

The background of the cover features an abstract geometric design. It consists of several thin, dark lines that intersect to form various shapes, including a large triangle on the left and a semi-circle at the bottom. The lines are black and set against a plain white background.

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

**LJUBLJANA
1955-56
IV. št. 1**

VSEBINA

Članki	Stran
Zgodovinski razvoj topologije (A. Vadnal)	1
O adicijskih teoremih (N. Prijatelj)	6
Protonski sinkrotron za 30 GeV (A. Peterlin)	11
Nevtrino (M. Švikaršič)	20
Matematična služba	
Računanje vodnega toka v prepustni plasti pod jezom (I. Kuščer) .	26
Novice	
Elektret (J. Kalan)	33
Fotoelektrično otipavanje krivulj (M. Ralca)	34
Domače vesti	
Jožef Reisner (J. Povšič)	35
Dvestoletnica rojstva Jurija Vege (J. Povšič)	36
Koliko fizike znajo slušatelji v začetku leta na univerzi (A. Moljk)	37
Sklepi II. kongresa matematikov in fizikov	38
Odgovori	41
Nove knjige	48
Vprašanja	48

OBČNI ZBOR DRUŠTVA

Na rednem občnem zboru Društva matematikov in fizikov LRS dne 12. XII. 1954 je bil izvoljen nov upravni odbor: predsednik: dr. A. Vadnal, podpredsednik: L. Gabrovšek, tajnik: F. Križanič, blagajnik: F. Kvaternik, odborniki: dr. F. Dominko, M. Klopčičeva, R. Korbar, dr. I. Kuščer, A. Moljk, J. Povšič, N. Prijatelj, I. Štalec, dr. I. Vidav. V nadzornem odboru so: dr. A. Vakselj, F. Čemažar, M. Potiskova; v častnem razsodišču pa: dr. A. Peterlin, dr. S. Dolar in I. Molinaro.

UREDNIŠTVO JE PREJELO V ZAMENO

Bulletin of the Institute of nuclear sciences »Boris Kidriš«, Beograd 1955, Vol. 5.
 Bulletin scientifique, Zagreb 1955, T. 2, No 2.
 Elektrotehniški vestnik, Ljubljana 1954, XXII, št. 3-4, 5-6, 7-8, 9-10, 11-12; 1955, XXIII, št. 1-2, 3-4.
 Farmaceutski vestnik, Ljubljana 1954, V, št. 1-2, 3-4, 5-6, 7-8; 1955, VI, št. 1-2, 3-4.
 Glasnik mat.-fiz. i astr., Zagreb 1953, T. 8 — No 4; T. 9 — No 1, 3-4.
 Gospodarski vestnik, Ljubljana 1954, III, št. 42-99; 1955, IV, št. 1-55.
 Mat. fiz. list za učenike sred. šola, Zagreb 1954-55, V, št. 1, 2, 3, 4.
 Nastava matematike i fizike, Beograd 1954, št. 1.
 Naučna misao, Zagreb 1954, št. 1, 2.
 Proteus, Ljubljana 1953-54, XVI, št. 10; 1954-55, št. 1, 2, 3, 4/5, 6, 7, 8, 9, 10.
 Sodobna pedagogika, Ljubljana 1954, V, št. 3-4, 5-6, 7-8, 9-10; 1955, 1-2, 3-4.
 Varilna tehnika, Ljubljana 1954, III, št. 1, 2, 3.
 Zdravstveni vestnik, Ljubljana 1954, XXIII, št. 5-6, 7-8, 11-12; 1955, XXIV, št. 1-2, 3, 4, 5-6.
 Zobozdravstveni vestnik, Ljubljana 1954, IX, št. 3, 4-6; 1955, X, št. 1-2, 3-4.

ZGODOVINSKI RAZVOJ TOPOLOGIJE

A. VADNAL

Topologija ali Analysis situs proučuje topološke lastnosti geometričnih figur, t. j. tiste lastnosti, ki se ohranjajo pri poljubni obratno enolični in zvezni transformaciji; vrhu tega proučuje topologija tudi topološke transformacije same. Kljub temu, da je topologija razmeroma mlada panoga matematike, segajo njeni prvi začetki daleč nazaj v XVII. stoletje. Že Leibnitz (1646—1716) se je ukvarjal z nekaterimi topološkimi problemi in domneval, da bi bilo mogoče razviti novo panogo matematike, ki bi raziskovala lastnosti in medsebojno lego geometričnih figur kvalitativno, ne upoštevajoč pri tem njihovih metričnih lastnosti.

Za prve konkretne rezultate s področja topologije se imamo zahvaliti Eulerju. L. 1736 je Euler rešil problem sedmerih mostov v Königsbergu. Ta problem je obstajal v tem, ali je mogoče in kako je mogoče priti preko vseh sedmih mostov čez reko Pregel, ne da bi pri tem prešli kak most dvakrat. Mnogo važnejši kakor je rešitev königsberškega problema pa je Eulerjev izrek o ogliščih, robovih in ploskvah poliedrov, ki ga v modernejši obliki lahko izrazimo takole: Eulerjeva karakteristika poljubnega poliedra, ki je homeomorfen krogli, je enaka 2. Mnogo pozneje se je odkrilo, da je ta izrek poznal že Descartes (1593—1661).

Gauss (1777—1855) ima kakor za skoraj vse panoge matematike tudi za topologijo precejšnje zasluge. Gauss je proučeval medsebojno lego dveh zank, ki nimata nobene skupne točke. Dve zanki nista prepleteni, ako je mogoče na prvo zanko napeti kako ploskev tako, da ne seka druge ploskve, ako pa se ploskve ne da tako napeti, tedaj se zanki prepletata. Po Gaussu je mogoče za vsak par zank tridimenzionalnega evklidskega prostora izračunati število prepletenosti s pomočjo nekega integrala; to število je vedno celo in označuje kolikokrat sta zanki prepleteni. Dve zanki nista prepleteni, ako imata število prepletenosti 0. Tedanje stanje nerazvitosti topologije je Gauss označil z naslednjimi besedami: »O geometriji situs, katero je slutil Leibnitz in na katero se je nekaj geometrov kot Euler in Vandermonde komaj ozrlo, ne vemo po poldrugem stoletju dosti več kot nič.«

Listingovo delo: »Vorstudien zur Topologie«, ki je izšlo l. 1847 v Göttingenu, je pravzaprav prvo delo, ki je povsem posvečeno topologiji. V tem delu je Listing definiral topologijo kot del geometrije, ki proučuje

lastnosti in medsebojne odnose geometričnih figur v tridimenzionalnem evklidskem prostoru, ne upoštevajoč pri tem njihovih metričnih lastnosti. Po njegovem mnenju je predmet topologije proučevanje kakovostnih lastnosti in odnosov geometričnih figur v prostoru.

Predmet topologije in njeno mesto v geometriji je mnogo bolj eksaktno opredelil Klein v svojem Erlangenskem programu l. 1872. Po Kleinu je predmet topologije proučevanje lastnosti in medsebojnih odnosov geometričnih figur, ki se ne spremenijo pri poljubni zvezni transformaciji. Ker tvorijo vse zvezne transformacije grupo, izrazimo Erlangenski program lahko tudi takole: Predmet topologije je proučevanje tistih invariantov geometričnih figur, ki so invariantne nasproti grupi zveznih transformacij.

V šestdesetih in sedemdesetih letih prejšnjega stoletja je bil rešen problem homeomorfности in topološke klasifikacije zaprtih ploskev tridimenzionalnega evklidskega prostora. Pri reševanju tega problema imajo največ zaslug Möbius (1863), Jordan (1866), Schläfli (1872) in Dyck (1888). Poleg že poznanih orientiranih ploskev so bile v tem času odkrite še neorientirane ploskve. V zvezi s topološko klasifikacijo zaprtih ploskev je bil dokazan izrek: Dve zaprti ploskvi sta homeomorfni, ako sta obe hkrati ali orientirani ali obe hkrati neorientirani in ako imata enaki Eulerjevi karakteristiki.

V sredi prejšnjega stoletja se je topologija osvobodila ožine tridimenzionalnega evklidskega prostora in je začela proučevati geometrijske figure n -dimenzionalnega evklidskega prostora, pozneje pa tudi n -dimenzionalnih neevklidskih prostorov. Kot posplošitev dvodimenzionalne zaprte ploskve tridimenzionalnega evklidskega prostora je bila odkrita n -dimenzionalna geometrična figura, v kateri ima vsaka točka okolico, ki je homeomorfna n -dimenzionalni krogli. Ta in mnoga druga odkritja so odločilno vplivala na pojmovanje prostora in zato tudi na razvoj topologije. Za razvoj pojmovanja prostora ima posebno velike zasluge Riemann, ki je v svoji disertaciji: »Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen« (1854) odprl pot do modernega abstraktnega pojmovanja prostora.

Širše pojmovanje prostora je sprožilo v topologiji številne probleme, ki so bili deloma docela novi, deloma pa so bili posplošitve že znanih problemov iz tridimenzionalnega evklidskega prostora. Tako je n. pr. Schläfli že l. 1852 posplošil Eulerjev izrek o poliedrih na n -dimenzionalne poliedre; to je bil prvi znatnejši doprinos k topologiji v poljubno dimenzionalnih prostorih. Kronecker je v sedemdesetih letih prejšnjega stoletja obravnaval problem o številu ničel dveh realnih funkcij po metodi, ki je po obliki sicer analitična, ki pa spada v topologijo n -dimenzionalnih prostorov. Po rešitvi problema topološke klasifikacije zaprtih ploskev so topologi načeli problem topološke klasifikacije zaprtih tridimenzionalnih geometričnih figur; ta problem pa doslej še ni rešen, niti ne kaže, da bi ga bilo mogoče v doglednem času rešiti.

Na prvi stopnji razvoja topologije so prevladoval predvsem nazorne metode raziskovanja; črte so si ponazorili z vrvicami, ploskve s kosi papirja ali gumija itd. Na tej stopnji razvoja je bila topologija bolj ekspe-

rimentalna znanost. Kljub temu pa je postajala topologija vedno važnejša in uporabnejša za druge matematične panoge zlasti potem, ko je Riemann odkril njeno uporabnost v funkcijski teoriji.

V letih 1879—1884 je Cantor položil temelje teoriji množic, ki je bistveno učinkovala ne samo na razvoj topologije, ampak tudi na razvoj cele matematike. Vpliv teorije množic na razvoj in na pojmovanje topologije je bil tako daljnosežen, da smemo upravičeno šteti Cantorja med ustanovitelje topologije. Cantor je v topologiji sprožil novo smer, ki je začela reševati topološke probleme z vidika teorije množic. S tega vidika ni prostor nič drugega kakor neka množica točk, med katerimi eksistirajo določeni odnosi; isto velja tudi za geometrične figure tega prostora. Ker so pri takem pojmovanju prostori in geometrične figure kot deli teh prostorov pravzaprav množice točk, jih je mogoče proučevati z metodami teorije množic. Med bogastvom vseh mogočih prostorov pa pridejo za proučevanje v poštev samo prostori, katerih splošnost omejimo tako, da jim predpišemo kake lastnosti; te lastnosti izrazimo v obliki aksiomov, ki veljajo v posameznih obravnavanih prostorih.

Med topološkimi prostori so posebno važni okoliški in metrični prostori, ki jih je definiral l. 1906 Fréchet takole:

Prostor je metričen, ako eksistira za vsak par točk a in b tega prostora po eno realno število $d(a, b)$, imenovano razdalja točk a in b , ki ni negativno in ki zadošča naslednjim trem aksiomom:

I. Aksiom identičnosti: Razdalja dveh točk je enaka 0 tedaj in samo tedaj, če sta točki identični: $d(a, a) = 0$ in iz enačbe $d(a, b) = 0$ sledi $b = a$.

II. Aksiom komutativnosti: $d(a, b) = d(b, a)$.

III. Aksiom o stranicah trikotnika: Vsota dveh stranic poljubnega trikotnika ni manjša od tretje stranice ali: za poljubne tri točke a, b in c prostora velja neenačba: $d(a, b) + d(b, c) \geq d(a, c)$.

Prostor je okoliški, ako eksistirajo za vsako točko tega prostora določeni deli tega prostora, ki jih imenujemo okolice te točke in ki zadoščajo sledečim trem aksiomom:

I. Vsaka točka a okoliškega prostora ima vsaj eno okolico in vsaka okolica točke a vsebuje tudi točko a .

II. Vsaka množica točk, ki vsebuje vsaj eno okolico točke a , je tudi okolica točke a .

III. Presek dveh okolic točke a je tudi okolica točke a .

Bogastvo topoloških prostorov je zelo veliko! S predpisom nekaterih dodatnih aksiomov je definiral Hausdorff (1914) prostore bolj specialnih tipov, ki so imeli velik vpliv na nadaljnji razvoj topologije, obravnavane z vidika teorije množic. Zato moramo imeti izid njegovega dela »Grundzüge der Mengenlehre« za važen mejnik v razvoju topologije. Med drugimi so uporabljali v topologiji metode teorije množic predvsem Schönflies, Brouwer, Urysohn, Menger itd.

L. 1895 je izšlo znamenito delo »Analysis situs«, v katerem je francoski matematik Poincaré položil temelje novi smeri v topologiji: kombinatorni topologiji. Njegove zasluge za topologijo so tako značilne, da ga imamo upravičeno lahko poleg Cantorja za ustanovitelja topologije. Dokaj izčrpen in sistematičen pregled kombinatorne topologije sta podala Dehn in Heegaard l. 1907: Analysis situs. Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften III. AB. 1907.

Izhodišče kombinatorne topologije tvori polieder. Zaradi nadaljnjega razumevanja kombinatorne smeri v topologiji si oglejmo najprej nekaj temeljnih pojmov kombinatorne topologije. Definirajmo najprej simpleks!

Poljubno točko E_0 prostora imenujemo 0-dimenzionalni simpleks in ga označimo kakor točko z E_0 . Daljico, ki veže dve točki E_0 in E_1 prostora, imenujemo enodimenzionalni simpleks in ga označimo takole: $E_0 E_1$. Trikotnik z oglišči E_0 , E_1 in E_2 imenujemo dvodimenzionalni simpleks in ga označimo takole: $E_0 E_1 E_2$. Piramido (tetraeder) z oglišči E_0 , E_1 , E_2 in E_3 imenujemo tridimenzionalni simpleks in ga označimo takole: $E_0 E_1 E_2 E_3$. Na isti način lahko definiramo simplekse poljubnega števila dimenzij.

Geometrično figuro, ki sestoji iz samih simpleksov, imenujemo simplicialni kompleks. Simplicialni kompleks poznamo, ako poznamo vse simplekse, ki ga sestavljajo, in če poznamo njegovo strukturo, t. j. če poznamo, kako so simpleksi združeni v kompleks oziroma kateri njihovi elementi sovpadajo.

Simpleksi, ki smo jih doslej obravnavali, so premočrtni simpleksi poljubnodimenzionalnega evklidskega prostora; tako pojmovanje simpleksa pa je za topologijo preozko. V topologiji imenujemo simpleks vsako geometrično figuro, ki jo dobimo iz premočrtnega simpleksa s topološko transformacijo. Analogno velja tudi za simplicialni kompleks, ki je topološka slika premočrtnega simplicialnega kompleksa.

Definirajmo še polieder! Polieder je vsaka geometrična figura ali vsak prostor, ki ga je mogoče razbiti na končno ali na števno množico simpleksov tako, da ustreza to simplicialno razbitje naslednjim aksiomom:

- I. Vsaka točka figure ali prostora pripada vsaj enemu simpleksu.
- II. Vsaka točka figure ali prostora pripada največ končnemu številu simpleksov.

III. Dva simpleksa, ali nimata nobene skupne točke, ali je prvi stranica drugega, ali pa imata eno skupno stranico.

V primerih, ki dopuščajo nazorno predstavo, ustreza takemu simplicialnemu razbitju razrezanje geometrične figure na manjše koščke.

Vodilna Poincaréjeva misel pri študiju poliedrov in misel, ki je pravzaprav ustvarila kombinatorno topologijo, je bila sledeča: Razbiti polieder v simplicialni kompleks in nadomestiti študij poliedra s študijem ustreznega simplicialnega kompleksa.

Simplicialne komplekse, katerih osnovne celice so simpleksi, med katerimi eksistirajo določene koincidence, pa je mogoče obravnavati z algebrskimi metodami, uporabljajoč pri tem linearne forme, matrice, grupe itd. Določen polieder pa se da na nešteto načinov razbiti na simplicialne

komplekse in pri vsakem takem razbitju dobimo kake njegove lastnosti. Zaradi tega je treba rešiti problem, katere lastnosti poliedra dobimo pri vsakem njegovem razbitju; te lastnosti poliedra so očitvidno njegove invariante ter jih je mogoče izračunati z algebraskimi metodami. Med njimi so posebno važne: število Betti, Eulerjeva karakteristika, orientacija, koeficient zavitosti itd.

Za razvoj kombinatorne topologije so poleg že navedenih posebno pomembni med drugimi zlasti Veblen, Alexander, Lefschetz itd.

Topologija, obravnavana z vidika teorije množic in kombinatorna topologija sta se najprej razvijali ločeno druga od druge in brez kake bistvene važne povezanosti. V zadnjih tridesetih letih pa se je iz obeh imenovanih metod razvila tako imenovana »methode mixte«; za razvoj te metode imajo največ zaslug Brouwer, Veblen, Alexander, Lefschetz, Aleksandrov, Pontrjagin itd.

Vodilna misel, ki je združila topologijo, obravnavano z vidika teorije množic in kombinatorno topologijo, izvira iz abstrakcije pojmov, ki jih obravnava kombinatorna topologija. Kombinatorna topologija obravnava poliedre, ki jih pa predhodno razbije v simplicialne komplekse, obstoječe iz posameznih simpleksov. Ti simpleksi so osnovne celice ali osnovni elementi, ki jih kombinatorna topologija obravnava na algebraski način. Pri algebraskem obravnavanju pa ni prav nič važno, kaj so pravzaprav ti elementi. Ako vzamemo kako poljubno množico kakršnihkoli elementov, ki je izomorfna množici simpleksov poliedra, tedaj lahko to množico študiramo po metodah kombinatorne topologije tako, kakor študiramo ustrezeni simplicialni kompleks. Ta misel, po kateri je mogoče tako množico poljubnih elementov študirati na algebraski način po metodah kombinatorne topologije, je združila obe tedaj še izolirano obravnavani topologiji. Topologija, ki uporablja pri raziskovanju metode teorije množic, ima predmete, ki jih obravnava, za množice točk oziroma množice kakršnihkoli elementov. Kombinatorna topologija ima za svoj predmet raziskovanja poliedre, ki jih pa predhodno razbije na osnovne celice, na simplekse. Topologija pa, ki uporablja mešano metodo, ima za svoj predmet množico poljubnih elementov, ki jih obravnava po algebraskih metodah kombinatorne topologije tako, kakor da bi bili ti elementi simpleksi nekega poliedra.

V zgodovini topologije je igral važno vlogo problem invariantnosti dimenzije geometričnih figur pri topološki transformaciji. Ta problem je postal posebno pereč potem, ko je Cantor dokazal, da je mogoče točke vsake daljice obratno enolično upodobiti s točkami poljubnodimenzionalne kocke, in ko je Peano dokazal, da je mogoče s transformacijo, ki je enolična in zvezna, prevesti daljico v kvadrat. Toda v Cantorjevem primeru transformacija ni zvezna, v Peanovem primeru pa obratna transformacija ni zvezna. Problem invariantnosti dimenzije pri topoloških transformacijah je rešil šele Brouwer l. 1911, ko je dokazal, da je dimenzija geometrične figure ali prostora topološka invarianta, ki se ohranja pri vseh topoloških transformacijah. Metode, ki jih je Brouwer uporabil pri dokazovanju invariantnosti dimenzije, so tako izvirne in daljnosežne, da moramo poleg Cantorja in Poincaréja tudi Brouwerja prištevati med ustanovitelje moderne topologije.

O ADICIJSKIH TEOREMIH

N. PRIJATELJ

V elementarni matematiki govorimo pogosto o adicijskih teoremih. Tako imenujemo na primer osnovno lastnost eksponentne funkcije $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$. Znani so tudi adicijski teoremi trigonometričnih funkcij. Na splošno pravimo, da ima funkcija $f(x)$ algebraičen adicijski teorem, kadar lahko izrazimo na algebraičen način $f(x+y)$ z $f(x)$ in $f(y)$, pri poljubni izbiri argumentov x in y . Funkcijska teorija nam daje vrsto funkcij s to lastnostjo. Brez težav lahko na primer uvidimo, da ima vsaka racionalna funkcija argumenta e^x adicijski teorem. Pišimo v ta namen $e^x = u$. Potem je naša funkcija $f(x) = R(u)$, kjer pomeni R neko racionalno funkcijo spremenljivke u . Ker je $e^x = u_1$, $e^y = u_2$ in $e^{x+y} = u_1 u_2$, dobimo $f(x) = R(u_1)$, $f(y) = R(u_2)$ in $f(x+y) = R(u_1 u_2)$. Ako iz teh treh enačb, ki so racionalne glede na u_1 in u_2 , eliminiramo u_1 in u_2 , dobimo neko algebraično funkcionalno enačbo $\Phi[f(x), f(y), f(x+y)] = 0$, ki je prav iskani adicijski teorem funkcije $f(x)$.

Povsem naravno vprašujemo v zvezi z adicijskimi teoremi dvoje: katere funkcije imajo algebraične adicijske teoreme in kako daleč je funkcija s svojim adicijskim teoremom določena. V naslednjem se bomo ukvarjali z drugim vprašanjem in se omejili na znane elementarne funkcije, ki imajo zelo preproste adicijske teoreme.

Tak enostaven teorem je določen s tole funkcionalno enačbo

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \quad (1)$$

Poglejmo, kaj lahko z nje odčitamo. Z indukcijo takoj uvidimo, da je tudi

$$f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \quad (2)$$

Bodi v (2) $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x$, pa imamo

$$f(nx) = n f(x) \quad (3)$$

za $x = 1$ vidimo iz (3), da je $f(n) = n f(1)$, torej velja

$$f(x) = x f(1) \quad (4)$$

če je x naravno število. Takoj pa se lahko prepričamo, da velja enačba (4) tudi za vsak pozitiven racionalen x . Naj bo torej $x = p/q$, potem je zaradi (3) in (4)

$$p f(1) = f(p) = f[q(p/q)] = q f(p/q)$$

kar nam da res $f(p/q) = p/q f(1)$. Brž ko zahtevamo še zveznost funkcije $f(x)$, je jasno, da velja enačba (4) za vsak pozitiven x . Ker je tudi $f(0) = 0$, dobimo iz (1) za $x_2 = -x_1 = -x$.

$$f(0) = f(x) + f(-x) = 0 \text{ ali } f(-x) = -f(x) = -x f(1)$$

Če pišemo še $f(1) = a$, dobimo potemtakem za vsak realen x

$$f(x) = ax \quad (5)$$

Adicijski teorem (1) nam torej pri pogoju zveznosti enolično določa linearno funkcijo oblike (5).

Ali se je mogoče osvoboditi pogoja zveznosti in vendar ohraniti enoličnost rešitve? Darboux je brez škode zamenjal zveznost z dvema alternativnima pogojema, od katerih je drugi dosti bolj splošen. Oglejmo si obe njegovi varianti.

α .) Funkcija $f(x)$ naj ima stalno isti predznak kot x . Iz (1) je razvidno, da v tem primeru $f(x)$ narašča. Za $x_2 > 0$ dobimo namreč takoj $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) > f(x_1)$. Ako je sedaj x kako iracionalno število in ga ocenimo s približkoma $p/q < x < (p+1)/q$, imamo $a p/q < f(x) < a(p+1)/q$. Ker pa je interval $[a p/q, a(p+1)/q]$, v katerega utesnimo $f(x)$, poljubno majhen, mora biti tudi $f(x) = ax$.

β .) Funkcija $f(x)$ naj bo v kakem poljubno majhnem intervalu (α, β) omejena.

V tem primeru tvorimo pomožno funkcijo $\varphi(x) = f(x) - ax$, $a = f(1)$, ki ima očitno te lastnosti: 1. funkcija $\varphi(x)$ zadovoljuje funkcionalno enačbo (1), 2. za vsak racionalen $x = p/q$ je $\varphi(p/q) = 0$, 3. skupaj z $f(x)$ je tudi $\varphi(x)$ v intervalu (α, β) omejena in 4. $\varphi(x)$ zavzame v intervalu (α, β) vse vrednosti, ki jih sploh more imeti. Kajti, ako je r poljubno racionalno število, velja za kakršenkoli x relacija $\varphi(x \pm r) = \varphi(x)$. Za vsak x pa lahko najdemo tak racionalni r , da je ali njuna vsota ali njuna razlika v intervalu (α, β) .

Zdaj pa si mislimo, da je za kako vrednost x_0 funkcija $\varphi(x_0) = \lambda \neq 0$. Potem je $\varphi(nx_0) = n\varphi(x_0) = n\lambda$, kjer pomeni n poljubno naravno število. $\varphi(x)$ more torej zavzeti skupaj z n poljubno velike vrednosti in potemtakem v intervalu (α, β) ni omejena. To pa je v nasprotju s hipotezo. Za vsak x je torej funkcija $\varphi(x) = 0$, kar nam da zopet $f(x) = ax$.

Po vsem tem, posebno glede na skromnost pogoja (β) , bi bilo pričakovati, da ima funkcionalna enačba (1) eno samo rešitev, namreč rešitev (5). Toda Lebesgue je pokazal, da so še druge rešitve, kakor hitro ostanemo čisto splošni. Na tem enostavnem zgledu lahko uvidimo neverjetno bogastvo modernega pojma matematične funkcije.

Dejstvo, da smemo nadomestiti ozek pogoj zveznosti z zgoraj omenjenima pogojema (α) ali (β) pa ni le teoretsko zanimivo, ampak tudi pomembno za uporabo. Vzemimo le en primer. V Lobačevskega neevklidični geometriji je vsota kotov v trikotniku σ vedno manjša od dveh pravih kotov. Razliko $\delta = \pi - \sigma > 0$, imenujemo kotni deficit ali defekt. O le-tem je možno pokazati dvojce: 1. dva ploščinsko enaka trikotnika imata enaka defekta in obratno sta dva trikotnika z enakima defektoma, ploščinsko enaka in 2. ako je kak trikotnik T sestavljen iz dveh trikotnikov T_1 in T_2 , potem je defekt prvega trikotnika enak vsoti defektov trikotnikov T_1 in T_2 . Velja pa tudi obratno: če je defekt kakega trikotnika T enak vsoti defektov trikotnikov T_1 in T_2 , potem moremo vedno najti k trikotnikom T, T_1 in T_2

ploščinsko enake trikotnike S , S_1 in S_2 tako, da je S sestavljen iz S_1 in S_2 . Ako torej zaznamujemo z $f(\delta)$ ploščino trikotnika, katerega kotni defekt je δ , velja za funkcijo $f(\delta)$ ravno naša funkcionalna enačba (1), $f(\delta_1) + f(\delta_2) = f(\delta_1 + \delta_2)$. Ker pa sta tako δ kakor $f(\delta)$ vedno pozitivna, je izpolnjen tudi dodatni pogoj (α) in rešitev enačbe je torej $f(\delta) = \alpha\delta$ ali z besedami: v Lobačevskega geometriji je ploščina trikotnika proporcionalna njegovemu kotnemu defektu.

Kot naslednji zgled vzemimo adicijski teorem eksponentne funkcije in ga pišimo v obliki funkcionalne enačbe

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) f(x_2) \quad (6)$$

Videli bomo, da je rešitev enolična, kakor hitro zahtevamo, da je funkcija $f(x)$ v kakem intervalu omejena. Če pišemo v (6) za $x_1 = x_0$ in za $x_2 = x - x_0$, pri čemer je x_0 fiksiran, toda poljuben, dobimo

$$f(x) = f(x_0) f(x - x_0) \quad (7)$$

Odtod vidimo, da mora biti $f(x_0) \neq 0$, če naj se izognemo trivialni rešitvi $f(x) \equiv 0$. Funkcija $f(x)$ je torej različna od nič za vsak x . Če pa pišemo v (6) $x_1 = x_2 = x$, imamo

$$f(2x) = [f(x)]^2 > 0 \quad (8)$$

Očitno je torej funkcija pozitivna za vsak x . Potemtakem smemo postaviti $\log f(x) = \varphi(x)$. Funkcija $\varphi(x)$ pa zadošča funkcionalni enačbi (1) in ker je istočasno z $f(x)$ tudi $\varphi(x)$ omejena, dobimo, upoštevaje zgornja razmotrivanja pod (β), takoj $\log f(x) = ax$ in odtod

$$f(x) = e^{ax} = A^x$$

Seveda moremo rešiti enačbo (6) neodvisno od enačbe (1). Pot je popolnoma analogna z ono, ki smo jo ubrali pri enačbi (1), zato tega ne bomo ponavljali. Raje pogledjmo, če je mogoče zadovoljiti enačbo (6) tudi s potenčno vrsto. Ako se nam to posreči, potem smo zaradi enoličnosti rešitve uspeli razvrstiti prav eksponentno funkcijo v potenčno vrsto.

Bodi torej $P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$ naša hipotetična potenčna vrsta. Seveda mora ta vrsta ustrezati tudi enačbi (8), torej mora biti $P(2x) = [P(x)]^2 > 0$, za vsak x . S primerjavo koeficientov na obeh straneh te enačbe dobimo takoj $c_0 = c_0^2 > 0$, torej $c_0 = 1$. Koeficient c_1 ostane poljuben in ga pišimo v bodoče kar c . Nadalje dobimo $c_2 = c^2/2!$, $c_3 = c^3/3!$ in s popolno indukcijo zlahka uvidimo, da velja splošno $c_n = c^n/n!$. Naša potenčna vrsta ima torej obliko

$$P(x) = 1 + \frac{cx}{1!} + \frac{(cx)^2}{2!} + \dots$$

Iz koeficientov vrste takoj spoznamo, da je vrsta absolutno konvergentna za vsak x .

Seveda je treba sedaj še pokazati, da ta vrsta zadovoljuje tudi funkcionalno enačbo (6). Ker je vrsta $P(x)$ absolutno konvergentna, smemo pri poljubni izbiri x_1 in x_2 množiti vrsti $P(x_1)$ in $P(x_2)$ med seboj in kratek račun nam pokaže, da je rezultat res $P(x_1 + x_2)$. (Primerjaj I. Vidav: Višja matematika I, str. 451.) Zaradi enoličnosti rešitve imamo torej $A^x = P(x)$. Za $x = 1$ dobimo $A = \sum c^n/n!$, kjer je treba sešteti od $n = 0$ do $n = \infty$. Ako pa postavimo še $c = 1$, dobimo znano vrsto $\sum \frac{1}{n!} = e$ in končno za poljuben x

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

Obrnimo naposled našo pozornost še k trigonometričnim funkcijam in si vzemimo za zgled kosinusovo funkcijo. Da se izognemo daljšemu in malce dolgočasnemu računu, zamenjajmo adicijski teorem z ekvivalentno enačbo $\cos(x + y) + \cos(x - y) = 2 \cos x \cos y$, ki nam da tole funkcionalno enačbo

$$f(x + y) + f(x - y) = 2 f(x) f(y) \quad (9)$$

Za $y = 0$ dobimo odtod $2 f(x) = 2 f(x) f(0)$. Če izvzamemo trivialno rešitev $f(x) \equiv 0$, dobimo iz tega takoj $f(0) = 1$. Zdaj pa postavimo $x = 0$ in imamo $f(y) + f(-y) = 2 f(0) f(y)$ ali $f(-y) = f(y)$. Funkcija $f(x)$ je torej soda. Preden nadaljujemo, postavimo dodatni pogoj: $\int_0^x f(x) dx = F(x)$ naj eksistira in naj ne bo identično enak nič.* Ker je $f(x)$ soda funkcija, mora biti $F(x)$ liha. Kajti

$$\int_{-x}^x f(u) du = 2 \int_0^x f(u) du \text{ ali } F(x) - F(-x) = 2 F(x)$$

in odtod je res $F(x) = -F(-x)$. Integral $F(x)$ je seveda zvezna funkcija.

Funkcija $f(x)$ pa je tudi odvedljiva. Da to uvidimo, integrirajmo enačbo (9) na y pri stalnem $x = x_0$

$$F(x_0 + y) - F(x_0 - y) = 2 f(x_0) F(y) + C(x_0)$$

Če postavimo $y = 0$ in upoštevamo, da je $F(0) = 0$, dobimo takoj vrednost integracijske stalnice $C(x_0) \equiv 0$. Potemtakem velja za vsak x in y

$$F(x + y) - F(x - y) = 2 f(x) F(y) \quad (10)$$

* Dokazati je mogoče, da je pogoj $F(x) \neq 0$ vedno izpolnjen. To pove enačba $1 + f(2x) = 2 f^2(x)$, ki jo dobimo iz (9) za $y = x$.

in z zamenjavo x in y ter upošteva je lihost funkcije $F(x)$

$$F(x+y) + F(x-y) = 2f(y)F(x) \quad (11)$$

Ker $F(x)$ po hipotezi ni identično enak nič, moremo prav gotovo najti kak y_0 tako, da je $F(y_0) \neq 0$. Ako torej postavimo v (10) za y vrednost y_0 , moremo iz enačbe izraziti $f(x)$ takole

$$f(x) = [F(x+y_0) - F(x-y_0)]/2F(y_0)$$

Odtod se vidi, da je funkcija $f(x)$ zvezna, saj je izražena z zvezno funkcijo $F(x)$. Zato je funkcija $F(x)$ odvedljiva in $F'(x) = f(x)$. Ker pa je $f(x)$ izražena z odvedljivo funkcijo $F(x)$, je tudi sama odvedljiva.

Ker je funkcija $f(x)$ soda, mora biti $f'(0) = 0$, kajti za $h \rightarrow 0$ je $\lim [f(h) - 1]/h = \lim [f(h) - 1]/(-h) = 0$.

Odvajajmo sedaj enačbi (10) in (11) in sicer prvo na x drugo pa na y , pri čemer je druga spremenljivka vsakokrat stalna. Tako dobimo

$$f(x+y) - f(x-y) = 2f'(x)F(y) \quad \text{in} \quad f(x+y) - f(x-y) = 2f'(y)F(x)$$

Za $y = y_0$ dobimo od tod $f'(x) = F(x)f'(y_0)/F(y_0)$. Ker je odvod $f(x)$ izražen z odvedljivo funkcijo $F(x)$, moremo torej očitno odvajati naprej in tako dobimo, upošteva je zvezo $F'(x) = f(x)$,

$$f''(x) = \varepsilon k^2 f(x), \text{ kjer je } k^2 = |f'(y_0)/F(y_0)| \text{ in } \varepsilon = \pm 1 \quad (12)$$

Ta linearna diferencialna enačba drugega reda, na katero smo reducirali našo funkcionalno enačbo (9), pa ima glede na vrednosti ε , sledeče rešitve

$$\text{za } \varepsilon = -1: f(x) = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx;$$

$$\text{za } k = 0: f(x) = C_1 + C_2 x;$$

$$\text{za } \varepsilon = 1: f(x) = C_1 \cosh kx + C_2 \sinh kx.$$

Ker pa mora biti $f(0) = 1$ in $f'(0) = 0$, lahko konstanti C_1 in C_2 določimo in dobimo končno kot rešitve enačbe (12):

$$\text{za } \varepsilon = -1: f(x) = \cos kx, \text{ za } k = 0: f(x) = 1, \text{ za } \varepsilon = 1: f(x) = \cosh kx.$$

Lahek račun pokaže, da ustrezajo te funkcije tudi prvotni funkcionalni enačbi (9).

Enačba (12) pa pove še več: Jamči nam za eksistenco sukcesivnih odvodov funkcije $f(x)$. Ker je $f(0) = 1$ in $f'(0) = 0$, dobimo iz nje z zaporednim odvajanjem vrednosti za $f^{(n)}(0)$ in sicer je $f^{(2n)}(0) = \varepsilon^n k^{2n}$, $f^{(2n+1)}(0) = 0$. Iz teh vrednosti vidimo, da smemo funkcijo $f(x)$ razvrstiti v Taylorjevo vrsto: $f(x) = \sum \varepsilon^n (kx)^{2n}/(2n)!$. Tu gre n od 0 do ∞ . Treba nam je le še vpeljati novo spremenljivko $u = kx$, pa imamo za $\varepsilon = -1$ vrsto $\sum (-1)^n u^{2n}/(2n)!$ in za $\varepsilon = 1$ vrsto $\sum u^{2n}/(2n)!$. Skladno z zgornjimi rešitvami enačbe, je vrednost prve vrste $\cos u$, vrednost druge pa $\cosh u$.

PROTONSKI SINKROTRON ZA 30 GeV*

A. PETERLIN

Evropsko središče za jedrske raziskave (Centre Européen des Recherches Nucléaires, CERN) s sedežem v Ženevi si je postavilo nalogo, da zgradi dva velika pospeševalnika, relativnostni ciklotron za 600 MeV (skupina z Bakerjem na čelu) in protonski sinkrotron za 30 GeV (skupina z Dahlom in Gowardom). S prvim naj bi se raziskovali mezoni π in μ ter njihova povezava z jedri, drugi pa naj bi služil prav za ustvarjanje težjih osnovnih delcev, to je mezonov τ , K, V, za rešitev vprašanja, ali obstaja negativni »antiproton«, in za študij povezave teh delcev z nukleoni.

Že ciklotron za 600 MeV bo največji stroj take vrste na svetu, vendar ne nastopajo pri njegovi konstrukciji kakšni posebni novi principi, ki bi jih ne bili preskusili na že zgrajenih strojih. Precej drugačna pa je stvar s sinkrotronom, ki je za celo velikostno stopnjo nad največjim pospeševalnikom na svetu, kozmotronom v Brookhavenu, ki daje 2,2 GeV. Gre tu za korak v precej neznan svet, ki zahteva vestno pretehtanih odločitev. Zato je bila od 26. do 28. oktobra 1953 posebna konferenca v Ženevi, kjer so posamezne skupine, ki sodelujejo pri načrtovanju sinkrotrona, poročale o svojem delu in predračunih. Ob tej priliki so pokazali svoje načrte tudi drugi laboratoriji (E. D. Courant iz Brookhavskega laboratorija, Upton, N. Y.; M. S. Livingston iz M. I. T. in Harvardske univerze, Cambridge, Mass.; M. G. White iz Princetona, N. J.; R. R. Wilson iz Cornellske univerze, Ithaca, N. Y.; D. W. Kerst iz Urbane, Ill.; O. Wernholm iz Stockholma), ki nameravajo graditi pospeševalnike preko 1 GeV. O svojih izkušnjah s takim pospeševalnikom pa sta poročala E. D. Courant (kozmotron 2,2 GeV) in L. U. Hibbard (Birmingham, 1 GeV).

Kaj moremo pričakovati pri energijah nad 1 GeV? Vezavne energije nukleonov v jedru — približno 8 MeV — so v primeru s temi energijami tako majhne, da jih smemo popolnoma zanemariti, nukleoni v jedru se proti takim zadetkom vedejo kot prosti nukleoni. S tem odpadejo vse posebnosti jeder, ostaneta nam le še proton in nevtron ter njuno sodelovanje z vpadačim delcem. Prišli smo tako iz območja jedrske fizike, ki obsega zaradi velikega števila različnih jeder na tisoče reakcij, v fiziko osnovnih delcev, kjer nastopa le par proton — nevtron in različni mezoni. Zaradi manjšega števila delcev je gotovo tudi število reakcij in efektov znatno manjše kot v jedrski fiziki, tako da je računati s tem, da se bo dalo to področje razmeroma hitro podrobno raziskati, če bomo le imeli na razpolago dovolj velike energije. Zdi se, da se prav naglo bližamo dokončni razjasnitvi osnovnih problemov fizike, saj ceni G. Gamov, da bomo v prej kot 50 letih poznali in razumeli dejansko zgradbo sveta iz osnovnih delcev, tako da bo ostalo za kasnejša raziskovanja le poglobljanje in podrobnejša proučevanja fizikalnih zakonitosti in njihova praktična uporaba, ne da bi mogli računati še na kakšna globlja presenečenja s popolnoma novimi odkritji.

Ker nastopi kot tarča za delce (protone) z energijo 1 GeV ali več le še posamezni proton ali nevtron, ki ima enako maso kot pospeševalni delec, je za sprožitev reakcije pri trku na razpolago le del energije vpadačega delca, kot bomo to videli iz sledečega računa.

* The Theory and Design of an Alternating-Gradient Proton Synchrotron, Genève, 26—28 Oct. 1953.

Pri trku dveh delcev v splošnem ne moremo porabiti za reakcijo med njima vse energije delcev, $U_1 + U_2$, ker bi sicer ne mogli izpolniti zahteve po ohranitvi gibalne količine

$$G_1 + G_2 = G_1''' + G_2''' = G_T \quad (1)$$

Tu pomeni G_T gibalno količino težišča, G in G''' pa gibalno količino delcev pred trkom in po njem. V težiščnem sistemu, to je v sistemu, ki se giblje s hitrostjo težišča, je pa celotna gibalna količina obeh delcev nič

$$G_1' + G_2' = G_1'' + G_2'' = 0 \quad (2)$$

vsa energija delcev v tem sistemu, $U_1' + U_2'$, se more porabiti za reakcijo. Ker velja

$$U = U_1 + U_2 = U_T + U_1' + U_2' = U_T + U' \quad (3)$$

moremo izkoristiti tem večji del prvotne energije, čim manjši je delež težiščne energije U_T .

Zanima nas prav primer trka pospešenega delca 1 z mirujočim delcem 2. V območju klasične mehanike dobimo iz začetnih vrednosti

$$U = U_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \quad (4)$$

$$G_T = (m_1 + m_2) v_T = m_1 v_1 \quad (5)$$

za energijo težišča

$$U_T = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot U \quad (6)$$

tako da ostane za reakcijo med delcema energija

$$U' = U - U_T = \frac{m_2}{m_1 + m_2} U \quad (7)$$

Delež U' je tem večji, čim težji je zadeti delec v primeru z vpadajočim. Pri enaki masi obeh (trk protona s protonom ali nevtronom) je U' natančno $U/2$.

Dokaj bolj neugodne pa postanejo razmere pri zelo velikih hitrostih $v/c = \beta \rightarrow 1$, kjer se moramo poslužiti relativnostne mehanike. Hitro se gibajočim, vpadajočim delcem se znatno poveča masa, s tem se pa seveda po analogiji z enačbo (7) tudi močno zmanjša delež prvotne energije, ki je prost za reakcijo med delcema.

Pri enakih masah obeh delcev, $m_1 = m_2 = m$, imamo v težiščnem sistemu

$$\beta_1' = -\beta_2' = \beta \quad (8)$$

od koder sledi po pravilu o seštevanju hitrosti za laboratorijski sistem

$$\beta_2 = \frac{\beta_T + \beta_2'}{1 + \beta_T \beta_2'} = 0 \quad \beta_T = -\beta_2' = \beta \quad (9)$$

$$\beta_1 = \frac{\beta_T + \beta_1'}{1 + \beta_T \beta_1'} = \frac{2\beta}{1 + \beta^2} \quad (10)$$

Imamo tako za energijo v laboratorijskem sistemu

$$U = U_1 = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta_1^2}} - 1 \right) = mc^2 \cdot y \quad (11)$$

in za energijo v težiščnem sistemu

$$U' = U_1' + U_2' = 2 mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right) = mc^2 (\sqrt{2(y+2)} - 2) \quad (12)$$

to je

$U = 1 \text{ GeV}$	$2,2 \text{ GeV}$	10 GeV	20 GeV	30 GeV
$U' = 0,45$	$0,89$	$2,83$	$4,52$	$5,83 \text{ GeV}$

Za reakcijo razpoložljiva energija raste približno s korenem energije vpadačnega delca, če jo izrazimo v mnogokratnikih mirovne energije mc^2 .

Za ustvaritev mezona π potrebujemo $0,14 \text{ GeV}$. Da ga moremo res opazovati, mora imeti še nekaj kinetične energije, tako da moramo računati z nekako $0,2 \text{ GeV}$ za posamezni mezon π . Mezon τ ali K z mirovno maso $0,6 \text{ GeV}$ bi po tej oceni zahteval vsaj $0,9 \text{ GeV}$. Laže je z delci V_0' , ki predstavljajo verjetno le močno vzbujene nevtrone, za katere moremo porabiti še mirovno maso vpadačnega protona ali nevtrona, tako da nam zadošča že energija okoli $0,4 \text{ GeV}$. Z ustvaritev negativnega protona pa je potrebnih vsaj 3 GeV . Ker se verjetnost vseh takih procesov zelo hitro veča z rastočim presežkom energije — pri mejni energiji, ki ravno še zadošča za proces, je verjetnost navadno tako majhna, da pojava skoraj ne moremo opazovati — leži glavna vrednost novega pospeševalnika za 30 GeV s $5,83 \text{ GeV}$ koristno izrabljive energije prav v tem, da bo zaradi znatnega presežka energije mogoče opazovati v zadostnih množinah ustvarjanje vseh doslej znanih delcev, posamič in v skupinah po 2, 3 ali še več, in odgovoriti na vprašanje, ali obstaja negativni proton, česar z današnjimi sredstvi (Brookhaven, $0,89 \text{ GeV}$ v težiščnem sistemu) ne moremo doseči.

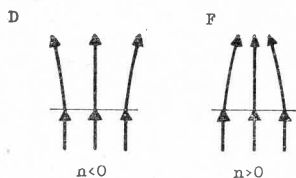
Prvotni načrti za CERN-ov veliki pospeševalnik so računali z energijo okoli 3 GeV . Sinkrotron bi bil zgrajen na prav istem principu kot pospeševalnik za 1 GeV v Birminghamu in kozmotron za $2,8 \text{ GeV}$ v Brookhavenu. V času pa, ko so pri slednjem začeli z obratovanjem, se je izkazalo, da se dajo znatno zmanjšati razsežnosti pospeševalne cevi — od doslej navadnih $28 \times 40 \text{ cm}$ na $8 \times 12 \text{ cm}$ — in s tem seveda tudi velikost magnetov, če nadomestimo skoraj homogeno vodilno magnetno polje z močno nehomogenim, pri katerem si izmenoma sledijo odseki, ki žarek fokusirajo in defokusirajo (Christophilos, Courant, Livingstone, Snyder). Prihranek je tako velik, da moremo z istimi sredstvi zgraditi pospeševalnik s skoraj 10-kratno energijo. Zato so v CERN-u takoj spremenili prvotne načrte in se odločili, da zgrade namesto klasičnega sinkrotrona za 3 GeV sinkrotron na alternirajoči gradient za 30 GeV .

Za kaj gre pri tem novem principu? Ko razlagamo delovanje pospeševalnika, se zaradi preprostejše predstave omejimo le na delec na idealni ravnotežni poti, pri sinkrotronu torej na delce, ki se gibljejo po idealnem krogu r , na katerem vlada ves čas ista gostota B , če se ne

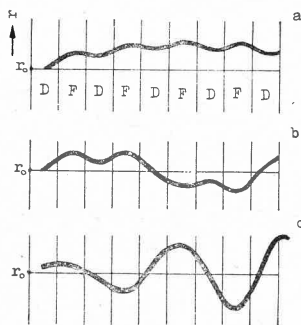
oziramo na spremembe, ki nastopajo zaradi pospeševanja. V resnici pa moramo delati vedno s celim šopom delcev, katerih hitrosti se v radialni in vertikalni smeri razlikujejo od hitrosti na idealni krožni poti. Pri popolnoma homogenem polju bi nam odmiki v radialni smeri dali premaknjene kroge, odmiki v vertikalni smeri pa vijačnice, tako da bi po nekaj obhodih in pri nadaljnjem pospeševanju delci zadeli na stene posode in bili tako za pospeševalnik izgubljeni. S primernim pojemanjem magnetne gostote z rastočim polmerom

$$B = B_0 \left(1 + n \frac{(r - r_0)}{r_0} + \dots \right) \quad -1 < n < -1/2 \quad (13)$$

se nam posreči spraviti delce z odmiki v radialni in vertikalni smeri spet nazaj v bližino idealne poti in tako preprečiti preveliko širjenje prvotnega



Sl. 1. Vpliv razpršilnega ($n < 0$) in zbiralnega ($n > 0$) gradienta na vzporeden šop žarkov. Vrisani so odmiki od ravnotežnega kroga s polmerom r_0 . Srednji tir poteka na mestu z magnetno gostoto B_0 .



Sl. 2. Gibanje delca v magnetnem polju z alternirajočim gradientom: a) in b) stabilna tira, c) nastop nestabilnosti, ko odmiki od ravnotežnega tira stalno rastejo. D = razpršilni, F = zbiralni odsek.

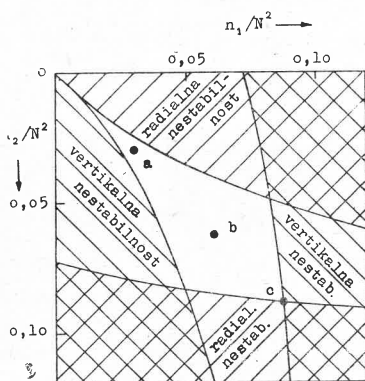
šopa. Vendar moramo vzeti precej velik prerez pospeševalne cevi, da dobimo še znaten tok delcev, in sicer tem večji, čim večkrat morajo delci popisati vso krožno pot.

Dokaj bolj ugodne pa postanejo razmere, če si izberemo znatno večje pozitivne in negativne vrednosti za inhomogenostni indeks n , ki si izmenoma sledijo vzdolž žarkove poti. Pri $n > 0$ se vzporeden šop žarkov zožuje (zbiralni vpliv, fokusiranje F), pri $n < 0$ pa razprši (razpršilni vpliv, defokusiranje D), sl. 1. Pri CERN-u so se odločili za $n \sim 400$. V odseku z $n = +400$ se bo navzven usmerjeni delec krepko odklonil nazaj proti idealnemu tiru, verjetno s preveliko krivino, naslednji odsek z $n = -400$ pa se spravi na znatno manj ukrivljeno pot. Kot kaže slika 2 se po nekaj takih izravnavanjih v izmenoma si sledečih zbiralnih in razpršilnih odsekih delec dovolj približa idealnemu ravnotežnemu tiru in niha okrog njega z razmeroma veliko valovno dolžino (betatronsko nihanje). Prav podobne so razmere za delec, ki je usmerjen navzdol ali navzgor iz ravnine ravno-

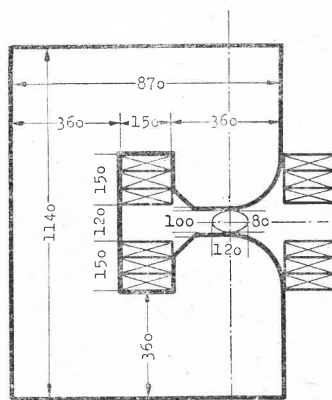
težnega tira, le da je pri tem vloga zbiralnih in razpršilnih odsekov zamanjana.

Podrobnejša raziskava pokaže, da obstaja končen šop v radialni in v navpični smeri stabilnih poti pri primerni izbiri pozitivnih (n_1) in negativnih ($n_2 < 0$) indeksov ter števila (N) odsekov obeh vrst na krožnem tiru. Slika 3 nam prav kaže kravati podobno območje stabilnosti kot funkcijo obeh parametrov n_1/N^2 in n_2/N^2 . Somernost slike vodi do izbire $n_1 = n_2 = n$. Iz $n = 392$ in $N = 117$ sledi delovna lega projektiranega pospeševalnika $n/N^2 = 0,03$.

Pospeševalna cev meri v vodoravni smeri 120 mm, v navpični 80 mm. V tem preseku mora imeti magnetno polje zahtevano linearno obliko (13). S posebnimi računi so upoštevali tudi vpliv nadaljnjega nelinearnega člena na stabilnost tirov (Hine).



Sl. 3. Stabilnostni diagram z vrisano delovno točko (a) protonskega sinkrotrona pri $n_1/N^2 = -n_2/N^2 = 0,03$. Točke a, b, c ustrezajo tirov na sl. 2.



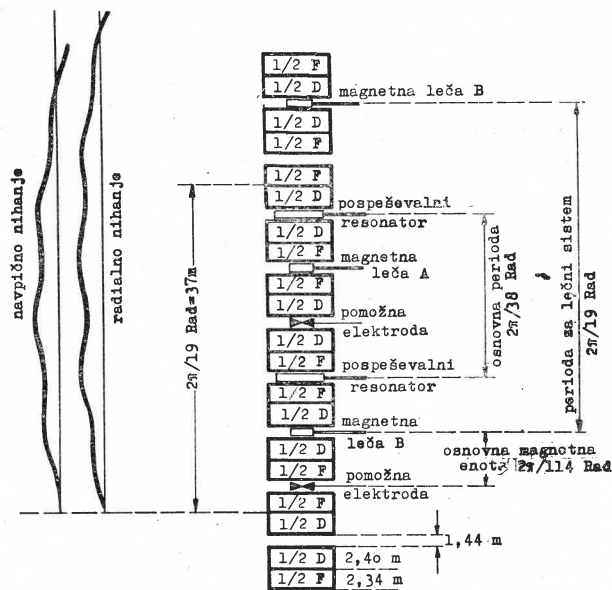
Sl. 4. Prerez magneta z negativnim n (središče krožnega tira na levi). Naslednji odsek s pozitivnim n dobimo, če naslikani prerez zrcalimo okoli vrisane navpične osi.

Prerez magneta (Grivet, Regenstreif, Jacobsen) vidimo na sl. 4. Vse mere so v milimetrih. Po en zbiralni in razpršilni magnet ($1/2 F = 2,34 \text{ m} + 1/2 D = 2,40 \text{ m}$) skupaj tvorita osnovno enoto, iz katerih je zgrajen ves pospeševalnik na ta način, da si sledita vedno po dva razpršilna oz. po dva zbiralna magneti, ki tvorita posamezni razpršilni oz. zbiralni odsek dolžine 4,80 oziroma 4,68 m (slika 5). Krivinski polmer ravnotežnega tira znaša 86 m, ustrezna maksimalna magnetna gostota $B_0 = 1,2 \text{ Vs/m}^2$. Vsaki osnovni enoti sledi presledek brez polja dolžine 1,44 m, po katerem je tir premočrten. V ta presledek pridejo magnetne štiripolne leče za dodatno zožitev žarka, visokofrekvenčne elektrode za pospeševanje delcev in merske priprave za kontrolo žarka. Zaradi teh ravnih delov tira se celotni polmer pospeševalnika poveča na 112 m, dolžina ravnotežnega tira pa doseže 704 m.

Kako majhne so razsežnosti magneta, vidimo iz celotne teže železa (4000 ton) in bakra (250 ton), ki je enaka kot pri velikem ciklotronu v

Berkeleyu za 400 MeV. Amplituda tokovne gostote znaša 480 A/cm^2 , porabljena moč 1700 kW, maksimalna moč 28 000 kVA, v eni periodi nakopičena magnetna energija pa 14 000 kWs. Vse te vrednosti so le malo večje kot pri dosedanjih pospeševalnikih, ki ne gredo preko 1 GeV, kar prav jasno kaže velike prednosti novega principa sinkrotrona na alternirajoči magnetni gradient.

Na sliki 5 se lepo vidi polovična valovna dolžina vodoravnega in navpičnega betatronskega nihanja delcev. Z rastočo energijo postaja va-

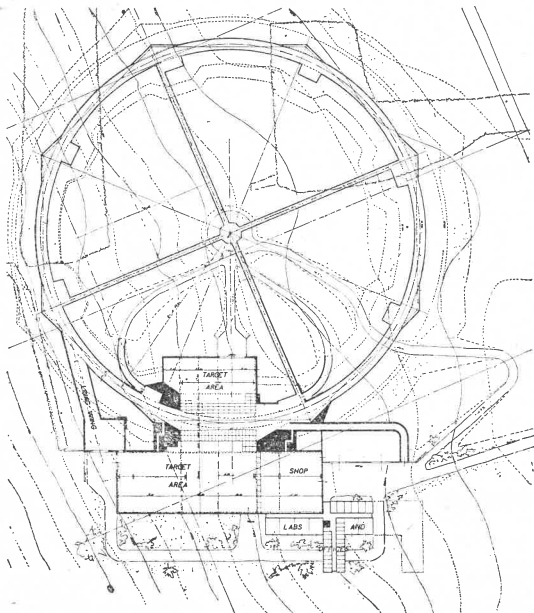


Sl. 5. Razporeditev magnetov (D, F), pospeševalnih elektrod, magnetnih leč in kontrolnih elektrod. Na levi sliki navpičnega in vodoravnega betatronskega nihanja. Različnost valovne dolžine je posledica različne dolžine zbiralne in razpršilne enote.

lovna dolžina vedno večja in doseže končno prav dolžino oboda krožnega tira. Pri tej kritični energiji, ki je odvisna od n , N in razmerja dolžine tira v magnetnem polju in izven njega — pri sedanjem načrtu je $E_k = 6,7 \text{ GeV}$ — postane tir nestabilen, vsak odmik od ravnotežnega tira se vedno bolj povečuje in končno bi morali izgubiti vse delce, če ne bi zaradi neprestanega pospeševanja prišli razmeroma hitro čez kritično energijo (Johnsen).

Zelo veliko računov (Adams, Lüders) je skušalo osvetliti vprašanje, s kakšno natančnostjo je treba zgraditi pospeševalnik: kako velike napake so dopustne v B , v n , v legi tira, v posameznih odsekih, kakšen je vpliv sipanja na molekulah plinskih ostankov v pospeševalni cevi itd. Po sedanjih računih smejo doseči napake v geometriji le $0,5 \text{ mm}$ (pri $r = 112 \text{ m}$ pomeni to natančnost $4 \cdot 10^{-6}$), v indeksu n le 1 ($0,25 \%$). Sipanje na molekulah plina pri tlaku 10^{-5} tor smemo praktično zanemariti pri energijah nad 50 MeV . Torej bo treba poslati protonski žarek v pospeševalnik ob začetku cikla vsaj s tako energijo. Taka zahteva pa sledi tudi iz čisto magnetnih razlogov. Magnetna gostota ima pri 50 MeV vrednost le 119 G ,

kar je izredno malo. Izbrati je treba prav izvrstno železo z izredno majhno remanenco, da bo mogoče doseči po vsem tiru z zadostno enakomernostjo tako majhne gostote in vzdržati konstanten n pri vsem prehodu od 119 G na 12 kG ob zaključku pospeševanja. Injekcijsko energijo naj bi preskrbel poseben linearni pospeševalnik, ki naj bi dal $7,5 \mu\text{s}$ dolg sunek jakosti 3 mA z $1,4 \cdot 10^{11}$ protoni. Odprtina vstopajočega šopa mora biti pod $9 \cdot 10^{-8}$ steradiana pri prerezu 1 cm^2 . Pod takimi pogoji je računati, da bi dobili iz protonskega sinkrotrona v vsakem ciklu 10^9 protonov z energijo 30 GeV. Pospeševalni del cikla traja 1 s, vsa perioda pa 5 s.



Sl. 6. Tloris stavbe za protonski sinkrotron.

Visokofrekvenčni pospeševalni sistem (Schmelzer) sestavlja 38 oscilatorjev z močjo 5 kW, ki nihajo vsi z isto fazo. Maksimalna napetost na pospeševalnih elektrodah znaša 3500 V. V povprečju pridobe delci pri enem obhodu 75 keV. Frekvenca raste od 5 MHz na začetku do 16 MHz pri koncu pospeševanja ustrezno naraščanju magnetnega polja. Napaka v frekvenci sme znašati manj kot 10^{-3} v začetku in manj kot 10^{-6} pri prehodu skozi kritično energijo, ko se betatronsko pospeševanje pretvori v sinkrotronsko. Tako natančnost dosežemo tako, da magnetno polje neposredno krmili spreminjanje frekvence. Za meritev magnetnega polja služi ploščica iz germanija, v kateri nastopa prečni Hallov efekt nekako $3 \mu\text{V} \cdot \text{m}/\text{Gauss}$. A. Dobljeni signal spremeni poseben krog v napetost E oziroma tok I , ki raste kot $B/\sqrt{B^2 + B_0^2}$ z $B_0 = 300 \text{ G}$ prav tako, kot se mora spreminjati pospeševalna frekvenca pri upoštevanju relativnostnega povečanja mase protonov. Tok I pretvorimo v frekvenco z jedrsko indukcijo. Larmorjeva precesija jedrskih spinov v magnetnem polju krmilnega toka je neodvisna od temperature in geometrije vzorca, sledi brez za-

kasnitve spremembi toka in daje tako z zadostno natančnostjo prav tisto frekvenco, ki jo zahteva magnetno polje pospeševalnika. Treba je to nihanje samo še primerno ojačiti in ga speljati na pospeševalne elektrode, ki so uglaseni feritni oscilatorji. Uglasitev spreminjamo v prav istem ritmu kot frekvenco s programsko določenim magnetiziranjem feritov.

Poglavje zase predstavlja zaščita pred žarkovjem (Citron). Vzdolž vsega tira nastopa zavorno sevanje zaradi radialnega pospeška in zaradi zadevanja delcev ob stene. Zato je postavljen ves pospeševalnik v 6 m širok in 4 m visok betonski rov, pokrit z več metrov debelo plastjo zemlje. Prostor za opazovalce in kontrolno osebje, ki je ob tarči, pa je zavarovan s 5,5 m debelo betonsko steno, ki naj bi dala več kot 10-kratno varnost. Za preračunavanje zaščitnega učinka so služila predvsem opazovanja o tvorbi sekundarnih delcev (nevtroni, mezeni) pri kozmičnih žarkih.

Načrt stavbe za pospeševalnik kaže slika 6. Okrogli rov s polmerom 112 m ima 10 stolpov, ki služijo za mehansko in optično določevanje natančne krožnice. Na desni strani je 90 m dolg hodnik za linearni pospeševalnik, ki naj daje protone 50 MeV, na levi in na obeh straneh tarče pa so prostori za posamezne aparature in za poskuse z žarkom samim in s sekundarnimi delci. O velikosti teh dobimo neko predstavo, če primerjamo tloris 1800 m² enega teh laboratorijev s tlorisom 1200 m² glavnega poslopja Fizikalnega inštituta Jožefa Stefana. Stroški so preračunani na 70 milijonov švicarskih frankov, od česar bi odpadlo 21 milijonov na magnet, 4 na visokofrekvenčni sistem, 1 na vakuumske naprave, 6 na linearni pospeševalnik, 3 na kontrolne naprave, 17 na stavbe (13 500 m²) in 18 na osebne izdatke. Pospeševalnik naj bi se izdelal v 7 letih, tako da pride na leto 10 milijonov stroškov, ki se razdele na člane CERN v razmerju njihovega narodnega dohodka. Na Jugoslavijo odpadeta po tem ključu malo manj kot dva odstotka.

Sinkrotron podobne konstrukcije in velikosti nameravata graditi tudi fizikalna laboratorija v Brookhavenu in v Cambridgeu.* V sledeči pre-

	CERN	Brookhaven	Cambridge
Končna energija	30 GeV	25—35 GeV	15 GeV
krivinski polmer tira	86 m	80 m	37 m
maksimalni B	12 kG	11—15 kG	14 kG
n	392	484	310
število magnetnih enot	57	60	48
dolžina ravnih delov brez polja	1,4 m	1,5 m	
prerez pospeševalne cevi	8 × 12 cm	7,5 × 10 cm	4,4 × 10 cm
energija vstopajočih delcev	50 MeV	50 MeV	4 MeV
prirastek energije na obhod	75 keV	162 keV	
pospeševalni čas	1 s	1 s	
perioda	5 s	3,3 s	
teža magnetov	4000 t		620 t
teža bakra	250 t		142 t
predvidena cena	16 · 10 ⁶ \$	20 · 10 ⁶ \$	7,5 · 10 ⁶ \$

* Skupen projekt Harvardske univerze in Tehniške visoke šole (Massachusetts Institute of Technology).

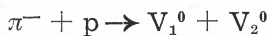
glednici so navedeni glavni podatki vseh treh načrtov, ki se neverjetno dobro skladajo, kar priča o solidnosti in zadostni pretehtanosti načrtov.

Vendar zatrjujejo vse tri skupine, da njihovi podatki niso dokončni, ker utegne natančnejša računska analiza še zahtevati kake spremembe na posameznih elementih, čeprav ni računati s kakimi bistvenimi popravki. Gotovo pa se bo razvila zelo huda tekma, kdo bo prvi uresničil svoj načrt in spravil pospeševalnik v pogon, ker bo imel s tem v rokah res veliko prednost pri raziskavanju osnovnih delcev. O slednjem je prepričal vse udeležence ženevske konference prav nazorno E. D. Courant, ki je poročal o nekaterih doslej izvršenih poskusih na kozmotronu v Brookhavenu, ki je v pogonu od decembra 1952.

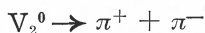
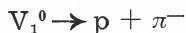
Doslej se še ni posrečilo dobiti žarek pospešenih protonov iz pospeševalnika. Zato so se mogli izvršiti le poskusi s tarčami v ravnem odseku tira, kjer ni magnetnega polja. Pri sedanji razporedbi so poskusom dostopni v glavnem sledeči, iz tarče izbiti sekundarni delci: izmenjalni nevtroni s skoraj polno energijo vpadajočih protonov, negativni mezioni π^- do energije 1,5 GeV, ki jih magnetno polje odkloni v nasprotno smer, kot poteka protonski tir, in močno, več kot za 30° odklonjeni delci π^- , π^+ , p, n, γ , ki jih ločijo s posebnimi dodatnimi magnetnimi analizatorji. Prvi izstopajo iz vodilnega magneta neodklonjeni v podaljšku protonskega žarka, drugi se odklonijo v nasprotno smer kot protonski žarek, tretji pa izstopajo v prostoru, ki je brez magnetnega polja. Za opazovanje služijo fotografske emulzije, števci in predvsem difuzijske meglične celice, polnjene z vodikom.

V toku izmenjalnih nevtronov so mogli zaslediti februarja 1953 prvi umetni mezon V^0 , vsega 8 v nekaj tisoč snimkih. Iz energijske analize sklepajo, da pridemo do delca V^0 z dodajanjem energije posameznemu nukleonu. Delec V^0 predstavlja torej vzbujen nevtron.

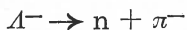
Pri mezonih π^- energije 1,5 GeV so odkrili nekaj primerov, ko se sled nenadno konča, v bližini pa se pojavita dve viličasti sledi, ki ju je po vsej verjetnosti sprožil nenabit delec, izhajajoč iz razpada mezona. Razlaga pojava gre po sledeči shemi. Mezon π^- zadane proton, pri čemer se ustvarita dva nenabita delca (gl. tabelo str. 116; Obzornik 1953)



ki dasta oba viličaste sledi



Zelo verjetno nastopata sploh vedno oba delca V_1^0 in V_2^0 hkrati. Poleg nevtralnih težkih delcev so odkrili tudi negativno nabit delec Λ^- z maso približno 2350 me, ki naj bi tudi nastal pri trku mezona π^- s protonom

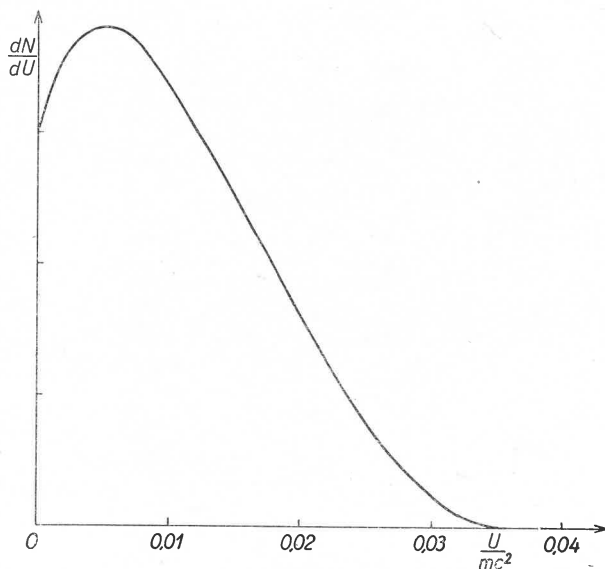


V nasprotju s številnimi pari mezonov pa niso našli nobenega primera, kjer bi nastopili hkrati 3 ali več mezonov. Gotovo so za tak proces potrebne večje energije.

NEVTRINO

M. ŠVIKARŠIČ

Pri radioaktivnem razpadu β se je že zgodaj zazdelo, da z energijo izsevanih elektronov nekaj ni v redu. Že leta 1914 je Chadwick odkril, da imajo ti elektroni zvezen energijski spektrum z ostro zgornjo mejo (sl. 1). To je navidez v nasprotju z energijskim zakonom in zakonom ohranitve gibalne količine. Da to uvidimo, zapišimo obe enačbi, in sicer zaradi enostavnosti kar v klasični aproksimaciji: $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \Delta U$; $m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$. Tu pomeni ΔU pri razpadu sproščeno energijo, v_1 hi-



Sl. 1. Tritijev spekter beta.

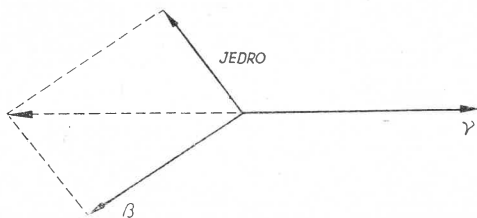
trost izstopivšega elektrona, v_2 hitrost odrinjenega jedra, m_1 in m_2 pa obe masi. Iz teh enačb lahko izračunamo kinetično energijo elektrona: $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = [m_2/(m_1 + m_2)] \Delta U \approx \Delta U$. Prav to energijo bi morali imeti vsi elektroni. Energijski spektrum izsevanih elektronov bi imel samo eno »črto«.

Sprva so si razlagali različno hitrost elektronov kaj enostavno. Menili so, da zapuste elektroni atomsko jedro sicer z enakimi hitrostmi, da pa izgube različno velike dele prvotne energije pri prodiranju skozi snov. Druga možna razlaga pa je ta, da odleti obenem z elektronom še kakšen delec. Potem bi imeli dve enačbi za tri neznanke in zato neskončno mnogo rešitev. $\frac{1}{2} m_1 v_1^2$ bi mogla imeti vsako vrednost od 0 do maksimalne vrednosti. Energijski spektri vseh treh delcev bi bili torej zvezni.

Prvo razlago sta leta 1927 dokončno ovrgla Ellis in Wooster, ki sta kalorimetrično izmerila pri radioaktivnem razpadu β radija E dobljeno toploto. Ugotovila sta, da toplota, ki v povprečju pride na posamezni elektron, ni enaka maksimalni energiji elektrona, ampak povprečni

energiji; le-ta je nekaj manjša od polovice maksimalne. Po drugi strani pa lahko iz razlike Δm med mirovno maso začetnega jedra in vsote mirovnih mas končnega jedra in elektrona po enačbi $\Delta U = \Delta mc^2$ izračunamo razpadno energijo ΔU . Račun pokaže, da je ta energija enaka maksimalni energiji elektrona. Zdi se torej, da zadoščajo energijskemu zakonu le elektroni z maksimalno energijo, ki jo kaže zgornja meja energijskega spektra. Za ostale elektrone zakon o ohranitvi energije ne bi veljal, če bi bilo res, da odleti iz jedra samo elektron.

Podobno nesoglasje kot pri energiji kaže radioaktivni razpad β tudi pri gibalni in vrtilni količini. Gibalno količino izsevanih elektronov lahko merimo iz ukrivljenosti tirov, ki jih popišejo ti delci v magnetnem polju. Meritve kažejo, da je vsota gibalnih količin elektrona in odrinjenega jedra enaka nič samo, kadar je energija elektrona enaka maksimalni. Za vrtilno količino pa vemo, da ima pri kateremkoli delcu lahko le vrednost $(h/2\pi)\sqrt{j(j+1)}$. Tu je h Planckova konstanta ($h = 6,625 \cdot 10^{-34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$), j pa *spinsko kvantno število* ali kratko *spin*. To število je ali celo število ali pa polovica celega števila. Elektron, proton in nevtron imajo spin $\frac{1}{2}$. Pri sestavljenih delcih se ti spini seštevajo ali odštevajo. Če vsebuje jedro liho število delcev, ima njegov spin lahko vrednosti $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \dots$. Če pa je število nukleonov sodo, je spin jedra lahko 0 ali 1 ali 2 itd. Pri razpadu β



Sl. 2. Gibalne količine elektrona, jedra in nevtrina po razpadu beta.

odleti iz jedra elektron. Elektron pa ni gradnik jedra, ampak nastane pri pretvorbi nevtrona v proton. Število nukleonov v jedru ostane pri razpadu β nespremenjeno; spin jedra mora torej ostati nespremenjen ali pa se spremeni za $\pm 1, \pm 2 \dots$. Po drugi strani pa odnese elektron spin $\frac{1}{2}$, kar je navzkriž z omenjenim pravilom za seštevaje spinov. S klasično prisposodbo bi lahko rekli, da tudi zakon vrtilne količine ne bi veljal, če bi razen elektrona nič drugega ne odletelo iz jedra.

Da bi razložil navedena nesoglasja v treh osnovnih fizikalnih zakonih, je Pauli leta 1933 izrekel domnevo, da odleti iz jedra hkrati z elektronom še en delec, čeprav ga eksperiment ne pokaže. Po tej domnevi prevzame novi delec pri razpadu navidez izgubljeno energijo, gibalno in vrtilno količino in tako zagotovi veljavnost osnovnih fizikalnih zakonov. Delec mora biti električno nevtralen, ker pri naboju ni nobenega primanjkljaja. Ker se pri razpadu atomska masa le malo spremeni, mora imeti delec precej majhno maso, gotovo ne večjo kot elektron. Za tak delec lahko pričakujemo, da je zelo prodiren. Delec se lahko zelo približa drugim

delcem ali gre tudi skozi nje, ne da bi kakorkoli reagiral. Zato ne sme presenečati, če se je doslej izmuznil opazovanju. Razumljivo je tudi, da omenjena kalorimetrična meritev njegove energije ne more pokazati; samo elektroni se ustavijo v kalorimetru. Fermi, ki je teorijo razpada β dalje izdelal, je novi delec imenoval *neutrino*. Iz pravila za seštevanje spinov sklepamo, da ima nevtrino spin $\frac{1}{2}$.

Ali nevtrino res eksistira? To pove lahko edino poskus. Ker nevtrino nima električnega naboja, ga ne moremo odkriti direktno ne z wilsonsko kamero, ne z geigerskim števcem. Na njegovo eksistenco sklepamo zaenkrat le iz merjenja energij in gibalnih količin pri razpadu β . Da moremo napraviti natančno bilanco, je treba meriti tudi energijo in gibalno količino odrinjenih jeder. Če bi bil elektron edini delec, ki pri razpadu odleti iz jedra, bi dobilo tisto jedro, ki je oddalo hiter elektron, močan odrivni sunek. Odriv jedra, ki je oddalo počasen elektron, pa bi bil šibek. Toda izkazalo se je, da lahko dobi jedro tudi v primeru, ko odda počasen elektron, znaten odriv. To si razlagamo tako, da ima pač nevtrino, ki odleti iz jedra hkrati z elektronom, v tem primeru toliko večjo energijo. Pri meritvah te vrste so uporabljali wilsonsko kamero in razne spektrometrске metode.

Leta 1936 je Leipunski spektrometrsko raziskal energijsko porazdelitev pri razpadu $C^{11} \rightarrow B^{11} + \beta^+$ odrinjenih jeder B^{11} . Ugotovil je, da med odrinjenimi jedri znatno prevladujejo jedra z veliko kinetično energijo. Ta poskus smatrajo nekateri kot prvi dokaz za eksistenco nevtrina.

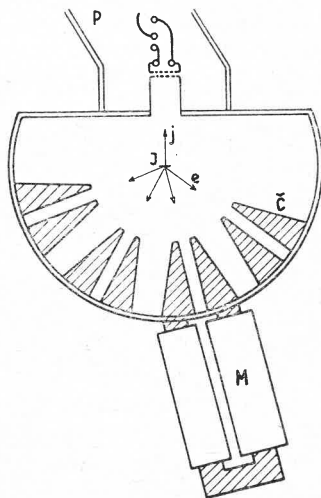
Gibalno količino nevtrina so skušali določiti z merjenjem gibalne količine elektrona in jedra ter kota med obema. Tako sta leta 1938 Crane in Halpern raziskovala z wilsonsko kamero posamezne primere razpada $Cl^{38} \rightarrow A^{38} + \beta^-$. S posnetkov sta sklepala, da je dobilo v mnogih primerih odrinjeno jedro precej večjo gibalno količino kot elektron. Razliko je pač odnesel nevidni nevtrino. Žal so bile meritve zaradi prekratkih sledi jeder premalo natančne, da bi bilo mogoče tudi izračunati, v katero smer je odletel nevtrino.

Precej bolj natančne meritve je l. 1949 in 1951 napravil Sherwin. Na zelo tanek steklen listič (300 do 500 $\mu g/cm^2$) je najprej naparil tanko plast aluminija, potem 100 do 1000 atomov debelo plast litijevega fluorida in na vrh manj kot enoatomska plast P^{32} . Ploščico je potem postavil pred odprto elektronsko pomnoževalko (glej sliko 3). Pri razpadu odrinjena jedra S^{32} padajo v pomnoževalko. Elektrone, ki prodro skozi steklo, pa love na drugi strani magnetni spektrometri. Magnetno izbrane elektrone zaznavajo na koncem spektrometrov scintilacijski števcji s kristali antracena. Hitrost odrinjenih jeder določijo tako, da s posebno koincidenčno napravo izmerijo čas, v katerem preleti odrinjeno jedro v vakuumu pot od radioaktivne površine do prve dinode elektronske pomnoževalke. Podlaga litijevega fluorida preprečuje, da bi se odrinjena jedra oblekla z elektroni iz kovinske podlage. Ta pa je spet potrebna zato, da se izravnavajo naboji, ki bi sicer s svojim poljem lahko spremenili energijo odrinjenih jeder.

Sherwin je tako za posamezni razpad izmeril gibalno količino elektrona in jedra. Določil je velikost in približno tudi smer obeh gibalnih količin. Nasprotno enaka vektorska vsota obeh je dala gibalno količino nevtrina. Ker je hitrost nevtrina enaka ali vsaj zelo blizu svetlobni hitrosti, velja podobno kot pri fotonu za energijo U , da je $U = pc$, če je p gi-

balna količina. Po drugi strani pa je Sherwin meril tudi energiji jedra in elektrona in odtod neposredno izračunal energijo nevtrina. Na oba načina dobljeni vrednosti sta se vedno ujemali bolj kot na 10 % natančno. Ker je bila v teh poskusih minimalna energija nevtrinov 0,5 MeV, je mogel Sherwin o mirovni masi nevtrina povedati le to, da je kvečjemu enakega reda velikosti kot mirovna masa elektrona (le-tej ustreza energija 0,51 MeV).

Razen pri razpadu β se pojavi nevtrino tudi pri razpadu K, pri katerem jedro absorbira elektron. Če tu ne bi bilo nevtrina, bi bilo pravilo o seštevanju spinov prav tako kršeno kot pri emisiji elektrona. Dejstvo, da se tudi pri tem razpadu odrine jedro, spet razložimo z domnevo, da

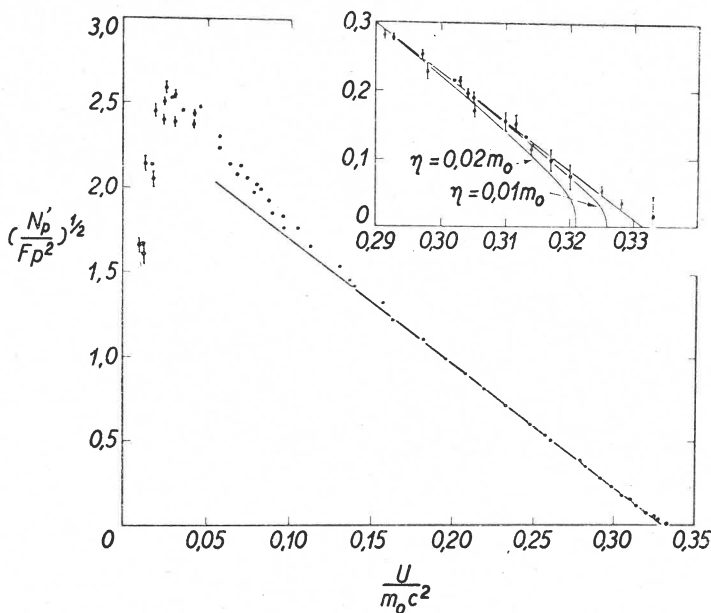


Sl. 3. Sherwinova priprava za merjenje gibalne količine elektrona in odrinjenega jedra (Physical Review, 82 53, 1951). P — pomnoževalka, M — magnet, Č — polski čevlji, J — preparat, j — odrinjeno jedro, e — elektron.

odleti neki nezaznavni delec — nevtrino. Ker lahko zanemarimo prvotno gibalno količino absorbiranega elektrona, sta gibalni količini nevtrina in odrinjenega jedra nasprotno enaki in spektrum nevtrinov je mono-energetičen. Pri razpadu K imamo torej opraviti s primerom, kakršnega smo v začetku računsko obdelali. V tem pogledu je razpad K bolj preprost kot razpad β^+ ali β^- . Vlogo nevtrina pri taki jedrski spremembi je s poskusi pokazal Allen l. 1942. Izmeril je energijo odrinjenih jeder, ki nastanejo pri razpadu $\text{Be}^7 + e^- \rightarrow \text{Li}^7 + \nu$. Ta energija se je dobro ujemala z vrednostjo, ki jo je izračunal po enačbi $U = p^2/2m = U_\nu^2/2mc^2$, kjer se nanašata U in m na odrinjeno litijevo jedro, U_ν pa pomeni energijo, ki jo je odnesel nevtrino. To energijo lahko izračunamo iz razlike mase berilijevega in litijevega jedra. Če upoštevamo, da ustreza ta razlika energiji 0,84 MeV, dobimo, da je energija odrinjenega jedra kvečjemu 58 eV. Ion s tako majhno energijo ne more niti skozi najtanjše okence

geigerskega števca. Odrinjeno jedro je Allen odkril z elektronsko pomnoževalko. Da ne bi motila absorpcija, je postavil izvir v notranjost cevi. Iz poskusa je sklepal, da ima nevtrino mirovno maso zelo blizu 0, če ne celo 0.

Kaj vemo o mirovni masi nevtrina? Fermi je domneval, da je ta masa nič. To pomeni, da ima nevtrino tako kot foton vselej svetlobno hitrost.



Sl. 4. Spodnja slika: Kuriev diagram za spekter beta izotopa S^{35} . Zgornja slika: Povečan desni del tega diagrama, z vrisanimi teoretičnimi krivuljami za različne mirovne mase nevtrina. Premica velja za maso nič, krivulji pa za 0,01 in 0,02-kratno maso elektrona. Vzeta iz: D. Halliday: *Introductory Nuclear Physics*. New York — London, 1950.

V svoji teoriji razpada β je Fermi tudi napovedal, kakšno obliko ima spektrum β in kako je ta oblika odvisna od mirovne mase nevtrina. Pokazal je, da je ta odvisnost najbolj izrazita blizu zgornje meje spektra. Izmerjene spektre primerjamo s teorijo s pomočjo Kurijevega diagrama. V tem diagramu nanesemo na abscisno os energijo U , na ordinatno os pa funkcijo

$$\left(\frac{1}{N} \frac{dN}{dU} \right) / [F(U, Z) c^3 \cdot (U^2 + 2 U m c^2)^{\frac{1}{2}} (U + m c^2)]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{N} \frac{dN}{dp} / (F \cdot p^2) \right]^{\frac{1}{2}}$$

kjer je dN število elektronov z energijo med U in $U + dU$, m mirovna masa elektrona, F pa neka matematično določena funkcija energije U in vrstnega števila Z . Če velja domneva, da je masa nevtrina 0, bi moral biti Kuriev diagram premica. Ta premica seka abscisno os v točki, ki pomeni maksimalno energijo elektrona (sl. 4). Če masa nevtrina ne bi bila

nič, bi dobili zgoraj na sliki 4 prikazane krivulje, ki imajo na koncu navpično tangento. Izmerjeni spektri dajo v mnogih primerih premice. To so *spektri dovoljene oblike*. V drugih primerih so dobili *spektre prepovedane oblike*, ki niso dali premic v Kuriejevem diagramu. Toda tudi tu tangenta na koncu ni navpična, tako da smemo slejkoprej sklepati, da je $m_\nu = 0$. Natančnejši računi po tej teoriji povedo, da je vsaj $m_\nu < 0,2 m_e$.

Neposredna določitev mase nevtrina je zelo težavna, saj zahteva n. pr. natančno meritev celotne energijske bilance nekega razpada β , pri katerem so mase vseh delcev znane. Leta 1947 je Kofoed Hansen opozoril na to, da lahko ocenimo maso nevtrina m_ν iz maksimalne energije elektronov U_m in razlike mas začetnega in končnega jedra, namreč kar po enačbi $\Delta mc^2 = U_m + m_\nu c^2$. V ta namen moramo poznati natančno vrednost za U_m . Le-to pa dobimo navsezadnje le z linearno ekstrapolacijo spektra β do abscisne osi. Treba je spet vedeti, kakšno obliko ima spekter, torej kakšno maso ima nevtrino. Provizorično lahko vzamemo m_ν iz energijske enačbe. Če je treba, lahko potem popravimo spekter z dobljenim m_ν . Po tej metodi so l. 1948 Cook, Langer in Price iz izmerjenega spektra pri S^{35} izračunali, da je $m_\nu < 0,01 m_e$. Leta 1949 je Curran s sodelavci raziskal z izpopolnjenimi merskimi pripravami spekter pri H^3 in ugotovil, da je $m_\nu < 0,003 m_e$. Zdelo se je pa, da je m_ν različna od 0. Iz zadnjih raziskav spektra β pri H^3 , ki so jih l. 1951 naredili Hamilton in sodelavci, sklepajo, da je $m_\nu < 0,0005 m_e$, kar vsekakor že precej opravičuje sklep, da je v resnici $m_\nu = 0$.

Ne vemo še, ali in kako reagira materija z nevtrini, ki gredo skozi njo. Verjetnost reakcije izrazimo z reakcijskim presekom. Po teoriji je reakcijski presek nukleona za trk z nevtrinom, ki ima energijo 1 MeV, enak 10^{-42} cm^2 , kar je okroglo 10^{16} do 10^{18} -krat manj kot pri večini jedrskih reakcij. To pomeni, da bi šele povprečno 35 svetlobnih let dolga pot v svincu zadržala nevtrino. Zato ni čudno, da se nevtrino pri poskusih izmuzne. Sicer pa je za nevtrine, ki bi zadeli ob druge delce, mnogo bolj verjetno, da se odbijejo v drugo smer, kot da jih delec ujame. Pri morebitnih trkih z elektroni bi mogli zaznati trčeni elektron. Nahmias in kasneje Wollan sta tak efekt iskala in iz tega sklepala, da je presek elektrona za trk z nevtrinom manjši od 10^{-31} cm^2 .

Kakor poročajo nedavno, še niso izgubili upanja, da bi odkrili prosti nevtrino. V poskusih, ki jih pripravljajo v ta namen, bodo služili veliki scintilacijski števeci s posebnim tekočim scintilatorjem, ki je občutljiv za nevtrone. Le-ti bi imeli nastati v scintilatorju samem po reakciji $p + \nu \rightarrow n + \beta^+$. Kot izvir nevtrinov bo služila močna atomska kopa, v kateri je velika količina β aktivnih snovi.*

Literatura:

- J. Gamow: Die Existenz des Neutrinos. Phys. Blätter. 5, 108 (1949).
- C. W. Sherwin: Experiments on the Emission from P^{32} . Phys. Rev. 82, 52 (1951).
- E. Fermi: Versuch einer Theorie der β Strahlen. Zs. f. Phys. 88, 161 (1934).
- E. J. Konopinski: Beta-Decay. Rev. Mod. Phys. 15, 209 (1943).
- D. Halliday: Introductory Nuclear Physics. New York, 1950.

* V času, ko je bil članek že pripravljen, je prišla vest, da so ta poskus med tem napravili. Rezultati pa še niso čisto gotovi. Obzornik bo o tem poročal v eni izmed prihodnjih števil.

MATEMATIČNA SLUŽBA

RAČUNANJE VODNEGA TOKA V PREPUSTNI PLASTI POD JEZOM

I. KUŠČER

Zemeljske plasti ob jezovih in drugih hidrotehničnih objektih včasih niso popolnoma neprepustne, kakor bi bilo želeti, ampak pronica skozi nje večji ali manjši tok vode. Dobro je, da že vnaprej precenimo, kolikšen utegne biti ta tok, kako bodo potekale tokovnice in kolikšen bo pritisk na posameznih mestih. Nalogo te vrste sem lani prevzel v okviru »Matematične službe«¹ od uprave hidroelektrarne Medvode. Ugotoviti je bilo treba potek tokovnic in nivojnic v plasti razpokanega dolomita pod jezom (sl. 1). Zahtevana je bila le rešitev dvodimenzionalnega problema. Preiskava prepustne kamenine na raznih mestih v glavnem ni pokazala posebnih razlik v njeni kakovosti ali kake usmerjenosti razpok, tako da sem smel za račun vzeti, da je prepustna plast makroskopsko homogena in izotropna. Globina, v kateri leži dolomit na neprepustnem škrljajvcu, je bila v nekaterih točkah ugotovljena z vrtanjem, vmes pa je bila meja aproksimirana kar s poligonom (BCDEFG na sl. 1). Za prepustnost ni bilo nobenega podatka, tako da ni bilo mogoče oceniti toka pronicajoče vode. Tokovnice pa je seveda mogoče določiti neodvisno od tega podatka in prav tako pritisk na vsakem mestu. V rezultatu je bilo treba posebej navesti vrednosti za pritisk na spodnjo plat betonske plošče pod jezom, ker bi bil prevelik pritisk na tem mestu lahko nevaren.

V naslednjem je prikazana grafična in računska rešitev problema. Poprej pa je vpletenih nekaj opazk glede matematične vsebine problema.

Voda izpolnjuje vse luknjice in razpoke med zrni prepustnega materiala. Podrobnosti njenega gibanja po teh luknjicah nas ne zanimajo, ampak le *povprečna gostota vodnega toka* $\mathbf{v}$, t. j. število kubičnih metrov vode, ki na sekundo preteče skozi presek 1 m^2 . Pri stacionarnem toku je $\mathbf{v}$ odvisen samo od kraja: $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, x)$.

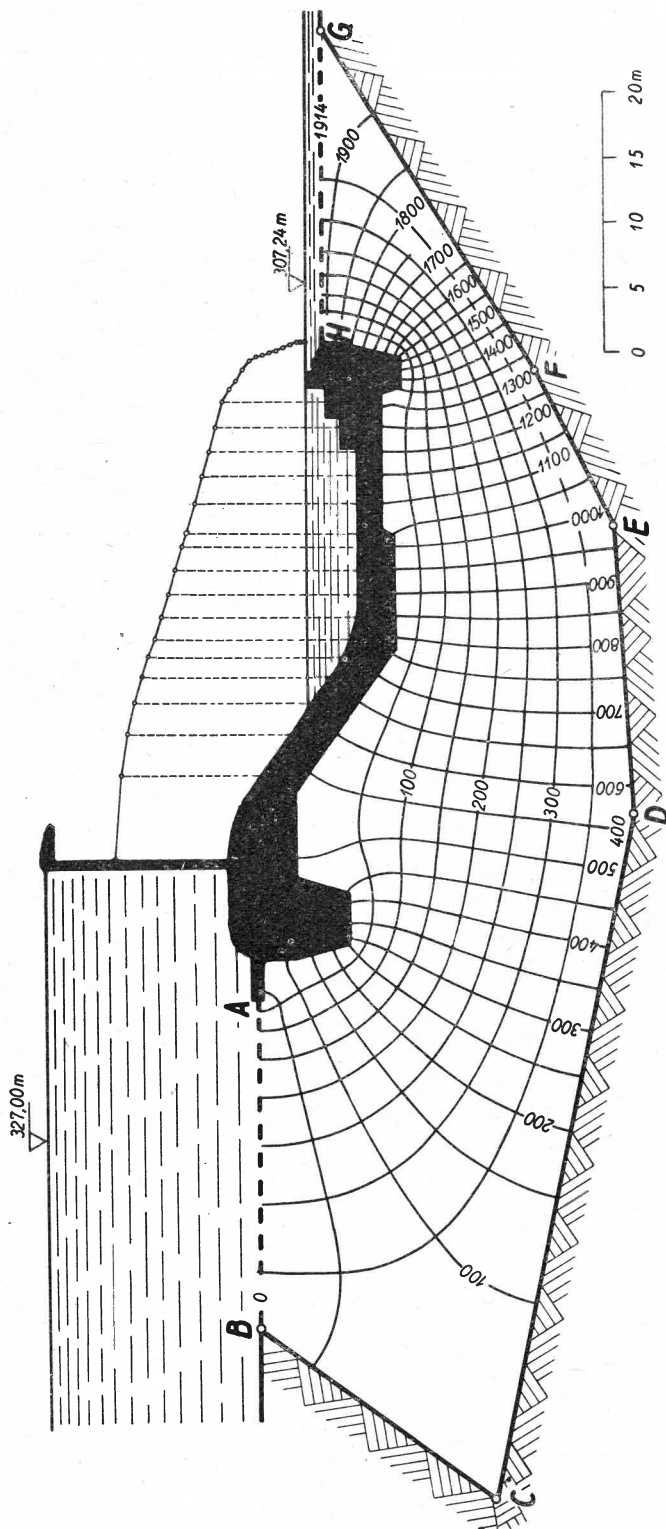
Na vsak delec vode deluje poleg njene lastne teže še pritisk sosednje vode. Skupno deluje torej na prostorninsko enoto sila —grad $(p + \varrho gy)$ (koordinatni sistem je obrnjen tako, da kaže os y navpično navzgor). Ako je prepustni material makroskopsko izotropen, se giblje voda v povprečju v smeri, ki je nasprotna temu gradientu; kadar je pretakanje v omenjenih luknjicah pretežno laminarno, sta si vektorja $\mathbf{v}$ in —grad $(p + \varrho gy)$ sorazmerna (*Darcyjev zakon*). Upoštevajmo še, da je tok obratno sorazmeren viskoznosti η , pa lahko zapišemo:

$$\mathbf{v} = -(k/\eta) \text{ grad } (p + \varrho gy) \quad (1)$$

Koeficient k pove, kako prepusten je material.²

¹ Obz. mat. fiz. 2, 90 (1952).

² Enota za k je m^2 , kar že sili k domnevi, da je ta količina v zvezi s povprečnim presekom luknjic v materialu. Za neurejeno nasute enake kroglice je $k = 0,0009 \cdot (2r)^2$. Darcyjev zakon velja v tem primeru nekako do Reynoldsovega števila $R = 4$, če je $R = 2r\varrho v/\eta$. — Glej n. pr. M. Muskat: Physical principles of Oil Production. New York (McGraw-Hill) 1949.



Sl. 1. Vzdolžni profil jezusa Hidrocentrale Medvode. Vrisane so tokovnice in nivojnice v prepustni plasti pod jezom.

Upoštevati je še treba, da v vsak del prostora priteče prav toliko vode, kot je odteče. To zapišemo s *kontinuitetno enačbo*

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (2)$$

Če v to vstavimo izraz iz (1), se pokaže, da zadošča funkcija $\psi = (k/\eta)(p + \rho g y)$ *potencialni (Laplaceovi) enačbi*

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \psi = 0 \quad (3)$$

To enačbo je treba rešiti, seveda pa ob upoštevanju danih robnih pogojev. Gostoto toka izračunamo potem iz (1). Nazorno sliko rešitve dobimo, če narišemo *nivojne (ekvipotencialne) ploskve*, na vsaki izmed katerih je $\psi = \text{konst.}$, ter *tokovnice*, ki sečejo te ploskve povsod pravokotno.

Glede robnih pogojev je treba povedati naslednje. Če vstopa voda v prepustno plast ali izstopa iz nje na dnu stoječe vode, je tudi dno ekvipotencialna ploskev. ψ je tam enak vrednosti, ki je dana z višino vodne gladine. Na ploskvi AB (sl. 1) je $p/\rho g + y = 327$ m, na ploskvi GH pa 307,24 m. Kjer meji prepustna plast na neprepustni material (vzdolž poligonov BCDEFG in AH), pa imamo drugačen robni pogoj. Tokovnice namreč potekajo v bližini te meje vzporedno z njo. Normalna komponenta vektorja $\operatorname{grad} \psi$ mora torej biti nič ali, v običajni obliki zapisano: $\partial\psi/\partial n = 0$.

Kadar sta p in $\mathbf{v}$ odvisna samo od dveh koordinat, x in y , se marsikaj poenostavi. Tokovnice moremo povrsti oštevilčiti (številke 0 do 400 na sl. 1), tako da te številke predstavljajo neko funkcijo kraja φ , ki ima vzdolž tokovnic konstantno vrednost. Razmaki med tokovnicami naj bodo taki, da teče povsod med dvema sosednjima tokovnicama enako velik vodni tok (računamo na plast z debelino $\Delta z = 1$). Vrednost φ pri neki tokovnici potem pove, kolikšen tok teče med to tokovnico in steno. φ izračunamo najlažje z integracijo vzdolž nivojnic: $\varphi = \int v ds$. Če pa hočemo integrirati po kaki drugi poti, je treba ds projicirati na nivojnico, t. j. pomnožiti s sinusom kota med tokovnico in integracijsko potjo. Splošno torej velja: $\varphi = \int d\mathbf{s} \times \mathbf{v} = \int (v_y dx - v_x dy)$, odkoder razberemo, da sta v_y in $-v_x$ odvoda φ po x in y . Po drugi strani pa pove enačba (1), da sta to tudi odvoda funkcije ψ . Velja torej

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{in} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (4)$$

To sta *Cauchy-Riemannovi enačbi*.³ Lahko bi ju zapisali tudi v obliki ene enačbe: $\mathbf{v} = -\operatorname{grad} \psi = \operatorname{rot} \varphi$. Očividno tudi φ zadošča Laplaceovi enačbi (3), zdaj torej: $\partial^2 \varphi / \partial x^2 + \partial^2 \psi / \partial y^2 = 0$. Pravimo, da je ψ k φ -ju *konjugirani potencial*. Vsota $\varphi + i\psi$ je *analitična funkcija* kompleksne spremenljivke $x + iy$. Če narišemo mrežo nivojnic in tokovnic tako, da imamo pri vrednostih φ in ψ enake razmake, dobimo pravokotno mrežo krivulj, ki v malem tvorijo same kvadrate. Ta mreža je slika analitične funkcije $\varphi + i\psi$. Pravimo tudi, da je to *konformna slika* navadne kvadratne mreže.

Robni pogoji za φ so ravno obrnjeni kot za ψ ; na neprepustnih mejah je $\varphi = \text{konst.}$, na vstopnih in izstopnih mejah pa je $\partial\psi/\partial n = 0$. Če bi

³ J. Plemelj, Teorija analitičnih funkcij (Ljubljana), §§ 41, 94.

mogli na sl. 1 prikazani primer tako preurediti, da bi bili meji AB in GH neprepustni in da bi voda vstopala vzdolž poligona AH, izstopala pa vzdolž BCDEFG, bi bila slika še vedno veljavna. Le φ in ψ bi se zamenjala, tako da bi bile prejšnje tokovnice zdaj nivojnice in narobe.

Prav takšno sliko dobimo pri telesu enake oblike tudi s toplotnim ali električnim tokom. V prvem primeru imamo namesto Darcyjevega zakona zakon toplotne prevodnosti, $j = -\lambda \text{ grad } T$, v drugem pa Ohmov zakon, $j = -\sigma \text{ grad } U$ (tu pomeni j gostoto toplotnega in električnega toka, T temperaturo, U napetost, λ toplotno, σ pa električno prevodnost). V praksi je ta analogija prav koristna, ker lahko rešimo vsak tak problem s kadjo s slano vodo (potencialno kadjo), ki jo uporabimo tako rekoč kot *analogni računski stroj*. Meriti je treba napetost, da dobimo ekvipotencialne črte v kadi. Za naš problem mora imeti tloris kadi obliko poligona ABCDEFGH. Daljici AB in GH predstavljata elektrodi, ostale stene pa so iz izolatorja. Z enako pravico lahko naredimo črte BCDEFG in AH za elektrodi ter AB in GH iz izolatorja. Tokovnice in ekvipotencialne črte so potem zamenjane.

*

Za reševanje ravninskih problemov te vrste prihaja v poštev predvsem grafična metoda,⁴ ki je neverjetno lahka in hitra ter za mnoge namene dovolj natančna. Svinčnik, radirka in nekaj občutka za mero je vse, kar potrebujemo zanj. Nobeno matematično znanje ni potrebno! V načrt z narisanimi mejami prepustne plasti narišemo najprej »po občutku« srednjo tokovnico ($\varphi = 200$ na sl. 1), t. j. tisto, ki deli celotni vodni tok na pol, nato pa morda še vmesne »četrtinske« tokovnice ($\varphi = 100$ in 300). Neprepustni meji tvorita prvo in zadnjo tokovnico ($\varphi = 0$ in 400 na sl. 1). Potem potegnemo, spet kar približno, nivojnice tako, da stoje pravokotno na tokovnicah; razvrstimo jih pa tako, da so nastali liki kolikor mogoče kvadrati. Kjer so tokovnice in nivojnice močno zakrivljene, so »kvadrati« popačeni in jih je treba še razdrobiti, da ugotovimo, če so pravilni; začrtamo še vmesne tokovnice in nivojnice (v stopnjah po 50 ali celo 25). Marsikje slika še ni dobra, ker so nastali namesto kvadratov pravokotniki ali paralelogrami. Zato zbrisemo tokovnice tam, kjer se zdi, da so napačne, in jih na novo izvlečemo, ravna se po nivojnicah. Nato popravimo spet nivojnice in gledamo pri tem na tokovnice. Morda je tako treba vso sliko deset ali celo dvajsetkrat zbrisati; toda v nekaj urah gotovo pridemo do neke limite, pri kateri spričo nenatančnosti prostoročne risbe in negotovosti pri ocenjevanju mreže ne bi imelo več pomena, da bi jo na tak način še popravljali.

Zelo nevšečni so pri tej in pri drugih metodah ostri ali izbočeni ogli na mejah (kot n. pr. točka C na sl. 1 in ogli med A in H), ker je v njihovi bližini težko zadeti pravo obliko tokovnic in nivojnic. Z drobljenjem slike težave ni mogoče odpraviti, ker ima funkcija $\varphi + i\psi$ na oglu singularnost, in sicer prav takšno kot jo ima funkcija $(x + iy)^{\pi/\alpha}$ v izhodišču, če je α kot, ki ga oklepata steni v oglu. Risanje bi bilo zelo olajšano, če bi človek imel album ali diapozitive s slikami funkcij $(x + iy)^{\pi/\alpha}$ za različne kote α .

Če hočemo doseči večjo natančnost, je treba problem numerično rešiti, namreč z *relaksacijsko metodo*.⁵ Za ta namen razdelimo sliko s kva-

⁴ F. A. Willers: Graphische Integration. Berlin, Leipzig, 1932 (Sammlung Götschen).

⁵ A. Kuhelj, Obz. mat. fiz. 2, 145 (1952).

dratno mrežo in računamo vrednosti enega izmed obeh potencialov v vozlih mreže (del te mreže je na sl. 2 prikazan z izvlečenimi črtami). Pri naši nalogi računamo φ , ker so pri njem robni pogoji lepši kot pri ψ . Na eni izmed neprepustnih mej postavimo, da je $\varphi = 0$, na drugi pa damo φ neko okroglo vrednost (400), namreč tolikšno, da bo pri zaželeni natančnosti treba računati samo s celimi števili.

Tu je treba pripomniti, da vrednosti na drugi meji pravzaprav ne bi smeli predpisovati, ker bi ta morala biti po zgornjem enaka celotnemu vodnemu toku. Le-tega vnaprej ne poznamo, ampak ga dobimo lahko šele nazadnje, in to samo če poznamo k (v danem primeru k ni znan). Če pa dovolimo multiplikacijo s poljubno (morda neznano) konstanto, ni več te težave. Odslej naj bo torej $\varphi = A \oint \mathbf{ds} \times \mathbf{v}$ in $\psi = A(k/\eta)(p + e\varphi y)$. V primeru na sl. 1 je konstanta A celo negativna, kar pa tudi nič ne moti.

Za mrežni razmak sem vzel $h = 2,5$ m; zdi se pa, da bi bilo z redkejšo začetno mrežo ($h = 5$ m) in kasnejšo razdrobitvijo nekoliko manj dela. V bližini oglov je bila taka razdrobitev tudi zdaj potrebna. Slika, ki je bila prej dobljena z grafično metodo, je dala začetno aproksimacijo, s čimer je bilo prihranjenega precej začetnega »tavanja«. V tisti sliki je bilo treba izvleči tokovnice bolj nagosto (v razmakih po 10), tako da je bilo za vsak vozel kvadratne mreže razvidno, na kateri tokovnici leži.

Relaksacijski metodi ustreza, da si mislimo prej zvezno prepustno plast nadomeščeno z mrežo cev (v električnem primeru pa z mrežo uporov). Laplaceovo diferencialno enačbo nadomesti *diferenčna enačba*

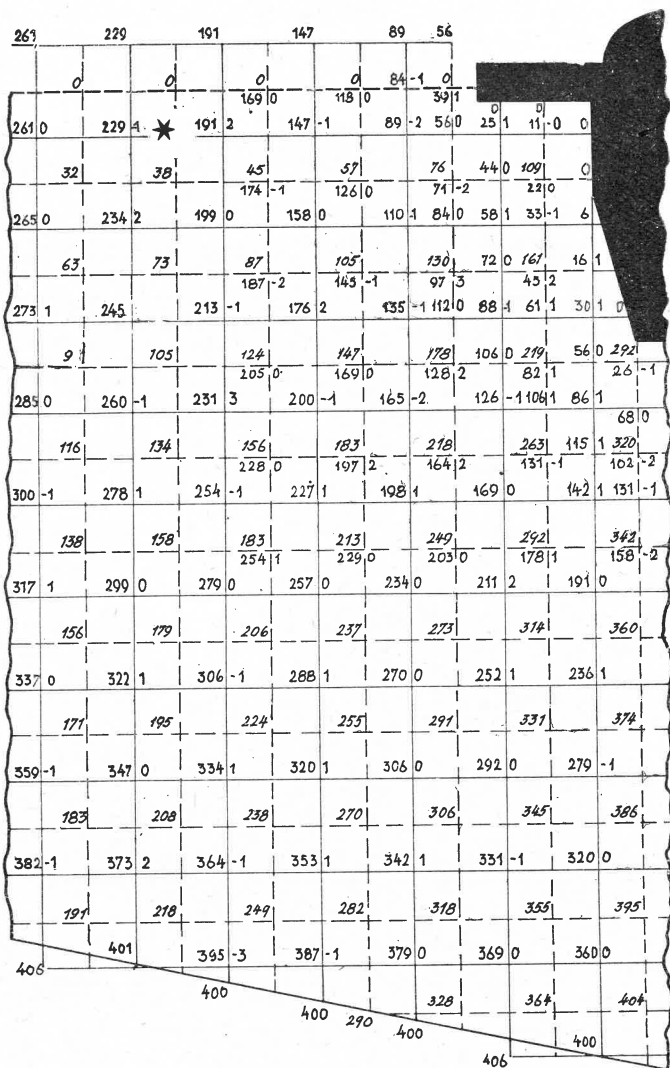
$$\varphi(x+h, y) + \varphi(x, y+h) + \varphi(x-h, y) + \varphi(x, y-h) - 4\varphi(x, y) = 0 \quad (5)$$

Če prenesemo zadnji člen na desno in delimo s 4, lahko beremo enačbo takole: Vrednost potenciala na danem mestu je enaka povprečju vseh štirih sosednjih vrednosti (seveda velja to le približno, za dovolj gosto mrežo in v zadostni oddaljenosti od singularnih točk). Približne vrednosti φ , ki smo jih za začetek dobili iz grafične rešitve, se z enačbo (5) še ne ujemajo dobro. Namesto 0 dobimo na desni večji ali manjši ostanek. Glavno delo je, da s spretnim popravljanjem (*relaksiranjem*)⁶ vrednosti φ zmanjšujemo ostanke, dokler je to le mogoče. Vse to opravimo na eni sami poli papirja, s svinčnikom in radirko. Čeprav prištevamo in odštevamo skoraj samo še enoštevilska števila, je potrebna velika pazljivost, da ni pomot. Proces je prav dolgotrajen, z *relaksacijo v bloku* ga pa lahko precej skrajšamo.

Popravljanje je končano, ko noben ostanek ni večji kot ± 3 in se tudi nikjer ne kopičijo ostanke istega predznaka. Na sliki 2 so popravljene vrednosti za φ vpisane s pokončnimi številkami. Tik zraven na desni pa so pripisani ostanke.

Dveh komplikacij ne smemo zamolčati. Neprepustni meji marsikje ne gresta skozi vozele. Če je vozel blizu meje, lahko pravo vrednost za φ že v začetku precej dobro uganemo, tako da je ni treba več popravljati. Nič ne de, če je vozel morda onstran meje; vrednost φ uganemo s približnim zrcaljenjem tokovnic (primer: vozla s $\varphi = 406$ na sl. 2 spodaj). Kadar pa teče meja nekje po sredi med dvema vozlo, naredimo tam nov vozel in pripišemo pravo mejno vrednost (400 na sl. 2 spodaj). Razdalja

⁶ A. Kuhelj, 1. c., str. 153, 154.



Sl. 2. Del profila iz slike 1, z vnesenimi vrednostmi za oba potenciala. Vrednosti potenciala φ (na vozlih polno izvlečene mreže) so zapisane s pokončnimi števkami, vrednosti potenciala ψ (črtkana mreža) pa z ležečimi števkami.

tega vozla do najbližnjega soseda je manjša ko h , recimo h/N . Pri računanju ostanka v sosednjem vozlu dobi zato mejna vrednost φ »utež« N . Matematično pravilen ta račun sicer ni, za prakso pa je dovolj dober.

Na vstopni in izstopni meji je treba doseči, da je $\partial\varphi/\partial n = 0$. Za ta namen zrcalimo bližnje vozle in pripišemo zrcalno ležečim vozlom enake vrednosti za φ . Na srečo sta meji AB in GH v našem primeru ravni in vzporedni. Zato smo mogli mrežo tako postaviti, da leže že prvotni vozli simetrično glede na mejo. Pri popravljanju je treba vedno hkrati popraviti tudi vrednosti v zrcalnih vozlih.

Ko imamo φ pravilno določen, je treba izračunati še ψ , in sicer iz Cauchy-Riemannovih enačb; iz φ dobimo ψ z odvajanjem v eni smeri in integracijo v pravokotni smeri. Začnimo na vstopni meji in izberimo tam začetno vrednost $\varphi = 0$. Da izvedemo odvajanje in integriranje brez prevelikih napak, moramo narisati še eno mrežo, ki prejšnjo povsod med vozli razpolavlja (črtkana mreža na sl. 2). Oglejmo si sedaj odvoda obeh potencialov v enem izmed presečišč obeh mrež, n. pr. v točki (x, y) , ki je na sliki 2 (levo zgoraj) zaznamovana z zvezdico. Precej natančno velja

$$h\partial\varphi/\partial x = \varphi(x + \tfrac{1}{2}h, y) - \varphi(x - \tfrac{1}{2}h, y) = 191 - 229 = -38.$$

Po prvi Cauchy-Riemannovi enačbi mora biti $h\partial\psi/\partial y$ ravno tolikšen, torej $\psi(x, y + \tfrac{1}{2}h) - \psi(x, y - \tfrac{1}{2}h) = -38$. Ker tu že poznamo $\psi(x, y + \tfrac{1}{2}h) = 0$, dobimo $\psi(x, y - \tfrac{1}{2}h) = 38$, kar zapišemo v sliko (v sliki 2 so vrednosti za ψ vpisane s kurzivnimi številkami). Pomaknemo se za h niže in spet izenačimo diferenco φ v vodoravni smeri ($199 - 234 = -35$) z diferenco ψ v navpični. Dobimo, da je v novem vozlu $\psi = 38 + 35 = 73$. Tako napredujemo dalje (računajoč ves čas samo na pamet), dokler niso določene vrednosti ψ v vseh vozlih nove mreže.

Opisano integriranje teče po lomljeni črti, ki je sestavljena iz navpičnih in vodoravnih daljic. Do iste točke lahko pridemo po različnih poteh, toda dobljene vrednosti za ψ bi morale biti neodvisne od izbere poti. To bi veljalo le, če bi bili φ izračunani do skrajne natančnosti, tako da bi bili vsi ostanki enaki nič. Če imamo pri nekem vozlu ostanek 2, se pri integraciji po poteh desno ali levo mimo tega vozla dobljeni vrednosti za φ v isti točki razlikujeta za 2; zapisali bomo seveda srednjo vrednost. Te razlike pa lahko s kopičenjem neprijetno porastejo. Integracijska pot naj zato teče med tistimi vozli, kjer so ostanki čim manjši, ali pa vsaj tako, da se razlike na daljši poti čim bolj izravnavajo. Od te glavne integracijske poti se odcepijo stranske steze v cikcakah.

Z interpolacijo poiščemo na mreži tiste točke, kjer imata potenciala φ in ψ okrogle vrednosti 50, 100, 150 ... Povežemo jih s krivuljnikom, da pridemo do končne slike (sl. 1). Primerjava te slike s tisto, ki je bila v začetku dobljena grafično, je pokazala, da razlike niso velike. Pri ψ je bila največja razlika 20, kar je komaj 1 % celotne potencialne razlike. Natančnost grafične rešitve je torej nepričakovano dobra. Če upoštevamo, da je njena izdelava zahtevala manj kot desetino časa, ki je bil potreben za celotni račun po relaksacijski metodi, je gotovo umestna tendenca, da se pri takih problemih zadovoljimo z grafičnim reševanjem.

Če naj rešitev problema služi svojemu končnemu namenu, je treba še povedati vrednosti za pritisk ali raje kar za vsoto $p/\rho g + y$, ki pove pritisku ustrezajočo višino gladine vode. Potencial ψ pove sicer v bistvu isto kakor zapisana vsota, toda ker smo dopustili multiplikacijo z neko neznano konstanto in še premaknitev, sta ψ in $p/\rho g + y$ le v linearni zvezi. Upošteva, da ustreza razliki $\Delta\psi = 1917$ višinska razlika gladin $\Delta y = 39,76$ m dobimo s sklepnim računom za vsako nivojnico pripadajočo višino gladine. Na sliki 1 so te višine narisane za točke, v katerih sečejo posamezne nivojnice mejo AH. Krivulja, ki jih veže (krivulja s krožci na sl. 1) kaže, kako visoko bi stala voda v navpičnih manometrijskih cevkah, s katerimi bi merili pritiske na spodnjo plat betonske plošče.

NOVICE

Svet je izgubil dva moža, ki sta bila med tvorci sodobne fizike. Dne 28. novembra 1954 je umrl Enrico Fermi, dne 18. aprila 1955 pa Albert Einstein. O delu in življenju obeh bomo poročali v prihodnjih številkah.

ELEKTRET

Elektret je permanentno polarizirano telo, pri katerem sta pola nasprotna konca. To je nekaka električna analogija permanentnega magneta. Če prerežemo elektret po sredi med poloma na dva dela, dobimo dva popolna elektreta.

Elektret je odkril Japonec Eguchi in objavil o njem naslednje eksperimentalne podatke¹: Elektret dobimo s strjevanjem določene mešanice voskov in smol v močnem električnem polju. Telo se polarizira v notranjosti, tako da ta pojav nima nič skupnega s površinsko naelektritvijo. Samo z vplivanjem na površino te polarizacije ne moremo odpraviti ne s segrevanjem, topljenjem ali rezanjem in tudi ne z električnimi silami v kakršnikoli obliki. Električna polarizacija v telesu je tolikšna, da ima poljska jakost na krajnih ploskvah najvišjo možno vrednost, ki jo dovoljuje probojna trdnost zraka. Tudi trajnost te polarizacije je tako velika, da v treh letih ni bilo opaziti spremembe.

Od tedaj je bilo o tem objavljenih že preko štirideset člankov z mnogimi eksperimentalnimi podatki, toda le z nepopolnimi teorijami, od katerih ni še nobena sprejemljiva v celoti. Elektrete dobimo na več načinov. Ena od snovi, iz katerih lahko naredimo elektret, je polivinilni klorid. Če tega segrejemo v močnem električnem polju do 90° C in v polju ohladimo pod 60° C, se s tem dipoli uredijo in po ohlajenju ostanejo tako urejeni. Večkrat ima elektret naboj tudi v celoti in ni le nekaj dipol.² Voski, iz katerih dobimo te elektrete, so v glavnem sestavljeni iz organskih kislin z zelo velikimi molekulami. Te lahko ionizirajo. Zaradi različne gibljivosti teh ionov nastane neenakomerna porazdelitev nabojev in tudi snov v celoti obdrži pri strjevanju določen naboj.

Elektret ima tudi praktično uporabo. Prvi merilni instrumenti z elektretom so bili zgrajeni že pred zadnjo vojno. Med njimi je zelo uporaben zrcalni elektrometer, instrument, ki je podoben zrcalnemu galvanometru, kjer je na mestu tuljave elektret, namesto permanentnega magneta pa elektrodi, na kateri pritismo neznano napetost. Ta instrument je imel občutljivost 0,5 V na delec. Med zadnjo vojno so Japonci uporabljali kondenzatorske mikrofone z elektreti. Elektreti, izdelani iz umetnih smol, se vedno bolj uveljavljajo v instrumentih, v katerih rabimo stalno električno polje.

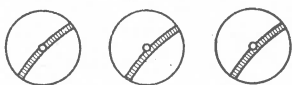
J. Kalan

¹ M. Eguchi: On the Permanent Electret. Phil. Mag. 49, 178 (1925).

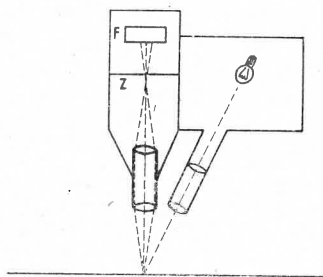
² F. Gutmann: The Electret. Rev. Mod. Phys. 20, 457 (1948).

FOTOELEKTRIČNO OTIPAVANJE KRIVULJ

Kadar je funkcija dana s krivuljo, je mnogokrat zaželeno, da krivuljo otipljemo z neko vrsto pisala ter da iz poti pisala razberemo odnose med koordinatama x in y posameznih točk krivulje. Tako otipavanje je koristno za številčno uporabo krivulj, narisanih z registrirno napravo. Ta metoda je prav tako koristna pri prerisovanju krivulj na koordinatni papir ter pri grafičnem odvajanju in integriranju. Točnost tega risanja je odvisna od točnega zasledovanja krivulje s pisalom. Pri kompliciranih krivuljah je delo z roko mučno in nenatančno. Znatno olajšanje dosežemo tako, da krivulji ne sledimo z roko, temveč s fotocelico. Zelo zanimivo in poučno je fotoelektrično otipavanje, ki se uporablja v nekih napravah za integriranje. Princip je naslednji: Papir s krivuljo se napne na vrtljiv valj, s katerim se premika papir v smeri ordinate. Glava za otipavanje pa se enakomerno premika nad papirjem v smeri abscise. Pri premikanju



Sl. 1. Slika krivulje na zaslonu. Krožec predstavlja luknjico v zaslonu. Z avtomatičnim premikom papirja se doseže lega, ki jo kaže desna slika, kjer je luknjica do polovice pokrita s sliko krivulje.



Sl. 2. Glava s fotocelico in lučjo (shematično).

glave se papir avtomatično premika s pomočjo malega motorja za toliko v smeri ordinatne osi, da je krivulja vedno točno pod glavo. Položaj glave daje koordinato x , položaj valja pa koordinato y . Avtomatično premikanje v smeri osi y se doseže s fotocelico, ki je v glavi za otipavanje. V glavi je tudi izvor svetlobe, s katerim se osvetljuje mesto na krivulji (slika 2).

Objektiv z malo žariščno razdaljo projicira trikrat povečani del krivulje in njeno okolico na zaslon. Zaslon je nameščen pod fotocelico, v njegovi sredini pa je odprtina, skozi katero lahko pride svetloba na fotocelico. Naprava za uravnavanje motorja skrbi za to, da motor miruje samo tedaj, kadar je odprtina na zaslonu prekrita do polovice s sliko krivulje (sl. 1, desna slika). Če je fotocelica osvetljena slabše ali močneje, torej če krivulja prekriva odprtino zaslona več ali manj kakor to ustreza srednjemu položaju (sl. 1, levi sliki), potem se motor premika v eni ali drugi smeri tako dolgo, dokler ne doseže srednji položaj. Glavo za otipavanje je treba voditi preko krivulje tako na lahno, da ne uide krivulja nikoli z odprtine zaslona. Premikanje glave in hitrost motorja se morata kar najbolje vskladiti. Napaka pri tem avtomatičnem zasledovanju krivulje v smeri ordinate ni večja kot $\pm 0,1$ mm.

Opisano pripravo ima Inštitut za praktično matematiko na Tehniški fakulteti v Darmstadtu.

M. Ralca

DOMAČE VESTI

J O Ž E F R E I S N E R

Neizprosna usoda je spet posegla v vrste matematikov in fizikov. 16. januarja je umrl v 80. letu starosti ugledni pedagog in znani pisec učbenikov, javni in politični delavec, direktor v p., profesor Jožef Reisner.

Direktor Reisner je bil rojen dne 18. marca 1875 v Ljubljani. Ljudsko šolo in nižjo gimnazijo je obiskoval v Novem mestu, filozofsko fakulteto pa na dunajski univerzi (1894—1899), kjer je leta 1899 napravil profesorski izpit iz matematike in fizike. Kot suplent je služil eno leto na gimnaziji v Celju (1899/1900) in tri leta na gimnaziji na Dunaju VIII. (1901—1904). Leta 1904 je bil imenovan za profesorja na realki v Idriji, naslednje leto je bil premeščen na gimnazijo v Novem mestu, leta 1909 pa na klasično gimnazijo v Ljubljani. V letih 1914—18 je bil mobiliziran. Od leta 1924 do upokojitve (1938) je bil direktor Tehniške srednje šole v Ljubljani. Od leta 1946 do smrti je učil na tem zavodu kot honorarni predavatelj.

Prvi svoj strokovni spis »Ermittlung einiger bestimmten Integrale aus der Definitionsformel« je objavil v letnem poročilu gimnazije v VIII. okraju na Dunaju l. 1904. — Čeprav so Slovenci že davno zahtevali popolne slovenske srednje šole, so šele nekoliko pred letom 1910 od avstrijske vlade dobili zagotovilo, da je vsaj deloma pripravljena ugoditi njihovim zahtevam. Takrat so začeli s pisanjem potrebnih učbenikov v slovenskem jeziku. Tako je leta 1908 na povabilo Društva slovenskih profesorjev tudi Reisner prevzel nalogo, da spiše učno knjigo fizike. Opraviti je moral zelo veliko trdega pripravljalnega dela, dopolnjevati in ustvarjati terminologijo in premostiti jezikovne težkoče, ki niso bile majhne. Njegova Fizika za višje razrede srednjih šol (1. izdaja 1913, 2., izpremenjena izdaja 1921) je bila nato nad 25 let edini učbenik fizike, ki ga je imel na razpolago slovenski dijak. — Leta 1912 je izšla njegova Kemija za VII. gimnazijski razred. — Ko se je po osvoboditvi zaradi širjenja strokovnih šol pokazala potreba po novih učnih knjigah, je izdal v letih 1950—1953 v Knjižnici za vzgojo strokovnih kadrov 6 Matematičnih priročnikov, — Zadnja leta je tudi skrbno pripravljaval nove Logaritične tablice in Matematični priročnik za popolne srednje šole — a do natisa ni prišlo.

Reisner se je že v študentskih letih živahno udeleževal in je bil dvakrat predsednik akademskega društva Slovenija, predsednik ferialnega društva Sava in leta 1898 predsednik vsedijaškega shoda za slovensko univerzo v Ljubljani. — Kot član Narodnonapredne stranke je bil 1911—1918 občinski svetnik in deželni poslanec mesta Ljubljane, član deželnega višjega šolskega sveta in nekaterih drugih javnih ustanov. 1921—1924 je bil narodni poslanec za mesto Ljubljana v beograjski skupščini. Kot narodni poslanec je bil glavni referent za vsa pragmatična in socialna vprašanja civilnih drž. uslužbencev in upokojenecv. Po njegovih osnutkih in redakcijah so bile sprejete razne uredbe in zakoni.

Bil je organizator stanovskih uradniških društev, predsednik Zveze, predsednik Konsumnega društva, predsednik Kreditne zadruga drž. uslužbencev in upokojenecv (Hranilnega in posojilnega konsorcija). Bil je predsednik Dramatičnega društva v časih, ko je to z velikimi žrtvami vzdrževalo Slovensko narodno gledališče v Ljubljani. Dolgo let je bil tudi predsednik Dvorske knjižnice v Ljubljani.



Kot član ljudske univerze Akademije je v letih 1904—1914 imel mnogo poljudno znanstvenih predavanj v raznih krajih Slovenije ter večerne izobraževalne tečaje za vajence Narodno socialne organizacije in za železničarje strojevodje.

Po prvem direktorju Ivanu Šubicu je bil Reisner drugi direktor Tehniške srednje šole. Pod njegovim vodstvom se je zavod razširil z novimi oddelki in so se izvršile nekatere važnejše izpremembe v ustroju in organizaciji posameznih odsekov in oddelkov. Na mnogoštevilnih anketah v ministrstvu in v poslanskih odborih je iniciativno in aktivno sodeloval pri sestavljanju Zakona o tehniških srednjih in obrtnih šolah, Zakona o ženskih obrtnih šolah, o strokovnih učiteljskih itd. Za spominsko knjigo ob 50-letnici zavoda (1938) je spisal Zgodovino Tehniške srednje šole v Ljubljani. Po njegovi zaslugi je bil utrjen temelj, na katerem je bilo mogoče v novi Jugoslaviji zgraditi današnjo veliko Tehniško srednjo šolo.

Delovanje direktorja Reisnerja je bilo tako na šolskem področju kakor v javnem življenju izredno vsestransko in plodonosno. Zaradi tega je užival povsod velik ugled in pri mladini neomajno spoštovanje. Bil pa je tudi dober tovariš in iskren človek, duhovit in družaben. Ohranili ga bomo v svetlem spominu kot zaslužnega šolnika in požrtvovalnega javnega delavca!

J. Povšič

DVESTOLETNICA ROJSTVA JURIJ VEGA

23. marca 1954 je poteklo dvesto let, odkar se je v Zagorici rodil Jurij Vega, prvi med slovenskimi matematiki, ki so se uveljavili v mednarodnem znanstvenem svetu. Ob tej priliki so bile v Sloveniji razne svečanosti. Člani našega Društva so s priložnostnimi članki v dnevnem in revijalnem tisku ter po radiu seznanili javnost z Vegovim življenjem in delom. 9. aprila 1954 je Društvo priredilo na I. gimnaziji svečano akademijo, ki so se je udeležili predstavniki naših znanstvenih in kulturnih ustanov, predstavnik Sveta za prosveto in kulturo, predstavnik vojske, Vegovi daljni sorodniki, člani Društva in drugi gostje. Akademijo je otvoril prof. dr. F. Dominko, prof. dr. J. Plemelj pa je na kratko spregovoril o namenu in pomenu akademije: »Malokatero slovensko ime,« je dejal, »je tako splošno znano po vsem kulturnem svetu kakor njegovo, toda prav tako je skoraj splošno neznano, in to ne samo v tujini, temveč tudi pri večini naših bratov v Jugoslaviji, da je bil Jurij Vega Slovenec.« Obširno je o življenju, delu in uspehih Vege govoril dr. Lavo Čermelj.¹ Članek o Vegi kot vojaškem strokovnjaku, ki ga je napisal generalni major Levičnik, a se akademije ni mogel udeležiti, je prebral ravnatelj muzeja NOB.

Po končani akademiji je bila odprta v razstavnih dvorani Narodne in univerzitetne knjižnice posebna razstava, ki je prikazala znanstveno delo Jurija Vege, literaturo o njem in važnejše dokumentarno gradivo iz njegovega življenja. Naša javnost je tako dobila pregled nad celotnim delom znamenitega rojaka. V središču razstavnega prostora je bil doprnski Vegov kip, delo kiparja I. Zajca. Vse gradivo je bilo razdeljeno v tri dele: a) Reprodukcijska Vegove življenjske poti od rojstne knjige do nekrologov, portretov in spomenikov, vmes vse prve, zadnje in nekaj vmesnih izdaj njegovih del; prepisi vojaških spričeval, ki jih je Vega poslal kranj. dež. stanovom s spremnim pismom,² b) domača in c) tuja literatura o Vegi, ki je ilustrirala veličino njegove osebnosti in mednarodni pomen njegovega dela na področju matematike. Razstava je bila odprta do 18. aprila in je bila med najbolj obiskanimi knjižnimi razstavami tega leta v Ljubljani.

¹ Govor je natisnjen v Elektrotehniškem vestniku XXII/1954 št. 3-4, str. 65-67.

² Pismo je prvič objavljeno v knjigi Dr. Pavle Karlin, Nemško pismo — Deutscher Brief. Lj. SKZ.

V nedeljo 6. junija sta priredila Društvo in Odbor SZDL Dolsko ob obilni udeležbi domačinov slavnost v Vegovem rojstnem kraju Zagorici z otvoritvijo spominske knjige, ker je bila prvotna med vojno uničena, in z otvoritvijo manjše razstave v Vegovem rojstnem domu. Na proslavi je kot zastopnik Društva govoril prof. L. Gabrovšek.

V tem času je Društvo izdalo v založbi Mladinske knjige priložnostno brošuro o Vegovem življenju, ki jo je napisal dr. L. Čermelj. Vsebina knjižice je nekoliko predelana razprava o Vegi, ki jo je avtor napisal leta 1933 za tednik Življenje in svet.

Društvo je dalo pobudo za izdajo spominske znamke, ki jo je v decembru izdala direkcija PTT v Beogradu v seriji znamk s slikami znamenitejših Jugoslovanov.

V daljši perspektivi je Društvo pričelo z delom na sistematični in natančni Vegovi bibliografiji. Načeti namerava tudi vprašanje kritičnega prikaza Vegovega dela na matematičnem in vojaškem področju ter vprašanje dokumentarnega opisa njegovega življenja. Prav tako namerava Društvo pripraviti predlog za primeren zaključek 120-letne pravde med Slovenci o postavitvi Vegovega spomenika v Ljubljani.

J. Povšič

KOLIKO FIZIKE ZNAJO SLUŠATELJI V ZAČETKU LETA NA UNIVERZI

Že nekaj let je v navadi, da dobe slušatelji prvega letnika univerze, ki poslušajo predavanja iz fizike, v začetku leta nekaj vprašanj, na katera morajo odgovoriti v eni uri. Iz odgovorov na vprašanja naj bi se pokazalo povprečno znanje, ki se lahko predpostavlja pri predavanjih. Zaradi velikega števila slušateljev v letošnjem prvem letniku so pisali letos le matematiki in fiziki. Dobili so naslednja vprašanja:

1. Imamo 10 dkg bakrene žice s premerom 0,2 mm. Koliko metrov je to (gostota bakra $8,9 \text{ g/cm}^3$)? Koliko metrov bi bilo 10 dkg žice s premerom 0,4 mm?

2. Na 220 V je priključena 200 wattna žarnica. Kolikšen tok teče? Kolikšen je upor žarnice?

3. Konveksna leča ima goriščno razdaljo 5 cm. 1 cm velik predmet postavimo 6 cm od leče. Kje je slika? Kako velika je? Konstruiraj sliko!

4. V loncu je 1 liter vrele vode. Vanjo vržemo $\frac{1}{4}$ kg talečega se ledu. Za koliko se ohladi voda?

Nalogo je oddalo 22 slušateljev od dvainštiridesetih. Prvo nalogo je napravilo 10 slušateljev, drugo 13, tretjo 10, četrto pa nihče. Pri prvi nalogi je samo en slušatelj odgovoril na drugi del vprašanja s sklepanjem: Če je premer žice dvakrat večji, je presek 4-krat večji in zato dolžina 4-krat manjša. Vsi ostali so računali dolžino žice znova, ne da bi znali izkoristiti rešitev prvega dela. Pri drugi nalogi ni bilo težav. Ta je take vrste, da je treba poznati samo formulo in ni treba misliti. Pri tretji nalogi marsikdo ni znal narisati poteka žarkov in slike. Četrte naloge so se le redki lotili, pa še od teh nihče ni omenil talilne toplote.

A. Moljk

SKLEPI II. KONGRESA MATEMATIKOV IN FIZIKOV

II. kongres matematikov in fizikov Jugoslavije je na zasedanju v Zagrebu v času od 4. do 9. oktobra 1954 na osnovi podanih referatov, sporočil in številnih diskusij prišel do naslednjih ugotovitev in sklepov:

I. Splošni del

Kongres ugotavlja, da so se naša društva v času med prvim in drugim kongresom organizacijsko okrepila, zajela skoraj vse matematike in fizike v svojih ljudskih republikah in v svoji raznovrstni dejavnosti dosegla vrsto konkretnih uspehov na polju pouka in znanstvenega dela iz področja matematike in fizike. Na kongresu se je pokazala znatna dejavnost Zveze v koordinaciji dela republiških društev; izražena je bila želja, naj se to sodelovanje še dalje krepi. V sedanjem procesu razvoja družbenega upravljanja v naši domovini na področju prosvete, znanosti in kulture, postaja vloga Zveze in društev vse odgovornejša, zlasti pri tistih problemih, ki bi s svojo pravilno rešitvijo prispevali k napredku matematičnih in fizikalnih ved pri nas. Ugotovljeno je uspešno sodelovanje društev in Zveze z organi ljudske oblasti pri izpopolnjevanju pouka matematike in fizike.

Posebej poudarjamo veliko zanimanje precejšnjega dela predavateljev matematike in fizike na visokih šolah in fakultetah za probleme pouka matematike in fizike v srednjih šolah; Zveza z republiškimimi društvi plodno družijo učitelje visokih šol, fakultet in srednjih šol na tem področju. Poleg ostalega sta viden dokaz tega sodelovanja uspešno delo in nadaljnji napredek Zvezinih časopisov: »Matematičko-fizički list za učnike srednjih škola« in »Nastava matematike i fizike«.

II. Vprašanja pouka

1. Kongres sodi, da je treba za čim uspešnejšo politehnično izobrazbo gimnazijskih učencev in za čim pravilnejše usmerjanje njihovih nagnenj, pouk v višjih gimnazijah organizirati na načelu razvejitve: v humanistično in prirodoslovno-matematično smer.

2. Kongres ugotavlja, da so programi matematike v srednjih šolah deloma zastareli in da jih je treba prilagoditi razvoju matematične vede in potrebam naše družbe. Pri tem je treba vskladiti programe, predvidene za poedine stopnje pouka (nižji in višji razredi osemletke, gimnazije in fakultete) in jih po možnosti izenačiti na vsem ozemlju Jugoslavije.

3. Kongres sodi, da sta matematika in fizika na srednjih tehniških in ekonomskih šolah zapostavljeni, da bi morali matematiko uvesti v vse razrede teh šol, fiziko pa vsaj v dva razreda srednjih tehniških šol.

Dalje je treba izenačiti programe matematike in fizike na vseh srednjih in srednjih strokovnih šolah istega tipa v FLRJ.

4. Ugotavljamo nezadostno število učiteljev matematike in zlasti fizike na srednjih šolah; zato je potrebno, da Zveza zastavi vse svoje sile, da čim prej dobimo potreben učiteljski kader. Zaradi preobremenitve učiteljev je treba znižati minimalno število tedenskih ur na pedagoški minimum.

5. Kot sredstvo za izboljšanje fizikalnega pouka so na nekaterih šolah uvedene dijaške vaje in šolske naloge. Kongres predlaga, naj se tak način dela uvede v okvir rednega pouka.

6. Kongres sodi, da se morajo vsa Društva matematikov in fizikov neposredno posvetiti ustvarjanju in izdajanju učbenikov matematike in fizike in izdelavi učil, pa tudi ustvarjanju ostale literature in časopisov za učence in učitelje.

7. Prav tako je treba posvetiti pozornost prirejanju seminarjev iz matematike in fizike za učitelje srednjih šol, vsaj enkrat letno.

8. Kongres sodi, da se mora tečaj splošne matematike na fakultetah izvajati tako, da se upošteva potreba po postopnem prehodu iz srednješolskega na višji pouk.

9. Ker imajo prirodoslovno-matematične fakultete trojno vlogo: vzgajanje znanstvenih delavcev, profesorjev srednjih šol in strokovnjakov v industriji in ostalih strokah, kongres sodi, da naj bodo v pouku matematike in fizike na teh fakultetah upoštevane vse tri vloge. V vsakem primeru je treba posvetiti pozornost elementarni matematiki z višjega stališča, oziroma osnovam fizike.

10. V pouku matematike na prirodoslovno-matematičnih fakultetah se morajo odražati raznolike metode: direktne, funkcionalne, logične, numerične, infinitezimalne, statistične in zgodovinske, poudarjajoč njen vzgojni in spoznavno ustvarjalni značaj.

Kongres ugotavlja, da posvečamo zelo malo pozornosti numeričnim in grafičnim računom ter uporabi numeričnih tabel v pouku matematike na srednjih šolah in na fakultetah. Zato sodi, da je treba temu posvetiti mnogo več pozornosti glede na velik pomen numeričnih računov v statistiki in numeričnih tabel v raznih uporabah matematike.

11. Katedre za fiziko morajo dati bodočim fizikom kvalifikacije za praktično delo v industrijskih in raziskovalnih laboratorijih. Zato je treba še bolj dvigati eksperimentalni del pouka, zlasti še laboratorijske vaje, v to pa je neobhodno potrebno vložiti sorazmerno velika materialna sredstva. Posebej je treba na tem mestu omeniti težki položaj katedre za fiziko na Prirodoslovno-matematični fakulteti v Beogradu, ki še sedaj nima niti najpotrebnejših prostorov in opreme.

12. Trajanje študija matematike in fizike na Višjih pedagoških šolah v raznih republikah je treba izenačiti. Diplomiranim študentom višje pedagoške šole je treba omogočiti, da nadaljujejo študij kot izredni študentje na ustrežajočih skupinah (oddelkih) fakultet, kjer je to izvedljivo; oziroma, da na ustrežajočih tečajih izpopolnijo svojo strokovno izobrazbo.

13. Kongres sodi, da je treba — vsaj tam, kjer je to mogoče — podvzeti odločnejše korake, da se izvede zahteva Prvega kongresa matematikov in fizikov Jugoslavije po vrnitvi astronomije v pouk srednjih šol. Razlogi za to so:

a) Astronomija je najprikladnejša za razbijanje religioznega in modernega pseudoznanstvenega praznoverja.

b) Vse večje zanimanje širokih ljudskih množic za astronomske pojave zahteva od srednje šole, kot splošnoizobraževalne ustanove naroda, da pripomore k pravilnemu pojasnjevanju teh pojavov.

c) Dosedanja praksa je pokazala, da je bil odlok o ukinitvi pouka astronomije na srednjih šolah nepravilen, saj je astronomija odigrala pozitivno vlogo v razvoju naše mladine.

Kongres šteje za potrebno, da matematiki in fiziki vse bolj obvladajo metodo dialektičnega materializma in da s svoje strani sodelujejo pri njegovem razvoju.

III. Organizacija znanstvenega dela. Zveze z inozemstvom.

Udeleženci kongresa se zavedajo velike in pomembne vloge znanosti sploh, matematike in fizike pa še posebej, pri izgradnji sodobne družbe. Kongres poudarja, da sta znanstveno delo in pouk na raznih stopnjah ozko povezana. Z zadovoljstvom ugotavlja, da se v okviru Društev razvija znatna znanstvena dejavnost, ki je razvidna iz števila in značaja del, objavljenih v preteklih petih letih od I. Kongresa in del, prikazanih v teku tega kongresa.

Kongres je uvidel potrebo po učinkovitejši in racionalnejši organizaciji znanstvenega dela v državi in čim prikladnejšem vzpostavljanju in razvijanju zvez z inozemstvom. Kongres sodi, da je treba oblikovati organizacijsko telo, ki bo v Jugoslaviji skrbelo za organizacijo dela na znanstveni problematiki kot celoti. Nacionalne odbore (komiteje) za posamezne vede bi sestavljali predstavniki: akademij, univerz, raziskovalnih institutov, znanstvenih društev itd. Sodimo, da bi morali zveze z inozemstvom vzdrževati preko te organizacije in da bi bile te zveze učinkovitejše, če bi bilo v posameznih mednarodnih unijah včlanjeno to telo in ustrezajoča Zveza društev ali ustrezajoče znanstveno društvo. Ker Akademski svet za sedaj opravlja le del omenjene dejavnosti takega koordinacijskega telesa (Znanstvenega sveta), smatra Kongres za upravičeno, da na področju matematičnih in fizikalnih ved poleg Akademijskega sveta tudi Zveza društev matematikov in fizikov sodeluje kot član v Mednarodni uniji za matematiko in v Mednarodni uniji za fiziko (s tem bi se n. pr. olajšala organizacija in delo Jugoslovanske podkomisije Internacionalne matematične izobraževalne komisije pri Internacionalni matematični uniji).

Kongres nalaga novoizvoljeni upravi Zveze dolžnost, da s svoje strani pripomore k čim hitrejši in čim smotrnejši organizaciji znanstvenega dela in tiska na področju matematičnih in fizikalnih ved. Kongres izraža potrebo sodelovanja med znanstvenimi ustanovami in društvi, da bi se odstranili določeni negativni pojavi, ki danes še obstoje.

IV.

Za uresničitev omenjenih nalog je treba zagotoviti Društvom matematikov in fizikov in Zvezi znatno večjo materialno bazo, kot je bila doslej in to prvenstveno z dajanjem pomoči od ljudske oblasti in dohodki samih društev.

Kongres poudarja posebnost matematičnega stavka, in to, da zahteva tisk matematičnih in fizikalnih del relativno močnejša materialna sredstva in večjo strokovno usposobljenost stavcev ter boljše opremo tiskarn; iz teh razlogov je treba racionalneje izkoristiti in povečati obstoječi materialni in strokovni fond (formiranje močnejše tiskarne, urejene za specifične potrebe matematično-fizikalnih ved).

Kongres ugotavlja tudi, da je nujno šolam in univerzam za potrebe pouka in znanstvenega dela na polju matematike in fizike dodeliti znatnejša materialna sredstva, da bi mogle te ustanove uspešno izvrševati svoje naloge.

ODGOVORI

REŠITEV SISTEMA ENAČB

$$X^2 + 5 Y^2 = U^2, \quad X^2 - 5 Y^2 = V^2 \quad (1)$$

V CELIH ŠTEVILIH

V prvi številki XVIII. letnika »Proteusa« je urednik prof. dr. L. Čermelj stavil tole vprašanje: Poišči ulomek, katerega kvadrat, povečan za 5 in zmanjšan za 5, je zopet kvadrat nekega ulomka. Ta naloga je v bistvu gornji problem (1). Tov. R. Turšič je s poskušanjem dobil naslednjo rešitev: $X = 41$, $Y = 12$, $U = 49$, $V = 31$. Prof. Plemelj pa je opozoril na dejstvo, da je mogoče s številsko-teoretičnimi sredstvi dobiti neskončno mnogo rešitev stavljenе naloge. V prepričanju, da bo ta problem zanimal marsikaterega izmed naših bralcev, smo zaprosili prof. Plemlja, da za Obzornik napiše rešitev te naloge.

Uredništvo

Števila X , Y , U , V so si paroma tuja, skupen faktor dveh bi bil skupen vsem in se sme vzeti, da ni nobenega vsem skupnega prafaktorja. Zaradi $U^2 - V^2 = 10 Y^2$ moreta biti števili U in V le obe lihi, zato je Y sod in X lih.

Druga enačba v (1) se da pisati

$$\frac{1}{2} (X + V) \cdot \frac{1}{2} (X - V) = 5 \left(\frac{1}{2} Y\right)^2$$

in ker sta si faktorja na levi med seboj tuja — glej vsoto in razliko — imamo

$$\frac{1}{2} (X + V) = P^2, \quad \frac{1}{2} (X - V) = 5 Q^2, \quad Y = 2 PQ \quad (2)$$

ali

$$X = P^2 + 5 Q^2, \quad V = P^2 - 5 Q^2, \quad Y = 2 PQ \quad (3)$$

Če se to vstavi v prvo enačbo (1), se dobi $(P^2 + 5 Q^2)^2 + 20 P^2 Q^2 = U^2$ ali

$$P^4 + 30 P^2 Q^2 + 25 Q^4 = U^2 \quad (4)$$

Vsaka rešitev problema (1) privede tedaj po korakih (2) in (3) na rešitev enačbe (4) v celih številih P , Q , U in narobe, iz vsake rešitve enačbe (4) se dobi po enačbah (3) rešitev problema (1). Od tod tedaj vidimo, da sta rešitev naloge (1) in enačbe (4) v celih številih popolnoma ekvivalentna problema.

V enačbi (4) nista P in Q nikdar oba lihi števili. Če namreč vzamemo P in Q oba liha, se izkaže leva stran v (4) deljiva z 8, ne pa s 16 in zato ne more dati kvadrata U^2 . Izmed števil P in Q je eno liho, drugo sodo.

Enačba (4) se da pisati $(3 P^2 + 5 Q^2)^2 - U^2 = 8 P^4$ in je zato mogoč razcep

$$\frac{1}{2} (3 P^2 + 5 Q^2 + U) \cdot \frac{1}{2} (3 P^2 + 5 Q^2 - U) = 2 P^4$$

torej je, ker sta si faktorja na levi tuja,

$$\frac{1}{2} (3 P^2 + 5 Q^2 + U) = v^4, \quad \frac{1}{2} (3 P^2 + 5 Q^2 - U) = 2 x^4, \quad P = vx$$

torej

$$3 P^2 + 5 Q^2 = v^4 + 2 x^4, \quad U = v^4 - 2 x^4, \quad P = vx \quad (5)$$

Od tod dobimo

$$5 Q^2 = v^4 - 3 v^2 x^2 + 2 x^4 = (v^2 - 2 x^2) (v^2 - x^2) \quad (6)$$

Tukaj v ne more biti sodo število, ker bi bila drugače P in Q oba soda. Sedaj je upoštevati dve možnosti: A) Q je sod, P lih, in B) Q lih, P sod.

A) Najprej naj bo Q sod in P lih. Iz (6) dobimo razcepitev

$$v^2 - 2 x^2 = -u^2, \quad v^2 - x^2 = -5 y^2, \quad Q = uy \quad (7)$$

Da je treba tu vzeti $-u^2$ in $-5 y^2$, izhaja od tod, ker sta zaradi sodega Q števili v in x obe lihi in more biti le $2 x^2 - v^2 = u^2$. Sedaj dobimo iz druge enačbe v (7)

$$\frac{1}{2} (x + v) = p^2, \quad \frac{1}{2} (x - v) = 5 q^2, \quad y = 2 pq \quad (8)$$

Prva enačba v (7) da sedaj $2 (p^2 + 5 q^2)^2 - (p^2 - 5 q^2)^2 = u^2$ ali

$$p^4 + 30 p^2 q^2 + 25 q^4 = u^2 \quad (9)$$

Enačba (9) je enačbi (4) popolnoma podobna, le da smo prišli do rešitve iste enačbe (4) v mnogo manjših številih p, q, u , ker je bil prejšnji Q zaradi (7) enak uy , zaradi (8) pa je $y = 2 pq$ in je tedaj $Q = 2 upq$. Vsa števila p, q, u v enačbi (9) so izšla iz razcepitve števila Q in poleg tega ima sedANJI q faktor 2 enkrat manj nego Q .

Pri vsakem koraku po poti (A) izgubi tedaj Q prafaktor 2 vsaj enkrat in bo torej možno ta postopek nadaljevati le, dokler ostane Q sod. Če pa je Q sod, sta v (6) v in x oba liha in je tedaj Q^2 deljiv z 8, torej Q deljiv vsaj s 4. Če je postal Q deljiv le s 4 in ne več z 8, potem redukcija po poti (A) ne more več privedi na sodi q , ampak bo postal q lih in p sod. Enačba $Q = 2 upq$ pa kaže, ker je bil Q deljiv s 4 in ne z 8, da ima p faktor 2 samo enkrat. Sedaj se nadaljuje redukcija po poti (B), kjer je q lih in p sod.

B) Pri lihem Q je v enačbi (6) v lih, x pa sod in dobimo namesto enačb (7) enačbe

$$v^2 - 2 x^2 = \tau^2, \quad v^2 - x^2 = 5 \zeta^2, \quad Q = \tau \zeta \quad (10)$$

Leva stran prve teh enačb da zaradi sodega x pri delitvi z 8 ostanek 1 in mora biti to ostanek kvadrata τ^2 . Sedaj dobimo iz te enačbe

$$\frac{1}{2} (v + \tau) \cdot \frac{1}{2} (v - \tau) = 2 \left(\frac{1}{2} x \right)^2$$

torej

$$\frac{1}{2} (v + \tau) = \xi^2, \quad \frac{1}{2} (v - \tau) = 2 \eta^2, \quad x = 2 \xi \eta \quad (11)$$

Iz druge enačbe v (10) se dobi sedaj $(\xi^2 + 2 \eta^2)^2 - 4 \xi^2 \eta^2 = 5 \zeta^2$ ali

$$\xi^4 + 4 \eta^4 = 5 \zeta^2 \quad (12)$$

Vsaka možna rešitev problema (4) privede po nekaj korakih na enačbo (12). Vsaka rešitev enačbe (12) pa privede po obratni poti na neskončno serijo rešitev enačbe (4).

Enačba $\xi^4 + 4\eta^4 = 5\zeta^2$ ima neskončno mnogo rešitev, toda trojice (ξ, η, ζ) v zaporednih rešitvah zelo hitro naraščajo. Najmanjše rešitve so

$$1. \xi = \eta = \zeta = 1 \quad \text{ali} \quad 1^4 + 4 \cdot 1^4 = 5 \cdot 1^2$$

$$2. \xi = 71, \eta = 11, \zeta = 2257, \text{ ali } 71^4 + 4 \cdot 11^4 = 5 \cdot 2257^2$$

$$3. 35689^4 + 4 \cdot 99731^4 = 5 \cdot 8914433905^2$$

Obratna pot privede iz prve rešitve na $v = 3, \tau = -1, x = 2, q = -1, u = 49, p = 6$, t. j. na $6^4 + 30 \cdot 6^2 \cdot 1^2 + 25 \cdot 1^4 = 49^2$ ali rešitev (1) $x = 41, y = 12, u = 49, v = 31$. Prihodnja rešitev te serije se dobi po obratni poti, če se v (9) vzame $p = 6, q = 1, u = 49$, in se dobi po vrsti $x = 41, v = 31, y = 12, P = 31 \cdot 41, Q = 49 \cdot 12, U = 4728001$ in za rešitev naloge (1)

$$x = 3344161, \quad u = 4728001$$

$$y = 1494696, \quad v = 113279$$

Tretjo rešitev te serije bi dobili, če bi vzeli za p, q, u vrednosti $31 \cdot 41, 49 \cdot 12, 4728001$ in računali po isti poti do P, Q, U .

Druga serija rešitev izvira iz $71^4 + 4 \cdot 11^4 = 5 \cdot 2257^2$ in da že za prvo rešitev enačbe (4) v tej seriji števila $p = 5283 \cdot 1562, q = 4799 \cdot 2257, u = 767067390499249$ oziroma kot odgovor na (1)

$$x = 654686198854361 \quad u = 767067390499249$$

$$y = 178761481355556 \quad v = 518493712982129$$

Tretjo serijo rešitev enačbe (4) bi dobili iz rešitve (3). Tu bi že prva rešitev enačbe (4) imela tako velika števila — okrog 40 mest, da bi bila praktična izvršitev prezamudna.

Enačba $X^4 + 4Y^4 = 5Z^2$. Ta enačba se da obdelati ali v Gaussovem obsegu i ali v obsegu $\sqrt{5}$. Najprej v Gaussovem obsegu! Leva stran se da razcepiti v med seboj tuja si faktorja $(X^2 + 2Y^2i)(X^2 - 2Y^2i)$, ker se sme vzeti, da X, Y, Z nimajo skupnega prafaktorja. Ker je $5 = (1 + 2i)(1 - 2i)$, imamo razcepitev

$$(\pm X^2 \pm 2Y^2i) = (1 + 2i)(p + qi)^2 \quad (1)$$

in je možno vzeti $q \equiv 0$ (2). Če to vzamemo, bo na desni imaginarni del deljiv z 2, tedaj enak $\pm 2Y^2i$. To da razcep

$$p^2 - q^2 - 4pq = X^2, \quad Z = p^2 + q^2 \quad (2)$$

$$p^2 - q^2 - pq = Y^2$$

Pri X^2 in Y^2 je mogoč samo ta znak. Iz prve enačbe se zaradi $q \equiv 0$ (2) takoj vidi, da mora biti na desni le $+X^2$. Sedaj se od tod vidi, da je $q \equiv 0$ (4), nakar da druga enačba le $+Y^2$ kot možnost in poleg tega, da je $q \equiv 0$ (8). Torej je

$$(p - 2q)^2 - X^2 = 5q^2, p - 2q = A^2 + 5B^2, X = A^2 - 5B^2, q = 2AB$$

$$(p + \frac{1}{2}q)^2 - Y^2 = 5(\frac{1}{2}q)^2, p + \frac{1}{2}q = a^2 + 5b^2, Y = a^2 - 5b^2, q = 4ab$$

$$A^2 + 5AB + 5B^2 = a^2 + 5b^2, AB = 2ab$$

Če se sedaj postavi

$$A = au, \quad B = 2b/u \quad (4)$$

se dobi enačba

$$a^2(1 - u^2) - 10ab + 5b^2 \left(1 - \frac{4}{u^2}\right) = 0 \quad (5)$$

Iz te enačbe je treba dobiti pri racionalnem u racionalno vrednost za a/b in od tod za a in b cela števila. Najprej je očitno, da je za $u = 1$ in $u = 2$ razmerje a/b racionalno.

Če je $u = 1$, je ena možnost že $b = B = 0$, $a = A$, $q = 0$ in to dá rešitev $X = Y = Z = 1$. Druga možnost pri $u = 1$ nam dá rešitev $X = -71$, $Y = -11$, $Z = 2257$.

Iz $u = 2$ se ne dobi nič novega, le zopet te dve rešitvi, kjer pa sta X in Y oba multiplicirana s 5, tedaj Z s 5^2 .

Enačba (5) ima racionalen kvocient $a:b$, če je njena diskriminanta pri racionalnem u kvadrat racionalnega števila. Diskriminanta je $5(u^4 + 4)/u^2$. Če vpeljemo $u = x/y$, dobimo

$$x^4 + 4y^4 = 5z^2 \quad (6)$$

in iz enačbe (5)

$$ax(x^2 - y^2) + 5by(xy - z) = 0 \quad (7)$$

ali, kar je isto

$$ax(xy + z) - by(x^2 - 4y^2) = 0 \quad (8)$$

Za z je tu možno vedno vzeti ali znak $+$ ali znak $-$. Vsaka rešitev enačbe (7) privede do dveh novih rešitev te enačbe. Iz rešitve $x = 71$, $y = 11$, $z = 2257$ se pride do prihodnje rešitve $X = 35\,689$, $Y = 99\,731$, $Z = 89\,1443\,3905$. Enačba

$$35\,689^4 + 4 \cdot 99\,731^4 = 5 \cdot 89\,1443\,3905^2$$

je dobro prekontrolirana.

V obsegu $\sqrt{5}$ pa se dobijo še dve novi zanimivi metodi za reševanje enačbe $X^4 + 4 \cdot Y^4 = 5 \cdot Z^2$ v celih številih.

J. Plemelj

CENTRIFUGALNA VERIŽNICA

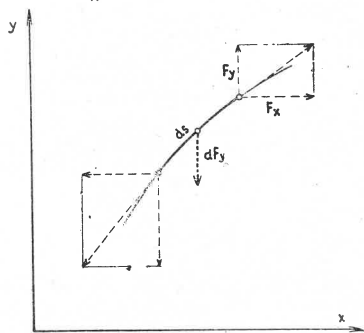
(Vprašanje 9. iz III. letnika)

Veriga z dolžino L je z obema koncema pritrjena na vrteči se gredi; razmak med pritrdiščema je l . Kotna hitrost ω naj bo tolikšna, da težo lahko zanemarimo. Zanima nas oblika, ki jo zavzame veriga pri vrtenju, največji odklik od osi, $y_{maks} = b$, in strmina proti gredi v pritrdišču, $y'(0) = c$. V posebnem bomo ti dve količini izračunali za verigo z dolžino $L = 2$ m ter z razmakom med pritrdiščema $l = 1$ m.

Izhodišče koordinatnega sistema postavimo v točko, kjer je veriga pritrjena, os x pa v os gredi, tako da je $y(0) = y(l) = 0$.

Dodatno pa mora biti izpolnjena enačba:

$$\int_0^l ds = \int_0^l (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} dx = L \quad (1)$$



Sl. 1. Sile, ki delujejo na kos verižnice.

Diferencialno enačbo za iskano krivuljo izpeljemo na prav tak način kot za navadno verižnico ali pa za struno. Oglejmo si kratek lok ds . Nanj deluje na obeh koncih napetost verige $\mathbf{F}$, katere komponenti v smeri osi x in y označimo s F_x in F_y . Ker je centripetalni pospešek pravokoten na os x , je F_x konstanta. Rezultanta dF_y pa mora dajati temu delu verige pospešek, torej

$$dF_y = dm \cdot a = -\rho ds \cdot \omega^2 y$$

pri čemer je ρ masa na dolžinsko enoto verige.

Iz slike je razvidno, da je kvocient F_y/F_x enak odvodu krivulje v dani točki. Prejšnjo enačbo zato delimo z F_x :

$$d(F_y/F_x) = dy' = -(\omega^2 \rho/F_x) y ds$$

Enačba za navadno verižnico je le v toliko drugačna, da v njej stoji g namesto $-\omega^2 y$.

Zaradi krajše pisave zaznamujmo kvocient $\omega^2 \rho/F_x$ z $2A$. Če upoštevamo, da je $ds = (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} dy'/y'$, dobimo iskano diferencialno enačbo. Zapišimo jo tako, da sta spremenljivki y in y' ločeni:

$$y' (1 + y'^2)^{-\frac{1}{2}} dy' = -2A y dy \quad (2)$$

Z integracijo dobimo

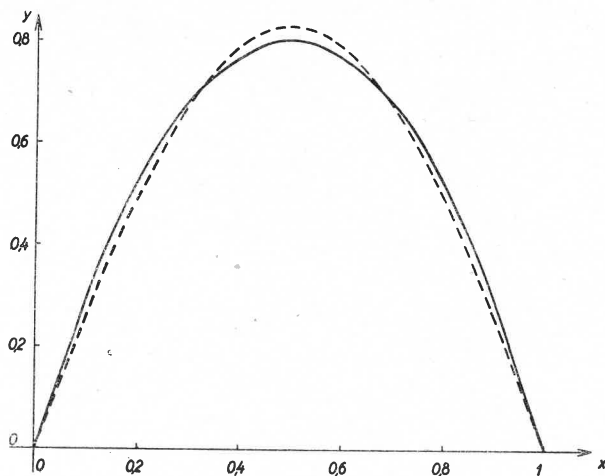
$$y' = [(-Ay^2 + C)^2 - 1]^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

kjer je C integracijska konstanta. Z okrajšavo

$$(C + 1)/A = a^2 \quad \text{in} \quad (C - 1)/A = b^2 \quad (3a)$$

in z ločitvijo spremenljivk dobimo:

$$\int_0^y [(a^2 - y^2)(b^2 - y^2)]^{-\frac{1}{2}} dy = Aax \quad (3b)$$



Sl. 2. Polna krivulja: $y = 0,83 \cdot \sin x$. Črtkana krivulja: $y = 0,805 \cdot \text{sn}(3,79 x)$, pre čemer je $k = 0,735$. Obe krivulji imata enako dolžino $L = 2$.

S tem da smo tu za integracijsko konstanto vzeli 0, smo že upoštevali začetni pogoj, da je pri $x = 0$ tudi $y = 0$. Integral (3b) je eliptični integral prve vrste. S substitucijo $y/b = t$ in okrajšavo

$$b/a = k \quad (4)$$

ga prevedemo na normalno obliko:

$$F(y/b, k) = \int_0^{y/b} [(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)]^{-\frac{1}{2}} dt = Aax \quad (5)$$

Ker iščemo y kot funkcijo spremenljivke x , preidemo na inveršno funkcijo, t. j. na Jacobijevo funkcijo sinus amplitudinis¹

$$y = b \text{ sn}(Aax) \quad (6)$$

Funkcija $\text{sn}(u)$ je periodična s periodo $4K(k)$. Pri tem je $K(k)$ popolni eliptični integral prve vrste, torej: $K(k) = F(1, k)$. Za $k \rightarrow 0$ je $K(k) = \pi/2$, funkcija $\text{sn}(u)$ pa preide v bolj preprosto funkcijo $\sin u$. To bomo kasneje s pridom uporabili.

Funkcija $\operatorname{sn}(u)$ zavzame največjo vrednost 1, ko je u enak četrtini periode, torej enak $K(k)$. Pri tem je $x = \frac{1}{2}l$. Sledi, da je

$$K(k) = \frac{1}{2} Aal \quad (7)$$

Z odvajanjem dobimo iz enačbe (6):

$$y'(0) = c = Aab/l \quad (8)$$

Iz sistema enačb (3), (3a), (4), (7) in (8) dobimo po kratkem računu:

$$k = (1/c) [-1 + (1 + c^2)^{\frac{1}{2}}] \quad (9)$$

Upoštevali smo samo pozitivni koren.

Iz enačb (7) in (8) lahko eliminiramo produkt Aa in konstanto b ter dobimo:

$$y = \frac{1}{2} [cl/K(k)] \operatorname{sn} [2 K(k)x/l] \quad (10)$$

To odvajamo, $y'(x)$ pa vnesemo v enačbo (1):

$$L = \int_0^l \{ 1 + c^2 \operatorname{cn}^2 [2 K(k)x/l] \operatorname{dn}^2 [2 K(k)x/l] \}^{\frac{1}{2}} dx \quad (11)$$

S tem smo dobili enačbo, iz katere je treba izračunati neznanko c . Za k si pri tem mislimo vstavljen izraz (9). Integral v enačbi (11) se da prevesti v hipereliptičnega. Najenostavneje pa je, če ga direktno numerično izračunamo pri raznih vrednostih za c . Z interpolacijo dobimo potem tisti c , pri katerem je enačba (11) izpolnjena.

Prvi približek dobimo tako, da iskani količini izračunamo za funkcijo $y = b_1 \sin \pi x/l$, katere lok naj ima isto dolžino kot naša krivulja. Dobimo integral

$$L = \int_0^l [1 + (b_1^2 \pi^2/l^2) \cos^2 (\pi x/l)]^{\frac{1}{2}} dx$$

ki preide s substitucijo $\sin (\pi x/l) = u$ in uvedbo parametra

$k_1 = (b_1 \pi/l) [1 + (b_1^2 \pi^2/l^2)]^{-\frac{1}{2}}$ v popolni eliptični integral druge vrste.² Izkaže se, da je $L = (2 b/k_1) E(\pi/2, k_1)$. Koren te enačbe je $b_1 = 0,83$ m, strmina v začetni točki pa je potem $c_1 = 2,6$.

Drugi približek sem dobil iz enačbe (11), kjer sem integral razvil po Simpsonovem pravilu. Najboljši vrednosti, ki sem ju mogel dobiti brez zgoščevanja tabel,³ sta

$$c = 3,05$$

$$b = 0,805 \text{ m.}$$

S. Šterbal

¹ I. Vidav: Višja matematika II., str. 314 in dalje.

² Jahnke—Emde: Tafeln höherer Funktionen, Teubner, 1948.

³ Milne—Thompson: Die elliptischen Funktionen von Jacobi, J. Springer, 1931.

NOVE KNJIGE

TEORIJE KEMIJSKE VEZAVE

Chemical Constitution. An Introduction to the Theory of the Chemical Bond. (J. A. A. Ketelaar, angleški prevod: L. C. Jackson. Elsevier Publishing Company, Amsterdam 1953. Str. VIII + 398. $22,5 \times 14,5$ cm.)

Ves čas razvoja kemije od Daltonove atomske hipoteze je valenčna črtica pomagala kemikom pri ponazarjanju strukture molekul in pri načrtovanju poteka reakcij. Medtem ko je lahko elektrostatika nudila potrebno podlago za razumevanje in obdelavo vezi med ioni, je ostala narava vezi med atomi (»kovalentna vez«) v popolni temi, dokler nista Heitler in London vnesla koncepte in metode kvantne mehanike v probleme atomske vezi. V obravnavi mnogoatomskih molekul so se uveljavili približki, katere poznamo kot metodo elektronskih parov (Pauling), metodo molekulskih tirov (Hückel, Lennard-Jones) in druge. Te metode so omogočile računanje energije dokaj kompliciranih molekul, kakor tudi značilnosti posameznih atomov (prosti naboj, prosta valenca) in vezi (stopnjo, elektronsko gostoto), ki jih tvorijo. V primerih, kjer račun še ni mogoč, si lahko ustvarimo vsaj kvalitativne pojme na tej osnovi. Poleg obravnave molekul v mirovnem stanju so nam omenjene metode dale možnosti teoretične obravnave reaktivnosti, kar je za kemika še celo važno. Razumevanje in zlasti kvantitativna obdelava kovinske vezi ter medmolekulskih vezi so postale možne šele z uporabo kvantnih metod. Vsi ti veliki uspehi zahtevajo, da kemik spozna vsaj v osnovi način kvantne obravnave kemijskih vezi. Težava pri tem je pomanjkljiva matematična izobrazba povprečnega kemika. Prav zato pa so knjige, kot je Ketelaarjeva, zanj zelo dragocene. Po drugi strani je knjiga dobra tudi za nekemike, ki delajo na področjih blizu kemije, ker jim podaja bistvene pojme kemije brez vse empirijske navlake, katero mora sicer kemik spraviti pod streho. Knjiga je razdeljena na pet poglavij. Prvo podaja osnove periodičnega sistema, ostala štiri pa so posvečena štirim vrstam vezi: ionski, atomski, kovinski, in Van der Waalsovimi vezem. Matematična izvajanja so omejena na minimum. Avtor je vnesel v knjigo najnovejše pridobitve iz področja kemijske vezi, kar delo zelo poživljuje.

D. Hadži

VPRAŠANJA

1. LASTNA FREKVENCA NEENAKOMERNE STRUNE

Kos žice z gostoto ρ in dolžino $2a$ je v sredini najdebelejši, proti koncem pa preseka S tako pojema, da je $S/S_0 = 1 - (x/a)^2$, če je x razdalja od sredine žice. Napnimo žico s silo F . Kolikšna je najnižja lastna frekvenca take strune? Kolikokrat večja je ta frekvenca kot pri enako dolgi in enako napeti struni s stalnim presekom S_0 ?

Pripomba: Problem ni čisto realen, ker bi se struna, ki ima na koncih debelino nič, že pri najmanjši sili strgala. Nalogo kljub temu postavljamo v tej idealizirani obliki, ker bo njena matematična obdelava prav zanimiva in ker bodo dobljene izkušnje koristile pri drugih problemih, ki bodo bolj realni.

I. Kuščer

Društvo matematikov in fizikov LRS je prejelo od Društva mat. in fiz. Hrvatske naslednje knjige iz založbe Školska knjiga:

1. J. Lukatela — B. Pavlović: Osnovne karakteristike novog nastavnog programa matematike.
2. Novak-Rukavina: Metodika perspektivnog crtanja.
3. S. Škarica: Kvadratura kruga.
4. D. Grdenić: Modeli molekula.
5. F. Hrabak: Iz povijesti matematike.
6. D. Blanuša: Teorija relativnosti.
7. S. Filipović: Privredna matematika.
8. Jirasek-Kurepa-Škreblin: Matematika (za II. raz. sred. ek. škola).
9. Filipović-Jirasek: Financijska i aktuarska matematika (s tablicama).
10. Jirasek-Pavlović: Algebra za I. i II. raz. uč. škole.
11. Jirasek-Pavlović: Algebra za III. raz. uč. škole.
12. Škreblin-Jirasek: Aritmetika i algebra za IV. raz. uč. škola.
13. Kurepa-Škreblin: Trigonometrija za više raz. srednjih škola.
14. V. Vranić: Matematika za ekonomiste II.
15. Grubić-Lukatela: Fizika za II. raz. uč. škole.
16. Grubić: Fizika za III. raz. uč. škole.
17. Filipović-Rukavina: Fizika za III. raz. gimn.
18. G. i M. Šindler: Fizika za IV. raz. gimn.
19. Lukatela-Ogrizović: Fizika za više raz. gimn.
20. Katalinić-Mayer: Fizika, nauka o elektricitetu i magnetizmu.
21. Lukatela-Metzger: Fizika za više raz. gimn.
22. Đ. Kurepa: Teorija skupova.
23. I. Supek: Teorijska fizika i struktura materije I i II.
24. Ž. Marković: Uvod u višu analizu.
25. Kurepa-Škreblin-Jirasek: Algebra za VII. i VIII. raz. gimn.
26. L. Rajčić: Stereometrija za više raz. gimn.
27. L. Rajčić: Planimetrija.

Za prežete knjige se Društvu matem. in fiz. Hrvatske najlepše zahvaljujemo. V naslednjih številkah bomo objavili recenzije nekaterih knjig.

IZ UPRAVE

Po enem letu presledka, ki ni nastal po naši krivdi, je »Obzornik za matematiko in fiziko« spet zaživel. Vodstvo tiskarne »Ljudske pravice« je uvidevno ustreglo naši prošnji in prevzelo tisk našega časopisa. Tako nam je omogočeno, da nadaljujemo z začetim delom.

List bo izšel v šol. l. 1955/56 v štirih številkah po 48 str., kar ustreza dosedanjemu obsegu. Tudi naročnina je nespremenjena: 250 din. List smo poslali vsem dosedanjim naročnikom. Morebitne spremembe naslova naj nam naročniki čimprej sporočijo. Kompletna letnika II in III sta še na razpolago po 250 din, I. letnik brez prve številke pa za ceno 120 din.

Vse prijatelje našega lista prosimo, da podprejo naša prizadevanja in jih vabimo k sodelovanju.

Društvo matematičara i fizičara N. R. Hrvatske poziva sve, koji se zanimaju matematičko-fizičkim naukama, da se pretplate na

Glasnik matematičko-fizički i astronomski

i sarađuju u njemu.

Zaista ne bi smjelo biti ni jednog kulturnog radnika, koji se bavi matematičko-fizičkim naukama, kao ni prosvjetne ustanove, koja nije pretplatnik Glasnika. Pretplatom i suradnjom u svojem naučnom i stručnom časopisu pokazujete u koliko mjeri pratite i podupirete razvitak i napredak svoje struke. Širite također Glasnik u svom krugu, jer time podupirete razvitak matematičko-fizičkih nauka u svojoj okolini.

Prijave pretplate slati na administraciju Glasnika: Hrvatsko prirodoslovno društvo, Zagreb, Ilica 16/III. Pretplata za god. 1955. iznosi 400.— din.

Društvo matematikova in fizikov NRH izdaja za vso državo »*Matematičko-fizički list* za učenike srednjih škola«. Letnik ima 4 številke, med počitnicami ne izhaja. Letna naročnina je 200 din.

Profesorji srednjih šol, priporočajte list dijakom! Naročila in naročnino pošiljajte na naslov:

Matematičko-fizički list, Zagreb, Ilica 16/III, p. p. 165 ali na čekovni račun št. 401-T-1080.

Zveza Društev matematikova in fizikov FLRJ izdaja časopis:

Nastava matematike i fizike

Naročnina je 200 din, posamezna številka 60 din. Naročila in naročnino pošiljajte podjetju »Znanje«, Beograd, Terazije 12 ali na ček. rač. št. 103-T-307 z označbo »Za časopis Nastava matematike i fizike«.

Obzornik za matematiko in fiziko izhaja vsak drugi mesec. Izdaja ga Društvo matematikova in fizikov LRS. Urejuje ga uredniški odbor: I. Kuščer, A. Moljk, N. Prijatelj, I. Vidav. Odgovorni in tehnični urednik: I. Štalec. Upravo vodi I. Štalec. — Tiska tiskarna »Ljudske pravice« v Ljubljani. — Naročnina za letos je 250 din. Posamezna številka 90 din, dvojna številka 150 din. Naročnino nakažite na naš čekovni račun pri 60-KB-1-Ž-207. — Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov:

Obzornik za matematiko in fiziko, Ljubljana, poštni predal 253.