni vzrok temu, da se kovinski kristal rad deformira. Po tistih kristalnih ravninah, na katerih so ugodno razporejene dislokacije, kovinski kristal rad zdrsi in se ob tem preoblikuje. Na ta način kovina popusti zunanjim silam in se zlomi veliko prej, kot bi to ustrezalo teoretičnim računom.

Tu je, kakor že tolikokrat v napredku tehnike, pomagalo naključje. V veliki tovarni za izdelavo električnih filtrov prenosnega telefonskega sistema so nastale pri izdelavi velike sitnosti. Kondenzatorske plošče filtrov so prevlekli s plastjo cina. Pri vsej previdnosti izdelave so nastajali med kondenza-

torskimi ploščami vedno nepojasnjeni kratki stiki. Dolgo so se ubadali z vzroki, zakaj vsi napravljeni aparati na lepem odpovedo. Po dolgih, duhomornih preiskavah so odkrili, da iz cinovih prevlek poženejo v kratkem času tanke kovinske kocine, ki sprožijo kratke stike.

Iz cinove prevleke plošč rastejo brez vsakega zunanjega povoda drobni *lasasti kristali* cina. Ti kristali so izredno drobceni. Njihov premer zajema kakih deset tisoč atomov ali okoli dve tisočinki milimetra. So pa primeroma dolgi, zrastejo nekaj milimetrov in tudi do 2 cm visoko. Po angleško imenujejo te kristale *whiskers* (kocine).

Najprej so ugotovili, da je tak lasek iz enega samega kristala. Preiskovali so tudi lastnosti teh kristalčkov. Z drobnimi ročicami so jih upogibali. Kaj hitro se je pokazalo, da so ti kristali nenavadno elastični. Če so bili teden dni ukrivljeni v majhno zanko, so se, ko je sila popustila, popolnoma zravnali. Ob zelo močni obremenitvi se pa niso podali ali zlomili, ampak so se prepognili tako, da so nastale dvojčične deformacije, kot pri mineralnih kristalih.

Ob takih mehanskih preizkušnjah so lasasti kristali pokazali nezaslišano trdnost. Za opisano prepognitev je potrebna vsaj 400-krat večja sila kot za enako velike navadne kristale iste kovine, kakršne smo dosedaj poznali. Na osnovi teh spoznanj so se z vso silo lotili umetnega vzgajanja lasastih kristalov. Do danes je bilo mogoče napraviti take kristalčke iz cina, kadmija, cinka, srebra in aluminija. Nazadnje se je posrečilo to tudi pri železu. Medtem ko ima navadno železo natezno trdnost 30 do 40 kp/mm^2, doseže trdnost lasastega kristala iz železa vrednost 700 kp/mm^2.

Prvo vprašanje je bilo: Kje so vzroki, da imajo lasasti kristali veliko večjo trdnost kot navadni kristali iz iste kovine? Utemeljena je domneva, da imajo lasasti kristali popolnoma urejeno kristalno mrežo in da zrastejo v idealni obliki. Ker so ti kristali brez vseh napak, se jim trdnost poveča do nenavadne stopnje. Teorija o mrežnih dislokacijah je tako dobila prvo potrditev v praksi.

Kakor poznamo posebne lastnosti lasastih kristalov, tako nam je ostalo neznano, zakaj in kako ti kristali zrastejo. Katera sila žene kovinske atome, da se poganjajo iz podloge kvišku in zrastejo tako kot trava iz zemlje? Gotovo je, da se morajo ti atomi iz mreže odtrgati in potem difundirajo po površinski plasti kristala proti ostrici. Prav tu pa morajo biti na delu mrežne sile, ki so tako usmerjene, da se pritekajoči atomi lepo pravilno uravnajo in posadijo na regularna mesta kristalne mreže. Graditev teh kristalov poteka pri razmeroma nizkih temperaturah, medtem ko navadni kovinski kristali nastajajo ob strjevanju kovin, to je v bližini samega tališča. Pravilnost mreže je brez dvoma lahko veliko večja, če je ob procesu njene graditve na delu samo urejujoča sila kovinske vezave. Če pa se plete prostorska mreža kristalov blizu tališča kovine, je termično nihanje atomov izredno živo. Vsak atom kaže ob zasedanju svojega mesta velik gibalni nemir zaradi visoke temperature. Nastajanje navadnih kovinskih kristalov poteka tedaj v takih okolnostih, da se regularna razporeditev gradbenih enot mestoma pomoti; zato ostajajo v kovinskih mrežah nepravilnosti.

Lasasti kristali pa nastajajo globoko pod tališčem kovine in so zato zelo pravilno zgrajeni. Okolnosti med njihovo rastjo so čisto drugačne kot pri navadnih kovinskih kristalih. Važno vlogo ima seveda tudi velikost lasastih kristalov. V tako drobnih izmerah je veliko verjetneje, da kristalna mreža

ostaja še regularna, medtem ko ob rasti večjih agregatov mreža ne more ohranjevati na vseh mestih pravilne orientacije. Urejujoča kristalizacijska sila v majhnih izmerah sili atome, da se razmeščajo točno v smeri kristalnih osi. Ob večjih razdaljah ta sila popusti in sčasoma nastanejo v mreži majhne prepognitve. Že majhni odmiki atomov od njihovih ravnotežnih mest pa vnašajo v mreže napake, ki odločilno vplivajo na vse lastnosti kovinskih kristalov.

Ob odkritju nove oblike kovinskih kristalov seveda ne smemo misliti, da bomo kar preprosto mogli izdelovati jeklo takih izrednih lastnosti. To bi bila v tehniki prava revolucija! Še daleč ne poznamo poti, kako bi mogli posezati v ta atomska dogajanja in soodločati pri tem, kako se atomi posedajo ob pletenju prostorskih mrež med nastajanjem kristalov. Vendar ima iznajdba lasastih kristalov dve koristni posledici! Na eni strani nam je s tem dodobra potrjeno, da so razmere v navadnih kristalih res take, kot si jih z dislokacijo in deformacijsko mehaniko razlagamo. Metalna fizika je dobila polno potrditev, da so njene razlage kovinskega stanja na pravilni poti.

Na drugi strani nas odkritje lasastih kristalov vsaj teoretično krepi v misli, da bi metalurgija mogla iskati nove vrste kovinskih tvoriv, ki bi lahko imela neprimerno boljše mehanske lastnosti, kot jih imajo kovine, ki jih danes uporabljamo. Odkriti moramo nove načine dela, s katerim bi vsaj delno mogli vplivati na razvrščanje atomov v prostorsko mrežo ob kristalni rasti. Če bi se nam to le v malem posrečilo, bi dajal metalurg tehniki nova kovinska tvoriva in stroji ter kovinske konstrukcije bodočnosti bi imeli vse drugačne oblike in mere, kot jih imajo danes.

M. Žumer

Literatura:

W. Shockley: Solid State Physics in Electronics and in Metallurgy. J. Metals, 1952, str. 829—842.

C. Herring and J. K. Galt: Elastic and Plastic Properties of Very Small Metal Specimens. Phys. Rev. **85**, 1060, 1952.

Iron Whiskers, J. Metals, 1954, str. 723.

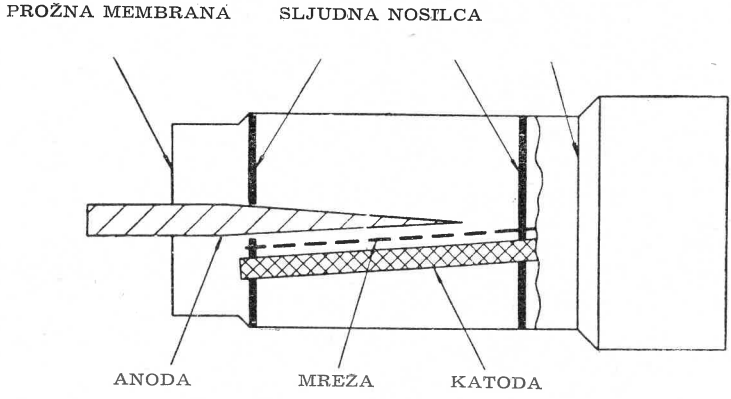
MERJENJE HRAPAVOSTI

Površina kovinskega dela, ki je bil obdelan na stružnici ali drugem stroju, ni nikoli popolnoma gladka. Pod mikroskopom opazimo majhne odmike od povprečne ploskve. Čim finejša je obdelava, tem manjši so odmiki. Ne zanimajo pa nas odmiki na posameznih mestih, ampak neko povprečje za celo ploskev. Na neki dovolj dolgi krivulji na površini merimo v enakih razdaljah odmike od povprečne ploskve. Aritmetično sredino absolutno vzetih odmikov imenujmo *povprečna hrapavost*. Povprečna hrapavost nam torej meri kvaliteto obdelave. Meritev lahko opravimo zelo hitro s posebno elektronsko napravo.[1]

Takšna naprava ima demantno iglo, ki drsi po preiskovani površini in sledi vsem neravnostim. Njeno nihanje se prenaša na posebno mehansko

[1] A. F. Underwood and J. B. Bidwell: New Instruments for Roughness Measurement. Brush Strokes, December 1953. Publ. by Brush Electronics Company, Cleveland, Ohio.

krmiljeno elektronko.[2] To je trioda, vezana kot ojačevalka v običajnem stiku. Anoda se lahko premika z vzvodom, ki sega iz cevi skozi prožno membrano. Če se zmanjša razdalja med anodo in mrežo, se zmanjša tudi notranji upor elektronke in električni tok skozi njo se poveča. Ker teče isti tok skozi anodni delovni upor, se spremeni napetost na tem uporu. Za majhne premike gotovo velja linearna zveza med premikom anode in spremembo napetosti na delovnem uporu. Nihajočo napetost s tega upora ojačimo v dvostopenjskem ojačevalcu izmeničnih napetosti. Izhodno izmenično napetost usmerimo in privedemo na voltmeter. Zaradi vztrajnosti svojega sistema voltmeter ne sledi posameznim sunkom, ampak kaže neko povprečno napetost, ki je sorazmerna povprečni hrapavosti, če je le ojačevalec linearen.



Mehansko krmiljena elektronka v prerezu.
Slika je vzeta iz Brush Strokes (1).

Igla je vezana na mehansko krmiljeno elektronko preko viskozne sklopke, ki skrbi za dušenje vsega sistema. Vse to je vgrajeno v držalo, ki spominja na električno gramofonsko dozo. Pri meritvi premikamo držalo po preiskovani površini s hitrostjo okrog 3 mm sek^{-1}. Držalo je s kablom vezano na ostalo aparaturo, kjer sta ojačevalec in voltmeter. Aparat ima pretikalo, s katerim spreminjamo ojačevanje in s tem hrapavost, ki nam je potrebna za poln odklon instrumenta. Tako izberemo različne merilne obsege povprečne hrapavosti od 0,25 do 25 μ.

Frekvenčno odvisnost ojačevalca lahko izkoristimo za to, da ocenimo »valovno dolžino« hrapavosti. Tako moremo razlikovati »valovitost« površine od fine hrapavosti, tudi če so povprečni odmiki enako veliki. Pri tej meritvi mora igla drseti s konstantno hitrostjo (pogon z motorjem), medtem ko s kondenzatorji in upori spreminjamo frekvenčno območje ojačevalca.

J. Pahor

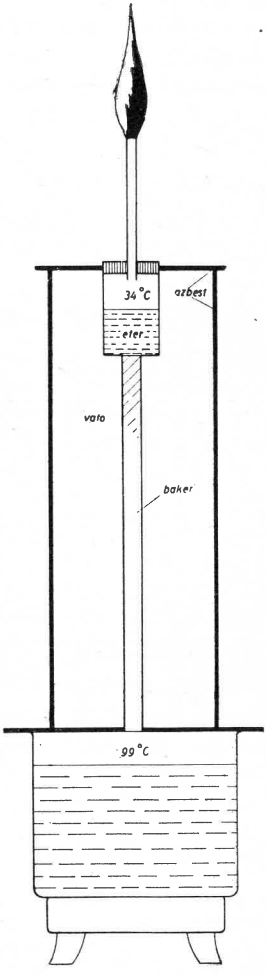
---

[2] Take elektronke se uporabljajo tudi v sorodne namene. Glej n. pr. Elektrotehniški vestnik, 1947/2, str. 44, ter Elektrotehničar, Zagreb, 1949/3, str. 71!

ŠOLA

MERITEV TOPLOTNE PREVODNOSTI KOT ŠOLSKI POSKUS

Pri obravnavanju toplotne prevodnosti se v šoli po navadi omejimo na kvalitativne poskuse, ker so standardni načini merjenja prenerodni in preveč zamudni. Če pa smo zadovoljni z majhno natančnostjo, je pri dobrih vodnikih mogoče izvesti meritev v nekaj minutah in z zelo skromnimi pripomočki, tako da jo lahko pokažemo pred razredom.



Kot toplotni vodnik služi n. pr. bakrena palica z dolžino $l = 20$ cm in s presekom $S = 1$ cm^2. Na spodnjem koncu je palica vdelana v kos medene pločevine. Na vrhnjem koncu pa je nalotana kovinska posodica (3 cm $\phi \times 5$ cm). Le-to zapremo z gumijevim zamaškom, skozi katerega je vtaknjena steklena cevka (n. pr. 5 mm $\phi \times 7$ cm). Bakrena palica je toplotno izolirana z vato, ki je pred ognjem zavarovana s plaščem iz azbesta.

Merjenje temperature si prihranimo s tem, da vzamemo dve tekočini z znanima vreliščema, n. pr. vodo (vrelišče pri nas 99° C) in eter (vrelišče 34° C). Če se konec palice dotika vrele tekočine ali nasičene pare, ima približno temperaturo vrelišča. To drži tem bolje, če z močnim kuhanjem, torej z gibanjem tekočine, poskrbimo za dober toplotni kontakt. Znano izparilno toploto uporabljene tekočine (etra) lahko izkoristimo za meritev toplotnega toka.

Poskus poteka takole: Z omenjeno pločevino pokrijemo lonec vode, ki stoji na električnem kuhalniku. V loncu naj voda močno vre. Z merilnim valjem vlijemo v vrhnjo posodico 5 do 10 cm^3 etra, posodico zapremo in na koncu cevke zažgemo etrovo paro. (Steklenica z etrom ne sme biti v bližini!) V nekaj minutah je doseženo stacionarno stanje. (Temperature v palici se potem ne spreminjajo več.) To stanje moramo doseči, če hočemo iz izmerjenega toplotnega toka izračunati toplotno prevodnost.

V trenutku, ko plamen ugasne, hitro vlijemo v posodico novih 5 cm^3, t. j. 3,7 gramov etra ($\varrho = 0{,}74$ g/cm^3), obenem pa pogledamo na uro. Posodico spet zapremo in paro prižgemo. Ko plamen ugasne, ugotovimo, da je minilo 120 sekund.

Iz znane izparilne toplote etra (0,368 MJ/kg) izračunamo, da se je za odparitev 3,7 g etra porabila toplota $Q = 1360$ J. Iz tega in iz prejšnjih podatkov izračunamo potem toplotno prevodnost bakra:

$$\lambda = \frac{Ql}{t\,\Delta T S} = \frac{1360\ \mathrm{J}\cdot 0{,}20\ \mathrm{m}}{120\ \mathrm{s}\cdot 65\ \mathrm{st}\cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^2} = 350\ \mathrm{W/mst}$$

Učence je treba na koncu opozoriti na nekatere načelne nedostatke te meritve. Temperatura na toplem koncu palice je nekoliko nižja kot vrelišče vode, ker je vmes tanka plast hladnejše vode. Tudi če je ta plast debela samo nekaj stotink milimetra, znaša temperaturna razlika zaradi slabe toplotne prevodnosti vode (0,6 W/mst) lahko več stopinj. Podobno je s temperaturo palice na drugem koncu. Tej napaki se izognemo pri resnih meritvah tako, da merimo temperaturo palice s termoelementoma, in sicer raje ne na konceh, ampak v primernih vmesnih točkah. Druga napaka nastane zaradi prekinitve toplotnega toka po izparitvi prve porcije etra. Zaradi te prekinitve se namreč pokvari stacionarno stanje v palici. Po drugi strani pa eter, ki ga dolijemo, nima še temperature vrelišča, ampak je hladnejši. Toplota, ki se porabi za segretje do vrelišča in ki je v računu nismo upoštevali, pa ne preseže 10 % izparilne toplote, če je eter prvotno imel sobno temperaturo.

Po vsem tem se ne smemo čuditi, da je dobljeni rezultat skoraj za 10 % prenizek. Pravilna vrednost za baker je 380 W/mst. *R. Korbar, I. Kuščer*

MODEL KRISTALNE MREŽE — Z MILNIMI MEHURČKI*

Med nepogrešljiva učila za pouk fizike in kemije spada model kristalne mreže NaCl. Ta model kažemo pri kristalografiji, pri obravnavanju uklona rentgenske svetlobe in še ob drugih priložnostih. Takšen model je seveda čisto statičen in vrh tega kaže samo, kakšna je zgradba *perfektne* kristalne mreže (mreže brez napak). O nastajanju in spreminjanju mreže, torej o rasti kristalov in o rekristalizaciji model nič ne pove. Ravno tako ga ne moremo uporabiti, kadar govorimo o *dislokacijah* (o napakah v kristalni mreži) in o strukturi drobno kristaliziranih snovi.

Vse to pa lahko pokažemo z novim modelom kristalne mreže, ki sta ga iznašla L. Bragg in J. F. Nye. Gradniki tega modela niso lesene kroglice, ampak drobni milni mehurčki.** Za ta model potrebujemo naslednje:

1. *Milnico,* ki jo pripravimo takole: 15,2 cc sveže predestilirane oljne kisline zmešamo s 55 cc destilirane vode. Vse skupaj pomešamo dobro s 73 cc 10 procentne vodne raztopine trietanolamina in mešanico dopolnimo z destilirano vodo na 200 cc. Nato dodamo še 164 cc čistega glicerina, premešamo in pustimo, da se tekočina loči v dva dela. Bistrejši vrhni del odtočimo za uporabo in ga eventualno razredčimo (do 1 : 4).

2. *Kapilaro,* ki jo izvlečemo iz steklene cevke premera 6 mm (najbolje iz jenskega stekla). Primerno odprtino kapilare določimo s poizkušanjem, tako da prirezujemo že izvlečeno kapilaro. Premer odprtine naj bo približno 50 μ. Čim večja je odprtina, tem večji bodo dobljeni mehurčki.

3. *Petrijevko* (premer približno 16 cm) za milnico.

4. *Pripravo za vzdrževanje konstantnega pritiska* okrog 0,2—0,3 atm (glej sliko 1!). Litrski steklenici sta za to dovolj veliki.

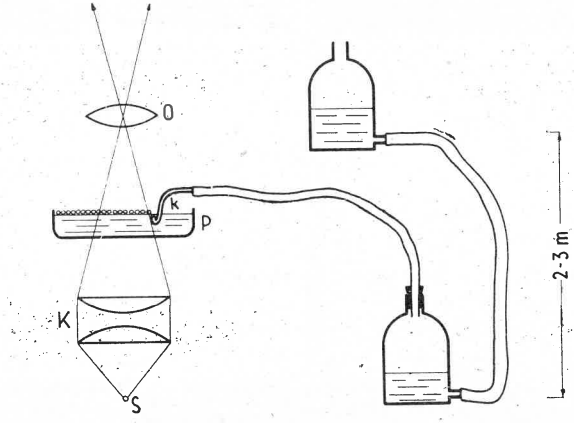
5. *Majhen plinski gorilnik,* narejen iz steklene cevke, s šobo na koncu. Rabimo ga za uničevanje nezaželenih mehurčkov.

---

* Povzeto po referatu v okviru vaj iz metodike fizikalnega pouka, 1954.

** O uporabnosti tega modela za pouk priča dejstvo, da so v Angliji z njim že napravili poučen film. Nemara bi bilo dobro, da bi ta film uvozili!

Mehurčke naredimo s potiskanjem zraka skozi kapilaro v milnico. Ustje kapilare naj bo 5 mm pod gladino milnice (obrnjeno navzgor). Nastajajoči mehurčki se sprimejo in se sami od sebe urede v bolj ali manj pravilen razpored. Sile med mehurčki so na večje razdalje privlačne in preidejo tik pred dotikom v odbojne. Trenje med mehurčki je zelo majhno in se zato drug ob drugem lahko premikajo. Za en poskus naredimo do sto tisoč mehurčkov premera 0,1 do 2 mm. Manjše število gledalcev si lahko ogleda mehurčke v petrijevki. Pri večjem avditoriju si pomagamo s projiciranjem (glej sl. 1!). Ker pa je milnica razmeroma motna, moramo del milnice odpipetirati, potem ko smo mehurčke že naredili. Tako dobimo dovolj svetlo sliko.



Sl. 1.

Urejeni razpored mehurčkov ponazarja kristalno mrežo čistega elementa. Kajti vsi sestavni deli — mehurčki — so med seboj enaki. Vendar se na modelu vidijo nekatere splošne lastnosti kristalov:

1. Po navadi niso vsi mehurčki enotno razporejeni, temveč je več območij s pravilno strukturo. Ta območja so ločena med seboj po mejah, na katerih ni urejenosti (slika 2; premer mehurčkov 0,76 mm). Dotikajoča se območja imajo različno orientacijo in ponazarjajo kristalna zrna v kristalinični strukturi.

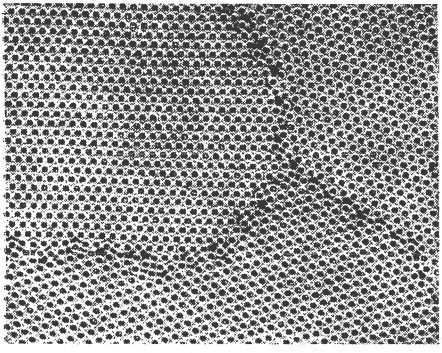
2. Ko kristal — ali pa model z mehurčki — stisnemo ali kako drugače obremenimo, se elastično ali plastično deformira. Do neke meje je deformacija elastična, potem pa se kristal vda z *zdrkom* ob najgosteje zasedeni mrežni ravnini. To se zgodi tako, da se ena vrsta atomov pomakne ob drugi za razdaljo enega atoma (mehurčka). Zdrk ne nastopi po celi vrsti naenkrat. Začne se na enem koncu, tako da se na eni strani vrste, ob kateri bo zdrk, vrine en atom, ali pa da se eden odstrani. Odvišni atom ali vrzel potujeta vzdolž vrste. Posledica tega je zdrk za premer atoma. Na našem modelu lahko opazujemo, kako se pomikata odvišni mehurček ali pa vrzel vzdolž vrste. To premikanje traja tudi po več sekund. Zdrk najhitreje opazimo, ko prav rahlo nagnemo petrijevko. Opazimo pa tudi mirujoče dislokacije (premike), ki nastopijo pri manjši obremenitvi kristala. Vidne so v obliki temnih prog, ki se z obremenitvijo spreminjajo. Takšne primere kažejo slike 3, 4 in 5 (premeri mehurčkov so 1,9, 0,6 in 1,9 mm). Prvi dve sliki kažeta primera, ko imamo v paralelni vrsti po en mehurček manj, na tretji pa je eden več.

3. *Napake oblike V* (slika 6; premer mehurčkov 0,68 mm). Te napake izginejo ob rahlem tresenju petrijevke (analogno *termični rekristalizaciji*).

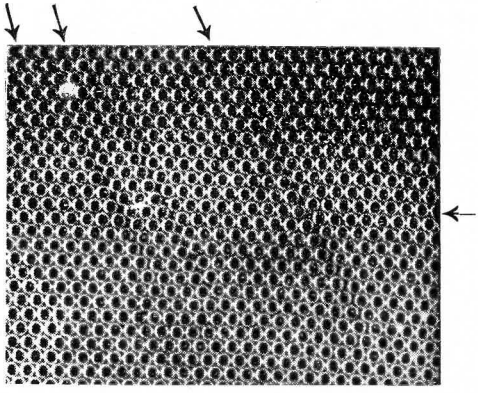
4. Napake v strukturi mreže zaradi manjkajočih atomov (slika 7; premer mehurčkov 0,68 mm).

5. Vplive nečistoč — to je strukturi mreže tujih atomov (mehurčkov) kaže slika 8 (premer mehurčkov 1,3 mm).

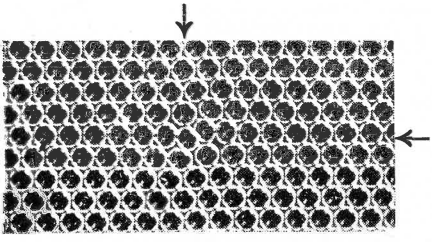
6. Razen teh statičnih pojavov na strukturi mreže lahko prikažemo tudi dinamične pojave, kot so pojavi pri kristalizaciji. Mehurčke pomešamo, tako da zgube vsako urejenost — kristal se je »stalil«. Nato počakamo, da se mil-



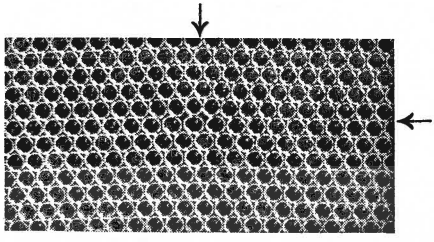
Sl. 2.



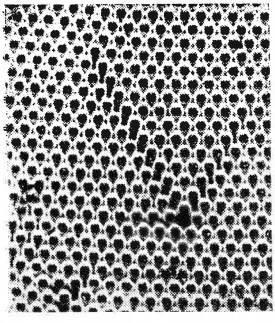
Sl. 3.



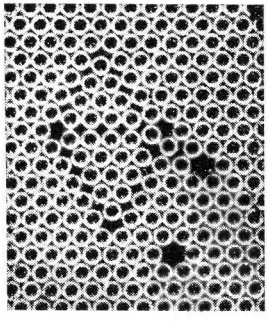
Sl. 4.



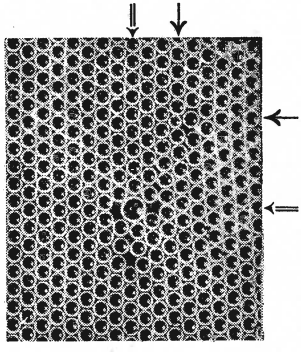
Sl. 5.



Sl. 6.

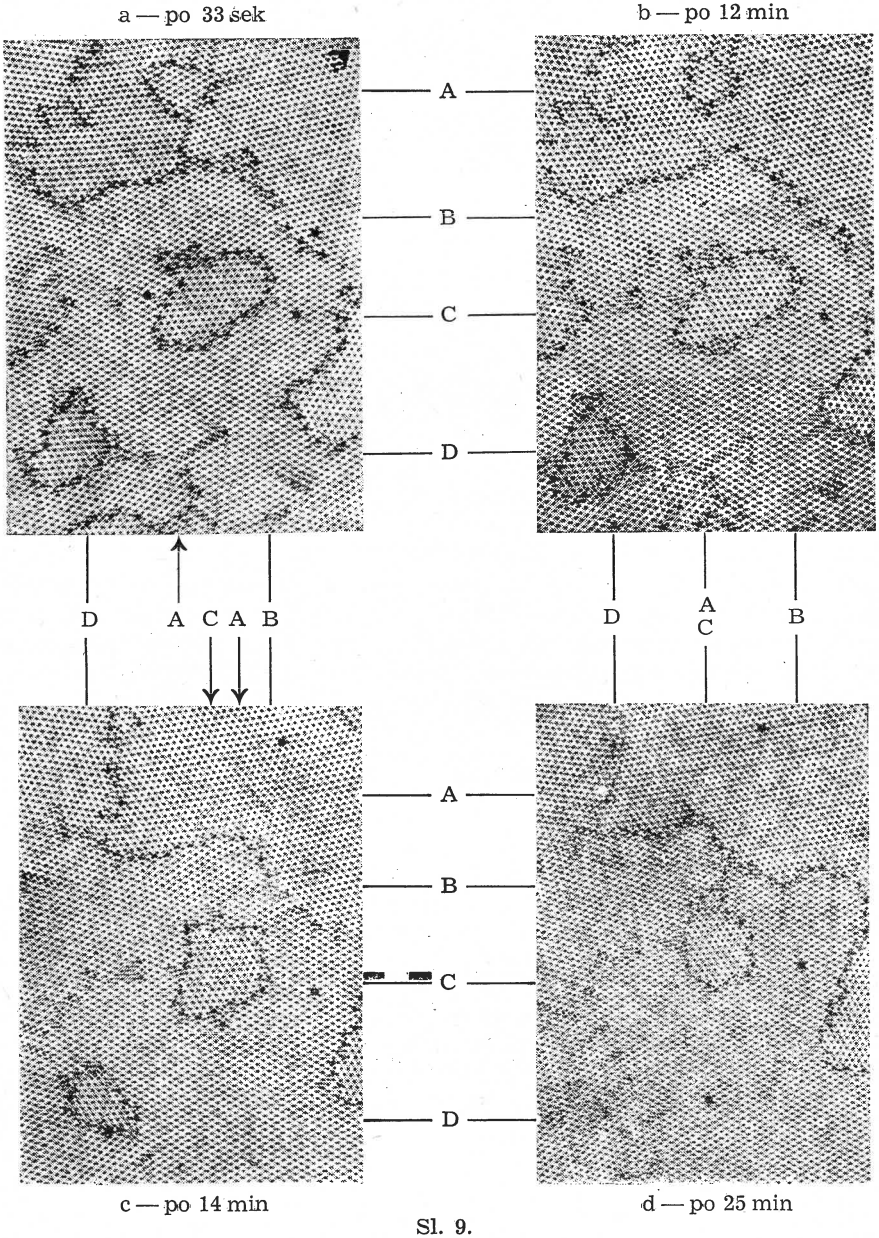


Sl. 7.



Sl. 8.

nica in mehurčki umirijo — snov se »ohlaja«. Mehurčki se začno združevati v majhne skupine — *kristalne kali* — ki rastejo v *zrna*. Ta kristalna zrna se med seboj sprimejo v kristalinično strukturo. Nekatere meje med zrni izginejo, posebno rade tiste, ki ločijo zrna skoraj paralelne orientacije. Tudi napake v mreži, ki jih je bilo na začetku mnogo, se zmanjšujejo (rekristalizacija). Slike 10 a, b, c, d kažejo, kakšni so mehurčki po 33 sekundah, po dveh minutah, 14 minutah in 25 minutah po premešanju. Nekatere zanimive podrobno-



Sl. 9.

sti so na slikah zaznamovane. Oglejmo si jih: Zrno *(CC)* se ohrani ves čas, čeprav se mu oblika menja. Zrno *(AA)* se manjša, preide v napako tipa *V*, ki pa na koncu izgine. Zrno *(DD)* prekristalizira v večji kristal in ostanejo od njega le še 4 paralelne dislokacije. Meja *(BB)* je na začetku slabo vidna, pozneje pa se uredi in postane ostra. Neurejena meja *(BD)* se slabo uredi in zato ostanejo tam napetosti, ki povzročijo paralelne dislokacije, začenjajoče na meji. Paralelna dislokacija *(DA)* izgine (termično odstranjevanje napetosti v kovini). Vrzel ob meji *(BB)* s premikom na mejo izgine. Vrzel *(CB)*, ki se nahaja v homogeni strukturi, se pa ohrani. Po 25 minutah začno mehurčki pokati in nastanejo nove vrzeli *(DC)*.

M. Ribarič

L. Bragg, J. F. Nye: A dynamical model of a crystal structure. Proc. Roy. Soc., A, **190**, 474 (1947). Vse fotografije so reproducirane iz tega članka.

KAKŠNO JE ZNANJE FIZIKE PRI IZPITIH NA UNIVERZI

V letošnji prvi številki je docent A. Moljk objavil nekaj zanimivih podatkov o znanju fizike, ki ga prinašajo novinci s seboj na univerzo.* Kot dopolnilo k temu so v naslednjih vrsticah objavljeni nekateri podatki o izpitih iz fizike I na univerzi. Ta predmet poslušajo v prvem letniku vsi slušatelji tehniške fakultete, razen arhitektov, ter vsi slušatelji prirodoslovno matematičnega oddelka, razen geografov.

Izpit ima dva dela, pismeni in ustni. Pismeni del obsega 4 računske naloge, večinoma iz gimnazijske snovi (deloma celo iz nižje gimnazije). Po navadi se za pozitivno oceno zahteva, da je $1\frac{1}{2}$ naloge izdelane pravilno. Za reševanje nalog je poldrugo uro časa. Kandidati se smejo pri tem posluževati vseh pripomočkov, to je knjig, zvezkov in vsakovrstnih zapiskov. Kljub temu pa pri vsakem roku uspe s pismenim izpitom komaj polovica kandidatov.

Oglejmo si nekaj primerov! V junijskem roku 1955 je izmed 35 gradbenikov, metalurgov in rudarjev samo 14 kandidatov rešilo naslednjo nalogo: V 10 kg ledeno mrzle vode napeljemo 1 kg pare (100^0 C). Kolikšna je končna temperatura? Ta naloga je za nižjo gimnazijo! Pri nalogah, ki so na višjem nivoju, so uspehi še slabši. Tako na primer je 43 strojnikov dobilo naslednjo nalogo: Po klancu se spusti biciklist z začetno hitrostjo 2 m/s. Kolikšno hitrost doseže v točki, ki leži za 5 m niže kot začetna, če ni trenja? Samo dva slušatelja sta rešila nalogo z uporabo zakona o energiji. Šest slušateljev je rešilo nalogo na ta način, da so napisali enačbi za hitrost in za pot. 35 slušateljev pa naloge ni rešilo. Izmed 27 kemikov so samo trije pravilno rešili nalogo, ki obravnava interferenco pri odboju na tanki plasti.

K ustnemu delu izpita pridejo le kandidati, ki uspešno opravijo pismeni del. Kljub temu je tudi pri ustnem izpitu mnogo hudih neuspehov. V jesenskem terminu l. 1954 izmed 70 kandidatov, ki so prišli k ustnemu delu izpita, desetorica ni uspela zaradi enega samega vprašanja: Kolikšen je pritisk 1 m globoko pod vodo? Nekateri so sicer na pamet vedeli, da ustreza 10 metrom vodnega stebra 1 atmosfera, niso pa znali tega izvesti. Izmed tistih kandidatov, ki so na vprašanje odgovorili pravilno, je en sam slušatelj po zdravem pre-

* Podobna preskušnja je bila v letošnjem letu. Izmed 24 novincev fizikov (!) in 4 matematikov jih je samo 12 vedelo, kaj in koliko je kilovatna ura. Samo 6 jih je rešilo nalogo z mešanjem kropa in ledu. Samo 15 jih je vedelo, kolikšen je pritisk 1 m globoko pod vodo (samo dva sta to izpeljala, čeprav je bila izpeljava izrečno zahtevana). Pač pa jih je 19 vedelo, kaj so elektroni, protoni in nevtroni.

misleku računal težo 1 m visokega stebra vode s presekom 1 cm^2. Vsi ostali so prišli do rezultata s šablonskim vstavljanjem podatkov v enačbo $p = \varrho gh$, ki so jo znali na pamet. Samo za spoznanje bolje je bilo v junijskem roku l. 1955, ko 9 izmed 90 kandidatov ni uspelo zaradi istega vprašanja.

Podobna bi bila statistika z nekaterimi drugimi vprašanji iz snovi nižje gimnazije, ki se venomer ponavljajo pri izpitih na univerzi: Kaj je kilovatna ura? Za koliko se ohladi liter kropa, če vržemo vanj pol kilograma talečega se ledu? Za koliko je 1 kg železa ($\varrho = 7{,}8$ g/cm^3) pod vodo navidez lažji? Kje je skupno težišče dveh uteži (1 kg, 2 kg), ki sta 1 m vsaksebi?

Precej kandidatov kaže pri izpitu samo znanje, ki so se ga naučili na pamet, brez razumevanja. Statistiko o tem je seveda težko podajati, ker je sodba subjektivna. Po beležkah o 200 izpitih pa sodim, da boleha na tem načinu učenja skoraj tretjina vseh moških kandidatov ter blizu dve tretjini kandidatinj.

Uspehi niso na vseh oddelkih enako slabi. Na tehniki so povprečne ocene od junija 1954 do oktobra 1955 naslednje: fiziki 6,7, elektrotehniki 6,6, kemiki 6,5, rudarji-metalurgi 6,3, strojniki 6,2, gradbeniki-geodeti 6,1. Na Prirodoslovno matematičnem oddelku pa so uspehi takšnile: fiziki 7,6, matematiki 6,5, kemiki 5,6, meteorologi 5,5, biologi 5,0. V tej statistiki so všteti tudi negativno (z oceno 5) ocenjeni ustni izpiti. Niso pa všteti neuspeli pismeni izpiti.

Če hočemo te podatke primerjati z rezultati ankete pri novincih, je treba dodati še primeren koeficient. Upoštevati je namreč treba, da odgovarjajo kandidati pri izpitu tedaj, ko so najbolj pripravljeni; novincem pa so bila dana vprašanja štiri mesece po maturi, ko so bili čisto nepripravljeni.

I. Kuščer

DELO SEKCIJE ZA DVIG POUKA IN PREDAVANJA DRUŠTVA MATEMATIKOV IN FIZIKOV LR SLOVENIJE V LETIH 1954 IN 1955

Delo sekcije se je v letih 1954 in 1955 odvijalo v naslednjih področjih:

1. *javna predavanja:*

Dr. I. Vidav: Plateaujev problem. Dr. A. Vakselj: O trigonometričnih funkcijah. F. Križanič: Spektralna teorija linearnih operatorjev v Hilbertovem prostoru. Dr. M. Blejec: Moderne statistične metode. Dr. M. Blejec: Statistične metode v raziskovalnem delu. A. Moljk: Merjenje starosti prazgodovinskih organskih ostankov z radioaktivnim ogljikom 14. L. Kosta: Atomski reaktorji za industrijo danes in v bodočnosti. P. Gosar: Polvodniki. D. Jamnik: Betatron. Dr. M. Čopič: Velemolekule v raztopinah. J. Branc: Plastični film. Dr. L. Čermelj: Ob dvestoletnici rojstva Jurija Vege.

2. *predavanja v strokovnem aktivu:*

B. Rupnik: Teorija števil v srednji šoli. F. Jakhel: Merjenje na terenu. F. Ahlin: Kritične opazke k pouku matematike in fizike na ljubljanskih srednjih šolah. J. Žabkar: Pouk matematike v obveznem šolskem sistemu. M. Švikaršič: Neutrino. E. Bračko: Polarizacija svetlobe. F. Kvaternik: O pouku fizike in fizikalnih nalogah. F. Kvaternik: Pouk elektrike po Giorgijevem merskem sistemu. Dr. L. Čermelj: Komemorativni govor umrlemu fiziku Einsteinu

Navezali smo tudi stike s predavatelji izven Ljubljane (Kranj, Zagreb, Celje). Po posredovanju naše delovne skupine je profesor M. Krajnovič iz Zagreba hospitiral pri tovariših matematikih na VI. gimnaziji.

Predavanja so bila v dokaj rednih razmakih. Obiskovalo jih je po 15 do 30 poslušalcev. Predavanja pa so vredna večje pozornosti, vredna, da bi jih poslušalo več matematikov in fizikov, zlasti mlajših tovarišev, ki so zaposleni na šolah. Prav zaradi izoliranosti določenega števila profesorjev in predmetnih učiteljev vsebujeta potem šolska matematika in fizika ponekod le preveč opisovanja in zaostajata v razvoju in boljšem posredovalnem načinu.

Omeniti je še treba, da je na iniciativo društva predmetni aktiv začel akcijo za zbiranje gradiva, ki bi služilo kot podlaga delu v matematičnih in fizikalnih krožkih na srednjih in strokovnih šolah. Društvo matematikov in fizikov bo poskrbelo potem za tisk tako zbranega gradiva. Mnogi taki momenti pripomorejo k pozitivni organizacijski in vsebinski povezanosti med delom aktiva in društva.

3. *razprave:*

F. Dominko: O pouku matematike, fizike in astronomije na naših visokih šolah. F. Ahlin: Pouk matematike in fizike v srednjih in srednjih strokovnih šolah. N. Prijatelj: O vprašanju predmetnika in učnega načrta za srednje šole. F. Ahlin: Razprava o učnih načrtih za matematiko in fiziko v višjih razredih gimnazije. M. Klopčičeva: Razgovor o enciklopediji elementarne matematike, o matematičnih in fizikalnih učilih, šolskih radijskih oddajah, filmih in nagradah predavateljem.

4. *filmi:*

S komentarjem ozvočeni matematični filmi: Pitagorov izrek in geometrijska mesta v ravnini. (Avtor: M. Krajnovič). S sodelovanjem Ljudske prosvete je predvajal predmetni aktiv film amerikanske produkcije: A je za atom. (Komentator: N. Nučič.) Kinoteka je predvajala filme in predavala: O uvedbi diafilmov kot rednem ponazorilu pri vseh učnih predmetih.

5. *ekskurzije in ogledi:*

Ekskurzija na Reko z obiskom v tovarni Torpedo in ladjedelnici 3. Maj in ogledom prekooceanske ladje Dinare. Ekskurzija v tovarno glinice in aluminija Boris Kidrič v Kidričevem. Ogled fizikalne predavalnice, praktikuma in laboratorijev Instituta Jožef Stefan. Ogled institutov in laboratorijev na Rudarski fakulteti. Skupinski izlet v Zagorico k proslavi na rojstnem domu Jurija Vege.

6. V sodelovanju s Centralno ljudsko univerzo prireja Društvo matematikov in fizikov že več let zaporedoma večerne izobraževalne tečaje za matematiko in fiziko. Leta 1954 so se po vpisu in željah poslušalcev izoblikovali naslednji tečaji: za algebro, trigonometrijo in analitično geometrijo, infinitezimalni račun in za fiziko. V naslednjem letu smo odprli tečaje: iz elementarne matematike, trigonometrije, verjetnostnega računa, infinitezimalnega računa in fizike. V tečajih so predavali profesorji: Ahlin, Bračko, Brančeva, Čemažar, Gabrovšek, Prijatelj, Štalec, Vidav. Vzdrževanje takih tečajev je težavno zaradi nehomogenosti slušateljev glede na predizobrazbo in zaradi premajhnega števila vaj, ki so nujne pri predvideni snovi, če upoštevamo kratkost trajanja tečajev (od novembra do junija).

7. Močna udeležba članstva na obeh družabnih večerih (januarja 1954 in oktobra 1955) priča o iskrenem sožitju med matematiki in fiziki na srednjih in visokih šolah.

M. Klopčičeva

ODGOVORI

ODGOVOR NA VPRAŠANJE ŠT. 7

(Iz III. letnika št. 5—6)

Določi robove kvadra tako, da bo prostornina največja, pri čemer so robovi x, y, z vezani na dva pogoja:

$$x + y + z = A, \quad xy + yz + zx = B \tag{1}$$

Pri kvadru z realnimi robovi velja vedno neenačba $A^2 - 3B > 0$; enakost nastopi le pri kocki. Ta primer bomo v naslednjem izključili, ker tedaj pogoja nista neodvisna; tudi ekstrema ni, saj je rob kocke dan že s prvim pogojem.

Če eliminiramo iz (1) y in z, dobimo za prostornino izraz:

$$V(x) = x^3 - Ax^2 + Bx \tag{2}$$

Tam, kjer je ekstrem, je $V'(x) = 0$. Če seštejemo to enačbo in še dve analogni za y in z, dobimo zvezo $A^2 - 3B = 0$. To je v nasprotju z ugotovitvijo, da je $A^2 - 3B > 0$. Kje je napaka?

Z eliminacijo z-ja iz (1) dobimo enačbo $y^2 - y(A - x) + (x^2 - Ax + B) = 0$. Ta enačba določa y pri danem x. Če hočemo, da je y realen, mora biti njena diskriminanta pozitivna ali 0:

$$-3x^2 + 2Ax + (A^2 - 4B) \geqq 0$$

Ta neenačba določa interval, v katerem mora ležati x, da je y realen. Torej v funkciji (2) x ni poljuben, temveč leži na intervalu

$$\tfrac{1}{3}(A - 2D) \leqq x \leqq \tfrac{1}{3}(A + 2D); \quad D^2 = (A^2 - 3B) \tag{3}$$

Zaradi simetrije veljajo enake omejitve za y in z. Z odvajanjem funkcije (2) ugotovimo, da je pri $x = \frac{1}{3}(A + D)$ minimum, pri $x = \frac{1}{3}(A - D)$ maksimum. Potek funkcije $V(x)$ na intervalu (3) kaže, da doseže $V(x)$ največjo vrednost tudi na krajišču $\frac{1}{3}(A + 2D)$, najmanjšo pa pri $x = \frac{1}{3}(A - 2D)$.

Z odvajanjem funkcije $V = V(x)$ smo dobili od dveh možnih maksimumov le enega; maksima na desnem krajišču intervala nismo dobili, ker tam tangenta ni vodoravna! Isto velja seveda za funkciji $V(y)$ in $V(z)$.

Če naj rešitve problema res ustrezajo pogojema (1), imamo tele možnosti: $x = \frac{1}{3}(A - D)$, $y = \frac{1}{3}(A - D)$, $z = \frac{1}{3}(A + 2D)$ ter še dve podobni, ki ju dobimo iz te s ciklično permutacijo robov x, y in z. Vrednosti za x in y res zadoščata enačbi $3x^2 - 2xA + B = 0$, vrednost za z pa ji ne ustreza, ker je to krajišče intervala, kjer tudi doseže $V(z)$ ekstrem. V tem dejstvu tiči vzrok gornjega protislovja.

A. Suhadolc

ODGOVOR NA VPRAŠANJE ŠT. 8

(Iz III. letnika št. 5—6)

Za ploščino pasu med dvema vzporednikoma na krogli velja formula $P = 2\pi av$, torej je površina sorazmerna višini pasu v. Zanima nas, če je med rotacijskimi telesi še kakšno drugo telo s to lastnostjo.

Če vzamemo os x za rotacijsko os, je ploščina pasu

$$P = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

Enačbo meridiana $y = y(x)$ moramo tako določiti, da bo $P = 2\pi a(x_2 - x_1)$, kjer smo sorazmernostni faktor zaznamovali z $2\pi a$. Tako dobimo enačbo

$$2\pi a(x_2 - x_1) = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

ki mora veljati za vsak x_1 in x_2. Naj bo spodnja meja x_1 stalna, zgornja $x_2 = x$ pa spremenljiva. Gornja enačba se glasi:

$$a(x - x_1) = \int_{x_1}^{x} y(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

Če jo odvajamo na zgornjo mejo x, dobimo

$$a = y(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}$$

Spremenljivke v tej diferencialni enačbi so ločljive. Z integracijo dobimo takoj, da je

$$(a^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}\, y dy = dx, \quad (x - c)^2 + y^2 = a^2$$

To je enačba kroga. Torej ima med rotacijskimi telesi samo krogla gornjo lastnost.

A. Suhadolc

1. LASTNA FREKVENCA NEENAKOMERNO DEBELE STRUNE

Na to vprašanje smo prejeli tri odgovore:

1.

Struna z gostoto ϱ in dolžino $2a$ je v sredini najdebelejša, proti koncema pa presek S tako pojema, da je $S = S_0[1 - (x/a)^2]$, pri čemer je x razdalja od sredine žice. Določiti je treba za male amplitude lastno frekvenco te strune, če je napeta s silo F.*

---

* Opomba urednika: Naloga je bila vzeta iz knjige: P. Frank, R. Mises: Partielle Differential- und Integralgleichungen der Physik, I (Braunschweig 1925), str. 444. Tam je naloga podana kot zgled za uporabo integralnih enačb. Navedena je vrsta za Fredholmov imenovalec: $D(p) = 1 - (8/15)\,p + 0{,}0761905\,p^2 - 0{,}0049570\,p^3 + 0{,}00018370\,p^4 \ldots$ Najmanjši koren enačbe $D(p) = 0$ je $p = 2{,}83$.

Del žice z dolžino dx ima maso $dm = \varrho\, S dx$. Newtonov zakon pove za ta del žice,* da je $d(Fy') = dm\, \partial^2 y/\partial t^2 = \varrho\, S\, dx\, \partial^2 y/\partial t^2$, torej v našem primeru: $\partial^2 y/\partial x^2 = (1/c^2)\,[1 - (x/a)^2]\partial^2 y/\partial t^2$. Pri tem je c hitrost potujočega valovanja na sredini strune ($c^2 = F/\varrho\, S_0$).

Ker obravnavamo samo lastno nihanje, iščemo rešitev v obliki: $y = U(u) \cdot \sin \omega\, t$, pri čemer je $u = x/a$. Za funkcijo $U(u)$ dobimo diferencialno enačbo:

$$U'' + p\,(1 - u^2)\,U = 0 \qquad (1)$$

kjer je $p = (\omega\, a/c)^2$. To diferencialno enačbo moramo rešiti. Vrednost konstante p je določena z zahtevo, da mora funkcija $U(u)$ ustrezati robnima pogojema $U(1) = 0$ in $U(-1) = 0$.

Rešitev poskusimo izraziti s potenčno vrsto: $U = \Sigma a_{2n}\, u^{2n}$. To vstavimo v diferencialno enačbo. U je rešitev, če je vsota koeficientov pri vsaki potenci u enaka nič. Tako dobimo rekurzijsko formulo za koeficiente: $a_{2n+2} = p\,(a_{2n-2} - a_{2n})/[2\,(n+1)\,(2\,n+1)]$. Prvi koeficient smemo poljubno izbrati, ker je enačba homogena. Vzemimo $a_0 = 1$. Tolikšna je potem amplituda na sredini strune. Dalje dobimo:

$a_2 = -\frac{1}{2}\,p$, $a_4 = p/12 + p^2/24$, . . . Za robni pogoj dobimo potem: $U(1) = 1 - 5\,p/12 + 239\,p^2/10080 - 436\,p^3/1028865 + \ldots = 0$. Aproksimacijo za p poskusimo dobiti tako, da vrsto na primernem mestu odrežemo. Prvi trije členi dado kvadratno enačbo, katere manjši koren je $p = 2{,}87$. Boljšo aproksimacijo dobimo s kubno enačbo, ki jo rešimo z iteracijo ali z Newton-Raphsonovo metodo,** in sicer: $p = 2{,}82$.

N. Bezić

2.

Problem bom rešil z variacijsko metodo. Diferencialna enačba $U'' + p\,(1 - u^2)\,U = 0$ ustreza izoperimetričnemu problemu***:

$$I = \int U'^2 du = \text{min.}, \quad J = \int U^2\,(1 - u^2)\,du = 1$$

(meji teh dveh in vseh nadaljnjih integralov sta -1 in $+1$). Dana diferencialna enačba je namreč Eulerjeva diferencialna enačba za navedeni variacijski problem. Iz diferencialne enačbe dobimo z integracijo, da je $I_{min} = p$.

Neznano funkcijo $U(u)$ poskusimo aproksimirati s sodim polinomom četrte stopnje, ki zadošča robnemu pogoju $f(\pm 1) = 0$, torej: $f(u) = a_1\,(1 - u^2) + a_2\,(1 - u^4) \approx U(u)$. Koeficienta določimo tako, kot veleva zastavljeni izoperimetrični problem. Poiskati moramo torej minimum izraza

$$\Omega = I - pJ = \int (-2\,a_1\,u - 4\,a_2\,u^3)^2\,du - p \int [a_1\,(1 - u^2) + a_2\,(1 - u^4)]^2\,(1 - u^2)\,du = 2\,[4\,a_1^2/3 + 16\,a_2^2/7 + 16\,a_1\,a_2/5 - p\,(16\,a_1^2/35 + 1984\,a_2^2/3465 + 32\,a_1\,a_2/63)].$$

Potrebni pogoj za ekstrem zadnjega izraza je:

$$(1/16)\,\partial\Omega/\partial\,a_1 = a_1/3 + 2\,a_2/5 - p\,(4\,a_1/35 + 8\,a_2/63) = 0$$
$$(1/16)\,\partial\Omega/\partial\,a_2 = 2\,a_1/5 + 4\,a_2/7 - p\,(8\,a_1/63 + 496\,a_2/3465) = 0$$

* Glej izpeljavo pri odgovoru na vprašanje o centrifugalni verižnici (S. Šterbal, Obz. mat. fiz. 4, 45, sl. 1, 1955-56)!

** E. Whittaker, G. Robinson: Tečaj numerične matematike, str. 78.

*** I. Vidav: Višja matematika II, str. 420.

To je homogen sistem linearnih enačb za a_1 in a_2. Netrivialna rešitev sistema obstoji le, če je determinanta koeficientov enaka nič. Tako dobimo kvadratno enačbo: $p^2 + 121{,}6\,p - 355{,}42 = 0$. Njen pozitivni koren je: $p_0 = 2{,}821$. Ta aproksimacija za p je bolj kot na 1 % natančna (glej spodnjo rešitev S. Pahorja!), čeprav je aproksimacija za U razmeroma surova. *N. Pregl*

Pripomba urednika: Navedena metoda se da tudi utemeljiti z lastnostmi rešitve diferencialne enačbe tega tipa: Rešitve, ki jih zaznamujemo z U_0, U_1, $U_2 \ldots$ in ki jim pripadajo vrednosti p_0, p_1, $p_2 \ldots$ parametra p, so med seboj takole ortogonalne: $\int U_m(u)\, U_n(u)\,(1 - u^2)\,du = 0$, če $m \neq n$. Normirajmo jih s predpisom $\int U_n^2(u)\,(1 - u^2)\,du = 1$. Lastne vrednosti p_n so vse pozitivne. Naj bo p_0 najmanjša lastna vrednost! Vsaka dvakrat zvezno odvedljiva funkcija $f(u)$, ki ustreza istemu robnemu pogoju kot U_n, se da razviti v enakomerno konvergentno vrsto $f(u) = \Sigma\, a_n\, U_n(u)$. Koeficienti se dobe kakor pri Fourierovi vrsti: $a_n = \int f(u)\, U_n(u)\,(1 - u^2)\,du$.

Poglejmo, kakšne vrednosti ima lahko kvocient $Q = \int f'^2(u)\,du / [\int f^2(u)\,(1 - u^2)\,du]$! Integracija per partes pokaže, da je integral v dividendu enak $-\int f''(u)\, f(u)\,du$. Potem vstavimo vrsto za $f(u)$ in dobimo, da je $Q = (\Sigma\, a_n^2\, p_n)/(\Sigma\, a_n^2) = p_0 + \Sigma\, a_n^2\,(p_n - p_0)/\Sigma a_n^2 \geqq p_0$. Enačaj velja samo, če je $f(u) = a_0\, U_0(u)$. Najmanjša lastna vrednost je torej določena s pogojem,* ki je enakovreden zgoraj navedenemu izoperimetričnemu problemu: $p_0 = \min [Q]$. Za f vstavljamo vsakovrstne funkcije, ki ustrezajo omenjenima pogojema. Minimum p_0 je dosežen šele, če zadenemo pravo rešitev. Vendar kvocient Q že tedaj, ko predstavlja $f(u)$ še razmeroma surovo aproksimacijo rešitve, prav dobro aproksimira lastno vrednost p_0. To je zato, ker nastopajo v vrsti za f koeficienti a_n v prvi potenci, v vrsti za Q pa kvadratno.

3.

Iščemo tiste rešitve $U(u)$ diferencialne enačbe (1) in njim pripadajoče lastne vrednosti p, za katere je $U(\pm 1) = 0$. Ker je struna simetrična, so rešitve sode ali lihe funkcije u; to se vidi tudi iz enačbe. Sode rešitve normiramo s predpisom $U(0) = 1$, lihe pa z $U'(0) = 1$.

Pri numerični integraciji diferencialne enačbe nadomeščamo odvode s kombinacijami funkcijskih diferenc.** Za takšno diferencialno enačbo drugega reda, ki ne vsebuje prvega odvoda, je najbolj prikladna formula***

$$\triangle^2 U = h^2\,[U'' + (1/12)\,\triangle^2 U'' + \ldots] \tag{2}$$

pri čemer je h širina intervala. V prvi aproksimaciji je kar $\triangle^2 U = h^2 U''$. Če h ni prevelik, upoštevamo kot korekturo samo še člen $(h^2/12)\triangle^2 U''$, medtem ko nadaljnje člene z višjimi diferencami lahko zanemarimo.

Preden pa začnemo numerično integrirati po tej formuli, moramo poznati vrednosti za U v vsaj dveh začetnih točkah. Te po navadi dobimo tako, da razvijemo U v potenčno vrsto. Za sode rešitve se ta glasi $U = 1 - (p/2!)\,u^2 + [p\,(p + 2)/4!]\,u^4 - \ldots$ Od tod izračunamo tri vrednosti za U, in sicer za $u = -h$, $u = 0$ in $u = h$. Te vrednosti, ki v našem primeru vsebujejo še ne-

* Primerjaj sorodno metodo pri integralnih enačbah, Obz. mat. fiz. 3, 109 (1953)!

** I. Vidav: Višja matematika, I. del, stran 520. Glej tudi M. V. Mihailović: Numerično odvajanje, Obz. mat. fiz. 4, 95, 1955.

*** D. R. Hartree, Numerical Analysis; Oxford 1952, str. 57, 109, 127.

znani p, zaznamujemo z U_{-1}, U_0 in U_1. Iz diferencialne enačbe izračunamo U_{-1}'', U_0'', U_1'' in napravimo razpredelnico po naslednjem vzorcu:

u	U	$\triangle U$	$\triangle^2 U$	U''	$\triangle U''$	$\triangle^2 U''$
$-h$	U_{-1}			U''_{-1}		
		$\triangle U_{-\frac{1}{2}}$			$\triangle U''_{-\frac{1}{2}}$	
0	U_0		$\triangle^2 U_0$	U''_0		$\triangle^2 U''_0$
		$\triangle U_{\frac{1}{2}}$			$\triangle U''_{\frac{1}{2}}$	
h	U_1		$\triangle^2 U_1$	U''_1		$\triangle^2 U''_1$
		$\triangle U_{3/2}$	$\vdots$		$\triangle U''_{3/2}$	$\vdots$
$2h$	U_2	$\vdots$		U''_2	$\vdots$	
$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$		

V tej razpredelnici so nam za sedaj znane vrednosti nad lomljeno črto. Potem ocenimo neznani $\triangle^2 U_1''$, ki ga rabimo za korekturo. Za prvo oceno lahko vzamemo namesto tega kar $\triangle^2 U_0''$, ki je znan. Po že omenjeni formuli izračunamo $\triangle^2 U_1$ iz U_1'' in ocenjenega $\triangle^2 U_1''$. Od tod dobimo: $\triangle U_{3/2} = \triangle U_{1/2} + \triangle^2 U_1$, nato: $U_2 = U_1 + \triangle U_{3/2}$, potem iz diferencialne enačbe U''_2, s tem pa $\triangle U''_{3/2}$ in (skoraj) pravo vrednost za $\triangle^2 U_1''$. Če je bila prvotna ocena $\triangle^2 U_1''$ napačna za ε, povzroči to samo napako $h^2\varepsilon/12$ v U_2. Po navadi je ta napaka tako majhna, da ne moti. V nasprotnem primeru ponovimo ves račun. Vendar vzamemo interval h tako majhen, da je takšna iteracija redkokdaj potrebna.*

Na ta način nadaljujemo in izračunamo zaporedne vrednosti U_2, U_3, itd. V vseh teh vrednostih nastopa neznani p. Potence tega p vedno bolj naraščajo, tako da je numerično integriranje vedno bolj nerodno. Prav tako nerodno pa je na koncu tudi izračunavanje konstante p iz pogoja $U(1) = 0$.

Da se izognemo tej težavi, pustimo v Taylorjevi vrsti samo prva dva člena. Ostanek pa ocenimo z neko približno vrednostjo parametra p, ki jo dobimo na primer iz računa za enakomerno debelo struno ($p = \frac{1}{4}\pi^2 = 2{,}5$). Ves račun vodimo potem tako, da nastopa p samo v prvi potenci. Pri uporabi formule (2) bi sicer dobili p tudi v drugi potenci, ker je $U'' = -p(1 - x^2)U$; tu namreč nastopa p tudi v prej izračunani vrednosti U. Zato pa vstavimo tu na desni strani v U spet omenjeno aproksimativno vrednost p. Ko pridemo na ta način z integracijo do konca intervala, dobimo p preprosto iz pogoja $U(1) = 0$. Ta p potem vstavimo v U. Aproksimacijo izboljšamo tako, da ves postopek ponovimo. Izkaže se, da iteracija prav dobro konvergira.

Izhodišče tega načina računanja je aproksimativno lastna vrednost, medtem ko v začetku ne potrebujemo nobene aproksimacije za iskano funkcijo. Lahko pa delamo še na drug način,** ki je za navedeni problem bolj prikladen. Za izhodišče vzamemo neko aproksimativno rešitev $U^{(0)}$. Naslednjo aproksimacijo $U^{(1)}$ dobimo iz

$$U''^{(1)} = -p^{(1)}(1 - u^2)U^{(0)} \tag{3}$$

* D. R. Hartree, l. c., str. 128.
** I. Kuščer: Matematična fizika II (predavanja).

z dvakratnim integriranjem. $p^{(1)}$ je prva aproksimativna lastna vrednost, ki je še ne poznamo. Integracijo izvedemo z enako razpredelnico funkcijskih vrednosti in diferenc kot pri ravnokar opisanem računu. Sedaj je račun lažji, ker v tej razpredelnici poznamo $U''^{(1)}$ in pripadajoče diference za vse vrednosti u. Računanje U_1 po Taylorjevi vrsti torej ni potrebno, ampak kar pričnemo s prištevanjem diferenc. Po formuli (2) izračunamo sedaj $\triangle^2 U_0^{(1)}$. Pri tem izkoristimo dejstvo, da sta $\triangle U_{\frac{1}{2}}^{(1)}$ in $\triangle U_{-\frac{1}{2}}^{(1)}$ pri lihih rešitvah enaka, pri sodih pa se razlikujeta le po predznaku. V vseh dobljenih vrednostih $U_2^{(1)}$, $U_3^{(1)}$, itd. nastopa neznani $p^{(1)}$ v prvi potenci in ga na koncu izračunamo iz pogoja $U^{(1)}(1) = 0$. Z iteracijo celotnega postopka dobimo višje aproksimativne rešitve $U^{(n)}$ in pripadajoče $p^{(n)}$.

Začetno aproksimacijo $U^{(0)}$ lahko dobimo za naš primer na več načinov. Za začetno aproksimacijo rešitve, ki pripada osnovni lastni vrednosti p_0, bi lahko vzeli kar rešitev za enakomerno debelo struno, to je $\cos \frac{1}{2} \pi u$. Tudi parabola $U^{(0)} = 1 - u^2$ je dobra. Toda čim boljša je začetna aproksimacija, tem prej bomo prišli z numerično integracijo do točnejšega rezultata. Z odvajanjem prvotne diferencialne enačbe dobimo, da veljajo za sode rešitve naslednji pogoji:

$$\begin{aligned} U(1) &= 0 & U(0) &= 1 \\ U''(1) &= 0 & U''(0) &= -p \\ U'''(1) &= 0 & U^{\mathrm{IV}}(0) &= p(p+2) \end{aligned}$$

Aproksimirajmo sode rešitve s polinomom osme stopnje! Koeficiente tega polinoma določimo iz prvih petih navedenih pogojev. Tako dobljeni polinom se glasi: $U = (11\,p - 30)u^8/58 - (43\,p - 112)u^6/58 + (61\,p - 140)u^4/58 - \frac{1}{2}\,pu^2 + 1$. Iz šestega pogoja $U^{\mathrm{IV}}(0) = p(p + 2)$ dobimo aproksimacijo za prvo lastno vrednost $p_0^{(0)} = 2{,}840$ in za tretjo lastno vrednost $p_2^{(0)} = 20{,}40$ (aproksimacija za p_2 je seveda manj točna za p_0). Z upoštevanjem še višjih odvodov lahko dobimo še več aproksimativnih lastnih vrednosti.

Za lihe rešitve veljajo podobni pogoji:

$$\begin{aligned} U(1) &= 0 & U'(0) &= 1 \\ U''(1) &= 0 & U'''(0) &= -p \\ U'''(1) &= 0 & U^{\mathrm{V}}(0) &= p(p+6) \end{aligned}$$

Odtod dobimo za aproksimativno rešitev polinom devete stopnje na enak način kot zgoraj. $U = (19\,p - 210)u^9/246 - (71\,p - 720)u^7/246 + (93\,p - 756)u^5/246 - (p/6)u^3 + u$,

$$p_1^{(0)} = 6{,}748, \quad p_3^{(0)} = 32{,}62.$$

Nadaljnji račun si oglejmo na primeru osnovne lastne vrednosti p_0, ki jo bomo odslej zaznamovali kar s p! Za začetno aproksimativno rešitev $U^{(0)}$ vzamemo prej izračunani polinom osme stopnje, ki se s $p = 2{,}840$ glasi takole: $U = 0{,}02138\,u^8 - 0{,}17445\,u^6 + 0{,}57310\,u^4 - 1{,}42000\,u^2 + 1$. Zaradi krajše pisave delimo enačbo (3) na obeh straneh s p. Potek prve iteracije je razviden iz razpredelnice.

u	$U^{(0)}$	$(1-u^2)U^{(0)}$	$-\Delta U''^{(1)}/p^{(1)}$	$-\Delta^2 U''^{(1)}/p^{(1)}$	$-\Delta^3 U^{(1)}/p^{(1)}$	$-\Delta U^{(1)}/p^{(1)}$	$(1-U^{(1)})/p^{(1)}$	$U^{(1)}$
							0,01 969	0,94 431
— 0,2	0,94 411	0,90 635				— 0,01 969		
			0,09 365					
0	1	1		— 0,18 730	0,03 938		0	1
			— 0,09 365			0,01 969		
0,2	0,94 411	0,90 635		— 0,15 181	0,03 575		0,01 969	0,94 431
			— 0,24 546			0,05 544		
0,4	0,78 677	0,66 089		— 0,06 004	0,02 624		0,07 513	0,78 749
			— 0,30 550			0,08 168		
0,6	0,55 529	0,35 539		— 0,05 228	0,01 439		0,15 681	0,55 646
			— 0,25 322			0,09 607		
0,8	0,28 380	0,10 217		— 0,15 105	0,00 459		0,25 288	0,28 472
			— 0,10 217			0,10 066		
1	0	0					0,35 354	0

Iz predzadnje kolone sledi iz pogoja $1 - p^{(1)} \cdot 0{,}35\,354 = 0$ nova aproksimativna lastna vrednost $p^{(1)} = 2{,}82\,853$. S tem $p^{(1)}$ pa dobimo novo aproksimativno rešitev $U^{(1)}$, ki je zapisana v zadnji koloni. Rezultati te in še dveh nadaljnjih integracij so podani v naslednji tabeli:

u	$U^{(0)}$	$U^{(1)}$	$U^{(2)}$	$U^{(3)}$
0	1	1	1	1
0,2	0,94 411	0,94 431	0,94 433	0,94 433
0,4	0,78 677	0,78 749	0,78 757	0,78 757
0,6	0,55 529	0,55 646	0,55 656	0,55 656
0,8	0,28 380	0,28 472	0,28 478	0,28 478
1	0	0	0	0

$p^{(0)} = 2{,}84000 \quad p^{(1)} = 2{,}82853 \quad p^{(2)} = 2{,}82717 \quad p^{(3)} = 2{,}82717$

Tretja integracija ne da več do pete decimalke nobene izboljšave. Kljub temu peta decimalka ni popolnoma zanesljiva, in sicer ne samo zaradi zaokrožitvenih napak, ampak tudi zato, ker smo pri računanju zanemarili višje diference U''. Njihov vpliv se pozna približno za 1 na peti decimalki. Izračunana osnovna lastna vrednost je torej $p = 2{,}82717$, pri čemer je peta decimalka lahko napačna za nekaj enot.

Zanimiva je primerjava lastne frekvence opisane strune z lastno frekvenco enakomerno debele strune (s presekom S_0; ostali podatki naj se ujemajo). Z enako substitucijo kot zgoraj dobimo za ta primer enačbo $U'' + pU = 0$. Osnovna lastna vrednost je $p = \frac{1}{4}\pi^2 = 2{,}46740$, pripadajoča rešitev pa je $\cos \frac{1}{4}\pi u$. Kvocient osnovnih lastnih vrednosti za obe struni je $2{,}82\,717 : 2{,}46\,740 = 1{,}14\,581$. Kvadratni koren tega števila, to je 1,07 043, pa je enak kvocientu ustreznih frekvenc (glej definicijo parametra p na začetku!). Zato ker je struna na konceh tanjša, je torej frekvenca samo za 7 % večja, kot če bi bila struna od začetka do konca enako debela kot na sredini. Iz tega se vidi, da na frekvenco vpliva predvsem masa srednjih delov strune. To je razumljivo, saj se ti deli najbolj gibljejo.

S. Pahor

O NUMERIČNI ANALIZI

Numerične analize se ne moreš naučiti s tem, da bereš o njej ali da ponoviš v knjigi izdelane zglede, pa tudi ne s tem, da gledaš, kako nekdo dela naloge. To bi bilo ravno tako, kot če bi se hotel naučiti golf ali tenis ali violino s tem, da bi opazoval druge, kako igrajo, ne da bi imel kdaj v rokah golfsko palico ali lopar za tenis ali violino. Precej razlike je med premišljevanjem o numeričnih računih in med resničnim izvrševanjem teh računov, in to ne z algebraičnimi simboli, ampak s števili. Izvrševanje primerov je bistveni del študija, kakor tudi raziskovanja na tem polju. Začetnik mora tudi napraviti napake in zapraviti nekaj časa, da se jih nauči iskati in popravljati, preden bo znal ceniti, kako nadvse važna je stalna kontrola med delom.

D. R. Hartree

Vzeto iz knjige: D. R. Hartree: Numerical Analysis (Oxford 1952).

VPRAŠANJA

5.

Neka veletrgovina prodaja samo eno sorto predmetov, to pa po stalni ceni za kos. Svojo zalogo obnavlja v rednih rokih z dolžino T. Vsakokrat nabavi po N kosov, kar je toliko, kolikor v času T povprečno proda. Verjetnost $f(t)$, da je v časovnem razdobju t prodan vsaj en kos, naj bo odvisna le od dolžine t tega razdobja. Kakšna je verjetnost, da med dvema zaporednima pošiljkama ne zmanjka blaga? Kaj se zgodi s to verjetnostjo, če N raste v neskončnost?

Naloga v tej obliki še ni enolično rešljiva. Zato zahtevajmo, naj bo verjetnost, da je v času t prodan več kakor en kos, pri majhnem t majhna v primerjavi z verjetnostjo, da je v istem času prodan le en kos, da gre torej razmerje med tema dvema verjetnostima hkrati s t proti nič.

6. KOMPENZACIJSKO MERJENJE NAPETOSTI

Pri tej metodi poganja akumulator z napetostjo U_1 stalen tok po nekem uporu R. Na tem uporu odcepimo primerno delno napetost U_2, da z njo uravnovesimo merjeno napetost, na primer napetost nekega galvanskega člena. Ko je ravnovesje doseženo, ne teče po merjenem členu noben tok.

Oglejmo si pa posebni primer, ko sta napetosti akumulatorja in merjenca enaki, notranja upora akumulatorja in merjenega člena pa zanemarljivo majhna v primeri z uporom R. Merjeni člen priključimo na konceh upora R! Po simetriji sklepamo, da tečeta zdaj po obeh izvirih enaka tokova, namreč po vsakem tok $\frac{1}{2} U/R$. Ta ugotovitev pa je v nasprotju s prejšnjo trditvijo, da po merjencu ne teče noben tok, kadar je njegova napetost uravnovešena.

Pojasni to protislovje!

J. Vdovič

7. NIHANJE VRVI Z UTEŽJO

Na vrvi visi točkasta utež, ki ima enako maso kot vrv. Utež niha sem in tja z amplitudo, ki je majhna v primeri z dolžino vrvi. Izračunaj osnovni in prvi naslednji nihajni čas! Za kakšen faktor se osnovni nihajni čas loči od nihajnega časa podobnega nihala, pri katerem je vrv nadomeščena z enako težkim in enako dolgim togim drogom?

(Pismeni izpit iz »matematične fizike II«, 26. IX. 1955)

Tečaja za matematike in fizike

a) *Tečaj za pouk opisne geometrije v gimnaziji.*

Ker je pouk opisne geometrije v okviru geometrijskega programa za V. in VI. razred gimnazije novost in večina tistih, ki v teh razredih poučujejo matematiko, nima za to dovolj prakse, je Društvo matematikov in fizikov predlagalo Pedagoškemu centru pri SPK LRS, da se letos na koncu junija in v začetku julija organizira tečaj za pouk opisne geometrije. Upravni odbor Pedagoškega centra je ta predlog sprejel na svoji seji dne 14. januarja 1956. Tečaj bo trajal okoli 14 dni.

Za vsebino tečaja bo poskrbelo društvo, ker verjetno zanjo ne bo dosti pobude s terena. Vendar bo društvo veselo vsakega predloga. Predloge naslavljajte na *Društvo matematikov in fizikov LRS, Ljubljana, poštni predal 253.* Program bo pravočasno objavljen.

Tečaja se morejo udeležiti vsi, ki pridejo v poštev za pouk opisne geometrije v višji gimnaziji, torej tisti, ki poučujejo ali nameravajo poučevati opisno geometrijo tudi kot neobvezen predmet.

b) *Tečaj za eksperimentiranje pri pouku fizike na nižji gimnaziji oziroma na višjih razredih osemletk.*

Eksperimentiranje je eden glavnih pogojev za odpravo verbalizma pri pouku fizike. Za tak način pouka so pri nas sedaj še precej slabi pogoji zaradi pomanjkanja učil v fizikalnih zbirkah, pa tudi zato, ker imajo učitelji fizike šibko tovrstno šolo. Zato je Društvo matematikov in fizikov sklenilo, da bo predlagalo SPK LRS, naj skupaj z njim organizira na koncu junija in v začetku julija 1956 tečaj za eksperimentiranje. Zastopnik društva je na osnovi tega sklepa predlagal na seji upravnega odbora Pedagoškega centra pri SPK LRS, da se tak tečaj organizira. Upravni odbor je predlog sprejel. Tečaj bo trajal okoli 14 dni.

O vsebini tečaja razpravljamo; zato bomo zelo veseli, če bodo prišle pobude in želje iz vseh krajev Slovenije, da bomo mogli kolikor mogoče ustreči raznovrstnim potrebam. Pobude in predloge naslavljajte na *Društvo matematikov in fizikov LRS, Ljubljana, poštni predal 253.* Program, ki bo na tej osnovi sestavljen, bo pravočasno objavljen.

Tečaja se bodo mogli udeležiti vsi tisti, ki poučujejo fiziko na nižjih gimnazijah oziroma osemletkah. Naslednje leto ima društvo namen organizirati podoben tečaj za one, ki poučujejo fiziko na višji gimnaziji. Za letos je namreč predvideno, da bodo le-ti šli na tečaj za pouk opisne geometrije, ki bo organiziran vzporedno s tečajem za fizikalno eksperimentiranje.

Zaradi sredstev za udeležbo na omenjenih tečajih naj šole pravočasno zainteresirajo svoje pristojne prosvetne organe. S temi bo v ta namen stopil v stik tudi Pedagoški center, ki bo preskrbel prenočišča tistim udeležencem, ki bodo to želeli.

Prijave za udeležbo na tečajih bo treba pošiljati na *Pedagoški center pri SPK LRS.* Opozorite na tečaja tudi tiste tovariše, ki niso naročeni na Obzornik!

Društvo matematikov in fizikov LRS

Društvo matematičara i fizičara N. R. Hrvatske poziva sve, koji se zanimaju matematičko-fizičkim naukama, da se pretplate na

Glasnik
matematičko-fizički i astronomski

i sarađuju u njemu.

Zaista ne bi smjelo biti ni jednog kulturnog radnika, koji se bavi matematičko-fizičkim naukama, kao ni prosvjetne ustanove, koja nije pretplatnik Glasnika. Pretplatom i suradnjom u svojem naučnom i stručnom časopisu pokazujete u kolikoj mjeri pratite i podupirete razvitak i napredak svoje struke. Širite također Glasnik u svom krugu, jer time podupirete razvitak matematičko-fizičkih nauka u svojoj okolini.

Prijave pretplate slati na administraciju Glasnika: Zagreb, Ilica 16/III. Pretplata za god. 1956 iznosi 480.— din.

Društvo matematikov in fizikov NRH izdaja za vso državo »*Matematičko-fizički list* za učenike srednjih škola«. Letnik ima 4 številke, med počitnicami ne izhaja. Letna naročnina je 200 din.

Profesorji srednjih šol, priporočajte list dijakom! Naročila in naročnino pošiljajte na naslov:

Matematičko-fizički list, Zagreb, Ilica 16/III, p. p. 165 ali na čekovni račun št. 401-T-1080.

Zveza Društev matematikov in fizikov FLRJ izdaja časopis:

Nastava matematike i fizike

Naročnina je 200 din, posamezna številka 60 din. Naročila in naročnino pošiljajte podjetju »Nolit«, Beograd, Terazije 27 ali na ček. račun št. 1031-T-627 z označbo »Za časopis Nastava matematike i fizike«. Časopis naročite lahko tudi pri našem Društvu.

Obzornik za matematiko in fiziko izhaja vsak tretji mesec. Izdaja ga Društvo matematikov in fizikov LRS. Urejuje ga uredniški odbor: I. Kuščer, A. Moljk, N. Prijatelj, I. Vidav. Odgovorni in tehnični urednik: I. Štalec. Upravo vodi I. Štalec. — Tiska tiskarna »Ljudske pravice« v Ljubljani. — Naročnina je 250 din, za podjetja in ustanove, ki plačajo po računu in za naročnike, ki plačajo po terjatvi 280 din. Posamezna številka 100 din. Naročnino nakažite na naš čekovni račun 60-KB-1-Ž-207. Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov:

Obzornik za matematiko in fiziko, Ljubljana, poštni predal 253.