

# **OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO**



**LJUBLJANA**

**1955-56**

**IV. št. 2**

## VSEBINA

| Članki                                                                                                  | Stran |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Enrico Fermi (S. D.) . . . . .                                                                          | 49    |
| Diskretum i kontinuum (Đ. Kurepa) . . . . .                                                             | 52    |
| Paraanalitične funkcije (I. Molinaro) . . . . .                                                         | 58    |
| Oksidna katoda (E. Kansky) . . . . .                                                                    | 62    |
| <b>Novice</b>                                                                                           |       |
| Elementarna metoda za računanje vrednosti integrala $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ (B. Krušič) . . . . . | 68    |
| Težki mezoni (B. Dobovišek) . . . . .                                                                   | 69    |
| Lupinasta struktura atomskega jedra (L. Bevc) . . . . .                                                 | 72    |
| Nov stabilni izotop (J. Strnad) . . . . .                                                               | 73    |
| Nov hladilni stroj (M. Rosina) . . . . .                                                                | 75    |
| <b>Šola</b>                                                                                             |       |
| O srednješolski matematiki (N. Prijatelj) . . . . .                                                     | 79    |
| Instrumentarij za osnovne poskuse iz optike (A. Peterlin in R. Korbar) . . . . .                        | 81    |
| K obravnavanju toka skozi kondenzator v srednji šoli (F. Ahlin) . . . . .                               | 84    |
| Magnusov efekt najpreprosteje (F. Ahlin) . . . . .                                                      | 84    |
| Nazornost v šoli (F. Ahlin) . . . . .                                                                   | 85    |
| Kaj bodo delali inženirji fizike (N. Bezić) . . . . .                                                   | 86    |
| Opis dela pri fizikalnih vajah na učiteljsišču v Ljubljani (L. Kozina) . . . . .                        | 87    |
| Občni zbor Društva matematikov in fizikov LRS (T. Skubic) . . . . .                                     | 89    |
| <b>Nove knjige</b> . . . . .                                                                            | 90    |
| <b>Odgovori</b> . . . . .                                                                               | 91    |
| <b>Vprašanja</b> . . . . .                                                                              | 96    |

### V PRIHODNJI ŠTEVILKI BOSTE BRALI:

Radioastronomija. O definicijah matematične verjetnosti. Molekulski elektronski spektri. Merjenje hrapavosti. Radioaktivni tulij namesto rentgenske cevi. Lasasti kovinski kristali. Pregreta voda.

### UREDNIŠTVO JE PREJELO V ZAMENO

Bell Laboratories Record 33, No 8 (1955).  
 Elektrotehniški vestnik, Ljubljana 1955, XXIII, št. 5—6, 7—8.  
 Farmaceutski vestnik, Ljubljana 1955, VI, št. 5—6, 7—8.  
 Fotokemijska industrija, Zagreb 1955, IV, 2, 3.  
 Gospodarski vestnik, Ljubljana 1955, IV, št. 58—86.  
 Matematičko fizički list, Zagreb 1955-56, VI, št. 1.  
 Nastava matematike i fizike, Beograd 1955, IV, št. 1.  
 Philip's Technische Rundschau, 1955, 17, No 1, 2, 3, 4.  
 Problem, časopis »Savjeta za probl. šah«, Zagreb 1955, št. 31—32.  
 Proteus, Ljubljana 1955-56, XVIII, št. 1, 2.  
 Reports, J. Stefan, Ljubljana 1955, Vol. 2.  
 Sodobna pedagogika, Ljubljana 1955, VI, št. 5—6, 7—8.  
 Zdravstveni vestnik, Ljubljana 1955, XXIV, št. 7—8, 9—10.

## ENRICO FERMI

1901—1954



*Enrico Fermi je umrl 28. novembra 1954. Ob spominski svečanosti 3. decembra na univerzi v Chicagu so govorili trije njegovi prijatelji in sodelavci: K. Allison, profesor fizike in direktor Instituta za jedrske raziskave (Institute for Nuclear Studies) na univerzi v Chicagu; E. Segre, profesor fizike na kalifornijski univerzi, ki je bil prvi Fermijev doktorand na univerzi v Rimu in ki je sodeloval pri znanih Fermijevih raziskavah s počasnimi nevtroni; H. L. Anderson, ki je sedaj na omenjenem Institutu za jedrske raziskave in je bil Fermijev učenec na univerzi Columbia ter je delal z njim med vojno pri graditvi prvega reaktorja. Govori so objavljeni v *Physics Today*, 8. 9 (1955), od koder so povzete naslednje vrstice.*

Enrico Fermi je bil rojen v Rimu 29. septembra 1901. Študiral je v Rimu in v Pizi. Doktoriral je v starosti 21 let s področja rentgenskih žarkov. Prva dela, ki jih je objavil, so bila precej vsestranska (iz mehanike, relativnosti in elektrodinamike). Kmalu pa se je odločil predvsem za termodinamiko in statistično mehaniko. Leta 1926, takoj potem, ko je Pauli formuliral izključitveni princip, je Fermi našel statistične zakone antisimetričnih delcev, ki jih zdaj imenujejo fermione. To delo, ki so mu kmalu sledile mnoge druge študije (teorija Ramanovega efekta, hiperfine strukture, dubleta pri alkalijskih elementih, premika spektralnih črt pod vplivom pritiska, vpliva geografske širine na kozmične žarke; statistični model atoma), mu je prineslo ugledno mesto med teoretičnimi fiziki. Vsa ta in kasnejša Fermijeva dela odlikuje njegov osebni slog. Genialne ideje so izpeljane na tako preprost način, da se zdi, kot da so rezultati doseženi brez truda.

Leta 1927 je bil izbran za profesorja na novo ustanovljenem institutu v Rimu. Takoj je izbral sodelavce med mladimi ljudmi in jih pričel vzgajati prav na svoj način. Nikoli jim ni govoril o znanstvenih idealih ali jim delal moralne pridige. Samo čudoviti zgled njegove osebnosti je pritegnil vsakogar in vzbudil v njem gorečo vdanost do znanosti. Vsej tej skupini ljudi, starih 20 do 25 let, z voditeljem, starim okrog 28 let, je bila znanost največja strast.

Leta 1933 je napisal teorijo razpada beta, ki predstavlja mejnik v teoretični jedrski fiziki. Tu se je začela njegova pot jedrskega fizika. Ne da bi bil opustil teorijo, se je leta 1934 pričel ukvarjati tudi z eksperimentalno fiziko. Resno se je lotil eksperimentalnih raziskav atomskega jedra, ko je zvedel za odkritje umetne radioaktivnosti Irene Curie in Pierra Joliot. Fermi je takoj spoznal, da utegnejo biti za aktiviranje nevtroni mnogo bolj učinkoviti kot nabiti delci. Začel je z vodikom in nato po vrsti z naslednjimi elementi, toda pri osmih ni uspel. Deveti, fluor, je šele dal pozitiven rezultat. Po teh uspehih poskusih je Rim postal za kratek čas prvo mesto jedrske fizike. Lord Rutherford je osebno čestital mlademu eksperimentatorju.

Nadaljevali so z nevtronskim obsevanjem vseh elementov do urana. Pravzaprav je čudno, da pri tem niso že odkrili cepitve urana. Po naključju so opazili, da se lastnosti nevtronov spremene, če gredo skozi snovi, ki imajo veliko vodika. Tako so odkrili počasne nevtrone. To je bila prva stopnja kasnejših del o difuziji nevtronov; bil je čas ogromnih naporov, ko je Fermi pokazal vso svojo vitalnost in intelektualno moč.

Takrat se je v Nemčiji začela nacistična gonja. K Fermiju v Rim so od tam prišli odlični gostje, Bethe, Bloch, Placzek, Peierls, London in drugi. Pa samo za kratek čas, kajti tudi v Italiji je pretila ista nevarnost. Leta 1938 je dobil Fermi Nobelovo nagrado za svoje delo z nevtroni in, namesto da bi se vrnil iz Stockholma v Italijo, je odšel za ostalimi v Ameriko. Sommerfeld je pisal iz Nemčije: »Sic transit gloria mundi veteris.« (Tako mineva slava starega sveta.)

Ko je prišel pred 16 leti Fermi v Ameriko na univerzo Columbia, je bil že slaven fizik. Rešil je bil številne znanstvene probleme in odkril nove zakone narave. Fermi-Diracova statistika, Fermijeva teorija razpada beta in statistični model atoma so gotovo najpomembnejši od vseh. Bil je na vrhuncu svoje ustvarjalnosti.

Takoj je spet pričel z delom, na svoj stari, skromni način. Kreda, tabla in eden ali dva vedoželjna študenta, to mu je bilo dovolj za začetek. Poučevanje je bilo bistveni del njegove metode. S tem, da je razlagal drugim, se je ostrila logičnost njegovega mišljenja; njegove predstave in ideje so dobivale pri tem vedno jasnejšo obliko. Študentje in njegovi kolegi so kmalu spoznali, da mu nihče ni kos; tako jasna in odlična so bila njegova predavanja. Kadar je Fermi govoril, je bilo komaj še dobiti kakšno stojišče. On sam pa bi prav na isti način predaval tudi enemu samemu študentu.

Fermi sam je bil večer študent, vedno navdušen, da bi se kaj naučil. Bil je vedno srečen in hvaležen, če je našel kaj novega. To je bil zanj zaklad, ki ga je moral takoj razdeliti med ostale. Samo na ta način in v takem iskrenem in razgibanem okolju, ki ga je on ustvaril, so mogli biti doseženi tako veliki uspehi.

Ko je prišla vest o cepitvi urana, je Fermi zbral svoje sodelavce in rekel nekako tole: »Dovolite mi, da vam razložim, za kaj gre pri cepitvi urana. Nevtroni, ki jih absorbira jedro urana, povzročijo njegovo nestabilnost. Jedro se razleti in sprosti se mnogo energije, kot je to pokazal Otto Frisch. Pri tem se zelo verjetno odcepijo tudi nevtroni. Vprašanje je samo, če jih

odleti več, kot se jih absorbira; potem je mogoča verižna reakcija. Natančno bomo merili absorpcijo in emisijo nevtronov, da bomo mogli razumeti in rešiti problem tega pojava.»

Delo s Fermijem je bilo za vsakogar posebna sreča in največje doživetje. Fermi je vedno začel v pravi smeri, vedno je vedel, kaj smeš zanemariti in kaj je treba upoštevati. Raziskovalno delo, ki se ga je vedno lotil s popolnim zaupanjem, je bilo zanj največji užitek. Nikoli mu ni bilo nobeno delo pretežko, če je bilo potrebno hiteti, da bi čimprej prišli do cilja. Sam je n. pr. pomagal piliti grafitne opeke, ali je tekal z aktiviranim kratkoživim rodijem z enega konca instituta do drugega.

Ogromno delo v tem institutu je bilo narejeno z velikim veseljem. Vsak dan proti večeru so zbrali rezultate meritev in naredili načrt za naslednji dan, da so takoj zjutraj lahko pričeli z novim delom. Fermijeva posebna lastnost je bila, da ni nikoli izgubljal časa in da je vedno znal izbrati z nezmotljivim občutkom najpreprostejšo pot.

Tako je zrastel reaktor na grafit in uran na univerzi v Chicagu in ko ga je 2. decembra 1942 Fermi pognal, so vsi, ki so prisostvovali temu svečanemu trenutku, zaslutili, da je s tem odprl vrata atomski dobi.

Potem je prišel ogromni Manhattanski projekt, za tem Los Alamos in preizkušnja atomskih bomb. Tisto jutro, ko so preizkusili prvo atomsko bombo, je Fermi stal v slepečem blesku eksplozije in enakomerno spuščal lističe papirja na tla. Nekatere izmed njih je odnesel zračni sunek. Ker je bil preveč nepotrpežljiv, da bi čakal na izsledke o jakosti atomske eksplozije, si je Fermi zase izmislil preprost način merjenja.

Nekaj pa je Fermi pogrešal v Los Alamosu, namreč univerzo. To je dočakal šele na koncu vojne, ko ga je univerza v Chicagu izbrala za profesorja. V Institutu za jedrske raziskave, ki je bil ustanovljen po njegovi zamisli, je bil Fermi zopet prost, da je mogel po svoji želji raziskavati tajne narave.

Odkriti so bili novi delci in zgradili so ogromne jedrske stroje za njihovo proizvodnjo. Pod Fermijevim vodstvom so v Chicagu zgradili sinhrociklotron. To je bilo zanj novo veselje. S tem strojem so dobivali mezone, ki so postali središče vse pozornosti jedrske fizike. V sredi vseh teh načrtov in novega dela pa je Fermi omahnil.

S Fermijem je človeštvo izgubilo enega izmed največjih znanstvenikov tega stoletja. Svojim sodelavcem in učencem pa je pomenil še več. Vsakomur med njimi je bil iskren prijatelj, tovariš in učitelj. Fizika mu je bila življenje. Bil je član najvišjih znanstvenih organizacij in njegov ugled je bil ogromen. Toda zanj to ni bilo važno. Nič ni spremenilo njegove preprostosti, čeprav se je dobro zavedal, kako visoko je po svojem intelektu nad drugimi ljudmi. Nič ni spremenilo njegovega velikega zanimanja za naravo in njegove neizčrpne volje do dela, ki ni poznalo počitka. Prvi je zjutraj prihajal v Institut, zadnji ga je zapuščal. Pravzaprav ni bil to institut za jedrske raziskave, ampak njegov lastni institut, kajti on sam je bil središče in gibal vseh. Bil je na vsakem seminarju in s čudovito jasnostjo je znal kritično presoditi vsako novo idejo ali novo odkritje. Njegova mirna razsodnost in brezmejno spoštovanje, ki so ga sodelavci imeli do njega, sta onemogočila morebitna trenja med njimi, kar je včasih tako težko doseči v večji skupini ljudi.

S. D.

# DISKRETUM I KONTINUUM<sup>1</sup>

Đ. KUREPA, ZAGREB

1. Ovdje se ne možemo upuštati u detaljna izlaganja i stroge definicije u vezi sa teškim i važnim problemom diskretum-kontinuum. Tek napomenimo da su ti pojmovi danas strogo definirani zahvaljujući t. zv. Teoriji skupova.<sup>2</sup> Prva slika o diskretumu bila bi da je to nešto što je sastavljeno od pojedinih odeljenih, da ne kažemo vrlo razmaknutih delova. Naprotiv, kontinuum bi bio kao nešto preliveno, u kojem bi bilo teško individualizirati pojedine elemente. Kao primer diskretuma često se uzimaju pojedini prirodni brojevi kao i sam skup  $N$  svih prirodnih brojeva; kao primer kontinuumu često se uzima vreme kao nešto što teče i teče bez prestanka i neprekidno. Isto tako se pojedina tečnost uzima kao nešto neprekidno, kontinuirano kao i pojedini plin. Naprotiv, atomistička teorija uzima da je svaka materija, dakle i ona koja se nalazi u tekućem stanju sastavljena od pojedinih izrazitih delova — atoma, molekula i t. d. Energija se uzimala kao jedna neprekidna veličina; počam od početka ovoga veka kvantna teorija shvata energiju kao diskretan pojav, jer se on ne može menjati u strogo neprekidnom obliku: energija se menja jedino u nekim mnogokratnicima u t. zv. kvantima energije. Isto tako, svetlost je jedan zrnast pojav; svetlost je sastavljena od fotona. Kod novih računskih mašina, dual diskretum-kontinuum pojavljuje se u razlikovanju t. zv. *brojčanih (digitalnih) mašina* od t. zv. *analog mašina*; kod prvih se na diskretan način unose i menjaju podaci, dok se kod drugih to radi neprekidno. Tako na pr. dečje školsko računalo (abak) i kutomer bila bi dva primera: prvi za diskretno brojanje i računanje, a drugi za neprekidno merenje (i nanošenje).

2. Teorija skupova učinila je mnogo da se ponor diskretum-kontinuum premosti i da se dođe do toga da ta dva pojma u svojoj suštini povežemo kao nešto što jedno drugo dopunjuje i prožima. U svojoj suštini, odnos diskretum-kontinuum je odnos element-celina odnosno odnos posebno-opšte, odnos egzistencijalnog kvantifikatora i kvantifikatora univerzalnosti t. j. odnos pojedini (neki) — svaki (svi). Ili još jedan vid: odnos nastajućeg (postajućeg) i nastale celine. U tom se smislu može na pr. govoriti o distretumu pojedinih brojeva kao na pr. -, 2, 3 prema okvirnom »kontinuumu« skupa  $N$  svih prirodnih brojeva.

3. Nekad je kao primer diskretnosti i kontinuiteta služio primer aritmetičkih razmatranja — brojevi — odnosno geometrijskih razmatranja — figure. Međutim, zahvatom analitičke geometrije, kad se uspostavila obostrana jednoznačna veza među brojevima i tačkama pune linije odn. među aritmetičkim operacijama s druge strane, to je razlikovanje iščezlo!

4. Ostaje još jedno svojstvo koje se često pripisuje diskretumu odn. kontinuumu: svojstvo konačnosti odn. beskonačnosti. To je razlikovanje vrlo važno, no u poslednjoj liniji, i ono se svodi na dva osnovna logička kvantifikatora. Ono što na prvi pogled upada u oči kod diskretuma  $N$ , to je da posle svakog elementa  $n$  dolazi jedan potpuno određen iza njega,  $n + 1$ , tako da

<sup>1</sup> Prema predavanju što sam ga 21. 4. 1952. održao u Filozofskom seminaru Filozofskog fakulteta u Beogradu.

<sup>2</sup> Isp. knjigu: Đ. Kurepa, Teorija skupova, Zagreb, 22 + 444 (1951); tu je navedena i druga literatura.

između  $n$  i  $n + 1$  nema drugih elemenata. Naprotiv, promatramo li skup racionalnih bojeva, onda on toga svojstva nema, jer posle racionalnog broja  $x$  nema *sledećeg* po veličini. Doduše, nanižemo li skup  $R$ , dobićemo niz, pa tada znamo koji rac. broj dolazi neposredno posle kojeg drugog, no time se struktura skupa  $R$  ipak menja.

5. Skupu  $R$  ne možemo pripisati svojstvo kontinuiteta već i zato što je sa kontinuumom usko povezana slika *potpunosti* u smislu da mu se ne mogu dovoditi novi elementi, a da se ne izgube nekoja stečena svojstva. A, međutim, skupu  $R$  mogu se dovoditi novi, strani, elementi na pr.  $\sqrt{2}$ , pa provesti translacija za  $\sqrt{2}$  skupa  $R$ . Ili drukčije: u skupu  $R$  nema jednačina  $x^2 - 2 = 0$  rešenja; međutim, ta nam jednačina može služiti povodom da skup  $R$  proširimo time da jednačini  $x^2 = 2$  pripišemo jedno rešenje —  $\sqrt{2}$  — i onda ga priklopimo (adjungiramo) ka  $R$  i vršimo u nastalom skupu sve operacije kao u  $R$ , držeći vazda na umu da je  $(\sqrt{2})^2 = 2$ . Tako nastaje skup  $R(\sqrt{2})$  — telo — prošireno u kojem će se moći vršiti sve elementarne operacije, a k tome će i jednačina  $x^2 = 2$  imati svoje rešenje. No, niti u proširenom skupu ne bi na pr.  $x^2 = 5$  ili  $x^3 = 4$  imala rešenja. Ponovnim proširenjem skupa odn. okvira došli bi u mogućnost da i te jednačine rešavamo. Isto tako, adjungirajući vezu  $x^2 + 1 = 0$ , dolazimo do nove vrste brojeva — imaginarnih i kompleksnih. No, niti njihov skup nije neprekidan. Čak, posmatranjem skupa  $A$  svih rešenja algebarskih jednačina ne bi došli do skupa koji se ne bi mogao dalje proširivati. A može se pokazati da se i čitav skup  $A$  može svrstati u obliku obična niza.

Pitanje, da li je skup  $A$  dostatan pa da se u njemu osigura izvođenje svih operacija koje se pojavljuju u matematici treba ispitati posebno. Na pr. da li je broj  $\pi$  unutra? To je pitanje postavljeno još u grčko doba, a rešeno je tek u poslednjoj četvrtini prošloga veka. Broj  $\pi$  nije unutra. Danas se zna da tu

nema ni broja  $2\sqrt{2}$ ,  $2\sqrt{5}$  i sl., jer su to transcendentni brojevi. Liouville-u je pred stotinjak godina pošlo za rukom da pokaže da nijedan od brojeva  $0, a_1 0 a_2 0 0 a_3 0 0 0 0 0 a_4 \dots$  nije unutra, ukoliko među  $a$ -ovima ima beskonačno mnogo nenulatih cifara.

6. *Kontinuitet bi se sastojao u mogućnosti sve novog i sve finijeg deljenja linearna segmenta u jednu ruku te u tome da će uvek postojati rezultat deljenja*, nešto na što će se stezati oni komadi koje podvrgavamo deobi. Tu mogućnost imamo i na pravcu i u ravnini i u prostoru. Tu je bitno, da presek zatvorenih komada koje istražujemo uvek postoji (Cantorov Durchschnitssatz — zakon o preseku).

Diskretum i kontinuum u međusobnom su prožimanju. Tako na pr. uz ravan i prostor koji su dva kontinuumu tesno su povezana dva broja: 2 i 3 — njihove dimenzije, a koji su inače diskretne veličine. Zamislimo li linearni kontinuum u neprestanom nastajanju, svaka nova tačka je diskretna tvorevina, a rezultat je ipak kontinuum. Obratno, izbacimo li iz kontinuumu izvesne delove, možemo dobiti najtipičnije diskretume kao na pr. jednočlan skup ili skup od konačno mnogo tačaka i t. d.

7. Ja ću navesti nekoliko poznatih i nekoliko nepoznatih tvorevina koje će biti jedne diskretne, a druge kontinuirane. Svakako, osnov svemu jesu prirodni brojevi 1, 2, 3, ... odnosno proces brojanja. No, velik je korak kad se posmatraju ne samo brojevi 1, 2, ... nego i njihov skup  $N$  kao celina svih

prirodnih brojeva. U tom pogledu, skup  $N$  kao okvir za izvesne radnje bio bi »kontinuum« ma da je tipičan predstavnik diskretuma. U nekoj povezanosti sa  $N$  jesu beskonačni nizovi brojeva, tačaka, funkcija i t. d. i promatranje graničnih vrednosti. Na taj način, promatranje graničnih vrednosti nizova odn. skupova je nešto što na prirodan način izvire iz potrebe da se uz zadane veličine posmatraju i one koje su ovim tako reći određene, jer se na njih naprosto nadovezuju. Tako na pr. uz skup  $1/N$  recipročnih vrednosti prirodnih brojeva prirodno je povezana tačka (broj) 0, jer se u njenoj blizini nalazi gotovo čitav skup  $1/N$ . Isto tako uz sve koncentrične krugove radiusa iz  $0 < x < 1$  prirodno se nadovezuje jednočlan skup  $\{0\}$  te jedinična kružnica.

Tako, posmatranje diskretnih tvorevina — recimo nizova kocaka, prizama i t. d. dovodi nas do rezultata koje inače ne bi mogli dobiti. Na pr. bez graničnog procesa ne bi mogli doći do obrasca za zapreminu piramide, kugle i t. d.

Tako vidimo da u slici kontinuuma imamo okvir unutar kojega će nam biti omogućeno da vršimo proizvoljno precizna seciranja i aproksimacije.

8. Kao izrazit predstavnik kontinuuma može da posluži beskonačna prava linija kao slika »vremena koje teče«. Možemo li zamisliti da je pravac sastavljen od tačaka? Kako izbeći poteškoće eleačana!? Descartesov zahvat kad je brojevima dodelio tačke, i obrnuto, odigrao je vrlo važnu ulogu, jer se tako »preliveni amorfní kontinuum« sveo na granularni atomistički skup realnih brojeva odn. decimalnih razlomaka.

Ta je ideja kulminirala pronalaskom odn. izgradnjom teorije skupova u kojoj se na sistematski način povezuje posmatranje skupova kao celine u jednu ruku, a kao atomističke strukture u drugu ruku. Zato se i govori, da je svaki skup sastavljen od određenih elemenata t. j. od izvesnih predmeta koji se zovu elementi skupa. Ako je  $S$  skup, a  $x$  njegov element, onda se to naznačuje sa

$$x \in S \text{ odn. } S \ni x \text{ odn. } (x) \leq S \text{ odn. } S \geq (x),$$

jer se sa  $(x)$  odn.  $\{x\}$  označuje jednočlani skup sastavljen od samog  $x$ . Međutim, poimanjem odn. prostim nadodavanjem sve novih i novih predmeta ne mora dovoditi do određena skupa. Tako na pr. skup svih skupova je logički besmisao! Iako elementi toga hiperskupa jesu skupovi dakle nešto što ima smisla! —

9. Pojimanje kontinuuma kao skupa, dakle kao nečega zrnaste strukture, izgledalo je kao da se protivi našem zrenju i geometrijskom gledanju. Mi smo i suviše čvrsto sigurni, da na primer u ravni ima više tačaka nego na pravoj liniji; zato tim neverovatnije izgleda tvrdnja da skup tačaka bilo kojeg segmenta možemo porazmestiti u prostoru tako da ispune čitav prostorni kontinuum na pr. kocku. Jer premestimo li tačku  $T(0, x_1 x_2 \dots)$  iz jediničnog segmenta  $[0, 1]$  u tačku  $T'(0, x_1 x_4 x_7 \dots; 0, x_2 x_5 x_8 \dots; 0, x_3 x_6 x_9 \dots)$ , dospeće ona na potpuno određeno »svoje« mesto jedinične kocke; kad se pritom tačka  $T$  kreće po  $[0, 1]$  t. j. kad sve cifre  $x_1, x_2, \dots$  prolaze nezavisno jedna od druge svim mogućim vrednostima 0, 1, 2, ... 9, ispuniće pripadne tačke  $T'$  čitavu jediničnu kocku. Na taj način nedvornno je dokazano, da u matematičkom prostoru ima isto toliko tačaka odn. položaja koliko i na svakom komadiću duži. Teško je doduše sagledati to razmeštanje i svrstavanje tačaka iz  $[0, 1]$  ali je ipak, kako videsmo, moguće iz njih obrazovati jediničnu kocku, a time i čitav prostor. To je razmeštavanje vrlo nepravilno, jer bliske tačke na duži

moгу da budu dosta razmaknute u kocki odn. u prostoru, i obrnuto. No, vrlo je zanimljiv pojav, da se tačke iz  $[0, 1]$  mogu na *neprekidan* način smestiti na kvadrat i kocku, iscrpljujući čitav kvadrat odn. kocku; samo, u tom slučaju nužno se stiže po više tačaka sa duži u jednu te istu tačku kocke odn. kvadrata (čovек bi očekivao da će biti obrnuto!). Ono što mi zrenjem hoćemo da iskažemo da je dimenzija kocke 3, ravnine 2, pravca 1, dakle da su dimenzije različite među sobom, ima ipak i naučnu podlogu, jer zaista nutarnja organizacija skupova  $C_1, C_2, C_3$  (prave linije, ravnine i prostora) različite su među sobom i nemoguće je organizaciju sa jednog od tih skupova preneti na koji drugi od tih skupova.

10. Prostor  $C_0$  neprekidnih funkcija je sastavljen od svih neprekidnih numeričkih funkcija  $f(x)$  sa  $0 \leq x \leq 1$ , a međusobna bliskost takovih funkcija definira se na prirodan način: jedna je funkcija u uskoj pruzi druge funkcije. Taj prostor izgleda kao da bi imao beskonačno mnogo dimenzija. A baš tako i jeste.

Skup nizova kojima kvadrati članova konvergiraju isto čini jedan beskonačan prostor koji je jedan kontinuum. — I on ima beskonačno dimenzija, a danas u kvantnoj mehanici ima važnu ulogu (Hilbertov prostor).

11. Triadni skup  $T$  dobije se iz jediničnog segmenta  $[0, 1]$  tako da taj segment podelimo na tri jednaka segmenta, izbacimo nutrinu srednjega od njih, a onda isti proces deljenja i izbacivanja ponavljamo bez kraja i konca na svakom preostalom segmentu. Preostatak — to je triadski skup  $T$ . On na prvi pogled vrlo oskudeva u tačkama; sa druge strane ne samo da tih tačaka ima isto koliko i u čitavu prostoru, nego ih se može čak na *neprekidan* način tako porazmestiti da dobijemo najvažnije skupove u prostoru na pr. kocku i t. d.

12. *Dobro uređeni skupovi*. Skup  $N$  prirodnih brojeva uživa osnovno svojstvo, da i on sam i svaki njegov deo ima svoj vlastiti početni, najmanji, član (već skup  $D$  celih niti skup  $R$  racionalnih, a pogotovo skup  $C_1$  realnih brojeva nemaju toga svojstva). Veli se kraće, da je skup  $N$  *dobro uređen*. Prirodno je, da se na pr. unutar  $R$  posmatraju njegovi *dobro uređeni delovi*: takova dva dela bili bi na pr. skupovi

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, n/(n+1), \dots, 1$$

$$5\frac{1}{3}, 5\frac{2}{4}, \dots, 5 + n/(n+2), \dots, 6, 7, 8, 9, 10, \dots, n, n+1, \dots$$

Bitno je svojstvo takovih skupova, da ukoliko nemaju istu »dužinu« uvek je jedan »kraći«, a drugi »duži«. Njihovo posmatranje je jedna od najoriginalnijih matematičkih tvorevina, a služe za *transfinitno prebrajanje*, dakle za prebrajanja koja ne možemo izvesti pomoću samih prirodnih brojeva (napomenimo, da je uz pomoć transfinitna prebrajanja rešen vekovni problem obrata deriviranja funkcija i to već time, da dobro uređene delove skupa  $R$  upotrebljavamo kao indekse t. j. kao pripomoć za markiranje operacija i matematičkih predmeta). Na taj se način dolazi i do *transfinitnih rednih brojeva*, a dolaze iza svih prirodnih rednih brojeva  $1, 2, \dots, n, n+1, \dots$ ; prvi se od njih označuje sa  $\omega$  ili  $\omega_0$ , sledeći je  $\omega+1$  pa  $\omega+2$ , pa  $\omega+3$  i t. d. Tako na pr. da se istakne kako u skupu  $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, n/(n+1), \dots$ , 5, 6 broj 5 dolazi posle čitava niza  $n/(n+1)$ , može se reći da je rang (položaj) broja 5 u tom skupu jednak  $\omega$ , a rang od 6 da je za 1 veći t. z.  $\omega+1$ . Na taj se način skup  $N$  prirodnih brojeva znatno proširuje jednim golemim dodatkom koji dolazi iza skupa  $N$  kao celine: nastao skup zove se *ordinalni (redni) diskretum*. To je jedan vrlo prirodan okvir —

stoji o bok samom linearnom kontinuumu  $C_1$  sa kojim ima i zajedničkih, ali i vrlo različitih svojstava. Glasovit je *problem kontinuuma*, a pita, da li kontinuum  $C_1$  i ordinalni diskretum imaju jednako mnogo elemenata.

13. *Zahvat aksiome o izbori*. Spomenusmo t. zv. dobro uređene skupove t. j. one kojima pripada svojstvo, da im svaki deo ima svoj vlastiti najmanji element. Dakle nešto slično kao kod skupa  $N$  prirodnih brojeva. I kod njih važi jedan princip indukcije — *transfinitna indukcija* — koja ima dosta sličnosti sa principom totalne indukcije. Samo, što ovde tek iz skupa *svih* prethodnika jednog elementa zaključujemo na taj element, a ne samo da na nj zaključujemo na osnovu njegova neposrednog jednog jedinog prethodnika koji uostalom u općem slučaju ni ne postoji.

Tada nastaje pitanje: mogu li se tačke *svakog* skupa tako svrstati da se dobije dobro uređen skup! Problem je rešen potvrdno, ali uz prihvatanje t. zv. Zermelova aksioma o izboru ili ekvivalentnih propozicija kao na pr. da se za bilo koja dva skupa  $A, B$  uvek može odlučiti koji od njih ima više elemenata ukoliko nemaju jednako mnogo elemenata.<sup>3</sup>

Inače, svaki dobro uređen skup ima svojstvo da mu svaki element ima neposrednog sledbenika ukoliko nije smešten kao poslednji. To je dakle zajedničko svojstvo sa svakim skupom prirodnih brojeva.

14. *Aksiomatika*. U jedinstvenom poimanju diskretuma i kontinuuma bitnu ulogu ima aksiomatika odn. činjenica da se nabranjem relativno malog broja svojstava može pojedini skup okarakterisati kao nosilac takovih i takovih svojstava. Jer, *nama nije toliko stalo do prirode elemenata nekog skupa koliko do međusobnih veza tih elemenata*. Tako na pr. skup  $N$  prirodnih brojeva okarakteriziran je sa poznatih 5 Peanovih aksioma: 1) 1 je broj, 2) iz  $n$  sledi da je i  $n + 1$  prirodan broj, 3)  $n + 1 \neq n$ , 4) iz  $m + 1 = n + 1$  sledi  $m = n$ , 5) vredi princip potpune indukcije. Sa druge strane linearni kontinuum  $C_1$  je okarakteriziran sa ovim svojstvima:

To je *uređeno potpuno telo* («potpun» znači da svaki zdesna ogradeni skup ima gornju ogradu — supremum).<sup>4</sup>

Isto tako skup  $C_1$  kao uređen skup potpuno je okarakteriziran sa ova tri nezavisna svojstva:

1) Nema ni početnog ni završnog elementa.

2) Neprekidan je u Dedekindovu smislu, što znači da svaki rastav skupa  $C_1$  na levu (donju) i desnu (gornju) polovinu uživa svojstvo da ili leva polovina ima svoj završan ili desna polovina ima svoj početan element.

3) Postoji prebrojiv deo svuda gusto porazmešten.

Kod nabranja svojstava pojedinog skupa ne moramo još imati nikakove slike o tome, da li je skup kategorije kontinuum ili diskretum. A ipak, naknadno se vidi da li je on ovo ili ono u većoj ili manjoj meri.

15. *Nastajanje i gotovost*. Dijalektičko jedinstvo diskretuma i kontinuuma ogleda se u ovoj crti: svaku tvorevinu pa dakle i kontinuum možemo shvatiti

<sup>3</sup> Sama Zermelova aksioma glasi ovako: ako je  $F$  bilo kakva obitelj disjunktnih skupova od kojih svaki ima bar jedan element, tada postoji skup  $S$  koji sa svakim članom iz  $F$  ima jedan jedini element zajednički;  $S$  je nastao kao izborom po jednom člana iz svakog člana iz  $F$ , a onda sabiranjem izabranih članova u jednu celinu.

<sup>4</sup> Prema Huntingtonu,  $C_1$  je aditivna uređena svezana grupa bez krajnjih elemenata sa svojstvom izotonije: ako je  $a \leq 0$ , tad je  $b + a \leq b$  za svaki par  $a$  i  $b$ .

kao rezultat izvesnog nastajanja ili postajanja; u toku nastajanja kontinuum još nije potpuno izgrađen i dakle nije potpun. Etape: nastajanje i završavanje procesa od vrlo su velike važnosti i dijalektički se upotpunjuju tvoreći jedinstveno složenu operaciju.

Kao vrlo izrazit primer toga stanja možemo navesti pojam t. zv. *partitivna skupa PS* za skup *S*. Naime, ako nam je dat skup *S*, dati su i njegovi elementi i delovi, pa odatle dijalektičkim skokom obrazujemo skup *PS* svih delova iz *S*; zapravo *PS* je skup svih »kombinacija« skupa *S*. Naravno, ne može se tražiti da se *efektivno* obrazuju svi elementi od *PS* pa dakle i njihov skup *PS*, ali logički je opravdano poimanje skupa *PS* bez obzira na njegovu *konstrukciju*. Inače, specijalno, u skupu *PN* odn. *PR* sadržana je i teorija kontinuuma  $C_1$  kao i teorija ordinalnog diskretuma. Jer, u svojoj suštini, teorija realnih brojeva odnosno rednih brojeva podudara se sa posmatranjem i organiziranjem obitelji svih početnih komada — levih polovina — skupa *R* odn. promatranjem i organiziranjem svih dobro uređenih delova skupa *R*.

Zato je jasno, od kolike je važnosti prelaz od *S* na *PS*. Čak i tako grubo sito kao što je razlikovanje po broju elemenata čini razliku između *S* i *PS*, jer prema Cantorovoj nejednakosti kardinalni broj skupa *S* je bitno manji od kardinalna broja skupa *PS*.

16. *Čelijski elementi i kontinuum*. Jedan od oblika diskretuma dobije se kad se pojedini komadi kontinuuma poistovećuju t. j. smatraju kao homogenim elementima. Tako na pr. posmatranjem skupa disjunktih kocaka dobije se izvesna diskretna prebrojiva obitelj kocaka. Svakako da i takovi podaci mogu biti dragoceni za ispitivanje polaznog kontinuuma. Tako na pr. zna se ovo: iz činjenice što u ravlini ima tek prebrojivo mnogo disjunktih pravokutnika izvodi se da na pravoj liniji ima tek prebrojivo mnogo disjunktih segmenata. A ne zna se da li važi i obrat. Tako da se ne zna, da li je obični kontinuum realnih brojeva jedini redni kontinuum kojemu pripada svojstvo da ne sadrži neprebrojivo mnogo intervala od kojih svaki leži van ostalih. To je sadržina glasovitog Suslinova problema.

17. *Izučavanje po kontinuitetu i diskontinuitetu* vrlo su važna. Specijalno, pitanja egzistencija rešenja često su bazirana na pitanjima kontinuiteta. *Efektivna* (odn. egzistencijalna) rešenja uglavnom su bazirana na pojedinim vrstama *diskretuma* (odn. kontinuuma). Inače, bez sumnje, priroda je sazdana *diskretno*, no ne možda iz strogo individualnih separiranih čestica, nego od nečega što se nalazi u promenama u zavisnosti sa drugim delovima materije i prirode. Energija i svetlo su diskretne prirode, dakle su to dva skupa. Psihička doživljavanja također su diskretna, diskontinuirana.

U svojoj bitnosti pitanje diskretum-kontinuum svodi se na širu bazu logičkih kvantifikatora egzistencijalnosti i univerzalnosti. Diskretno-kontinuirano pojavljuje se u izrazitom obliku logičkih kvantifikatora: postoji — sve, odnosno: pojedinačno — posebno — opće. Zato se logički pojedinom nastajanju pridružuje i celina, celokupni okvir toga nastajanja kao skup.<sup>5</sup>

<sup>5</sup> Nastajanje odn. tok procesa ne mora imati veze sa vremenom odnosno sa prirodnim nastajanjem. Tako Heraklitovo načelo: sve je u kretanju našlo je svoje proširenje u Dedekindovoj izreci: *Anfangs war die Abbildung*. A u poimanju vasiona kao skupa u kojem jedni delovi uplivišu na druge nalazi se osnov za izučavanje prostora i vremena.

# PARAANALITIČNE FUNKCIJE

I. MOLINARO

G. Maurice Fréchet je v svojem predavanju v Ljubljani maja 1953 očrtal svoja raziskavanja o paraanalitičnih funkcijah. Kratka poročila o tem je objavil v *Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris*.

Znano je, da imamo nešteto zvrsti kompleksnih števil ([I], str. 102). Neodvisna spremenljivka analitične funkcije pomeni poljubno število neke množice navadnih kompleksnih števil, pri paraanalitičnih funkcijah pa pripadajo vrednosti funkcije in neodvisne spremenljivke določeni zvrsti kompleksnih ali hiperkompleksnih števil ([I], str. 103—125). Taka števila bomo imenovali parakompleksna števila. Navadna kompleksna števila si lahko predočujemo z vektorji ([II], str. 20); isto lahko storimo pri parakompleksnih številih. Zato imenujemo parakompleksna števila tudi vektorje, funkcije pa vektorske funkcije, če sta odvisna in neodvisna spremenljivka vektorja. Po številu komponent razlikujemo dvo-, tro-, ...,  $n$ -dimenzionalne vektorje, oziroma števila.

Sistem dvodimenzionalnih parakompleksnih števil tvorijo  $n$ . pr. vsa števila oblike  $x \cdot e_1 + y \cdot e_2$ , za katera velja: 1.  $x$  in  $y$  sta poljubni realni števili, ki jih imenujemo komponenti vektorja oz. števila  $x \cdot e_1 + y \cdot e_2$ ; 2.  $0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 = 0$ ; 3. enakost in neenakost definiramo kot pri navadnih vektorjih ([II], str. 122); 4. seštevamo jih kot navadne vektorje ([II], str. 126); 5.  $e_1 \cdot e_1 = e_1$ ,  $e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_1 = e_2$ ;  $e_2 \cdot e_2 = 0$ ; 6.  $e_1$  in  $e_2$  sta linearno neodvisna vektorja; 7. množenje je distributivno. Dogovori 1, 2, 3, 4, 6, 7 veljajo za vse sisteme parakompleksnih števil, zato jih ne bomo več posebej navajali.

Če zaznamujemo z  $v$  parakompleksno spremenljivko, ki more pomeniti katerokoli število iz kake množice parakompleksnih števil (istega sistema), potem pomeni  $V = F(v)$  tako funkcijo spremenljivke  $v$ , da je vsaka vrednost te funkcije zopet neko parakompleksno število istega sistema. Vsako tako funkcijo lahko pišemo v obliki

$$V = F(v) = X(x, y) \cdot e_1 + Y(x, y) \cdot e_2$$

kjer sta  $X(x, y)$  in  $Y(x, y)$  realni funkciji realnih spremenljivk  $x$  in  $y$ .

Da nam ni treba uvajati deljenja, vpeljemo drugačno definicijo odvoda kot pri analitičnih funkcijah, toda tako, da velja tudi za analitične funkcije. Navadna kompleksna števila pišemo v obliki  $z = x + iy$ , ki jo dobimo iz oblike  $x \cdot e_1 + y \cdot e_2$ , če postavimo  $e_1 = 1$ ,  $e_2 = i$  in izpremenimo definicijo pod 5) tako, da je  $e_2 \cdot e_2 = -1$ . Pri analitični funkciji  $Z = F(z) = X(x, y) + iY(x, y)$  je za vsako vrednost  $z_0 = x_0 + iy_0$ , za katero eksistira odvod  $F'(z_0) = X'_x + iY'_x$ ,\* ([III], str. 177) zaradi Cauchy-Riemannovih enačb ([III], str. 176) pri vsakem  $dx$  in  $dy$  vedno  $dF = F'dz$ , kjer je  $dF = dX + i dY = X'_x dx + X'_y dy + i(Y'_x dx + Y'_y dy)$  in  $dz = dx + i dy$ . Iz enačbe  $dF = Adz$ , če je za  $z = z_0$  izpolnjena pri vsakem  $dx$  in  $dy$ , pa tudi sledi  $A = F'(z_0)$ . Po analogiji lahko definiramo: funkcija  $V = F(v) = X(x, y) e_1 + Y(x, y) e_2$  parakompleksne spremenljivke  $v$

\*  $X'_x = \partial X / \partial x$  ipd.

je odvedljiva za  $v = v_0$ : 1. če je definirana v kaki okolici od  $v_0$  in diferenciablelna za  $v = v_0$ , t. j., če eksistira  $dV = dF = dX \cdot e_1 + dY \cdot e_2$  in 2. če eksistira kako tako parakompleksno število  $V'$ , da je za  $v = v_0$  enačba  $dV = V'dv$  izpolnjena za vsak  $dv$ , kjer je  $dv = dx \cdot e_1 + dy \cdot e_2$ .

Družina  $A$  vseh analitičnih funkcij je invariantna proti seštevanju, množenju, substituciji in odvajanju; s tem hočemo reči, da pripadajo funkcije  $F_1(z) + F_2(z)$ ,  $F_1(z) \cdot F_2(z)$ ,  $F_2[F_1(z)]$  in  $F'(z)$  družini  $A$ , če pripadajo tej družini funkcije  $F_1(z)$ ,  $F_2(z)$  in  $F(z)$ . Družino funkcij  $z$  enako invarianco dobimo v spredaj podanem sistemu parakompleksnih števil po naslednji definiciji:

Paraanalitična funkcija družine  $D$  je funkcija  $V = F(v)$  z obliko  $F(v) = A(x) \cdot e_1 + [yA'(x) + B'(x)] \cdot e_2$ , kjer sta  $A(x)$  in  $B(x)$  poljubni, na definicijskem področju funkcije  $V$  neštetokrat odvedljivi funkciji,  $A'(x)$  in  $B'(x)$  pa njuna prva odvoda in  $v = x \cdot e_1 + y \cdot e_2$ .

Za dokaz invariance proti množenju vzemimo dve funkciji  $F_1(v) = A_1(x) \cdot e_1 + [yA_1'(x) + B_1'(x)] \cdot e_2$  in  $F_2(v) = A_2(x) \cdot e_1 + [yA_2'(x) + B_2'(x)] \cdot e_2$  družine  $D$  in tvorimo  $F(v) = F_1(v) \cdot F_2(v)$ . Po pravilu za množenje dobimo:  $F(v) = A_1(x) \cdot A_2(x) \cdot e_1 + \{ y[A_1(x)A_2'(x) + A_1'(x)A_2(x)] + A_1(x)B_2'(x) + A_2(x)B_1'(x) \} \cdot e_2 = A(x) \cdot e_1 + [yA'(x) + B'(x)] \cdot e_2$ , kjer je  $A(x) = A_1(x)A_2(x)$  in  $B(x) = \int [A_1(x)B_2'(x) + A_2(x)B_1'(x) + A_2(x)B_1'(x)] \cdot dx$ .

Neki drug sistem dvodimenzionalnih parakompleksnih števil dobimo, če vzamemo namesto gornjega dogovora 5) dogovor: 5')  $e_1 \cdot e_1 = e_1$ ,  $e_2 \cdot e_1 = e_1 \cdot e_2 = 0$ ,  $e_2 \cdot e_2 = e_2$ . V tem sistemu lahko uvedemo sledečo definicijo:

Paraanalitična funkcija družine  $P$  je vsaka funkcija  $V = F(v)$  z obliko  $F(v) = P(x) \cdot e_1 + Q(y) \cdot e_2$ , kjer sta  $P(x)$  in  $Q(y)$  poljubni na definicijskem področju funkcije  $V$  neštetokrat odvedljivi funkciji in kjer je  $v = x \cdot e_1 + y \cdot e_2$ . Ta družina je invariantna kot družini  $A$  in  $D$  proti seštevanju, množenju, substituciji in odvajanju.

Invarianco proti odvajanju dokazujejo naslednja razmotrivanja. Iz  $dF = F'dv$ , t. j. iz  $P'(x)dx \cdot e_1 + Q'(y)dy \cdot e_2 = F' \cdot (dx \cdot e_1 + dy \cdot e_2)$ , kjer je  $F' = F_1' \cdot e_1 + F_2' \cdot e_2$ , dobimo  $P'(x)dx \cdot e_1 + Q'(y)dy \cdot e_2 = F_1'dx \cdot e_1 + F_2'dy \cdot e_2$  in od tod  $F_1' = P'(x)$ ,  $F_2' = Q'(y)$  ali  $F'(x) \cdot e_1 + Q'(y) \cdot e_2$ , kjer je  $F'$  odvod funkcije  $F$ . Iz tega vidimo, da pripada funkcija  $F'$  družini  $P$ , s čimer je dokazana invarianca proti odvajanju.

Družine  $A$ ,  $P$  in  $D$  imajo še druge skupne lastnosti. Vsako funkcijo vsake izmed teh družin pišemo lahko v obliki:  $F(v) = X(x, y) \cdot e_1 + Y(x, y) \cdot e_2$ . Za vsako funkcijo družine  $A$  veljata Cauchy-Riemannovi enačbi  $\partial X/\partial x - \partial Y/\partial y = 0$ ,  $\partial X/\partial x + \partial Y/\partial y = 0$  ([III], str. 176) in Laplaceova enačba  $\partial^2 U/\partial x^2 + \partial^2 U/\partial y^2 = 0$ , kjer pomeni  $U$  lahko eno ali drugo izmed obeh funkcij  $X(x, y)$ ,  $Y(x, y)$ . Namesto teh veljajo za funkcije družine  $D$  enačbe

$$\partial X/\partial x - \partial Y/\partial y = 0, \quad \partial X/\partial y = 0; \quad \partial^2 U/\partial y^2 = 0$$

in za funkcije družine  $P$  enačbe:

$$\partial Y/\partial x = 0, \quad \partial X/\partial y = 0, \quad \partial^2 U/\partial x \partial y = 0$$

Komponenti vsake funkcije družin  $A$ ,  $D$  in  $P$  ustrezajo torej nekemu sistemu dveh linearnih homogenih parcialnih diferencialnih enačb prvega reda

s konstantnimi koeficienti in neki linearni homogeni parcialni diferencialni enačbi drugega reda s konstantnimi koeficienti.

Za regularne analitične funkcije velja  $\int F(v) dv = 0$ , ([III], str. 195), kjer je integral vzet po poljubni sklenjeni krivulji  $\Gamma$ , ki poteka znotraj polja, na katerem je funkcija  $F(v)$  regularna analitična. Ta enačba velja tudi, če je  $F(v)$  kaka na krivulji  $\Gamma$  paraanalitična funkcija družine  $D$  ali  $P$ .

Za funkcije družine  $D$  dokažemo gornjo trditev z računom:  $\int F(v) dv = \int \{ A(x) \cdot e_1 + [yA'(x) + B'(x)] \cdot e_2 \} (dx \cdot e_1 + dy \cdot e_2) = e_1 \cdot \int A(x) dx + e_2 \cdot \int [yA'(x) + B'(x)] dx + A(x) dy = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 = 0$ . (Glej [III], str. 130). Nič težji ni dokaz za funkcije družine  $P$ .

Vsak polinom  $P_n(v) = c_0 + c_1 v + \dots + c_n v^n$ , kjer so  $c_k$  poljubna dana kompleksna števila, je analitična funkcija kompleksne spremenljivke  $v$ . Podobno velja za oba sistema parakompleksnih števil. Ker spadata funkciji  $V = v$  in  $V = c$ , kjer je  $v$  neodvisna parakompleksna spremenljivka in  $c$  kako dano parakompleksno število, v družino  $D$  oz.  $P$ , in ker sta obe družini invariantni proti množenju in seštevanju, spada tudi vsak polinom  $P_n(v) = c_0 + c_1 v + \dots + c_n v^n$  v družino  $D$  oz.  $P$ .

V enakem smislu kot pri neskončnih vrstah navadnih kompleksnih števil moremo govoriti o konvergenci neskončnih vrst s parakompleksnimi členi. Nekaterne neskončne vrste, ki imajo za člene funkcije parakompleksne spremenljivke, konvergirajo za vsako vrednost spremenljivke, ki pripada neki množici parakompleksnih števil. Take vrste so seveda funkcije parakompleksne spremenljivke. Nekaterne od njih so paraanalitične. Kot primer navajamo potenčne vrste, ki jih dobimo iz vrst za  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$  ([III], str. 207—210) pri realnem  $x$ , če zamenjamo v njih spremenljivko  $x$  s parakompleksno spremenljivko  $v$ . S takimi vrstami lahko definiramo funkcije  $e^v$ ,  $\sin v$  in  $\cos v$ . Te funkcije pa lahko uvedemo tudi drugače.

Funkcijo  $e^v$  moremo definirati v prvem oz. v drugem sistemu parakompleksnih števil kot tako funkcijo družine  $D$  oz.  $P$ , da je

$$(e^v)' = e^v \quad \text{in} \quad e^0 = I$$

kjer je  $I$  glavna enota sistema, t. j. število z lastnostjo  $I \cdot v = v \cdot I = v$  pri poljubnem  $v$  ([I], str. 109).

V družini  $D$  je  $e^v = A(x) \cdot e_1 + [yA'(x) + B'(x)] \cdot e_2$ . Ker je potem  $(e^v)' = A'(x) \cdot e_1 + [yA''(x) + B''(x)] \cdot e_2$ , moremo enačbo  $(e^v)' = e^v$  pisati v obliki:

$$A'(x) \cdot e_1 + [yA''(x) + B''(x)] \cdot e_2 = A(x) \cdot e_1 + [yA'(x) + B'(x)] \cdot e_2;$$

od tod sledi:

$$A'(x) = A(x), \quad yA''(x) + B''(x) = yA'(x) + B'(x).$$

Iz prve enačbe dobimo  $A(x) = k_1 e^x$ , iz druge pa  $B''(x) = B'(x)$  ali  $B'(x) = k_2 e^x$ . Torej je  $e^v = k_1 e^x \cdot e_1 + (yk_1 e^x + k_2 e^x) \cdot e_2$ . Ker je v tem sistemu parakompleksnih števil  $I = e_1$ , dobimo iz začetnih pogojev, da je  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 0$  in od tod

$$e^v = e^{x \cdot e_1 + y \cdot e_2} = e^x \cdot e_1 + y e^x \cdot e_2$$

Če upoštevamo, da je v drugem sistemu parakompleksnih števil  $I = e_1 + e_2$ , dobimo v družini  $P$

$$e^v = e^{x \cdot e_1 + y \cdot e_2} = e^x \cdot e_1 + e^y \cdot e_2$$

Tudi funkcije  $\sin v$ ,  $\cos v$ ,  $\operatorname{tg} v$  lahko definiramo v obeh sistemih parakompleksnih števil z enačbami:

$$(\sin v)' = \cos v, \quad (\cos v)' = \sin v, \quad \sin 0 = 0, \quad \cos 0 = 1, \quad \sin v = \cos v \cdot \operatorname{tg} v$$

Na podoben način kot pri funkciji  $e^v$  dobimo iz definicijskih enačb, da je v družini  $D$ :

$$\sin v = \sin(x \cdot e_1 + y \cdot e_2) = \sin x \cdot e_1 + y \cos x \cdot e_2$$

$$\cos v = \cos(x \cdot e_1 + y \cdot e_2) = \cos x \cdot e_1 - y \sin x \cdot e_2$$

v družini  $P$  pa:

$$\sin v = \sin(x \cdot e_1 + y \cdot e_2) = \sin x \cdot e_1 + \sin y \cdot e_2$$

$$\cos v = \cos(x \cdot e_1 + y \cdot e_2) = \cos x \cdot e_1 + \cos y \cdot e_2$$

Lahko se prepričamo, da veljajo za pravkar navedene funkcije odnosi:

$$e^{v_1 + v_2} = e^{v_1} \cdot e^{v_2}$$

$$\sin(-v) = -\sin v, \quad \sin(\pi/2 - v) = \cos v, \quad \sin^2 v + \cos^2 v = I$$

$$\cos(-v) = \cos v, \quad \cos(\pi/2 - v) = \sin v,$$

$\sin(v_1 + v_2) = \sin v_1 \cos v_2 + \cos v_1 \sin v_2$ ,  $\cos(v_1 + v_2) = \cos v_1 \cos v_2 - \sin v_1 \sin v_2$ , kjer sta  $v_1$  in  $v_2$  poljubni parakompleksni števili prvega ali drugega sistema parakompleksnih števil.

Prednja razmišljanja so posebna v več pogledih: obravnavali smo dve posebni družini funkcij v dveh posebnih sistemih dvodimenzionalnih parakompleksnih števil. Ta razmišljanja je g. M. Fréchet še razširil s splošno definicijo  $n$ -dimenzionalnih parakompleksnih števil, z uvedbo funkcij takih števil in s splošno definicijo paraanalitičnih funkcij, za katere je pokazal, da imajo več podobnih lastnosti kot analitične funkcije.

#### Literatura:

- I. A. Vakselj, Osnove matematike I, 1952.
- II. I. Vidav, Višja matematika I, 1949.
- III. I. Vidav, Višja matematika II, 1951.

#### Viri:

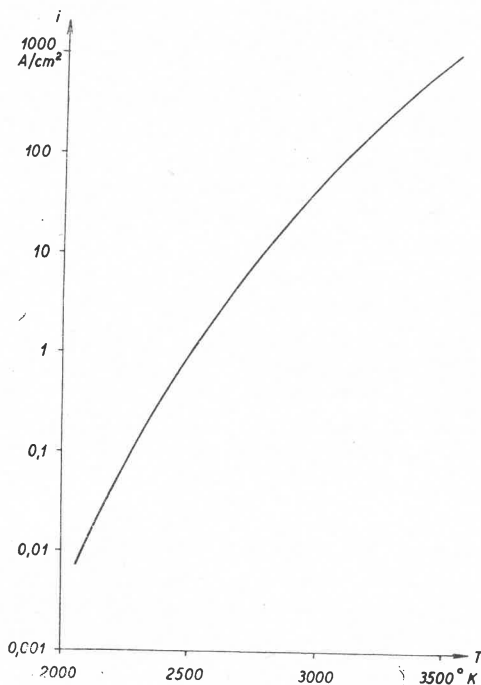
- C. R. Acad. Sci., t. 235, 1952, p. 1585, t. 236, 1953, p. 348, 1832, 2191.

# OKSIDNA KATODA

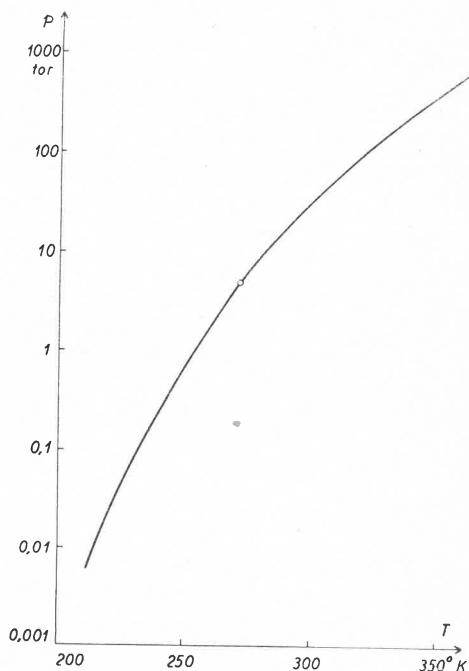
E. KANSKY

Iz vsake kovine izhlapevajo pri višjih temperaturah elektroni. Ta pojav imenujemo *termično emisijo* elektronov in ga izkoriščamo v elektronkah. V elektronki oddaja elektrone segreta *katoda*.

Pri merjenju toka v elektronki opazimo, da se ta tok z rastočo anodno napetostjo (pri dani temperaturi katode) približa neki mejni vrednosti. Tedaj pridejo na anodo vsi elektroni, ki izhlapijo iz katode. Ta tok (*nasičeni tok*) je torej enak *emisijskemu toku* katode.



Sl. 1. Gostota emisijskega toka volframske katode v odvisnosti od temperature.



Sl. 2. Parni pritisk vode v odvisnosti od temperature.

Emisijski tok katode zelo hitro raste z njeno temperaturo (sl. 1). Pri katodi iz volframa se na primer v okolici temperature 2000° K emisijski tok za vsakih 100° zvišanja temperature štirikrat poveča. Kvantitativno podaja te spremembe *Richardsonova enačba*

$$i = AT^2 \exp(-e_0 U / kT),$$

kjer je  $i$  gostota emisijskega toka. Koeficient  $A$  ima po navadi vrednost okrog 120 A/cm²st² (ali nekaj manj kot toliko). Izraz  $e_0 U$  v eksponentu se imenuje *izstopno delo* elektronov in ni nič drugega kot izparilna toplota elektronov, preračunana na posamezni elektron.  $U$  je izstopnemu delu ustrezna napetost (torej število elektronskih voltov).

Prav takšne zakonitosti veljajo tudi za izhlapevanje tekočin in trdnih snovi (Richardsonova enačba se lahko izpelje iz Clausius-Clapeyronove enačbe, ki velja za oba pojavi). O tej podobnosti naj pričata sliki 1 in 2, katerih prva kaže emisijski tok volframa, druga pa parni pritisk vode v odvisnosti od temperature.

Izstopno delo je za katodno površino značilna konstanta in znaša pri čistih kovinah 1,7 eV (cezij) do 6 eV (platina). Richardsonova enačba kaže, da je emisijski tok zelo odvisen od izstopnega dela. Za ilustracijo naj služi tale primer: Pri 1400° C ima volfram ( $U = 4,5$  V) gostoto emisijskega toka  $1 \mu\text{A}/\text{cm}^2$ , torij ( $U = 3,4$  V)  $4 \text{ mA}/\text{cm}^2$ , s tanko plastjo torija prevlečeni volfram ( $U = 2,6$  V) pa  $100 \text{ mA}/\text{cm}^2$ .

Prve elektronke so imele katode iz volframa, kasneje pa iz toriranega volframa. Toda pri slednjem je izstopno delo razmeroma visoko in je zato potrebna temperatura blizu 2000° K, da dobimo zadostno emisijo. Ugodnejše bi bile alkalijske in zemljealkalijske kovine, ki imajo izstopno delo 1,7 do 2,5 eV. Teh pa na žalost ne moremo dovolj močno segreti, ker preveč hlapijo, že pri nizkih temperaturah nekaj sto °C. Zato kot katodni material ne pridejo v poštev. Posrečilo pa se je izdelati katodo z zelo majhnim izstopnim delom (okoli 1 eV), pri kateri emitira elektrone zmes oksidov zemeljskih alkalij. To je oksidna katoda. Ker deluje zelo gospodarno, jo kljub vsem nevšečnostim, ki so zvezane z njeno pripravo, uporabljamo v vseh malih elektronkah.

Oksidna katoda, ki se je prvič pojavila pred dobrimi 50 leti,\* je žica, trak, cevka ali ploščica iz niklja ali njegovih zlitin, prevlečena z nekaj deset mikronov debelo plastjo zemljealkalijskih oksidov. Grejemo jo posredno ali neposredno z električnim tokom. Oksidi morajo vsebovati 0,01 do 0,1 % prostega barija, ki jih spremeni v polvodnike. Elementarni barij je odločilen za nizko izstopno delo in s tem za dobro emisijo pri razmeroma nizki delovni temperaturi (650 do 800° C). Če se iz katerega koli vzroka ta barij potroši, izgubi katoda sposobnost emitiranja; pravimo, da se je *zastrupila*.

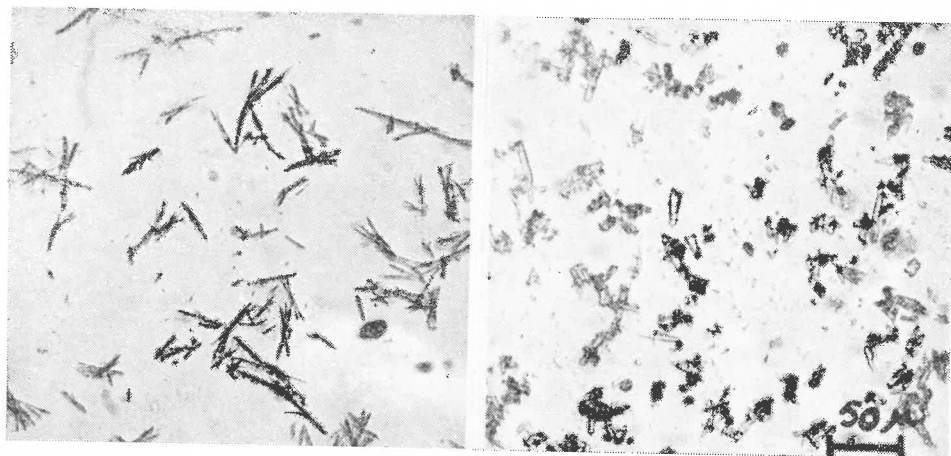
Emisijska sposobnost zemljealkalijskih oksidov v vrsti od magnezija proti bariju močno narašča. Še ugodnejša pa je mešanica barijevega in stroncijevega oksida (približno v razmerju 1:1), ki ima včasih še primes nekaj % kalcijevega oksida. Emisija mešanih oksidov je nadalje močno odvisna od strukture zmesi: mehanska zmes dveh ali treh oksidov zaostaja za trdno raztopino. Barijev in stroncijev oksid sta namreč izomorfna in dajeta zvezen prehod trdnih raztopin od BaO (z mrežno konstanto  $d = 5,54 \text{ \AA}$ ) do SrO ( $d = 5,12 \text{ \AA}$ ). Tudi SrO in CaO tvorita v vseh razmerjih trdne raztopine. V trojnih zmesih pa dobimo trdno raztopino le, kadar je koncentracija CaO precej nizka (okoli 5 %).

Tehnika izdelave oksidne katode ima za seboj že lepo razvojno pot. Uporabljali so razne načine priprave in jih spet opustili: direktno nanašanje oksidov na katodni nosilec, ali pa nanašanje hidroksidov in nitratov ter njihov termični razkroj do oksidov. Od vseh teh postopkov se je najbolj obnesel in zato edini obdržal karbonatni postopek. Katodo premažemo s suspenzijo karbonatov in jih kasneje termično razkrojimo do oksidov. Ta način uporabljajo danes vse tovarne za elektronke.

\* Leta 1904 je objavil Wehnelt svoje odkritje, da zemljealkalijski oksidi pod določenimi pogoji močno emitirajo elektrone. V počastitev tega odkritja je bil sklican v Parizu od 24. do 26. junija 1954 mednarodni kongres za petdesetletnico oksidne katode, na katerem so se zbrali vodilni strokovnjaki s tega področja.

Tudi zemljealkalijski karbonati tvorijo podobno kot oksidi trdne raztopine. Iz prej omenjenih razlogov je razumljivo stremenje, da pripravimo že karbonate v obliki trdnih raztopin. Te dobimo, če iz vodne raztopine, v kateri so prisotni vsi zemljealkalijski ioni v zaželenem razmerju, izločimo vse hkrati kot karbonate s sodo ali amonijevim karbonatom. Na sliki 3 vidimo mikroskopske posnetke tako pripravljenih karbonatov. Oblika in velikost kristalčkov je močno odvisna od sestave in koncentracije raztopin ter temperature pri izločanju. Za izdelavo katod so najprimernejši 3 do 8  $\mu$  veliki kristali.

Karbonate suspendiramo v primernem mediju (butilacetatu, amilacetatu ali mešanici različnih organskih topil) in tako naredimo nekakšno pasto, ki vsebuje 25 do 50 g karbonatov na 100 ml. Kot lepilo ji dodamo 0,5 do 1 % nitroceluloze. To pasto brizgamo ali pa jo premazujemo na katodne nosilce. Ko topilo odhlapi, preostane rahla karbonatna plast, debela 40 do 100  $\mu$  s 5 do 10 mg/cm<sup>2</sup>. Za nanašanje karbonatov se poslužujemo včasih tudi elektroforeze.



Sl. 3. Na različen način pripravljen trojni karbonat  $\text{BaSrCaCO}_3$ .

S karbonati prevlečeni katodni nosilec vgradimo v elektronko, katero začnemo izčrpavati. Steklo in kovinske dele elektronke osvobodimo adsorbiranih plinov s pregrevanjem, ki traja 15 minut do nekaj ur, in na ta način ustvarimo pogoje za dober vakuum. Takoj nato močno segrejemo katodo za 1 do 10 minut. Pri temperaturi 1000 do 1150° C razpadejo karbonati v okside. Nastajajoči ogljikov dioksid odsesa črpalka. Na ta način dobimo na katodnem nosilcu plast oksidov. Po tej operaciji naparimo v elektronki geter in jo zatalimo.

Zadnja faza je aktiviranje katode. Okside, ki so električni izolatorji, pretvorimo v polvodnike. To dosežemo, če v oksidih ustvarimo že omenjeni prebitek barija, ki daje gibljive elektrone. Katodo lahko aktiviramo na dva načina: z elektrolizo ali s kemično redukcijo. Med anodo in katodo, ki jo segrejemo na 1000 do 1100° C, pritismo enosmerno napetost 20 do 100 V (pri elektronkah z več mrežicami vežemo krnilno mrežico na katodo, ostale pa na anodo). Pri tej visoki temperaturi je oksidna plast ionski vodnik; zato steče skozi elektronko tok. Barijevi ioni potujejo proti kovinski podlagi, kjer se razelektrijo in spremenijo v elementarni barij ( $\text{Ba}^{++} + 2e \rightarrow \text{Ba}$ ), ki se

zaradi difuzije hitro enakomerno porazdeli po oksidni plasti. Kisikovi ioni potujejo v nasprotno smer; na površini katode izločeni kisik izpuhti in ga potem veže geter. Poleg ionov sodelujejo pri toku še elektroni, ki se gibljejo od nikljevega nosilca skozi oksidno plast, na površini katere izstopajo in letijo proti anodi. Takoj ob začetku aktiviranja je elektronski delež prevodnosti neznan. Ko pa se začne v plasti nabirati elementarni barij, se ta del prevodnosti bolj in bolj veča. Z večanjem prevodnosti plasti se manjša v njej električna poljska jakost. Ustrezno temu pojema tudi elektroliza oziroma izločanje barija. Končno, ko popolnoma prevlada tok z elektroni, smo dosegli stacionarno stanje — katoda je aktivirana. Ta proces lepo zasledujemo z merjenjem toka v elektronki: šibki začetni tok močno (do stokrat) naraste in po krajšem času (n. pr. četrte ure) doseže konstantno vrednost. V praksi poteka aktiviranje zaradi zamotanosti pojavov za vsak tip elektronke po svoji shemi.

Običajno vsebuje katodni nikelj primese Mg, Si, Al, ki reducirajo nekaj barijevega oksida. Redukcija se začne, čim ima katoda dovolj visoko temperaturo, deloma že pri razkroju karbonatov. Po dolgoletnih izkušnjah so prišli raziskovalci do zaključka, da je za oksidno katodo sestava katodnega niklja prav tako važna kakor sestava oksidov. Posebno čisti nikelj, ki vsebuje le



Sl. 4. Shematični pre-rez skozi oksidno katodo: N — nikelj, O — oksidna plast.

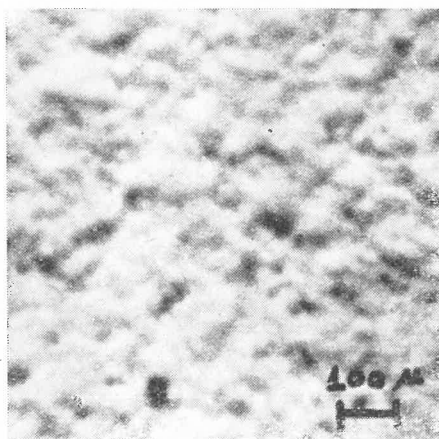
sledove primese, se normalno ne uporablja. Na njem nanesene okside lahko aktiviramo samo z elektrolizo. Danes se za katode izdeluje nikelj s posebnimi reduktivnimi dodatki (n. pr. 0,1 % Mg ali 0,2 % Si ali 0,1 % Al + 4 % W). Takšne katode se aktivirajo zelo lahko in hitro.

Oksidna katoda ima dobro emisijo samo takrat, kadar je oksidna plast dovolj porozna. Volumen por mora znašati od 50 do 80 %. Na sl. 4 je shematično narisana prerez skozi katodo. Oksidni kristalčki se med seboj samo dotikajo in niso zlepljeni v kompaktno plast. Resnična površina katode je zelo velika. Pri dobro aktivirani katodi se elektroni ne gibljejo samo skozi oksidne kristale ter ne izstopajo samo na zunanji površini, temveč tudi v notranjosti plasti in skozi pore difundirajo proti površju. Pri normalnem obratovanju katode so te pore napolnjene z elektroni, ki obdajajo tudi površino katode kot nekak oblak; anoda črpa elektrone samo iz tega oblaka. Porozna struktura katode pa omogoča, da lahko brez škode odvezujemo v sunkih, ki trajajo nekaj  $\mu$ sek in se ponavljajo po nekaj stokrat na sekundo, nekaj stokrat večje tokove kakor pri trajni obremenitvi. Pri takem sunku posesa močno električno polje iz katode elektrone, podobno, kakor ožmemo mokro gobo. Ta lastnost oksidne katode je bistvenega pomena za radarsko tehniko.

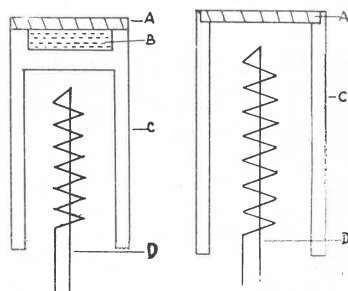
Kadar je temperatura katode previsoka, je nevarnost, da začne oksidna zrna zaradi rekristalizacije hitro rasti in lahko zamašijo pore. Do previsoke temperature pride ali zaradi premočnega kurjenja ali zaradi prevelikega odvzema elektronov. Takrat Joulova toplota dodatno greje katodo. Zato sme biti gostota toka pri trajnem odvzemu maksimalno  $0,5 \text{ A/cm}^2$ , pri kratkih sunkih pa okoli  $100 \text{ A/cm}^2$ .

Med obratovanjem katode se v njej dogajajo izpremembe: po eni strani barij odpareva zaradi razmeroma visoke temperature, po drugi strani pa se prosti barij zopet obnavlja; pri najčistejšem niklju na račun elektrolize, pri niklju, ki vsebuje primese, pa pretežno z redukcijo. Za življenjsko dobo katode je poleg počasne rekristalizacije oksidov izredno važno pravilno obnavljanje barija. S skrbno izbiro materialov in delovnih pogojev ter kar se da dobrim vakuumom v elektronki je uspelo zvečati življenjsko dobo oksidne katode na nekaj deset tisoč ur.

Z opisano klasično oksidno katodo ni bilo mogoče rešiti vseh sodobnih problemov pri izdelovanju raznih specialnih elektronk. Njena slaba stran je, da nima gladke površine (sl. 5), kar je lahko zelo neprijetno pri ceveh za zelo visoke frekvence, kjer je krmilna mrežica samo nekaj mikronov oddaljena



Sl. 5. Mikroskopska slika katodne površine.



Sl. 6. Katoda *L* in »impregnirana« katoda *P*. A — porozna volframova ploščica, B — zalog oksidov, C — molibdenovo ohišje, D — grelna špirala.

od katode. Tudi v magnetronih predstavlja to oviro, ker ni površina katode niti mehansko niti električno točno določena. K tej pomanjkljivosti lahko še prištejemo razmeroma veliko upornost oksidne plasti, slabo odpornost za ionsko bombardiranje, nezadostno obstojnost v močnih električnih poljih (iskrenje) in majhno mehansko trdnost.

V zadnjih letih so se pojavile nove variante oksidnih katod, ki se skušajo izogniti tem pomanjkljivostim. Uporabljajo se že *katoda L* in *impregnirana katoda* (sl. 6), izdelani v Philipsovih laboratorijih, ter različne *sintrane katode*.

Katoda *L* je indirektna. Ploska katoda je narejena takole: Molibdenovo ohišje je skonca zaprto s porozno volframovo ploščico. Vmesni prostor je napolnjen z zemljealkalijskimi karbonati  $[(Ba, Sr) CO_3]$ . Karbonate razkrojimo kot običajno s previdnim segrevanjem, nato zvišamo temperaturo do  $1200^{\circ}C$ . Pri tej temperaturi se katoda hitro aktivira: barijev oksid reagira z volframom; nastaja elementarni barij, ki se adsorbira na porozni ploščici. Pri obratovanju barij odpareva podobno kot pri klasični katodi, iz rezervoarja pa doteka sveži, ki izgubo obnavlja. Izstopno delo je 2,1 do 2,2 eV. Pri trajnem odvzemu

daje ta katoda pri temp.  $1130^{\circ}\text{C}$  do  $4\text{ A/cm}^2$ , v impulznem režimu pa 20 do  $30\text{ A/cm}^2$ . Življenjska doba je nekaj tisoč ur. Impregnirana katoda je enostavnejša. Obstoji iz poroznega volframovega telesa, ki je prepojeno z barijevim aluminatom. Tudi barijev aluminat reagira pri višji temperaturi z volframom in tvori elementarni barij, ki aktivira to katodo podobno kot katodo L.

Še enostavnejše so sintrane katode, narejene po principih prašne metalurgije. Zemljealkalijske karbonate in droben nikljev prah [20 do 25 % (Ba, Sr)  $\text{CO}_3$  in 75 do 80 % Ni] dobro premešamo in z visokim pritiskom stisnemo v zaželeno obliko. Stiskance sintramo v vodik 1 uro pri  $1000^{\circ}\text{C}$ , da pridobijo mehansko trdnost. Z naknadno mehansko obdelavo jih lahko dokončno oblikujemo in poliramo. Pri segrevanju katode v vakuumu karbonati razpadejo. Tako dobimo porozno nikljevo telo z oksidnimi vključki. Katode aktiviramo podobno kot klasične. Njihova obratovalna temperatura je  $850$  do  $1000^{\circ}\text{C}$  in dajejo pri trajnem odvzemu  $0,5\text{ A/cm}^2$  in do  $40\text{ A/cm}^2$  pri impulznem odvzemu.

Vse te katode nimajo prej omenjenih pomanjkljivosti klasične oksidne katode, so pa manj gospodarne, ker obratujejo pri višji temperaturi.

Končno najdemo oksidne katode še v plinskih elektronkah (usmerjevalkah, triatronih), neonskih in fluorescentnih žarnicah, bliskavkah, živosrebrnih in natrijevih svetilkah. Tudi te se v svoji izvedbi bolj ali manj ločijo od klasične oksidne katode.

#### Literatura:

G. Herman, S. Wagener: Die Oxydkathode, I, II, J. A. Barth, Leipzig, 1944.

C. Biguenet: Les Cathodes chaudes, Edit. Revue d'optique, Paris, 1947.

Le Vide — Rapports des travaux du congrès international du cinquantenaire de la cathode à oxydes, Paris 1955.

\*

### O ODKRITJU OKSIDNE KATODE

Emisijo elektronov iz razžarjenih teles je Richardson fizikalno razložil ob začetku tega stoletja. On sam in drugi delavci so v tem času rabili kot izvore elektronov samo kovine. Tudi Wehnelt je leta 1903 delal takšne raziskave s platinsko katodo. Po naključju pa je opazil, da z nekaterih mest na katodi izhajajo močni curki elektronov že pri temperaturah  $800$  do  $1000^{\circ}\text{C}$ . Ker platina pri tako nizki temperaturi drugače še nič ne emitira, je Wehnelt domneval, da so na tistih mestih nečistoče, morda oksidi kovin. Zato je napravil poskuse z različnimi oksidi in dognal, da oddajajo oksidi zemljealkalijskih kovin elektrone že pri posebno nizki temperaturi. Tako se je rodila oksidna katoda.

(Vzeto iz knjige: G. Herrmann, S. Wagener: Die Oxydkatode II., Leipzig 1944.)

# NOVICE

## ELEMENTARNA METODA ZA RAČUNANJE VREDNOSTI INTEGRALA

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

Znano je, da se funkcija  $e^{-x^2}$  ne da nedoločeno integrirati v okviru elementarnih funkcij. Pač pa je mogoče izračunati vrednost določenega integrala v mejah od 0 do  $\infty$  z različnimi metodami za računanje izlimitiranih integralov. Najlažja je metoda z dvojnim integralom. Pričujoča metoda, ki jo je objavil lansko leto Maks Krafft, pa zahteva poznavanje le navadnega določenega integrala in Taylorjevo vrsto.

Taylorjeva vrsta za  $e^{-x}$  se glasi:

$$e^{-x} = 1 - x/1! + x^2/2! - x^3/3! + \dots + (-1)^n x^n/n! + R_n, \quad x > 0$$

pri čemer pomeni

$$R_n = (-1)^{n+1} \cdot x^{n+1}/(n+1)! \cdot e^{-\theta x}, \quad 0 < \theta < 1$$

Ker je očitno  $R_{2n} < 0$  in  $R_{2n+1} > 0$ , velja za vsak  $n$  in vsak  $x$  ocena:

$$1 - x^2/1! + x^4/2! - \dots - x^{4n-2}/(2n-1)! < e^{-x^2} < 1 - x^2/1! + x^4/2! - \dots + x^{4n}/(2n)! \quad (1)$$

Pišemo sedaj

$$G(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Če integriramo zgornjo neenačbo v mejah od 0 do poljubnega  $x$ , dobimo

$$x - x^3/1!3 + x^5/2!5 - \dots - x^{4n-1}/(2n-1)!(4n-1) < G(x) < x - x^3/1!3 + x^5/2!5 - \dots + x^{4n+1}/(2n)!(4n+1) \quad (2)$$

Zaradi (1) tu ne more nastopiti nikjer enačaj. Nadalje velja

$$G^2(x) = 2 \int_0^x G(x) G'(x) dx = 2 \int_0^x G(x) e^{-x^2} dx \quad (3)$$

Pomnožimo neenačbo (2) z  $e^{-x^2}$  in jo integrirajmo v mejah od 0 do  $\infty$ . Z upoštevanjem (3) dobimo

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k/k! (2k+1) \cdot 2 \int_0^{\infty} x^{2k+1} e^{-x^2} dx &< G^2(\infty) < \\ < \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k/k! (2k+1) \cdot 2 \int_0^{\infty} x^{2k+1} e^{-x^2} dx \end{aligned}$$

Vsi integrali, ki tu nastopajo, se pa dajo izraziti s funkcijo gama. Z vpeljavo spremenljivke  $t = x^2$  dobimo namreč

$$2 \int_0^{\infty} x^{2k+1} e^{-x^2} dx = \int_0^{\infty} t^k e^{-t} dt = k!$$

Torej velja za vsak  $n$  ocena

$$1/1 - 1/3 + 1/5 - \dots - 1/(4n-1) < G^2(\infty) < 1/1 - 1/3 + 1/5 - \dots \\ \dots - 1/(4n-1) + 1/(4n+1)$$

Tudi tu ne more nastopiti enačaj, ker velja ocena za vsak  $n$ .

Če raste  $n$  v neskončnost, dobimo na obeh straneh vrsto za  $\arctg x$  pri  $x = 1$ , ki je konvergentna in ima vsoto  $\pi/4$ .

Torej je:

$$G(\infty) = \pi/4 \text{ in } G(\infty) = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}.$$

B. Krušič

M. Kraft, Jahresbericht d. DMV, Bd. 57, 31—33 (1954).

## TEŽKI MEZONI

Mezonov, t. j. nestabilnih delcev z maso med elektronsko in protonsko maso, poznamo danes že celo vrsto. Najbolj znani so mezoni  $\mu$  in  $\pi$ , s skupnim imenom *lahki mezoni* ali *mezoni L*. Vse druge mezone, ki so težji kot mezon  $\pi$  ( $m_{\pi} = 273 m_e$ ), pa označujemo skupno kot *težke mezone* ali *mezone K*. Nestabilne delce, katerih masa je med masama protona in devterona, ne štejemo več k mezonom, ampak jih imenujemo *hiperone* ali *delce Y* (4). Posamezne delce iz teh skupin, ki jih uspe natančneje identificirati, označujemo z grškimi črkami, in sicer mezone z malimi, hiperone pa z velikimi. Doslej čisto uporabljane oznake  $V$  in  $S$  imajo samo še fenomenološki pomen:  $V$  pomeni razpad delca  $K$  ali  $Y$  med letenjem ( $V^0$  razpad nevtralnega,  $V^{\pm}$  nabitega delca),  $S$  pa razpad mirujočega nabitega delca  $K$  ali  $Y$ .

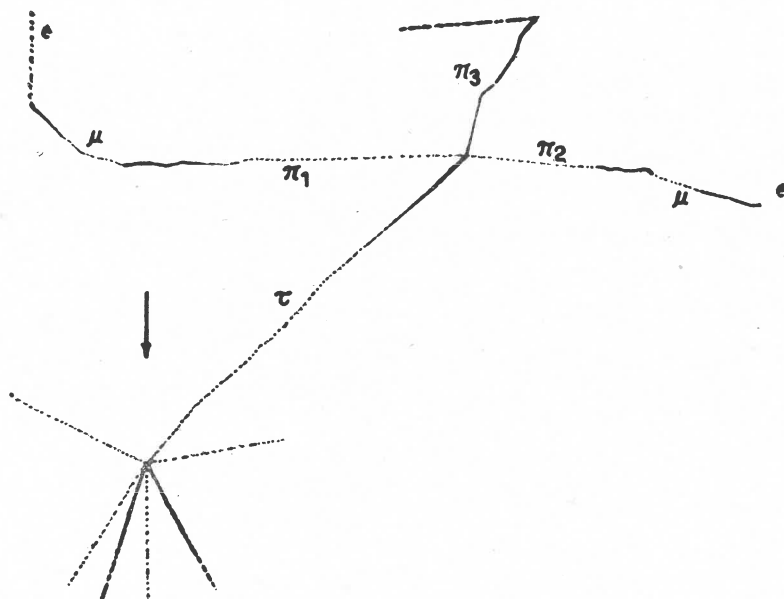
Sledi težkih mezonov so opazili že leta 1944 (1) v wilsonski celici, kmalu nato pa še v fotografski emulziji. Ker so težki mezoni nastopali zelo redko in v različnih oblikah in ker jih med delci, sproženimi pri jedrskih reakcijah, niso našli, so o njih še dolgo časa precej dvomili. Sedaj je obstoj težkih mezonov nedvomno dejstvo, dasi je še precej nejasno, koliko različnih vrst jih je in kakšne so njihove lastnosti.

Glavni vir težkih mezonov so kozmični žarki, ali pravzaprav reakcije, ki jih sprožijo kozmični delci velikih energij (več GeV). Pred kratkim so uspeli dobiti težke mezone tudi na kozmotronu v Brookhavenu (2) pri obstreljevanju tarče s protoni z energijo 3 BeV.

Za registracijo uporabljajo posebne fotografske plošče<sup>1</sup> in wilsonsko celico. Prednost plošč je, da jih moremo poslati z baloni v velike višine (20 do 30 km),

<sup>1</sup> Emulzija je zelo debela ( $600 \mu$ ), zelo gosta (85 % AgBr) in zelo drobno zrnata ( $0,2 \mu$ ).

kjer je tok delcev z veliko energijo znatno večji kot na vrhovih gora, kamor postavljajo wilsonske celice. Poleg fotografskih plošč s stekleno podlogo so pričeli eksponirati tudi bloke golih emulzij (3);  $600\ \mu$  debele lističe emulzije zložijo v blok, ki je tako velik ( $15 \times 10 \times 3\text{ cm}$ ), da se mezoni, ki v tem bloku nastanejo, v njem navadno tudi ustavijo in razpadejo. Emulzije po eksponiranju prilepijo na steklo in razvijejo. Prednost golih emulzij je v tem, da zlahka sledimo delcu pri prehodu iz ene emulzije v drugo in moremo tako pri poedinem mezonu opazovati njegov nastanek in razpad. Maso delca, čigar sled se konča v emulziji, določimo iz meritve ionizacije (gostote počrnjenih



Nastanek in razpad mezona  $\tau$  v fotografski emulziji. Mezon  $\tau$  izhaja iz jedrske reakcije (zvezde), ki je na spodnjem delu slike. Iz gostote zrnec, ki narašča s pojemanjem hitrosti, se lepo vidi smer gibanja. Pot mezona  $\tau$  je dolga 10 mm in ni vsa na sliki. Dva mezona  $\pi$  ( $\pi_1$  in  $\pi_2$ ) razpadeta v mezon  $\mu$ , ta pa v elektron, medtem ko tretji mezon  $\pi$  povzroči jedrsko reakcijo, pri kateri se sprosti en sam nabit delec (verjetno proton). S puščico je označena navpičnica proti zemlji. — Slika je povzeta iz članka: T. F. Hoang et al.; Observation de mésons  $\tau$ , Nuovo Cim. 12, suppl. No. 2, str. 208, 1954.

zrnec) v odvisnosti od preostalega dosega<sup>2</sup> ali pa iz meritve sipanja<sup>3</sup> in preostalega dosega. Če se sled ne konča v emulziji, določimo maso iz sipanja in ionizacije (gostote zrnec).

V wilsonski celici ujamemo navadno le del mezonove poti. Maso določimo iz ukrivljenosti sledi v magnetnem polju in gostote ionizacije. Meritev mase je znatno manj natančna kot v emulzijah. Prednost wilsonske celice pa je v tem, da moremo iz odklona v magnetnem polju neposredno določiti predznak naboja delca. Razen tega moremo ugotoviti tudi fotone in mezone  $\pi^0$ , ki utegnejo nastati pri razpadu težkih mezonov. Fotoni namreč sprožijo v svin-

<sup>2</sup> Preostali doseg je pot delca od preiskovanega mesta do tam, kjer se je ustavil.

<sup>3</sup> Sipanje se kaže v majhnih neravnostih sledi.

čenih ploščah kaskade, t. j. plazove elektronskih parov. Mezon  $\pi^0$  ima podoben učinek, ker hitro ( $\tau < 10^{-13}$  s) razpade v dvojico fotonov.

Masa doslej znanih težkih mezonov znaša okrog  $1000 m_e$ . Posamezne vrste razlikujemo med seboj po načinu razpada; razlike v masah so zaradi velikih merskih napak še zelo negotove.

Najprej in najbolj zanesljivo je bilo možno opredeliti mezon  $\tau$ , ki razpade v tri mezone  $\pi$ :

$$\tau^\pm \rightarrow \pi^\pm + \pi^+ + \pi^- + Q \quad (1)$$

Doslej so v emulzijah našli 40 takih primerov (5). Vsi trije mezoni  $\pi$  leže v eni ravnini, iz česar sledi, da je mezon  $\tau$  razpadel potem, ko se je ustavil, in da pri razpadu ni nastal noben drug nenabit delec. Iz kinetične energije mezonov  $\pi$  so dobili za razpadno energijo srednjo vrednost 75 MeV. Iz znane mase mezonov  $\pi$  in iz izmerjene vrednosti  $Q$  so določili maso mezona zelo natančno:  $m_\tau = 965,5 \pm 0,7 m_e$ . Reakcije, pri katerih so mezoni  $\tau$  nastali, so najrazličnejših tipov. Celotni čas od nastanka do zaustavitve znaša okrog  $8 \cdot 10^{-9}$  s. Ker v tem času ni razpadel noben mezon  $\tau$ , sledi, da je njihova življenjska doba daljša od  $10^{-8}$  s, kar se sklada tudi z meritvami v wilsonski celici. Naboj mezona  $\tau$  določimo v emulzijah iz naboja mezonov  $\pi$ , naboj teh pa iz njih ponašanja na koncu poti:  $\pi^+$  razpadejo v  $\mu^+$ , mezoni  $\pi^-$  pa povzročijo jedrske reakcije. Doslej so v emulzijah zanesljivo ugotovili devet mezonov  $\tau^+$  in nobenega  $\tau^-$ , v wilsonski celici pa sedem  $\tau^+$  in tri  $\tau^-$ . O pogostnosti tvorbe mezonov  $\tau$  pričajo naslednji podatki: v  $118,5 \text{ cm}^3$  sistematično pregledane emulzije, ki je bila eksponirana pribl. 8 ur v višini 25 km, so našli 9 mezonov  $\tau$  in 5052 mezonov  $\pi$ ; relativna pogostnost  $N_\tau/N_\pi$  znaša torej le  $1,8 \cdot 10^{-3}$ .

V emulzijah so našli tudi 6 primerov, v katerih težki mezon razpade v en sam nabit mezon  $\pi$ , katerega sled se konča v emulziji. Srednja vrednost mase teh težkih mezonov je  $1030 \pm 35 m_e$ , kar se v okviru napake ujema z maso mezona  $\tau$ . Zelo verjetno gre tudi v teh primerih za mezone  $\tau$ , ki pa so razpadli domnevno takole:

$$\tau^\pm \rightarrow \pi^\pm + 2\pi^0. \quad (2)$$

Poleg tega je v emulzijah znanih še okrog 130 razpadov težkega mezona v hiter nabit delec (elektron ali lahek mezon). Tega je bilo možno identificirati le v redkih primerih in na podlagi teh in nekaterih meritev v wilsonski celici so predlagali naslednje mezone oziroma razpadne sheme:

$$\kappa \rightarrow \mu + ? + ? \quad (3)$$

$$K_\gamma \rightarrow L + \gamma + ? \quad \text{ali} \quad K \rightarrow L + \pi^0 \quad (4)$$

$$K_\mu \rightarrow \mu + \nu \quad (5)$$

$$\chi = K\pi \rightarrow \pi + ? + (?) \quad (6)$$

$$K_e \rightarrow e + ? + (?) \quad (7)$$

Z »? $\pi$ « so označeni neznani nenabiti delci. Če je energija nabitega delca, v katerega težki mezon razpade, vedno enaka, vemo, da sta pri razpadu nastala samo dva delca; če pa je energijski spekter tega delca zvezen, se je razpad izvršil vsaj v tri delce.

Poleg nabitih poznamo tudi nevtralen težki mezon  $\Theta^0$ , ki razpade v dva nabita lahka mezona (pojav  $V^0$ ):

$$\Theta^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- + Q \quad (8)$$

Vrednost  $Q$ , ki so jo določili iz 20 meritev v wilsonski celici, znaša  $214 \pm 5$  MeV. Od tod sledi za maso vrednost  $966 \pm 10 m_e$ .

Značilno je, da so pri razmeroma velikem številu razpadov našli le 16 primerov, v katerih je težki mezon sprožil jedrsko reakcijo. Znano je, da mezoni  $\pi^-$  na koncu svoje poti povzročijo jedrsko reakcijo, medtem ko  $\pi^+$  vedno razpadejo v  $\mu^+$ . Od tod smemo sklepati, da so vsi težki mezoni, ki povzročijo reakcijo, negativni. Iz redkosti teh reakcij pa sledi, ali da je težkih mezonov veliko več pozitivnih kot negativnih, ali pa da more sodelovati z jedri samo del negativnih težkih mezonov (verjetno  $\tau^-$ ), medtem ko drugi razpadejo, preden sprožijo jedrsko reakcijo.

B. Dobovišek

1. L. LePrince-Ringuet, M. Lheritier, *Compt. rend.* **219**, 618, 1944.
2. R. D. Hill, E. O. Salant, M. Widgoff: Tau Meson Produced by 3,0-Bev Protons, *Phys. Rev.* **95**, 1699, 1954.
3. C. F. Powell: The Use of Stripped Emulsions for Recording the Tracks of Charged Particles, *Phil. Mag.* **44**, 219, 1953.
4. E. Amaldi, C. D. Anderson, P. M. S. Blackett, W. B. Fretter, L. LePrince-Ringuet, B. Peters, C. F. Powel, G. D. Rochester, B. Rossi, R. W. Thompson: Symbols of Fundamental Particles, *Nature*, **173**, 123, 1954.
5. Rendiconti del Congresso internazionale sulle particelle instabili pesanti e sugli eventi di alta energia nei raggi cosmici, Padova 12.—15. aprile 1954, *Nuovo Cim.* **12**, suppl. No. 2, 1954.

## LUPINASTA STRUKTURA ATOMSKEGA JEDRA

V zvezi s teorijami o zgradbi atomskega jedra se je že večkrat pojavilo vprašanje, ali niso morda nukleoni v jedru podobno razporejeni v nivojih, kot so elektroni na elektronskih lupinah atoma. Z lupinastim modelom atoma je bilo mogoče razložiti periodni sistem elementov. Da so žlahtni plini (He, Ne, A, Kr, X, Rn) kemično neaktivni, razlagamo z nasičenostjo elektronskih lupin. Če je pri atomskih jedrih kaj podobnega, pričakujemo, da bomo v nekaterih razmakih našli posebno stabilna jedra.

Pri pregledu tabele izotopov opazimo, da so nevtroni in protoni v jedrih radi v parih. Pri večini stabilnih izotopov sta število protonov ( $Z$ ) in število nevtronov ( $N$ ) obe sodi, precej pa je še takih jeder, kjer je eno izmed teh števil sodo. Toda izmed vseh (približno 300) znanih stabilnih jeder so komaj štiri taka, ki imajo obe števili lihi, in sicer so to:  $H^2$ ,  $Li^6$ ,  $B^{10}$ ,  $N^{14}$ .

Nekatera jedra s sodim številom nukleonov so še posebno stabilna. He-rijevo jedro  ${}^4\text{He}$  je izredno stabilno. Pri nekaterih jedrskih reakcijah se vede delec  $\alpha$ , kot da bi bil poseben osnovni delec. Jedro kisika 16 je tudi prav stabilno. Kalcij, z atomsko številko  $Z = 20$ , ima kar šest stabilnih izotopov, ki imajo atomske mase 40, 42, 43, 44, 46, 48. Pri lahkah elementih je mogoče izraziti relativno stabilnost jedra z vezavno energijo. Računi in meritve so

pokazali, da je vezavna energija navedenih jeder sorazmerno večja kot pri njihovih sosedih v tabeli izotopov.

Pri težjih jedrih vezavne energije do sedaj še niso tako točno določili kot pri lažjih. Zato moramo sklepati na njihovo relativno stabilnost posredno, iz drugih dejstev. Če privzamemo, da so v naravi najbolj pogosti izotopi tudi najbolj stabilni, nam more biti njihova relativna pogostost v naravi tudi že merilo za njihovo relativno stabilnost. Tako smemo med že našteje elemente uvrstiti še kositer, z atomsko številko  $Z = 50$ , ki nastopa v naravi v veliko večjih količinah kakor njegovi sosedje. Povrh tega ima ta element deset stabilnih izotopov z atomskimi masami  $A = 112, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 122, 124$ . Toliko izotopov nima noben drug element. Svinec, z atomsko številko  $Z = 82$ , je končni stabilni produkt vseh težkih naravno radioaktivnih jeder. Stabilnih jeder z 82 nevtroni je tudi nenavadno mnogo, namreč sedem:  $\text{Xe}^{136}$ ,  $\text{Ba}^{138}$ ,  $\text{La}^{139}$ ,  $\text{Ce}^{140}$ ,  $\text{Pr}^{141}$ ,  $\text{Nd}^{142}$ ,  $\text{Sm}^{144}$ . Izotop  $\text{Ba}^{138}$  tvori 77 % vsega barija, izotop  $\text{Ce}^{140}$  pa 88 % vsega cera v naravi. Podobne, čeprav manj izrazite posebnosti opazimo tudi pri številkah 28 in 126.

Posebno stabilna so torej jedra, ki imajo 2, 8, 20, 28, 50 ali 82 protonov in pa jedra z 2, 8, 20, 28, 50, 82 ali 126 nevtroni. To kaže, da so nukleoni v jedru razporejeni po podobnih lupinah kot elektroni v atomu. Zaključene lupine naj bi bile pri navedenih »magičnih številih«. S pomočjo takega modela so mogli s precejšnjo gotovostjo napovedati celo spin jedra. Med do sedaj približno stotimi izmerjenimi spini so le štiri resnejša nesoglasja s teorijo. Take napovedi so pomembne v zvezi s teorijami radioaktivnosti  $\beta$ .

*Bevc*

*L. Bevc*

M. G. Mayer: Phys. Rev. 74, 235 (1948).

F. L. Bauer: Phys. Blätter 7, 205 (1951).

## NOV STABILNI IZOTOP

Danes poznamo okoli 300 stabilnih izotopov. Njihovo število se v bodoče ne bo dosti povečalo, kajti v tabeli izotopov je le še malo takšnih praznih mest, kjer lahko pričakujemo nov stabilen izotop. V zadnjih letih so jih odkrili zelo malo. Omeniti velja<sup>1</sup> platino 190 z izotopsko koncentracijo  $6 \cdot 10^{-5}$ . Za nekatere izotope, ki so jih ob odkritju imeli za stabilne, se je naknadno izkazalo, da so radioaktivni. Pri lantanu 138 (koncentracija  $8,9 \cdot 10^{-4}$ ) ob odkritju še niso mogli ugotoviti aktivnosti.<sup>2</sup> Pozneje pa so s scintilacijskim števcem dognali aktivnost K in določili razpolovni čas  $1,2 \cdot 10^{11}$  let.<sup>3</sup>

Pred kratkim so poročali o novem izotopu tantala ( $\text{Ta}^{180}$ ). Doslej so mislili, da ima naravni tantal edini izotop  $\text{Ta}^{181}$ . Novi izotop  $\text{Ta}^{180}$  spada med one, ki imajo v jedru liho število protonov in liho število nevtronov. Takšni izotopi so

<sup>1</sup> H. E. Duckworth et al.: A New Stable Isotope of Platinum. Phys. Rev. 75, 1438 (1949).

<sup>2</sup> M. G. Inghram et al.: The Isotopic Constitution of Lanthanum and Cerium. Phys. Rev. 72, 967 (1947).

<sup>3</sup> R. W. Pringle et al.: The Natural Activity of Lanthanum. Phys. Rev. 78, 303 (1950).

vsi radioaktivni razen petih izjem:  ${}^1\text{H}^2$ ,  ${}^3\text{Li}^6$ ,  ${}^5\text{B}^{10}$ ,  ${}^7\text{N}^{14}$  in  ${}^{23}\text{V}^{50}$ .<sup>\*</sup> V naravi je še nekaj izotopov te vrste, namreč  ${}^{19}\text{K}^{40}$ ,  ${}^{57}\text{La}^{138}$  in  ${}^{75}\text{Lu}^{176}$ , toda ti so radioaktivni. Zaradi tega menijo, da utegne biti tudi novi tantalov izotop radioaktiven, z zelo dolgim razpolovnim časom. Vendar njegove aktivnosti še niso mogli zaznati.

Do odkritja tantal 180 je prišlo na kaj nenavaden način. Z nevtronskim kristalnim spektrometrom so natančno merili tantalov totalni presek za počasne nevtrone<sup>5</sup>. Uporabili so bolj kot 99,9 % čist primerek tantal. Pri energiji nevtronov 0,43 eV se je pojavila resonanca, ki so jo ob tej priložnosti prvič premerili. Iz meritev so ob upoštevanju Dopplerjevega efekta in ločljivosti spektrometra (0,007 eV) izračunali resonančne parametre po Breit-Wignerjevi formuli za en nivo: jedrski presek  $\sigma_0 = 1,59$  barn, energijo  $E_0 = 0,433$  eV in razpolovno širino resonančne krivulje  $\Gamma = 0,030$  eV. Dobljeni rezultati pa se niso skladali s pričakovanimi vrednostmi. Na podlagi teorije so domnevali, da resonanca ne pripada tantalu 181, ampak nekemu izotopu, ki je v tantalu v izredno majhni koncentraciji. Misel, da je to nečistoča, so kmalu zavrgli. Iskanje po že znanih spektrih elementov za počasne nevtrone je namreč ostalo brez uspeha. Tudi izotope, za katere niso imeli zaželenih podatkov, so lahko izločili, bodisi ker so radioaktivni (primerki pa ni kazal aktivnosti), bodisi ker zanje po teoriji ni bilo pričakovati resonanc v okolici 0,43 eV (Tb, Gd). Preostala je le še domneva, da vsebuje tantal neznan lasten izotop.

Avtorji<sup>5</sup> so svoje izsledke sporočili drugi raziskovalni skupini, ki je razpolagala s primernim masnim spektrometrom. Po natančni preiskavi tantalovega masnega spektra so poleg  $\text{Ta}^{181}$  ugotovili  $\text{Ta}^{180}$  v koncentraciji  $1,23 \cdot 10^{-4} \pm \pm 3 \cdot 10^{-6}$ .<sup>6</sup> Izotopov 177, 178, 179 in 182, 183 niso opazili, iz česar sklepajo, da je njihova koncentracija manjša kot  $3 \cdot 10^{-6}$  in  $2 \cdot 10^{-6}$ . Koncentracijo  $\text{Ta}^{180}$  so izmerili z dvostopenjskim masnim spektrometrom, ki je bil izdelan posebej za iskanje redkih izotopov. Za termični ionski izvor so uporabili vlakno tantal, za katerega so bili prepričani, da ne vsebuje niti hafnija ali volframa (levega in desnega tantalovega sosedu v periodnem sistemu elementov) niti oksidov lažjih elementov. Kot indikator je služila dvajsetstopenjska elektronska pomnoževalka, ki je lahko štela posamezne ione. Merjeni ionski tok pri maksimu 180 je znašal  $10^{-18}$  A.

Dodatno so merili še masno diferenco med obema izotopoma tantal in dobili 1,00 ME. Posneli so tudi tantalov masni spektrum pri različnih temperaturah in za razne primerke; opazovana koncentracija  $\text{Ta}^{180}$  je ostala nespremenjena. Vse to nedvomno potrjuje, da gre res za nov izotop.

J. Strnad

<sup>\*</sup> Vanadij 50 imajo že dolgo na sumu, da je aktiven. Toda doslej niso mogli tega potrditi. Spodnja meja za razpolovni čas je  $10^{21}$  let (4).

<sup>4</sup> S. G. Cohen, R. Bauminger: A Search for the Natural Activity of Vanadium. Bull. Res. Coun. Israel, 2, 195 (1952).

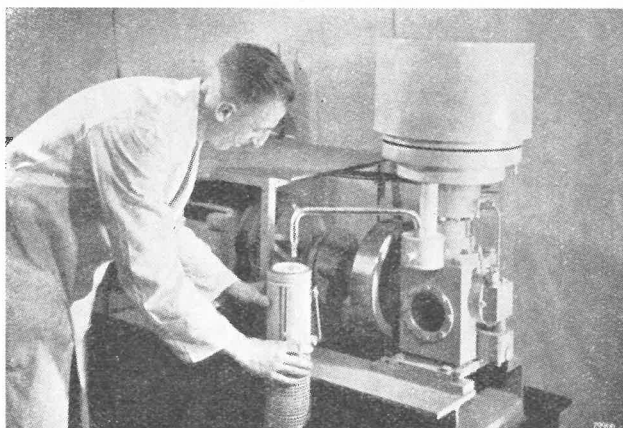
<sup>5</sup> J. E. Evans, E. G. Joki, R. R. Smith: Evidence for a Second Naturally Occurring Isotope in Tantalum, Phys. Rev. 94 (1955).

<sup>6</sup> F. A. White, T. L. Collins, F. M. Rourke: New Naturally Occurring Isotope of Tantalum, Phys. Rev. 94 (1955).

## NOV HLADILNI STROJ

Če kotel parnega stroja prenehamo segrevati, stroj pa poganjamo dalje, se voda v kotlu ohladi pod temperaturo okolice. Stroj namreč stalno črpa paro iz kotla; zato voda dalje izhlapeva in porablja izparilno toploto, ki jo odteguje okolici. Parni stroj torej deluje potem kot hladilni stroj. Tako so tudi v resnici narejeni mnogi hladilni stroji (frižiderji), le da namesto vode uporabljajo snov z nižjim vreliščem, n. pr. amonijak.

Podobno velja tudi za takšne toplotne stroje, ki uporabljajo kot delovno snov plin. Tudi takšni stroji se dajo uporabiti kot hladilni stroji. Vendar pa nastopajo pri hladilnih strojih te vrste razni tehnični problemi, ki so doslej močno omejevali njihovo uporabo. Šele nedavno so v Philipsovih laboratorijih našli zadovoljivo rešitev po večletnih raziskavah problemov toplotnih in hladilnih strojev.



Novi hladilni stroj, ki so ga skonstruirali za laboratorijsko uporabo, je izredno majhen. Njegova oskrba je enostavna, vrh tega se odlikuje po dobrem izkoristku v vsem območju od  $-80^{\circ}$  do  $-200^{\circ}$  C. Stroj je pripraven tudi za utekočinjenje zraka.

Delovanje novega stroja naj pojasni slika 1a. Stroj je sestavljen iz *kompresijskega cilindra* (desno), *regeneratorja* (v sredi) in *ekspanzijskega cilindra* (levo). Regenerator je priprava z veliko toplotno kapaciteto, skozi katero se pretaka plin sem in tja in ki izmenoma sprejema toploto od plina in mu jo oddaja nazaj.

Idealizirani krožni proces tega stroja (tako imenovani *Stirlingov proces*) obsega naslednje 4 faze:

I. Plin se v kompresijskem cilindru izotermno komprimira pri zunanji temperaturi  $T_C$  (izoterma 12); nastalo toploto sproti odvajamo.

II. Plin pošljemo z neizpremenjenim volumnom v ekspanzijski cilindri skozi regenerator, kjer se ohladi na zaželeno nižjo temperaturo  $T_E$  (izohora 23). V regeneratorju že obstaja potreben temperaturni gradient; plin se pri pretakanju sproti obrnljivo ohlaja, pri čemer pa temperatura regeneratorja zaradi njegove velike toplotne kapacitete le neznatno naraste.

III. Plin v ekspanzijskem cilindru izotermno ekspandira pri temperaturi  $T_E$  (izoterma 34). Ker pri tem opravlja delo, odtegne okolici toploto, kar je namen stroja.

IV. Plin pošljemo s stalnim volumnom nazaj v prvi cilindar (izohora 41). V regeneratorju se segreje na prvotno temperaturo in sproti pobere prej nakopičeno toploto; regenerator se s tem vrne v prvotno stanje.

Pri enem ciklu sprejme plin v ekspanzijskem cilindru toploto

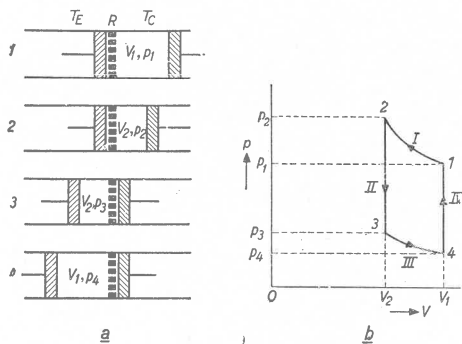
$$Q_E = -A_{34} = \int_4^3 p dV = nRT_E \ln(V_1/V_2).$$

Delo pri celotnem ciklu pa znaša:

$$A = A_{12} + A_{34} = nRT_E \ln(V_1/V_2) = nR(T_C - T_E) \ln(V_1/V_2).$$

Izkoristek

$$\eta = Q_E/A = T_E/(T_C - T_E)$$



Sl. 1. Shema Stirlingovega procesa. Leva slika kaže shematično regenerator (debelo črtkano) ter oba cilindra (kompresijski in ekspanzijski v vseh štirih fazah).

je torej enak kot pri Carnotovem procesu, torej najboljši, ki ga je pri danih temperaturah sploh mogoče doseči.

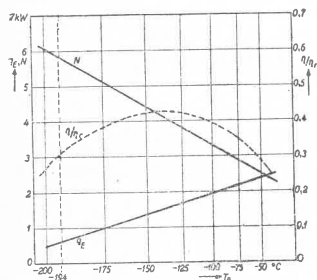
Če namesto sunkovitega gibanja batov uporabimo harmonično gibanje, se računi skomplicirajo; izkaže se pa, da zaradi tega ni izkoristek nič slabši.

V praksi zaradi neizbežnih izgub ne moremo doseči navedenega izkoristka. Ker pri kompresiji ne moremo vse toplote sproti odvajati, poteka kompresija skoraj adiabatno, namesto da bi bila izotermna. Zato se poveča potrebno delo, plin pa je treba še naknadno ohladiti nazaj na temperaturo  $T_C$ . V ta namen postavimo med kompresijski cilindar in regenerator *toplotni izmenjalek*, ki je hlajen s tekočo vodo pri temperaturi  $T_C$ . Podobno se v ekspanzijskem cilindru plin ohladi pri ekspanziji pod  $T_E$ . Šele v drugem toplotnem izmenjaleku, ki je med ekspanzijskim cilindrom in regeneratorjem, odtegne okolici toploto. Ker omenjena izguba (povečanje potrebnega dela) ni odvisna dosti od temperature, jo najbolj občutimo tedaj, kadar je potrebno delo majhno, to je, kadar temperatura  $T_E$  ni mnogo pod  $0^\circ \text{C}$ .

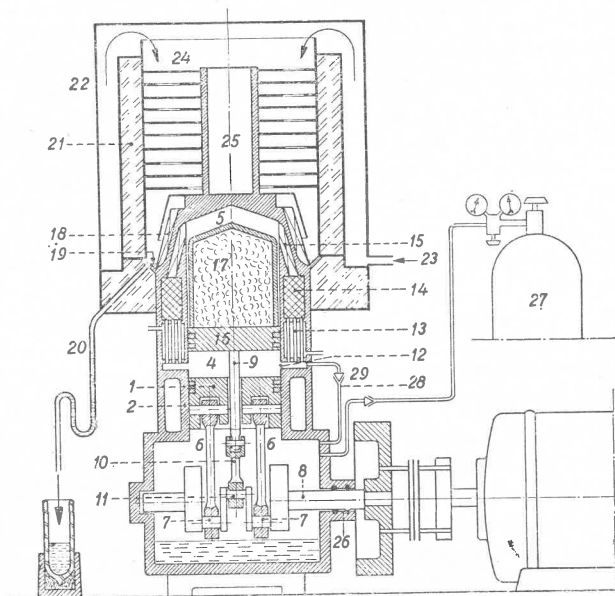
Spodnja temperaturna meja stroja je določena z nepopolnostjo regeneratorja. Plin ne pride v ekspanzijski cilindar ohlajen čisto na  $T_E$ . Zato odtegne okolici nekoliko manj toplote kot po prejšnjih računih. To se najbolj

pozna pri nizkih temperaturah, kjer je  $Q_E$  že itak majhen. Izkoristek je torej ekonomičen samo v nekem temperaturnem intervalu, nekako od  $-80^\circ$  do  $-200^\circ$  C. To je razvidno iz slike 2.

Slika 3 pokaže, kako je sestavljen novi hladilni stroj, ki služi za utekočinjenje zraka. Stroj proizvaja do 5,8 kg tekočega zraka na uro. Poganja ga elektromotor z močjo 5,8 kW. Stroj dela z vodikom ali s helijem; zrak kot delovni plin ni uporaben; saj bi se v stroju utekočinil, česar opisani proces ne dovoljuje. Pritisk v stroju niha med  $p_{\max} = 35$  atm in  $p_{\min} = 16$  atm.



Sl. 2. Moč  $N$ , odtegnjeni toplotni tok  $q_E$  in relativni izkoristek (glede na Carnotov izkoristek) Philipsovega hladilnega stroja kot funkcije temperature  $T_E$ .



Sl. 3. Poenostavljeni prerez hladilnega stroja. Glavni deli so: kompresijski prostor (4), ekspanzijski prostor (5), glavni bat (1), pomožni bat (16+17); prvi toplotni izmenjalnik (13), regenerator (14), drugi toplotni izmenjalnik (15). Premer cilindra je 70 mm, dvig bata pa 52 mm.

Vse slike so vzete iz spodaj navedenih člankov J. W. L. Köhlerja in C. O. Jonkersa v Philip's Technische Rundschau z ljubeznivim dovoljenjem uredništva te revije.

Namesto dveh ločenih cilindrov imamo en sam cilindar, v katerem se gibljeta dva bata s primerno fazno razliko. Glavni bat (številka 1 na sliki 3) spreminja celotni volumen in s tem opravlja oboje, kompresijo in ekspanzijo. Pomožni bat (16) pa skrbi za pretakanje plina iz kompresijskega prostora (4) skozi prvi toplotni izmenjalnik (13), regenerator (14) in drugi izmenjalnik (15) v ekspanzijski prostor (5) in obratno. Faze so pri tem iste kot pri dveh ločenih cilindrih: I. Glavni bat izvrši kompresijo; pomožni bat miruje na vrhu; II. pomožni bat gre navzdol in s tem potisne plin iz kompresijskega v ekspanzijski prostor; III. glavni bat izvrši ekspanzijo; oba bata se pomakneta navzdol; IV. pomožni bat potisne plin iz ekspanzijskega v kompresijski prostor.

Opisani način ima važne prednosti. Ker sta oba prostora stalno v zvezi (nimamo nobenih ventilov), se pritiska na obeh straneh pomožnega bata le malo razlikujeta. Zato se ni treba bati uhajanja plina in s tem toplotnih izgub. Ravno tako napravimo čim manjšo razliko pritiskov pri glavnem batu, ker je dosti lažje tesniti rotirajočo gred (26) kot bat. V prostoru pod batom imamo isti plin pri pritisku  $p_{min}$ . Če uide od zgoraj nekaj plina mimo bata, se plin avtomatično vrne po cevi 28 in skozi ventil 29, ko pade zgoraj najmanjši pritisk pod pritisk, ki vlada pod glavnim batom. V jeklenki 27 pa imamo rezervno zalogo za primer, če bi kaj plina ušlo iz spodnjega prostora.

Elegantno je rešen problem toplotne izolacije ekspanzijskega prostora. To je bil vedno najtežji problem pri hladilnih strojih. Če imata bat in cilinder nizko temperaturo, ni mogoče dobro tesnjenje, ker pri tako nizkih temperaturah nimamo primernih maziv. Če pa imata bat in cilinder temperaturo okolice, nastopijo velike toplotne izgube zaradi neposrednega kontakta med hladnim plinom in toplo steno. Da so se temu problemu ognili, so mnogi konstruktorji hladilnih strojev uporabili druge principe, kjer ni treba gibajočih se delov pri nizkih temperaturah (Lindejev stroj). Pri novem stroju pa sestoji bat iz dveh delov. Telo bata (16), ki ima navadno temperaturo, je na normalni način utesnjeno v cilinder. Glava bata (17), ki je hladna, pa se cilindru ne prilega tesno, ampak samo skrbi za toplotno izolacijo. Med njo in steno je tanka plast plina kot izolator, zato da ostane glava hladna. Zanimivo je, da te preproste rešitve problema niso uporabili že prej, ker bi se tako ognili marsikateri težavi.

Prvi toplotni izmenjalnik (13) sestoji iz cevčic, skozi katere teče plin in ki jih obliva hladna voda. Ta izmenjalnik obdaja kompresijski prostor v obliki obroča in ga tudi ohlaja.

Regenerator (14) vsebuje kolobarje iz kovinske volne, med katerimi so tanke plasti nylovske volne, ki skrbijo za to, da regenerator v smeri pretakanja plina toplotne ne prevaja.

Drugi toplotni izmenjalnik (15) je izdelan kot kovinska glava, ki ima znotraj in zunaj ostre zareze zaradi čim boljšega toplotnega kontakta med plinom in zunanjim zrakom. Zunaj se na hladilnih rebrih zrak ohladi do vrelišča, se kondenzira in odteče po cevki 20. Ko se kondenzira, s tem avtomatično vsesa količino svežega zraka. Ta vstopa pri odprtini 23 in gre skozi čistilno napravo 24. Na luknjastih ploščah te naprave zmrzneta vlaga in ogljikov dioksid, tako da ne moreta zamašiti hladilnih reber in odtočne cevke. Zelo ugodno pri tem stroju je, da se zrak utekočinja kar pri atmosferskem pritisku. Zato ga ni treba predhodno komprimirati kot pri Lindejevem in sorodnih strojih.

Za 1 kg tekočega zraka porabi stroj 1,0 kWh, kar je izredno dober rezultat za tako majhen stroj. Saj z največjimi stroji komaj dosežemo 0,7 kWh za 1 kg, pri majhnih strojih pa porabimo kar 1,5 do 3 kWh/kg ali celo še več. Carnotov stroj bi porabil 0,3 kWh/kg.

Stroj ima pa še to prednost, da je pripraven tudi za razne druge namene v celem območju od  $-80$  do  $-200^{\circ}\text{C}$ , medtem ko stroji, ki so osnovani na principu utekočinjenja delovnega plina, delujejo direktno le v območju vrelišča tistega plina.

M. Rosina

J. W. L. Köhler und C. O. Jonkers: Grundlagen der Gaskältemaschine; Konstruktion einer Gaskältemaschine. Philip's Technische Rundschau, 15, 305, 345 (1954).

## O SREDNJEŠOLSKI MATEMATIKI

Srednješolska matematika je zelo priletna in na moč staromodna gospa. Dobrih dva tisoč lèt je že stara, oblači se pa še vedno v krinolino. Glede starosti ji ne gre kaj očitati, saj ni sama kriva, toda s krinolino pa kljub vsemu nekaj ni v redu. Prav in lepo je, če se zaveda svoje starosti in ne hlepi po novotarijah, vendar tudi trmasto vztrajanje v preteklosti in odklanjanje vsega novega ni kaj spodobno in predvsem ni pametno. Tako gledanje je neživiljenjsko in vodi v negiben, vase zaprt, tog svet, brez zveze z resničnostjo, ki nas edina privlačuje in zanima. In matematika, ki se poučuje danes na naših srednjih šolah, kar priznajmo, res prebito malo ljudi zanima, še manj jih pa privlačuje. Toda o tem pozneje.

Spoznanje, da je treba srednješolsko matematiko prenoviti in približati sodobnemu življenju, ni novo. Že pred dobrim pol stoletjem se je začelo skoraj po vseh večjih evropskih državah, skrajša motno in negotovo, kasneje pa vedno bolj jasno in zavestno delovanje mnogih matematikov, ki so zahtevali temeljite spremembe v pouku matematike na srednjih in celo na osnovnih šolah.<sup>1</sup> Predvsem so želeli, da sprejme tudi srednješolska matematika pojem funkcije v vseh njenih oblikah, za središče svojega zanimanja, in trudili so se najti poglobljen način dela, ki bi omogočal, da pridejo pri pouku matematike do izraza tudi vse velike stvaritve 18. in 19. stoletja. Nadalje so zahtevali, da sloni pouk matematike v srednjih šolah na nazornosti, da se prepleta z orisi iz zgodovine matematike in razvojem posameznih važnejših problemov. Posebno pozornost so obračali tudi na uporabo matematike v drugih vedah, predvsem v naravoslovju, tehniki in ne nazadnje tudi v filozofiji. Skratka, kakor je dejal Klein že leta 1896: »Treba je ustvariti resničen, pozitiven odnos med teoretsko znanostjo in vsem tistim, kar giblje moderno življenje.«

Svoj organizacijski višek je doseglo to reformno gibanje leta 1908, ko je bila na pobudo ameriškega matematika D. E. Smitha ustanovljena na mednarodnem kongresu matematikov v Rimu Internacionalna komisija za pouk matematike pod vodstvom F. Kleina. Komisija je v nekaj letih opravila ogromno delo<sup>1</sup> in je med drugim izdajala tudi svoj časopis *L'Enseignement mathématique*, katerega je urejeval Švicar H. Fehr. Svetovni požar je prekinil delo komisije, politične napetosti po vojni pa še voljo do plodnega mednarodnega sodelovanja in tako se je leta 1920 komisija tudi formalno razšla. Seveda so nacionalne podkomisije ostale večjidel še naprej pri življenju, ker je bila pač težnja po reformi objektivno osnovana. Le počasi so si utirale reformne ideje pot v učne načrte, učbenike in med ljudi. Navada je pač železna srajca. Toda kdor prelista nekaj dobrih, sodobnih učbenikov in jih primerja s stari, bo nedvomno ugotovil, da so nove ideje vendar že opravile pomembno delo.<sup>2</sup>

»Le preko nas je šel visoko njih polet,« bi dejal Župančič. Mislím, da se ne motim, če trdim, da kakih resnejših poizkusov modernizacije naše srednje-

<sup>1</sup> Primerjaj: F. Klein: *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, I. (Zusatz 1.)

<sup>2</sup> Dober pregled modernejšje ameriške literature vse do leta 1951 ima D. R. Davis: *The teaching of Mathematics (References)*.

šolske matematike doslej še ne moremo ugotoviti. Skoraj neverjetno se zdi, pa je vendar resnično, da smo po vojni v tem pogledu celo nazadovali. Poleg osnov kombinatorike in verjetnostnega računa ter začetkov sferne trigonometrije so iz naših šol izginili tudi elementi infinitezimalnega računa, če za to ne štejemo tiste revščine, ki nosi sedaj naslov: O funkcijah in limitah. Zato pa se je tembolj razbohotila »srednješolska matematika« s svojimi pred- in zaklepaji, s kompliciranimi kombinacijami vseh mogočih računskih operacij ali geometričnih konstrukcij, s kupom formul, ki mehanizirajo in zanikujejo misel, ali zopet z umetno skonstruiranimi sistemi enačb vseh stopenj, ki razpadejo v nič pred utrjenim očesom in ki vzbujajo trepet in preplah med učenci. Resnično se zgodi, da absolvent srednje šole odlično obvlada cel koš koristnih in nekoristnih formul, obrazcev in navodil, jih dobro uporablja na znanih in slabo na novih zgledih, popolnoma pa odpove pred najpreprostejšim »problemom«, ki nima ključavnice za njegove »ključne obrazce«, ampak zahteva originalno misel, pa naj bo še tako preprosta. Matematika, ki naj pomeni za srednjo šolo vzgojo k jasnemu, točnemu in sistematičnemu mišljenju, ki naj navaja k logični analizi in odkrivanju osnovnih zvez pri kateremkoli problemu, ki naj spodbuja izvirno mišljenje in raziskavanje ter daje smisel za pravilno posploševanje pojmov, ta matematika je kaj redek gost po naših srednjih šolah. Kdor z menoj poučuje, mi bo pritrdil.

Čeprav je razen redkih izjem<sup>3</sup> zgoraj omenjena oblikovalna vloga srednješolske matematike obče priznana, pa s tem nikakor ni izčrpana njena sodobna naloga. Pozabiti namreč ne smemo na mesto, ki pripada danes tako imenovani uporabni matematiki ne samo v naravoslovju in tehniki, ampak tudi v gospodarstvu in industriji. Že sedaj kaže statistika, da potrebuje direktno ali indirektno okoli 70 odstotkov absolventov naših srednjih šol, ki nadaljujejo študije, solidne matematične osnove. To postavlja novo zahtevo pouku matematike na srednjih šolah. Srednješolska matematika ne more in ne sme biti več sinonim za klasično elementarno matematiko tja do 17. stoletja, v kateri bi užival profesor in morda tudi učenec kakor v sladki idili, ampak more in mora najti zvezo z novejšimi matematičnimi pojmi in sredstvi ter preko njih tudi s sodobnim življenjem in njegovimi problemi.

Reforma pouka matematike na naših srednjih šolah, o kateri se pogosto govori in ki je, kakor sem poskušal pokazati, že dokaj zapoznel odmev občin evropskih teženj in naporov, se mora torej očitno odvijati v dveh smereh:

1. Srednješolsko matematiko je treba popolnoma osvoboditi nepotrebne balasta, ki nima nobene resnične vrednosti in predstavlja ali le spaček prave matematične teorije ali pa napačno mnemotehnično sredstvo.

2. Iztrgati jo moramo iz začaranega kroga osamljenosti in oddvojenosti, da bo dobila prepotrebno zvezo z novejšo matematiko, ki se obravnava na visokih šolah.

Kakor je cilj jasen in preprost, tako bo pot do njega zahtevala mnogo truda in skupnih naporov vseh, ki so na tem zainteresirani. Vendar bo enkrat le treba začeti.<sup>4</sup>

N. Prijatelj

<sup>3</sup> Primerjaj: F. Cajori: A History of Elementary Mathematics (p. 304).

<sup>4</sup> Z movim šolskim letom 1955/56 je stopil v veljavo delno spremenjeni učni načrt, ki predstavlja korak naprej, čeprav še skromen. Ob tem načrtu bo vsekakor potrebno razmisliti in konkretizirati predloge za odločnejše spremembe in dopolnila.

## INSTRUMENTARIJ ZA OSNOVNE POSKUSE IZ OPTIKE

Geometrijska optika spada v svoji elementarni obliki med tiste dele fizike, ki se dajo v srednji šoli popolnoma obdelati. Snov je lahka in nazorna, tako da jo more dijak resnično razumeti, saj ne zahteva nobenih kompliciranih matematičnih sredstev. S preprostimi geometrijskimi konstrukcijami se da popisati delovanje vseh optičnih instrumentov v območju Gaussove optike. Zato na univerzi prav vztrajno propagiramo, da se obravnavanje tega dela optike v čim večji meri prenese v naše srednje šole in s tem razbremení pouk na univerzi.

Seveda je treba geometrijsko optiko obdelati ne samo s kredo na tabli, ampak še veliko bolj s poskusi. Dijak mora resnično razumeti, kaj pomenijo žarki, ki jih riše, in se zavedati, da je ta idealizacija le udoben pripomoček za konstrukcijo. V resnici pa nastopajo vedno šopi končnih razsežnosti in končne odprtine. Nikjer ne najdemo res paralelnega žarkovja in še manj žarka, ki bi ga mogli primerjati z geometrijsko premico. Dalje je za vsako upodobitev z lečami osnovne važnosti vprašanje, koliko svetlobe spravimo skozi optični instrument. Naše izkušnje so pokazale, da je za tako fizikalno razumevanje optike prav nujno potrebno, da študent sam z lečami eksperimentira in spozna njihovo funkcijo in uporabo v posameznih aparatih. To se da doseči s preprostim instrumentarijem, čigar cena je tako nizka, da si ga lahko nabavi vsaka srednja šola. Priprava mora biti tudi toliko nazorna, da ne motijo dijaka nepotrebni tehnični detajli.

Instrumentarij za geometrijsko optiko dopušča seveda z malimi dodatki tudi izvedbo večine drugih poskusov, ki jih moramo obravnavati v optiki. Tako moremo z optično mrežo pokazati glavne zakone uklona svetlobe, z dvema polarizatorjema pa vse tiste zakone polarizacije, ki jih moramo obravnavati v srednji šoli. Zato je bilo smiselno razširiti program iz ožjega območja geometrijske optike tudi na tiste dele fizikalne optike, ki se dajo s preprostimi sredstvi eksperimentalno obdelati. Seveda je pri tem nemogoče vključiti demonstracijske poskuse z enobarvno svetlobo,\* ker za to potrebujemo drago živosrebrno ali natrijevo svetilko, za katero je treba danes še imeti na razpolago kar precej deviz. Pri polarizatorjih se pa da izhajati s polaroidi, ki se uporabljajo pri očalih za plastični film.

Že leta 1950 je dobil tedanji pomožni asistent J. Lep nalogo, da sestavi preprosto optično mizo, ki bi se dala izdelati s skromnimi sredstvi in ki bi dovoljevala izvedbo vseh poskusov iz geometrijske optike, ki jih potrebujemo v srednji šoli. Nekaj časa je pri delu pomagal tudi pomožni asistent M. Kac, vendar zaradi težav v delavnici stvar ni posebno daleč uspela. Na sestanku Društva matematikov in fizikov leta 1952 je mogel prof. Peterlin pokazati prvi model, ki pa je imel še celo vrsto pomanjkljivosti. V zadnjem letu pa je asistent Korbar prekonstruiral posamezne elemente. Posebna pozornost je veljala izdelavi izčrpnih navodil za izvedbo posameznih poskusov, brez katerih ves instrumentarij nima prave uporabne vrednosti. Navodila so mišljena predvsem za profesorje pri pripravi poskusov in za dijake pri praktičnih fizikalnih vajah. Zato so precej podrobna in gredo pogosto preko tega, kar je v srednji

\* Za subjektivno opazovanje zadošča plinski gorilnik ali gorilnik na špirit, kjer obarvamo plamen s kuhinjsko soljo.

šoli nujno potrebno. Stvar profesorja je, da se omeji na to, kar pri pouku oziroma pri praktičnih vajah resnično potrebuje, oziroma zmore v okviru časa, ki mu je na razpolago. Večinoma vsebujejo navodila tudi konstrukcijske risbe, s katerimi na tabli ponazorimo poskus. Pri tem potrebnih konstrukcijskih žarkov seveda v poskusu v splošnem ne moremo zaslediti. Pač pa se da na primer z dimom lepo pokazati dejanski potek žarkovnih šopov. Naloga profesorja je, da pri vsakem poskusu prav posebej opozarja na to razliko med res nastopajočimi šopi in med konstrukcijskimi žarki.

Prototip vsebuje dve lahki optični mizi, svetilko z avtomobilsko žarnico na 12 V, leče ( $f = 8, 12, 15, 20, 40, -30$  cm) okrogle zaslonke, spremenljivo rezo, Hartlovo ploščo za zakone loma in odboja, Hartlovo ploščo za zakone leč, prizmo, uklonsko mrežico in dva polaroida.<sup>1</sup> Serijsko izdelavo idstrumentarija bo prevzela tovarna učil v Ljubljani. V 23 navodilih so opisani poskusi, ki jih demonstriramo pred vsem razredom, ter nekaj poskusov, ki zahtevajo subjektivno opazovanje in so mišljeni kot vaje za dijake.

Seznam navodil je naslednji: 1. Zakoni ravnega zrcala. 2. Zakoni krogelnega zrcala. 3. Zakoni loma. Totalni odboj. 4. Planparalelna plošča. Delovanje prizme. 5. Zakoni zbiralnih in razpršilnih leč. 6. Napake leč. 7. Model očesa. 8. Model fotografske kamere. 9. Model lupe. 10. Model daljnogleda. 11. Model mikroskopa. 12. Model projekcijskega aparata. 13. Model gonimetra. 14. Teleobjektiv. 15. Razklon svetlobe pri prehodu skozi prizmo. Spekter. 16. Barve. 17. Interferenca. 19. Model spektroskopa na prizmo. 20. Model spektroskopa na mrežo. 21. Polarizacija. Dvojni lom. 22. Fotometer. 23. Abbejeva teorija mikroskopa.

Poskusi, opisani v zadnjem navodilu, ne spadajo v srednjo šolo in so napisani le za profesorje, ker jih brez težav izvedemo z gornjim instrumentarijem. Kot zgled, kako so poskusi opisani, navajava navodilo za zakone loma in totalni odboj (3).

### **Zakoni loma. Totalni odboj.**

**Navodilo:** Vzemi okroglo Hartlovo ploščo  $P$ , na katero privij stekleno polkrožno ploščo  $SP$ . Ploščo osvetli skozi lečo  $L$  in zaslonko  $R$  z vodoravno rezo, kot kaže sl. 1. Svetilka naj stoji v gorišču leče, tako da dobiš ostro sled žarka po sredini Hartlove plošče.

**Poskusi:** 1. Zavrti ploščo tako, da pade žarek na ravno ploskev steklene plošče! Žarek se pri prehodu skozi steklo deloma lomi, deloma odbije. Opazuj jakosti lomljenega in odbitega žarka pri različnih vpadnih kotih!

2. Odčitaj na merilu vpadni kot  $\alpha$  in lomni kot  $\beta$  za različne lege plošče ter preizkusi z računom lomni zakon  $\sin \alpha / \sin \beta = n_{12}$  ( $n = 1,5$  za steklo)!

3. Izmeri projekciji  $a$  in  $b$  vpadnega in lomljenega žarka na mejo obeh sredstev! Pokaži, da velja  $\sin \alpha / \sin \beta = a/b = 1,5$  (sl. 2)!\* Ponovi meritve za različne lege plošče!

4. Obrnimo smer prehoda! Žarek naj vstopa na polkrožni ploskvi steklene plošče pod majhnim vpadnim kotom  $\alpha$ . Žarek se lomi na ravni ploskvi, del žarka pa se odbija (sl. 3). Ker smo obrnili smer prehoda, velja  $\sin \alpha / \sin \beta = 1/n_{12} = n_{21}$ . Vrti ploščo, dokler ne doseže lomni kot vrednosti  $90^\circ$ ! Lomljeni žarek izgine. Vsa

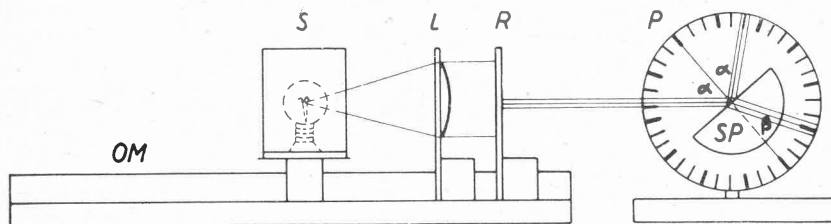
<sup>1</sup> Polaroida je prinesel docent Moljk iz Anglije, za kar se mu tudi na tem mestu najlepše zahvaljujeva.

\* Slike 2, 3 in 4 so na navodilu in jih tu ne priobčujemo.

svetloba je odslej v odbitem žarku. Svetloba se totalno odbija. Prehod k totalnemu odboju se tako jasno pozna v jakosti odbitega žarka, da lahko služi za meritev lomnega količnika.

5. Odčitaj na merilu plošče vpadni kot  $\alpha_t$  pri tem prehodu ter z računom pokaži, da velja  $\sin \alpha_t = 1/1,5 = 1/n$ !

6. Poišči znova totalni odboj žarka kot zgoraj! Zmoči v vodi kos filtrirnega papirja (pivnika) ter ga položi na ravno ploskev steklene plošče! Svetloba prehaja sedaj iz stekla v vodo. Ploščo moraš premakniti k večjemu vpadnemu kotu  $\gamma$ , da nastopi totalni odboj (sl. 4). Odčitaj ta kot ter iz enačbe  $\sin \gamma = 1/n$  določi lomni količnik za prehod svetlobe iz vode v steklo ( $n = 1,13$ )!



OM optična miza 0,5 m, S svetilka, L leča  $f = 12$  cm, R zaslonka z vzporavnimi režami, P okrogla Hartlova plošča, SP steklena polkrožna plošča.

Sedanji prototip iz razumljivih razlogov ne obsega prav vse optike, ki se obravnava v srednji šoli. Fotoefekt bi zahteval posebno fotocelico z občutljivim elektrometrom ali galvanometrom, kar predstavlja oboje veliko devizno investicijo. V nekaj letih je upati, da bo oboje dosegljivo že na domačem trgu. Demonstracijski interferenčni poskusi na planparalelnih ploščah zahtevajo strogo enobarvno svetilo z veliko svetilnostjo, ki ima svoje devizne težave, kot je bilo že zgoraj omenjeno. Newtonovi obroči in barve tankih ploščic se pa dajo pokazati z najpreprostejšimi sredstvi, n. pr. na dveh stisnjenih steklenih ploščah, ki smo ju nekoliko pobrusili s finim peskom, polirnim rdečilom in s kapljico petroleja na vodi. Škoda bi bilo za take stvari sestavljati posebne aparate.

V zadnjem času so dobile nekatere šole prav lepe kredite za opremo svojih zbirk. Če se bo tovarni učil posrečilo, da izdelata prototip po zmerni ceni, bo mogoče uvesti tukaj opisani prototip v doglednem času v vse naše srednje šole in s tem omogočiti eksperimentalni pouk optike in nujne praktične vaje.

A. Peterlin, R. Korbar

## UTRINEK

*Samogovor našega sodelavca:* »Urednik me venomer sili, naj mu napišem kakšen prispevek. Hudirja, saj se ne spleča pisati! Če nihče ne bi pisal, Obzornik ne bi izhajal in vsi bi imeli lepo mir pred njim. Tako pa se mučimo s pisanjem ter s prenašanjem urednikovih muh in popravkov. S tem delom človek le sebi škoduje, kajti končni uspeh je ta, da Obzornik izhaja in da se moramo mučiti še z branjem. Navsezadnje pa je treba še plačati naročnino!«

## K OBRAVNAVANJU TOKA SKOZI KONDENZATOR V SREDNJI ŠOLI

Če šola nima primernega tokovnega instrumenta, s katerim bi učitelj fizike pokazal polnilni tok pri enosmernem viru in nato še praznilni tok, pa more gotovo vsakdo pokazati prehod izmeničnega toka skozi kondenzator. Saj si more gotovo vsaka šola oskrbeti papirni kondenzator s kapaciteto nekaj  $\mu\text{F}$  ter žarnico za žepno baterijo.

Na zaporedno staknjeni kondenzator in žarnico priklopimo primerno izmenično napetost. Če imamo več kondenzatorjev, lahko tudi ugotovimo, da potrebujemo za enak tok pri večji kapaciteti manjšo napetost.

S tem pa se težave okoli te teme niso končale. Tudi razlaga kapacitivnega upora po kvantitativni strani zaradi neznanja infinitezimalnega računa na tej stopnji ni ravno lahka. Mislim, da moremo pri boljših dijakih nekaj doseči s približno takole razlago:

Vzemimo sinusoidalno napetost  $u = U_{\max} \cdot \sin 2\pi ft$ . Na sekundo torej naš vir napolni kondenzator  $f$ -krat,  $f$ -krat ga izprazni pri eni smeri toka in prav tako pri obratni smeri, in sicer do napetosti  $U_{\max}$ . Ker je preneseni naboj za eno polnjenje oziroma praznjenje  $C \cdot U_{\max}$ , gre torej skozi vsak prerez dovodnih žic na sekundo naboj  $4f \cdot C \cdot U_{\max}$ . To pa je že tudi povprečni tok  $I$  (povpreček iz absolutnih vrednosti!). Trenutni tok  $I = \Delta Q / \Delta t = C \cdot \Delta U / \Delta t$  je največji takrat, ko se napetost s časom najhitreje spreminja, torej ko gre preko vrednosti 0. Trenutni tok izgine, ko gre napetost preko maksimalne in minimalne vrednosti, to pa je po četrto periode za prej omenjenima trenutkoma. S pomočjo časovnega diagrama napetosti spoznamo, da se mora vrednost toka nekako tako spreminjati kot kosinusova funkcija z isto periodo, torej da tok prehiteva napetost za četrto periode.

Ker bi imeli radi še upornost kondenzatorja kot količnik kar recimo povprečne napetosti  $\bar{U}$  s povprečnim tokom  $\bar{I}$ , določimo še povprečno napetost. V ta namen je treba ploskev iz diagrama napetosti v odvisnosti od časa med časovno osjo in sinusoido od 0 do  $T/2$  spremeniti v pravokotnik z osnovnico  $T/2$ , višina pa bo povprečna napetost. S pomočjo kartonastih šablon za sinusoido in pravokotnik lahko s tehtanjem preverimo, da mora biti povprečna napetost  $(2/\pi) \cdot U_{\max}$ . Tako je upornost kondenzatorja

$$R_c = \bar{U} / \bar{I} = \frac{(2/\pi) \cdot U_{\max}}{4f \cdot C \cdot U_{\max}} = \frac{1}{2\pi f \cdot C} = \frac{1}{\omega C}$$

Seveda bomo morali biti pri razlagi pred dijaki malo manj skopi v besedah kot tu!

F. Ahlin

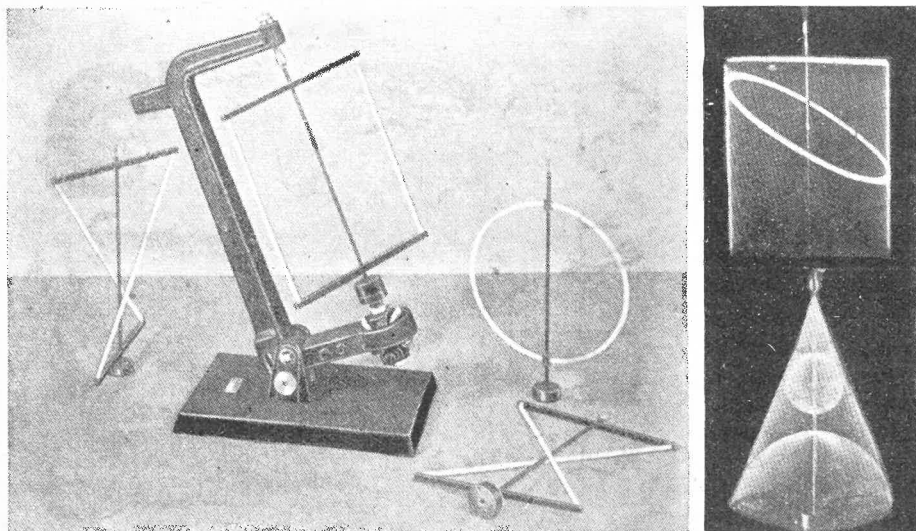
## MAGNUSOV EFEKT NAJPREPROSTEJE

Vzemi lep cilindrični bezgov stržen, ki ga dobiš, če lepo olupiš enoletno usehlo bezgovo mladiko, ki jo spomladi brž opaziš v zelenečem bezgovem grmu! Polži stržen na kos lepenke (tanjšo knjigo, kos vezane plošče) ter z lepenko zamahni tako, da daš strženu hkrati rotacijo in translacijo! S primerno vajo boš dosegel, da ti bo stržen zaradi Magnusovega efekta delal celo loopinge, če ga boš močno pognal.

F. Ahlin

## NAZORNOST V ŠOLI!

Ni treba poudarjati, kako potrebna in koristna je dobra prostorska predstava tako za praktične kot teoretično-duhovne poklice. In vendar danes prav pogosto slišimo, da imajo absolventi vseh šol povečini pomanjkljivo razvito sposobnost za prostorsko gledanje. Skoraj vsakdo pa pri delu neprestano ugotavlja, da te sposobnosti nima nikdar preveč. Pouk geometrije ima v šolah med drugimi tudi to zelo važno nalogo, da sposobnost za prostorsko predstavljanje pri mladem človeku čim bolj razvije.



Modeli rotacijskih ploskev (iz Phywe Nachrichten).

Osnovna težava in ovira pri izvrševanju te naloge pa je, da podajamo prostorske tvorbe navadno z ravninskimi slikami. Za dobro razumevanje teh slik, za ta abstraktni korak iz dveh dimenzij v tri dimenzije pa so seveda potrebne primerne vaje. Mislim, da pri pouku take vaje jemljemo preveč na kratko in pomanjkljivo. Mnogo prostorskih figur večkrat le opišemo, in še to navadno brez tridimenzionalnega modela, med drugimi zlasti za dijaka dokaj težko predstavljljive vrtenine.

Za ponazarjanje vrtenin imamo že staro metodo z vrtenjem intenzivno osvetljenih belo pleskanih žičnih okvirov po E. Papperitzu (Gl. Lietzmann: Methodik des math. Unterrichts!). S to metodo ponazorimo lahko dokaj komplicirane vrtenine ter njih ravninske, konične in cilindrične preseke.

Ravninske preseke vrtenin ponazorimo tako, da prerežemo osvetljeni vrteči se okvir od strani z intenzivno svetlobno ravnino, ki jo napravimo s primerno svetilko, z vseh strani zaslonjeno, s kondenzatorjem pa koncentriramo njeno svetlobo na ravno ozko špranjo, ki jo s primerno lečo upodobimo na ono mesto, kjer se vrti žični okvir. Če uporabimo zaslonko z več vzporednimi špranjami, lahko ponazorimo sekanje z več skoraj vzporednimi ravninami.

Preseke vrtenin s stožcem ali valjem pa ponazorimo s svetlobnim stožcem ali valjem, ki ga dobimo z okroglo zaslonko in ga uperimo na vrteči se žični okvir. Preseki z vrtenino dajo lahko prav komplicirane prostorske krivulje.

Tvrdba učil Phywe v Göttingenu je naredila posebno pripravo za vpenjanje žičnih okvirov z vgrajenim motorčkom za pogon ter precej žičnih okvirov z velikostjo okoli 25 cm. Tako velike okvire je mogoče prav dobro videti tudi v večjih razredih. Slike so posnete iz Phywe Nachrichten 1953/3 z ljubeznivim dovoljenjem uredništva te revije.

Jasno pa je, da je mogoče okvire napraviti tudi doma, jih vrteti s centrifugalnim strojem, za osvetljevanje od strani pa je praktična Reuterjeva ali Kohlova ali kaka druga primerna svetilka.

F. Ahlin

## KAJ BODO DELALI INŽENIRJI FIZIKE

V preteklem študijskem letu je Združenje tehniških fizikov razposlalo 152 ustanovam ter industrijskim podjetjem anketno polo z vprašanji o možnosti zaposlitve bodočih inženirjev fizike. Dobili smo 32 pozitivnih odgovorov, ki so pokazali, da imajo znanstvene ustanove in industrija predvidoma (deloma šele v daljši perspektivi) 76 prostih mest za inženirje fizike. Po republikah so ta mesta takole razdeljena: Slovenija 23, Hrvatska 15, Srbija 30, Bosna in Hercegovina 8.

Posamezna podjetja in ustanove predvidevajo naslednje število mest: Boris Kidrič, delavnica železniških vozil, Maribor — 1; ELMA, tovarna elektromateriala, Črnuče pri Ljubljani — 1; Geološki zavod, Ljubljana — 3; Industrija traktorjev in strojev, Beograd — 1; Inštitut za elektroniko, Ljubljana — 2; Inštitut za elektroizveze, Ljubljana — 5; Inštitut za jeklene konstrukcije tehniške fakultete, Ljubljana — 2; Jugoturbina, tovarna parnih turbin in strojev, Karlovac — 2; Jugovinil, tovarna plastičnih mas, Kaštel Sućurac — 2; Metalna, tovarna konstrukcij in strojnih naprav, Maribor — 1; Nikola Tesla, podjetje za radio industrijo, Beograd — 2; Prvomajska, tovarna orodnih strojev, Zagreb-Žitnjak — 1; Rafinerija nafte Boris Kidrič, Rijeka — 3; Podjetje Rudi Čajavec, Banja Luka — 2; Rade Končar, tovarna električnih strojev, Zagreb — 2; Rafinerija nafte, Sisak — 1; 27. Mart, tovarna avtomobilskih in traktorskih delov, Novi Sad — 1; Tovarna optičnih in steklopihaških izdelkov, Ljubljana — 1; Tovarna avtomobilov, Maribor — 1; Tovarna pisalnih strojev, Ljubljana — 1; Trudbenik, tovarna kompresorjev in pnevmatičnega orodja, Doboj — 1; Vodogradbeni laboratorij, Ljubljana — 1; Zavod za raziskavo materiala in konstrukcij LRS, Ljubljana — 5; Zavodi RR, Niš, podjetje za izdelavo radijskih in rentgenskih aparatov — 6; Železarna Jesenice — 1; Železarna Sisak — 3; Železarna Ravne — 1.

Naloge, ki jih bodo na navedenih mestih imeli inženirji fizike, spadajo v naslednja področja: Preiskave materialov vseh vrst, trdnostne preiskave, analiza mehanskih nihanj, hidravlika, aerodinamika, geofizikalne meritve, zvočne meritve, toplotne meritve, optične meritve, konstruiranje in proračuni optičnih instrumentov, fotometrija, spektralna analiza, električne meritve, visokofrekvenčna tehnika, elektronika, rentgenske preiskave, preiskave z izotopi, razni tehnološki problemi, metalografija. Povsod se zahteva poleg poznavanja in obvladanja merskih metod tudi dobra teoretična podlaga. Večinoma zahtevajo tudi aktivno ali vsaj pasivno znanje tujih jezikov.

Podjetja omogočajo počitniške prakse študentom fizike, nekatera podjetja pa dopuščajo tudi možnost diplomskih del na problemih, ki podjetja zanimajo.

N. Bezić

## OPIS DELA PRI FIZIKALNIH VAJAH NA UČITELJIŠČU V LJUBLJANI

Zadnjo spremembo učnega načrta za učiteljišča smo profesorji matematike in fizike sprejeli z mešanimi občutki. Na eni strani smo zopet izgubili eno tedensko uro fizike v I. letniku, to se pravi, da smo morali mehaniko, ki je za I. letnik tako in tako zelo težka, skrajšati za eno tretjino, na drugi strani pa smo dobili nov predmet, fizikalne vaje, ki spremlja fiziko v prvih treh letnikih. Pouk fizikalnih vaj je bil uveden kot skupinski pouk, podobno kot glasba in ročno delo, zato smo vsak razred razdelili na 4 skupine po 8 do 10 dijakov. Vsak teden je prihajala k vajam po ena skupina in tako je bil cikel skupin enega razreda zaključen v enem mesecu.

Namen in smoter pouka fizikalnih vaj je nuditi našim dijakom možnost za samostojno eksperimentiranje, da bodo pozneje kot učitelji imeli možnost izogibati se verbalizmu v pouku naravoslovja, poglobiti razumevanje in znanje fizike in navajati učence k samostojnemu delu.

Tehnično smo fizikalne vaje organizirali na naslednji način: Za skupine po 8 dijakov smo v fizikalni zbirki postavili štiri mize, na katerih smo pripravili vse aparate in merske priprave, ki so jih dijaki pri svojem delu potrebovali. Na začetku ure je vodil profesor vso skupino od vaje do vaje ter razlagal namen in bistvo vsake naloge. Nato sta po dva dijaka skupaj dobila na listu napisano nalogo z navodili za delo. Po razdelitvi so dijaki na osnovi navodil samostojno eksperimentirali, merili, računali, delali tabele in skice, profesor pa je hodil od mize do mize, razlagal in pomagal, kjer je to bilo potrebno. Po izvršenem delu je profesor z vsako dvojico dijakov prediskutiral rezultat naloge in eventualne napake. Ko se je cikel skupin v razredu končal, smo poklicali ves razred k ponovitvi nalog. Dijaki, ki so pri vajah dovršili najboljše svoje delo, so svoje naloge predelali še enkrat pred vsem razredom in jih razlagali, ostali dijaki pa so si zapisovali potek tistih nalog, ki jih sami niso delali. Na ta način je v enem letu vsak dijak samostojno izdelal šest nalog, vpogled pa je dobil v štiriindvajset nalog.

Snov za naloge smo izbirali iz učne snovi, ki je paralelno tekla pri pouku fizike, le v drugem in tretjem letniku smo v bistvenih poglavjih segali za eno ali dve leti nazaj. Vsaka naloga je imela naslednje sestavne dele:

1. Ugotovitev in obravnavo fizikalne osnove naloge.
2. Pregled pripomočkov za izvršitev naloge.
3. Merjenje potrebnih količin.
4. Računsko obravnavo naloge.
5. Obravnavo rezultata.

Pri izbiri teme za nalogo smo pazili, da je bila naloga zanimiva, da so bile eksperimentalna, računsko in merska komponenta naloge enako močne in da so dijaki na ta ali oni način mogli rezultat preveriti.

Dijaki so se fizikalnih vaj lotili z veseljem in z vso resnostjo. Profesorji smo sicer pričakovali, da bo ta način dela dijakom prijal, vendar pa so nas pogosto še presenetile spontane izjave dijakov, da se jim zdi tak način dela potreben in zanimiv in da bi bilo potrebno tudi druge predmete podpreti s podobnimi vajami. Nikdar nismo imeli vtisa, da bi dijaki težko pričakovali sicer tako zaželen šolski zvonec, nasprotno, ponovno smo jih morali opozarjati, da je ura že zdavnaj minila, tako so bili polni najraznovrstnejših vprašanj.

Zanimivo je bilo opazovati, katere stvari so delale skoraj vsem dijakom preglavice in kaj jih je posebno zanimalo. Pri meritvah je bilo odčitavanje na lestvici skoraj za vse dijake zelo težko. Vsaka lestvica, ki količkaj sliči lestvici na šolskih ravnilih, je bila milimetrsko lestvica, pa najsi bo to na barometru, na termometru ali na ampermetru. Še večje težave so imeli pri lestvicah, pri katerih razdelitev ni strogo dekadicična, n. pr. 10 cm<sup>3</sup> je razdeljenih na 5 enakih delov. Da so merske enote povprečno za vse težke, to vemo že od reševanja računsko-fizikalnih nalog. Dalje jim je bilo zelo težko dopovedati, da je treba debelino želatine na fotografski plošči računati na tisočinko milimetra natančno, da pa je pri merjenju dolžine mize že milimeter odveč. Pri merjenju temperature roke, v kateri je dijak držal termometer, sem se pri vsaki skupini znova zabavala, ker so dijaki brez težave verjeli, da je njihova temperatura 3,6° C — lestvica ima namreč številko desetice na levi, ničlo pa na desni strani živosrebrnega stolpca — in da so končno po daljšem razpravljanju rajši osumili termometer, da je pokvarjen, kot da bi si lestvico natančneje ogledali. Na žalost smo morali tudi ugotoviti, da niso redki dijaki, ki se še vedno borijo s pretvarjanjem mnogoimenskih števil, in da so med njimi celo taki, ki nimajo pravega pojma, kaj je kg, meter itd.

Lepše kot opazovati težave dijakov je seveda gledati, kako se vživijo v svoje delo, kako so presenečeni, da aneroid res pokaže višinsko razliko med drugim nadstropjem in pritličjem, kako so razočarani, da je njihova meritev višine Grintavca za 5 m različna od kote, označene na zemljevidu, kako jih veseli, da se voda v manometru vidno dviga, če le primemo z roko steklenico, ki je priključena k manometru.

V drugem letniku smo pri zadnjih vajah obravnavali mikroskop. Pionirski mikroskop je žel posebno občudovanje, posebno če smo imeli srečo pri kapljicah. Mikroskopiranje samo po sebi pa je bilo pravo doživetje. Tu smo dijaki in profesorji zamenjali vloge: dijaki so nas klicali od mize do mize in nam razkazovali svoje preparate, profesorji pa smo jih morali občudovati in smo to tudi delali z največjim veseljem.

Glavne teme, ki smo jih obravnavali pri fizikalnih vajah, so bile: paralelogram sil, vrtilni moment, nihalo, Arhimedov zakon, hidrostatični pritisk, teža zraka, specifične teže in gostote, Boyle-Mariottov zakon, raztezanje trdnih snovi, tekočin in plinov, mehanski stroji, prosti pad, specifične toplote, parni stroj, lastnosti zraka in vode, mikroskop, upor vodnika, Ohmov zakon, električne vezave, telegraf, Wheatstonov most, Kirchhoffov zakon, električna napeljava na omrežno napetost, Joulov zakon, magnet.

S pripravo nalog smo imeli mnogo dela in skrbi, ker smo se morali ozirati na zmogljivost dijakov, na časovno in prostorno, včasih celo na vremensko omejitve, predvsem pa na aparate in pripomočke, ki jih imamo na razpolago. Na eni strani smo se po možnosti izogibali uporabljati aparate, ki nam služijo za eksperimentiranje v razredu, ker bi tako široka uporaba, kljub največji pažnji, aparate prehitro uničila; na drugi strani pa smo želeli, da bi bila dobra oprema pri vajah, da bi bili rezultati meritev točni in da bi bila snov dobro pripravljena.

Uspeh, ki smo ga med svojim delom in ob zaključku šolskega leta mogli opaziti, je bil vreden našega truda: dijaki so imeli z vajami veselje in so tudi pri znanju fizike pokazali, da je tak način dela zelo uspešen.

L. Kozina

## OBČNI ZBOR DRUŠTVA MATEMATIKOV IN FIZIKOV LRS

15. oktobra 1955 je bil v Ljubljani redni letni občni zbor Društva matematikov in fizikov LRS. Udeležilo se ga je 42 članov od 148.

Upravni odbor je dal obračun o delu v preteklem letu. Iz poročil predsednika dr. A. Vadnala in odbornikov je bilo razvidno, da je odbor v sorazmerno kratki poslovni dobi in kljub težavam opravil svoje delo uspešno. Največji uspeh odbora, predvsem pa predsednika dr. A. Vadnala, tajnika F. Križaniča in odbornika N. Prijatelja, je bila oživitev društvenega glasila »Obzornika za matematiko in fiziko«, ki eno leto ni mogel najti tiskarne.

Zelo uspešno je delovala sekcija za dvig pouka in za predavanja pod vodstvom M. Klopčičeve. Sekcija je priredila 4 javna predavanja, 5 predavanj za člane, več strokovno pedagoških večerov, ekskurzijo v Tovarno glinice in aluminija v Kidričevo ter družabni večer. V sodelovanju z Ljudsko univerzo je sekcija priredila tečaje za verjetnostni račun, infinitezimalni račun, trigonometrijo, elementarno matematiko ter eksperimentalno fiziko. Tečaj iz infinitezimalnega računa so obiskovali večinoma slušatelji raznih odsekov Tehniške fakultete. Rezultat prizadevanj za povezovanje matematike z drugimi disciplinami je bil collegium publicum za ekonometrijo in statistiko, ki je bil organiziran na Ekonomski fakulteti.

Delo terminološke komisije pod vodstvom dr. A. Vadnala je bilo tudi v preteklem letu plodno. Ekscerpirana so bila tri pomembna matematična dela. J. Povšič, ki ureja bibliografijo naših starejših priznanih matematikov in fizikov, je v preteklem letu nadaljeval z zbiranjem gradiva za Vegovo in Močnikovo bibliografijo.

Društvena knjižnica šteje že 110 zvezkov. Zaradi pomanjkanja društvenega prostora pa je njeno delovanje onemogočeno.

Mariborska podružnica, ki šteje 30 članov, je pod vodstvom F. Bezjaka prirejala razna predavanja o diferencialnih enačbah, osnovah topologije in o uporabi moderne fizike v tehniki. Priredila je tudi tečaj iz infinitezimalnega računa.

Osrednje vprašanje, ki ga je občni zbor obravnaval, je bilo vprašanje o pomanjkanju učnega kadra za matematiko in fiziko na naših srednjih in visokih šolah ter usihanje dotoka novega kadra. Vprašanje predavateljev matematike na srednjih šolah je zelo pereče, še hujše pa je stanje predavateljev fizike. Vedno bolj se opaža beg iz prosvete v produkcijo in drugam. Društvo je opozorilo, da to lahko povzroči usodne posledice za desetletja, če se tako stanje ne popravi. Sklenjeno je bilo, da je treba oblasti statistično prikazati ta problem.

Občni zbor je izrekel zahvalo naši ljudski oblasti, posebno Svetu za prosveto in kulturo LRS in Okrajnemu ljudskemu odboru Ljubljana za trajno, veliko materialno in moralno pomoč Društvu. Brez te pomoči Društvo ne bi moglo opravljati svoje funkcije, zlasti pa ne bi moglo izdajati svojega glasila.

Na občnem zboru so bili izvoljeni v novi upravni odbor: L. Gabrovšek, predsednik; dr. I. Vidav, podpredsednik; T. Skubic, tajnik; F. Kvaternik, blagajnik; F. Ahlin, dr. F. Dominko, J. Povšič, N. Prijatelj, I. Štalec, F. Šušteršič, dr. A. Vadnal, odborniki. V nadzorni odbor: F. Čemažar, M. Potiskova in O. Sajovic. V častno razsodišče: dr. A. Peterlin, dr. S. Dolar in I. Molinaro.

*T. Skubic*

# NOVE KNJIGE

---

**Franc Kvaternik — Fizikalni priročnik**, Državna založba Slovenije, 1955.

Največja ovira za uspešen pouk fizike v višjih razredih slovenskih srednjih šol po vojni je, da dijaki nimajo na razpolago nobenega učbenika. Z diktiranjem se v šoli po nepotrebnem zapravlja že itak skopo odmerjeni čas. Če pa ne obračamo posebne pažnje na to, kaj dijaki napišejo, so zapiski, po katerih obnavljajo razloženo gradivo, zelo malo vredni.

Čeprav Fizikalni priročnik s svojim obsegom ne bo mogel dokončno zamašiti te hude vrzeli, smo ga lahko veseli, posebej pa še zato, ker je to prva fizikalna knjiga te vrste v slovenskem jeziku. Poleg zbirke preko 1000 nalog iz vseh poglavij fizike, ki se obravnavajo v srednji šoli, ima Priročnik na začetku navodila za reševanje in numerično računanje fizikalnih nalog. Posebno pozornost v tem poglavju zaslužijo odstavki: Okrajšano računanje, računanje z logaritmичnim računalom, merski sistemi in definicije enot z ustrezno tabelo. Pred vsako zbirko nalog iz posameznih poglavij so na kratko razloženi osnovni fizikalni zakoni, ki pridejo za reševanje nalog v poštev. Na koncu so v preglednih tabelah zbrane vse važnejše absolutne in materialne fizikalne konstante, štirimestni logaritmni števil 1—1000, štirimestne naravne vrednosti trigonometričnih funkcij, tabela za pretvarjanje stopinj v radiane in rezultati nalog.

Izbira nalog je premalo pestra. Preveč je takih, ki se računajo po danem obrazcu, manj pa zanimivih, ki dijake pritegnejo. Poleg tega se pri nekaterih nalogah računajo manj važne malenkosti. Brez škode bi lahko izostale nekatere slike pri zrcalnih in lečah, prav tako tudi izpeljava enačbe zrcal in leč, saj so tudi v prejšnjih poglavjih vse izpeljave opuščene.

Knjigi daje posebno vrednost dosledna raba enot praktičnega sistema. S pridom jo bodo uporabljali profesorji in dijaki višjih razredov, deloma pa bo koristila tudi že nižješolcem.

*F. Plevnik*

Založba Macmillan & Co iz Londona nam je poslala naslednje knjižice:

**1. E. N. da C. Andrade: From small beginnings**; Macmillan & Co, London 1954, 89 strani, 45 slik + 8 fotografij, cena 3 s 6 d.

Knjižica je povzetek šestih poljudno-znanstvenih predavanj, ki jih je imel avtor preko londonske televizijske postaje. Na prikupen in lahko umljiv način opisuje nekatera osnovna fizikalna odkritja, iz katerih se je razvila sodobna tehnika. Vsebina: I. Začetki magnetizma; II. Električni tok ustvarja magnet; III. Magnet ustvarja električni tok; IV. Električni tok gre skozi plin. Kaj se je zgodilo? V. Svetloba in toplota sproščata elektriko; VI. Reprodukcijski zvoka.

**2. John Rowland: This age of science**; E. J. Arnold & Son, Leeds, 125 strani, cena 4 s 6 d.

Knjiga je namenjena predvsem mladini ob zaključku njihovega šolanja in pripoveduje o bistvenih spremembah, ki so jih povzročila znanstvena odkritja tudi v našem vsakdanjem življenju. Vsebina: Uvod — Znanstveni pogled; I. Moderna stvaritev; II. Razsvetljenje sveta; III. Vitamini in virusi;

IV. Novi načini zdravljenja; V. Možje s krili; VI. Vojaška znanost; VII. Ne-  
navadni dogodki; Epilog — Znanost, kam?

3. **Mathematics Notes**; Basil Blackwell; Oxford, 17 strani, cena 1 s. Kratka  
navodila z zgledi za reševanje nalog, namenjena kandidatom, ki žele polagati  
izpit iz elementarne matematike pri Ordinary Level. (Izpit ustreza približno  
naši mali maturi.)

4. **Physics Notes**; Basil Blackwell, Oxford, 21 strani, cena 1 s. Kratek pre-  
gled definicij, zakonov in obrazcev iz fizike, ki jih mora obvladati kandidat  
pri izpitu iz fizike. (Ordinary level.)

*N. Prijatelj*

## ODGOVORI

### ŠE O CENTRIFUGALNI VERIŽNICI

(K vprašanju št. 9 iz III. letnika)

V prvi številki letošnjega Obzornika je S. Šterbal z numeričnimi metodami  
izračunal največji odklik od osi in strmino v pritrdišču pri centrifugalni veriž-  
nici. (Glej Obzornik IV, str. 45—47.) Tu hočem pokazati, kako se da ta naloga  
lažje razrešiti kar z vrstami. Uporabljal bom iste znake, kakor so v omenjenem  
članku.

Diferencialno enačbo centrifugalne verižnice lahko zapišemo v obliki

$$D^2(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} = a^2 + b^2 - 2y^2, \quad D^2 = a^2 - b^2, \quad a > b > 0 \quad (1)$$

kjer sta  $a$  in  $b$  integracijski konstanti. Od tod dobimo enačbo verižnice

$$D^2 \int_0^y [(a^2 - y^2)(b^2 - y^2)]^{-\frac{1}{2}} dy = 2x \quad (2)$$

Naj bo  $L$  dolžina verižnice,  $l$  pa razdalja med obema pritrdiščema. Največji  
odklik od osi je  $y_{\max} = b$ . Iz (2) torej sledi

$$D^2 \int_0^b [(a^2 - y^2)(b^2 - y^2)]^{-\frac{1}{2}} dy = l \quad (3)$$

Dolžino verižnice pa najlažje izračunamo iz (1). Če upoštevamo namreč  
enačbo (2), dobimo

$$L = 2 D^{-2} \int_0^{\frac{1}{2}l} (a^2 + b^2 - 2y^2) dx = \int_0^b (a^2 + b^2 - 2y^2) [(a^2 - y^2)(b^2 - y^2)]^{-\frac{1}{2}} dy \quad (4)$$

To je zopet eliptični integral. Vstavimo sedaj  $y = b \sin \varphi$  v (3) in (4).  
Lahek račun nam najprej da

$$L + l = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2 - b^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} d\varphi$$

in nato

$$(L + l)/l = 2 D^{-2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2 - b^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} d\varphi / \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2 - b^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} d\varphi \quad (5)$$

Oba integrala razvijemo v vrsti, in sicer je najbolje, če po potencah števila  $\varepsilon = (a-D)/(a+D)$ . Če vse izrazimo z  $\varepsilon$ , dobi zgornja enačba obliko

$$(L+l)/l = 2(1-\varepsilon)^{-2} F(\varepsilon)/G(\varepsilon) \quad (6)$$

kjer pomenita  $F(\varepsilon)$  in  $G(\varepsilon)$  naslednji vrsti

$$\begin{aligned} F(\varepsilon) &= 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \varepsilon^2 + (1 \cdot 1/2 \cdot 4)^2 \varepsilon^4 + \dots \\ G(\varepsilon) &= 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \varepsilon^2 + (1 \cdot 3/2 \cdot 4)^2 \varepsilon^4 + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Izpeljali bomo te dve vrsti na koncu. Iz (7) se vidi, da je vrednost kvocienta  $F(\varepsilon)/G(\varepsilon)$  zelo blizu 1, če je  $\varepsilon$  majhen. V prvem približku smemo zato vzeti kar  $F(\varepsilon)/G(\varepsilon) = 1$ , torej  $(L+l)/l = 2(1-\varepsilon)^{-2}$ . Od tod je  $\varepsilon = [2l/(L+l)]^{1/2}$ . V našem primeru, ko je  $L = 2m$  in  $l = 1m$ , dobimo  $\varepsilon = 0,183$ . Vse tri decimalke so pravilne. Če želimo boljši približek, vstavimo to vrednost za  $\varepsilon$  v  $F(\varepsilon)/G(\varepsilon)$  in potem iz enačbe (6) zopet izračunamo  $\varepsilon$ . Tako lahko nadaljujemo. Pri vsakem koraku dobimo dve novi decimalki za  $\varepsilon$ .

Ko je znan  $\varepsilon$ , izračunamo strmino v začetni točki po formuli

$$c = y'(0) = 6 \cdot \varepsilon^{1/2} (1 + \varepsilon) = 3,042$$

Končno dobimo za največji odmik od osi vrednost

$$b = 6 \varepsilon^{1/2} / \pi G(\varepsilon) = 0,811$$

*Izpeljava vrst za polna eliptična integrala.* Lahek račun nam pokaže, da je

$$a^2 - b^2 \sin^2 \varphi = \frac{1}{4} (a+D)^2 (1 + \varepsilon e^{2i\varphi}) (1 + \varepsilon e^{-2i\varphi})$$

kjer je zopet  $D^2 = a^2 - b^2$  in  $\varepsilon = (a-D)/(a+D)$ . Od tod sledi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2 - b^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (a^2 - b^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} d\varphi = \frac{1}{4} (a+D) \int_0^{\pi} (1 + \varepsilon e^{2i\varphi})^{\frac{1}{2}} (1 + \varepsilon e^{-2i\varphi})^{\frac{1}{2}} d\varphi$$

Izraza  $(1 + \varepsilon e^{2i\varphi})^{\frac{1}{2}}$  in  $(1 + \varepsilon e^{-2i\varphi})^{\frac{1}{2}}$  razvijemo sedaj po binomski formuli. Ker je  $\varepsilon < 1$ , sta dobljeni vrsti absolutno konvergentni in ju zato lahko množimo tako, da vsak člen prve vrste pomnožimo z vsakim členom druge vrste. Produkt je zopet absolutno in enakomerno konvergentna vrsta in jo smemo členoma integrirati. Tu nastopijo integrali take-le oblike

$$J_n = \int_0^{\pi} e^{2ni\varphi} d\varphi$$

kjer je  $n$  pozitivno ali negativno celo število. Je pa  $J_n = 0$  za  $n \neq 0$  in  $J_n = \pi$  za  $n = 0$ . Če vse to upoštevamo, dobimo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2 - b^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} d\varphi = \frac{1}{4} \pi (a+D) [1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \varepsilon^2 + (1 \cdot 1/2 \cdot 4)^2 \varepsilon^4 + \dots]$$

Prav tako izračunamo tudi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2 - b^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} d\varphi = \pi (a+D)^{-1} [1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \varepsilon^2 + (1 \cdot 3/2 \cdot 4)^2 \varepsilon^4 + \dots]$$

I. Vidav

## NUMERIČNO ODVAJANJE

(Vprašanje 5. iz III. letnika)

Pri numeričnem odvajanju moramo izbrati najboljšo formulo in najbolj ugodno vrednost intervala  $h$ . Ako nam je na razpolago neka dana tabela in iščemo odvod v začetni in končni točki tabele, ne moremo dosti izbirati. Pogosto pa je tako, da lahko postavimo točko, v kateri iščemo odvod, v sredino intervala. V tem primeru bomo vedno uporabili enačbo<sup>1, 2</sup>

$$h \cdot f'(x + \frac{1}{2}h) = \Delta f_{1/2} - \frac{1}{24} \Delta^3 f_{1/2} + \frac{3}{640} \Delta^5 f_{1/2} - \frac{5}{7168} \Delta^7 f_{1/2} + \\ + \frac{35}{98304} \Delta^9 f_{1/2} + \dots + A_{2n-1} \Delta^{2n-1} f_{1/2} + R \quad (1)$$

$$A_{2n-1} = (-1)^{n-1} \frac{[1 \cdot 3 \dots (2n-3)]^2}{2^{2(n-1)}(2n-1)!}$$

$$R = (-1)^n \cdot \frac{[1 \cdot 3 \dots (2n-1)]^2}{2^{2n}(2n+1)!} \cdot h^{2n+1} f^{(2n+1)}(\xi), \quad x \leq \xi \leq x+h$$

Ta formula je zelo ugodna iz dveh razlogov: vsebuje samo lihe difference ter je zato manj dela pri računanju, poleg tega pa boljše konvergira kot ostale formule. To nam dovoljuje izbiro razmeroma velikega  $h$ . Podrobnosti v zvezi z uporabo bomo pokazali na obeh danih nalogah.

1. Iščemo odvod funkcije  $f(x) = e^x$  za  $x = 0$ . Tu je funkcija natančno definirana. V začetku ne bomo upoštevali tega, da vrednosti funkcije v tabeli niso absolutno natančno dane. Odvod  $f^{(2n+1)}(\xi)$  je omejen. Vrsta konvergira za  $h \leq 2$ , kar lahko ocenimo iz zgornjega izraza za ostanek. To pa še ne pomeni, da bomo mogli računati z intervalom  $h = 2$ , ker se pokažejo praktične težave že za  $h = 1$ . Tako so za  $h = 1$  difference velikostne stopnje 1. V vrsti (1) ima člen, ki vsebuje deveto diferenco, velikost okrog 0,001, višjih diferenc pa ne moremo izračunati zaradi prekratke tabele. Zato moramo vzeti manjši  $h$ . Vzemimo  $h = 0,5$ . Tabela za difference je potem naslednja:

<sup>1</sup> D. R. Hartree, Numerical Analysis, Oxford 1952, str. 118; Steffensen, Interpolation, New York, 1950, str. 61. Formula se dobi z odvajanjem Newton-Besselove, Stirlingove ali Laplace-Everettove formule za interpolacijo. Glej tudi Whittaker-Robinson, Tečaj numerične matematike, Beograd, 1951, str. 35, 36.

<sup>2</sup> Za definicijo diferenc glej Vidav, Višja matematika I, str. 520. Tu uporabljamo nekoliko drugačen način zaznamovanja. Indeks  $\frac{1}{2}$  pri diferenci pomeni, da je ta diferenca v tabeli napisana v višini, ki je med  $x$  in  $x+h$ .

| $x$   | $f(x)$   | $\Delta f$ | $\Delta^2 f$ | $\Delta^3 f$ | $\Delta^4 f$ | $\Delta^5 f$ | $\Delta^6 f$ | $\Delta^7 f$ | $\Delta^8 f$ | $\Delta^9 f$ |
|-------|----------|------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| -2,25 | 0,105399 |            |              |              |              |              |              |              |              |              |
|       |          | 68375      |              |              |              |              |              |              |              |              |
| -1,75 | 0,173774 |            | 44356        |              |              |              |              |              |              |              |
|       |          | 112731     |              | 28775        |              |              |              |              |              |              |
| -1,25 | 0,286505 |            | 73131        |              | 18666        |              |              |              |              |              |
|       |          | 185862     |              | 47441        |              | 12111        |              |              |              |              |
| -0,75 | 0,472367 |            | 120572       |              | 30777        |              | 7855         |              |              |              |
|       |          | 306434     |              | 78218        |              | 19966        |              | 5192         |              |              |
| -0,25 | 0,778801 |            | 198790       |              | 50743        |              | 13047        |              | 3124         |              |
|       |          | 505224     |              | 128961       |              | 32913        |              | 8316         |              | 2300         |
| 0,25  | 1,284025 |            | 327751       |              | 83656        |              | 21363        |              | 5420         |              |
|       |          | 832975     |              | 212617       |              | 54276        |              | 13740        |              |              |
| 0,75  | 2,117000 |            | 540368       |              | 137932       |              | 35100        |              |              |              |
|       |          | 1373343    |              | 350549       |              | 89480        |              |              |              |              |
| 1,25  | 3,490343 |            | 890917       |              | 227410       |              |              |              |              |              |
|       |          | 2264260    |              | 577960       |              |              |              |              |              |              |
| 1,75  | 5,754603 |            | 1468880      |              |              |              |              |              |              |              |
|       |          | 3733140    |              |              |              |              |              |              |              |              |
| 2,25  | 9,487740 |            |              |              |              |              |              |              |              |              |

Ako vstavimo te vrednosti v enačbo (1), dobimo

$$0,5 \cdot f'(0) = 0,505\,224 - (1/24) \cdot 0,128\,961 + (3/640) \cdot 0,032\,913 - \\ - (5/7168) \cdot 0,008\,316 + (35/98\,304) \cdot 0,002\,30 = 0,500\,000,$$

torej  $f'(0) = 1,000\,000$ . Napaka pri tem ni večja od  $\pm 2 \cdot 10^{-6}$ .

2. Izračunati moramo kubični razteznostni koeficient vode pri temperaturi  $t = 20^\circ \text{C}$ . Ta koeficient je definiran z enačbo

$$\alpha(t) = -1/\rho \cdot (\partial \rho / \partial t),$$

kjer je  $\rho$  gostota vode. Potrebujemo torej odvod funkcije  $\rho$  po temperaturi.

Upoštevati moramo, da je gostota vode znana le z neko omejeno natančnostjo. Težava je sedaj v tem, da nimamo nobenega kriterija za konvergenco, ker funkcije ne poznamo natančno. Delamo tako, da vzamemo samo toliko členov vrste (1), kolikor jih še vpliva na rezultat.

Iz formule (1) se takoj vidi, da bomo za majhne  $h$  dobili majhno natančnost. Če pa  $h$  povečamo, se s tem povečajo difference in moramo upoštevati v vrsti (1) tudi člene z višjimi diferencami. S tem spet nekoliko izgubimo na natančnosti, ker so višje difference obremenjene z vse večjimi napakami. Izkaže se pa, kakor bomo še videli, da te napake zelo počasi naraščajo. Zato vzamemo v praksi kolikor mogoče velik  $h$ .

V našem primeru lahko vzamemo  $h = 8$ . Uporabiti moramo prvo, tretjo in peto diferenco ( $\Delta f_{1/2} = -0,001647$ ,  $\Delta^3 f_{1/2} = 0,000117$ ,  $\Delta^5 f_{1/2} = 0,00002$ ). Za koeficient raztezka dobimo  $a = 0,0002069 \text{ st}^{-1}$ . Napaka je pri tem manjša kot 1 na zadnjem mestu, če napaka pri  $f$  ni večja kot 0,5 na zadnjem mestu.

Da opravičimo zgornje navodilo za izbiro razmaka  $h$ , si oglejmo še na splošno, kakšna je efektivna<sup>3</sup> napaka vsote končnega števila členov vrste (1). Vzemimo, da ima vsaka vrednost tabelirane funkcije enako efektivno napako  $\sigma_0$ . Zaznamujmo s  $\sigma_{2n-1}$  efektivno napako vsote na desni strani enačbe (1), do vštrevši  $(2n-1)$  te difference! Iz (1) sledi:

$$\sigma_{2n-1}^2 = \sigma^2(\Delta f_{1/2}) + \sigma^2(1/24 \cdot \Delta^3 f_{1/2}) + \sigma^2(3/640 \cdot \Delta^5 f_{1/2}) + \dots + \sigma^2(A_{2n-1}^2 \Delta^{2n-1} f_{1/2})$$

pri čemer členi na desni pomenijo efektivne napake posameznih členov vrste (1). Ker je

$$\Delta^k f = f(x + kh) - \binom{k}{1} f[x + (k-1)h] + \binom{k}{2} f[x + (k-2)h] + \dots + (-1)^k \cdot f(x),$$

je

$$\sigma^2(\Delta^k f) = \sigma_0^2 \sum_{\nu=0}^k \binom{k}{\nu}$$

Odtod dobimo

$$(2) \quad \sigma_{2n-1}^2 = \sigma_0^2 \left[ 2 + (1/24)^2 \sum_{\nu=0}^3 \binom{3}{\nu}^2 + (3/640)^2 \sum_{\nu=0}^5 \binom{5}{\nu}^2 + \dots + A_{2n-1}^2 \sum_{\nu=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{\nu}^2 \right]$$

Zadnja enačba pokaže, da ne moremo vzeti poljubno mnogo členov ( $n \rightarrow \infty$ ), kajti vrsta na desni strani potem ne konvergira. Ugodno pa je, da vsota (2) na začetku zelo počasi narašča. Dobimo naslednje vrednosti za  $\sigma_{2n-1}$ ,

$$\sigma_1 = \sqrt{2} \sigma_0$$

$$\sigma_3 = 1,008 \cdot \sqrt{2} \sigma_0$$

$$\sigma_5 = 1,010 \cdot \sqrt{2} \sigma_0$$

$$\sigma_7 = 1,011 \cdot \sqrt{2} \sigma_0$$

$$\sigma_9 = 1,025 \cdot \sqrt{2} \sigma_0$$

Če upoštevamo v vrsti (1) največ deveto diferenco, je torej efektivna napaka vsote praktično enaka efektivni napaki prvega člena.

M. V. Mihailović

<sup>3</sup> Efektivna napaka je kvadratni koren iz povprečne kvadratne napake, n. pr.

$\sigma(f) = \sqrt{(f - \bar{f})^2}$

# VPRAŠANJA

## 2. VPLIV TOKA NA MAGNETNICO

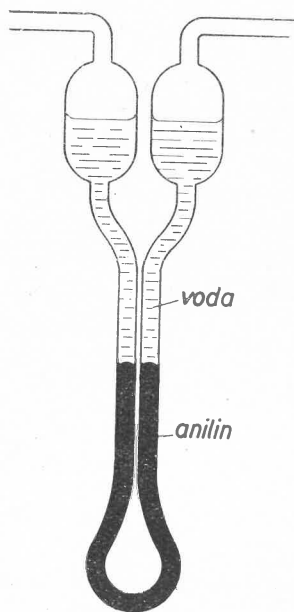
Po ravni bakreni žici s presekom  $1\text{ mm}^2$  naj teče tok 13 A. Elektroni v žici se gibljejo, kakor pokaže kratek račun, zaradi tega toka s povprečno hitrostjo 1 mm/s. Mirujoča magnetna igla, ki stoji nad žico, se postavi pravokotno na smer toka.

Premikajmo zdaj magnetnico v smeri, v kateri se gibljejo elektroni, in sicer približno z njihovo hitrostjo, t. j. 1 mm/s. Elektroni glede na magnetnico v povprečju mirujejo in zato bi človek pričakoval, da nanjo ne vplivajo več. Če pa hitrost magnetnice še povečamo, je relativna hitrost elektronov proti magnetnici nasprotno obrnjena in zato pričakujemo za tak primer nasproten odklon magnetnice.

Preizkusi z eksperimentom to domnevo in razloži morebitno neujemanje!

S. Vrhovec

## 3. MIKROMANOMETER Z ANILINOM



Za merjenje malih razlik pritiska uporabljajo včasih manometer, ki ga kaže slika. Cevka z obliko U, ki ima oba kraka zgoraj močno razširjena, je v svojem spodnjem delu napolnjena z anilinom, zgoraj pa z vodo. Kolikokrat bolj občutljiv je takšen manometer kot navaden manometer z vodo, če je presek cevi v razširjenem delu 50-krat tolikšen kot spodaj? Gostota anilina je 1,024-krat tolikšna kot gostota vode.

I. Kuščer

## 4. PRENAŠANJE NABOJA S KROGLICO

V šoli radi kažemo poskus, pri katerem prenašamo s kovinsko kroglico naboj z ene elektrode ploščnega kondenzatorja na drugo. Včasih je dobro vedeti, kolikšen naboj dobi kroglica pri dotiku plošče. Kroglica naj bo majhna, plošči pa veliki v primeri z razmakom plošč. Napetost  $U$  med ploščama držimo stalno.

1. Izračunaj naboj, ki ga dobi kroglica ob dotiku s ploščo, če je dana prvotna (nemotena) poljska jakost ( $E = U/s$ ) ter radij kroglice!

2. Kako daleč od plošče moramo tako naelektreno kroglico odmakniti, da velja enačba  $F = Ee$  na 1 % natančno?

3. Koliko dela opravi sila  $F$ , ki deluje na kroglico, pri premiku kroglice od ene plošče do druge?

I. Kuščer

Društvo matematičara i fizičara N. R. Hrvatske poziva sve, koji se zanimaju matematičko-fizičkim naukama, da se pretplate na

## **Glasnik matematičko-fizički i astronomski**

i sarađuju u njemu.

Zaista ne bi smjelo biti ni jednog kulturnog radnika, koji se bavi matematičko-fizičkim naukama, kao ni prosvjetne ustanove, koja nije pretplatnik Glasnika. Pretplatom i suradnjom u svojem naučnom i stručnom časopisu pokazujete u kolikoj mjeri pratite i podupirete razvitak i napredak svoje struke. Širite također Glasnik u svom krugu, jer time podupirete razvitak matematičko-fizičkih nauka u svojoj okolini.

Prijave pretplate slati na administraciju Glasnika: Hrvatsko prirodoslovno društvo, Zagreb, Ilica 16/III. Pretplata za god. 1955. iznosi 400.— din.

Društvo matematikov in fizikov NRH izdaja za vso državo »*Matematičko-fizički list* za učenike srednjih škola«. Letnik ima 4 številke, med počitnicami ne izhaja. Letna naročnina je 200 din.

Profesorji srednjih šol, priporočajte list dijakom! Naročila in naročnino pošiljajte na naslov:

*Matematičko-fizički list*, Zagreb, Ilica 16/III, p. p. 165 ali na čekovni račun št. 401-T-1080.

---

Zveza Društev matematikov in fizikov FLRJ izdaja časopis:

### **Nastava matematike i fizike**

Naročnina je 200 din, posamezna številka 60 din. Naročila in naročnino pošiljajte podjetju »Znanje«, Beograd, Terazije 12 ali na ček. rač. št. 103-T-307 z označbo »Za časopis Nastava matematike i fizike«. Časopis naročite lahko tudi pri našem Društvu.

---

**Obzornik za matematiko in fiziko** izhaja vsak drugi mesec. Izdaja ga Društvo matematikov in fizikov LRS. Urejuje ga uredniški odbor: I. Kuščer, A. Moljk, N. Prijatelj, I. Vidav. Odgovorni in tehnični urednik: I. Štalec. Upravo vodi I. Štalec. — Tiska tiskarna »Ljudske pravice« v Ljubljani. — Naročnina za letos je 250 din. Posamezna številka 90 din, dvojna številka 150 din. Naročnino nakažite na naš čekovni račun 60-KB-1-Z-207. Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov:

*Obzornik za matematiko in fiziko, Ljubljana, poštni predal 253.*

# Z A Š T U D I J F I Z I K E

lahko nabavite pri nas naslednje knjige:

## za fiziko I:

|                                                                |          |
|----------------------------------------------------------------|----------|
| Sears: Principles of Physics I, II, III (Addison Wesley, 1950) | 3×1950.— |
| Pohl: Electricity and Magnetism (prevod, Blackie)              | 840.—    |
| Pohl: Mechanics and Acoustics (prevod, Blackie)                | 840.—    |

## za fiziko II:

|                                                                                      |        |
|--------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| Richtmyer, Kennard, Lauritsen: Introduction to Modern Physics (McGraw-Hill, v tisku) |        |
| Finkelburg: Atomic Physics (prevod McGraw-Hill, 1950)                                | 2250.— |

## za mehaniko:

|                                                                   |        |
|-------------------------------------------------------------------|--------|
| Becker: Introduction to Theoretical Mechanics (McGraw-Hill, 1954) | 2400.— |
| Corben, Stehle: Classical Mechanics (Wiley, 1950)                 | 2100.— |
| Timoshenko, Goodier: Theory of Elasticity (McGraw-Hill, 1951)     | 2850.— |
| Sokolnikoff: Mathem. Theory of Elasticity (McGraw-Hill, 1946)     | 1500.— |
| Milne, Thomson: Theoretical Hydrodynamics (Macmillan, 1949)       | 2520.— |

## za toploto:

|                                                                                                     |        |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| Zemansky: Heat and Thermodynamics (McGraw-Hill, 1951)                                               | 1950.— |
| Jeans: Kinetic Theory of Gases (Cambridge 1952)                                                     | 672.—  |
| Sears: Thermodynamics, the Kinetic Theory of Gases and Statistical Mechanics (Addison Wesley, 1952) | 2250.— |

## za teoretično fiziko:

|                                                                                |        |
|--------------------------------------------------------------------------------|--------|
| Joos: Theoretical Physics (Blackie, 1954)                                      | 1260.— |
| Abraham, Becker: Electricity and Magnetism (Blackie)                           | 882.—  |
| Stratton: Electromagnetic Theory (McGraw-Hill, 1938)                           | 2700.— |
| Bruhat: Optique (Masson et Cie, 1955)                                          |        |
| Supek: Teorijska fizika i struktura materije (Škol. knjiga, 1952)              | 1100.— |
| Schiff: Quantum Mechanics (McGraw-Hill, v tisku)                               |        |
| Green: Nuclear Physics (McGraw-Hill, v tisku)                                  |        |
| Blatt, Weisskopf: Theoretical Nuclear Physics (Wiley, 1952)                    | 3750.— |
| Panofsky, Phillips: Classical Electricity and Magnetism (Addison-Wesley, 1955) | 2550.— |

## za eksperimentalno fiziko:

|                                                             |        |
|-------------------------------------------------------------|--------|
| Clark: Applied X-Rays (McGraw-Hill, v tisku)                |        |
| Hardy, Perrin: The Principles of Optics (McGraw-Hill, 1932) | 2550.— |
| Elmore, Sands: Electronics (McGraw-Hill, 1949)              | 1650.— |
| Segre: Experimental Nuclear Physics, Vol. I (Wiley, 1953)   | 4500.— |

## za matematično fiziko:

|                                                                           |          |
|---------------------------------------------------------------------------|----------|
| Morse, Feshbach: Methods of Theoretical Physics I, II (McGraw-Hill, 1953) | 2×4500.— |
| Anđelić: Teorija vektora (Naučna knjiga)                                  | 194.—    |
| Whittaker, Robinson: Tečaj numeričke matematike (Naučna knjiga, 1951)     | 350.—    |
| Hartree: Numerical Analysis (Clarendon Press, 1952)                       | 1260.—   |

## za metodiko fizikalnega pouka:

|                                                             |        |
|-------------------------------------------------------------|--------|
| Sutton: Demonst. Experiments in Physics (McGraw-Hill, 1938) | 1950.— |
|-------------------------------------------------------------|--------|

**DRŽAVNA ZALOŽBA SLOVENIJE • LJUBLJANA • TRG REVOLUCIJE 19**

Oddelek za inozemske knjige, tel. 21-729