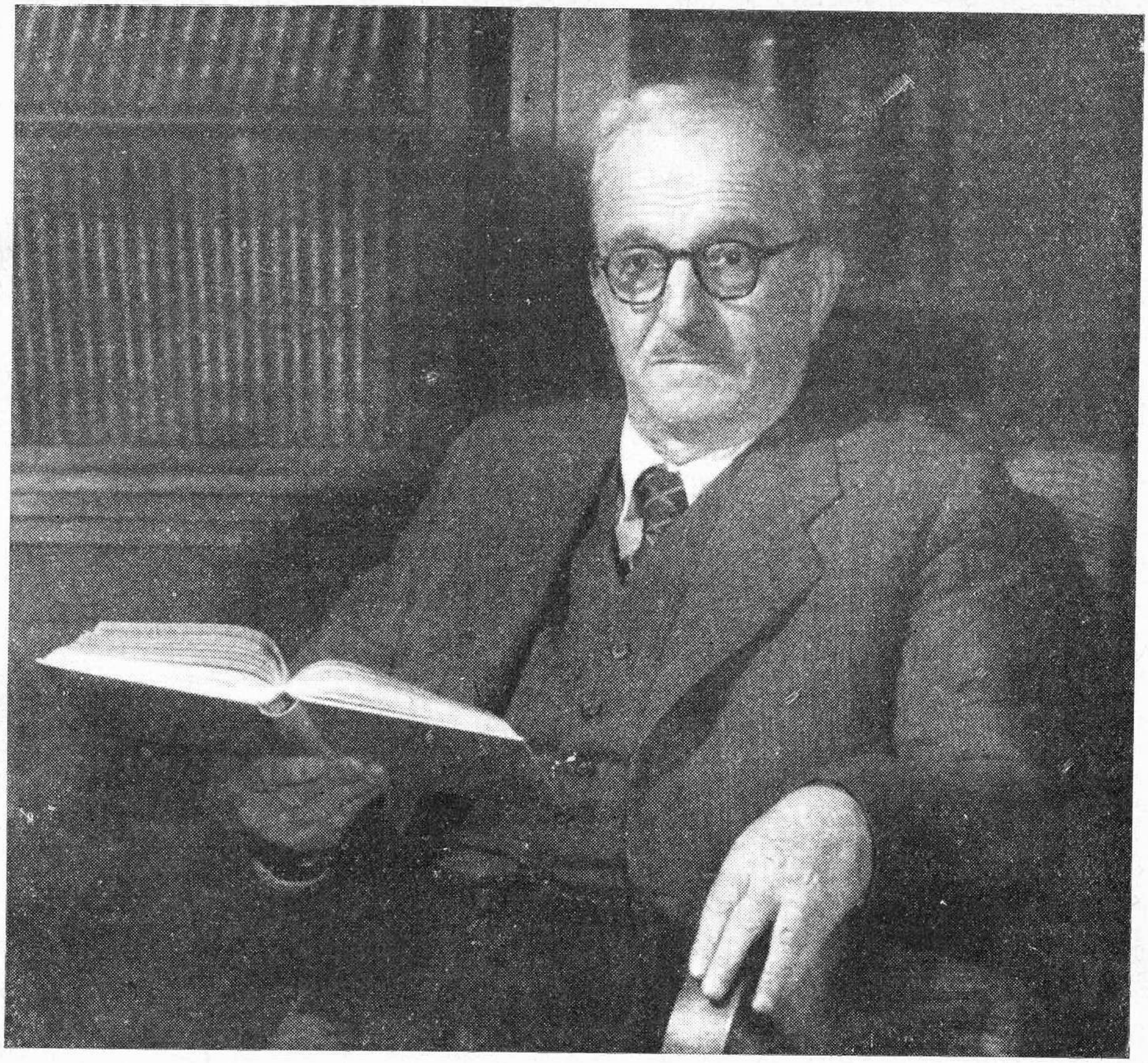


Foto J. Branc

Profesorju Josipu Plemlju ob osemdesetletnici

prisrčno čestitamo

in mu posvečamo to številko našega lista

SEZNAM DEL PROF. J. PLEMLJA

1. Ein Satz über vertauschbare Matrizen und seine Anwendung in der Theorie linearer Differentialgleichungen (Monatshefte für Mathematik und Physik 1901)

2. Über Systeme linearer Differentialgleichungen erster Ordnung mit doppeltperiodischen Koeffizienten (Prav tam 1901)

3. Über lineare Differentialgleichungen mit vertauschbarer Basis der Monodromiegruppe (Prav tam 1902)

4. Über die Anwendung der Fredholmschen Funktionalgleichung in der Potentialtheorie (Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Wien, 1903)

5. Zur Theorie der Fredholmschen Funktionalgleichung (Monatshefte für Mathematik und Physik 1904)

6. Über lineare Randwertaufgaben der Potentialtheorie I. Teil (Prav tam 1904)

7. Über einen neuen Existenzbeweis des Riemannschen Funktionssystems mit gegebener Monodromiegruppe (Anzeiger der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften 1906)

8. Über lineare Randwertaufgaben der Potentialtheorie II. Teil (Monatshefte für Mathematik und Physik 1907)

9. Ein Ergänzungssatz zur Cauchyschen Integraldarstellung analytischer Funktionen (Prav tam 1908)

10. Riemannsche Funktionenscharen mit gegebener Monodromiegruppe (Prav tam 1908)

11. Über Schlesinger's »Beweis« der Existenz Riemannscher Funktionenscharen mit gegebener Monodromiegruppe (Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung 1909)

12. Über Schlesinger's »Beweis« der Existenz Riemannscher Funktionenscharen mit gegebener Monodromiegruppe (Prav tam 1909)

13. Existenzbeweis der Lösung linearer Differentialgleichungen insbesondere an einer Fuchs'schen singulären Stelle (Monatshefte für Mathematik und Physik 1911)

14. Potentialtheoretische Untersuchungen (Preisschriften der fürstl. Jablonowskischen Gesellschaft in Leipzig 1911)

15. Die Unlösbarkeit von $x^5 + y^5 + z^5 = 0$ im Körper $k\sqrt{5}$ (Monatshefte für Mathematik und Physik 1912)

16. Die Siebenteilung des Kreises (Prav tam 1912)

17. Die Grenzkreisuniformisierung analytischer Gebilde (Prav tam 1912)

18. Über den Verzerrungssatz von P. Koebe (Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte, Verhandlungen 1913)

19. Sur l'abaissement du degré de l'équation modulaire (Bulletin des Sciences Mathematiques 1923)

20. Rešitev linearne diferencialne enačbe kot funkcija akcesoričnih parametrov (Rad Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti 1923)

21. O analitičnem raztegnenju slik (Prav tam 1923)

22. Ein Abschätzungssatz der Potentialtheorie (Publications mathématiques de l'Université de Belgrade 1933)

23. Die Abbildung eines Ringbereiches mit analytischer Zuordnung der Randkurven auf einen mit linearer Zuordnung (Prav tam 1933)

24. Über die Transformation des elliptischen Gebildes in die Normalform von Weierstrass (Prav tam 1933)

25. Die Irreduzibilität der Kreisteilungsgleichung (Prav tam 1933)

26. Zur Theorie der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit vier Fuchs'schen singularen Punkten (Monatshefte für Mathematik und Physik 1936)

27. Iz mojega življenja in dela (Prvi kongres matematičara i fizičara FNRJ — Naučna saopštenja i obavještenja 1951)

28. O krogih na krogli (Obzornik za matematiko in fiziko 1951)

29. Teorija analitičnih funkcij (Slovenska akademija znanosti in umetnosti 1953)

LETO III
1 9 5 3

Obzornik za matematiko in fiziko

ŠTEV. 5-6
1. VIII. 1954

ZNANSTVENO DELO AKADEMIKA JOSIPA PLEMLJA

A. PETERLIN

Predavanje ob proslavi njegove osemdesetletnice na slavnostni skupščini Akademije dne 11. decembra 1953

Velecenjeni gospod predsednik, velespoštovani gospod jubilant, gospodje akademiki in kolegi!

V prav posebno čast si moram šteti, da me je visoki zbor pooblastil, da spregovorim na današnji slavnostni seji o znanstvenem delu našega odličnega slavljenca, enega prvih članov Slovenske akademije znanosti in umetnosti in prvega rektorja slovenske univerze v Ljubljani. Pri tem se mi nudi prilika, da se svojemu velikemu učitelju in dolgoletnemu prijatelju tudi javno zahvalim za vse, kar sem skupaj z njegovimi številnimi učenci prejel od njega pri njegovih predavanjih in kasneje kot njegov učiteljski tovariš v vseh dolgih letih, ki sem jih preživel z njim na univerzi in v akademiji.

Kakor pri vsakem za matematiko močno nadarjenem človeku se je tudi pri akademiku Plemlju razvil talent v mladih letih. Že na gimnaziji si je kot samouk pridobil matematično znanje, ki je po obsegu približno ustrezalo takratnim zahtevam pri izpitih kandidatov za srednješolsko službo, v nekaterih vprašanjih pa segalo še globlje, tako da je na šoli nastala okrog njega prava legenda. Na univerzi na Dunaju pa ga je pri prvem nastopu v matematičnem seminarju vodja prof. Gustav von Escherich takoj designiral za akademsko kariero.

Mislim, da je visokemu zboru dovolj znan zunanji potek življenja in znanstvene kariere akademika Plemlja, od njegove promocije 1898 na Dunaju, študija v Göttingenu in Berlinu preko privatne docenture na dunajski univerzi in profesure v Černovicah do prihoda v Ljubljano 1919, kjer deluje sedaj že petintrideseto leto kot profesor na univerzi in šestnajsto leto kot član Akademije. Zato bi se v naslednjem omejil na glavne karakteristike njegove znanstvene dejavnosti, ki predstavlja tisti večni, neizbrisni spomenik, ki si ga je postavil s svojim velikim talentom in čudovitim delom naš jubilant, ki je s tem tudi dokumentiral kulturno funkcijo malega in nasploh zaničevanega slovenskega naroda ter njegov doprinos k vsem ljudstvom in plemenom skupni znanosti.

Prva dela mladega Plemlja so veljala teoriji linearnih diferencialnih enačb, s katerimi je pa tudi zaključil svojo v znanstvenih revijah publicirano raziskovalno dejavnost. Njegova prva tiskana razprava govori o uporabi zamenljivih matric v teoriji linearnih diferencialnih enačb (Ein Satz über vertauschbare Matrizen und seine Anwendung in der Theorie linearer Differentialgleichungen, 1901, in Über lineare Differentialgleichungen mit vertauschbarer Basis der Monodromiegruppe, 1902). Dalje se je ukvarjal s sistemi linearnih diferencialnih enačb z dvojnoperiodnimi koeficienti (Über Systeme linearer Differentialgleichungen

mit doppeltperiodischen Koefizienten, 1901), podal preprost dokaz za eksistenco rešitev v okolici singularne točke (Existenzbeweis der Lösung linearer Differentialgleichungen insbesondere an einer Fuchs'schen singulären Stelle, 1910) karakteriziral rešitev kot funkcijo akcesoričnih parametrov (1923) in našel rešitev nekega problema iz teorije linearnih diferencialnih enačb Fuchsovega tipa s štirimi singularnimi točkami (Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen, 1936).

Ko je študiral v letu 1900/01 v Göttingenu, je tam Šved Holmgren poročal o rezultatih, ki jih je pravkar dosegel Fredholm v teoriji integralnih enačb. Te enačbe so se izkazale za važno raziskovalno sredstvo na raznih področjih matematike, posebno v potencialni teoriji. Akademik Plemelj se je med prvimi lotil raziskovanja tega področja in kmalu dosegel lepe uspehe. V tej zvezi je napisal več razprav, ki so vzbudile v matematičnem svetu veliko zanimanje (Über die Anwendung der Fredholmschen Funktionalgleichung in der Potentialtheorie, 1903, Zur Theorie der Fredholmschen Funktionalgleichung, 1904, Über lineare Randwertaufgaben der Potentialtheorie I, II, 1904/07). Oba spisa iz leta 1904 je znameniti francoski matematik É. Picard obilo citiral v neki svoji razpravi iz leta 1906 in ju označil kot »deux excellents mémoires«.* S tem priznanjem je akademik Plemelj na mah postal znan v matematičnem svetu. Njegova razprava iz istega področja »Potentialtheoretische Untersuchungen«, Leipzig 1911, ki se odlikuje po globini in pomembnosti izsledkov in tudi po dovršeni izdelavi in eleganci, pa je dobila nagrado znanstvenega društva kneza Jablonowskega v Leipzigu.

V funkcijski teoriji je najpomembnejše delo akademika Plemlja dokončna rešitev Riemannovega problema, s katerim so se matematiki celih 50 let zaman trudili, ne da bi dobili vsestransko zadovoljujočo splošno rešitev. David Hilbert je rešil problem v posebnem primeru, toda njegova metoda je zelo kompliciran in tudi ne povsem splošna. Šele akademik Plemelj je v svojem spisu »Riemannsche Funktionenscharen mit gegebener Monodromiegruppe« (1908) podal splošno in preprosto rešitev tega problema. Dokazal je tudi eksistenco tako imenovanega primitivnega sistema rešitev, s katerim se da vsaka druga rešitev izraziti.

V teoriji uniformizacije analitičnih krivulj je dal akademik Plemelj preprost dokaz za eksistenco uniformizirajočih spremenljivk, ki preslikajo pripadajoče enostavno sovisno polje v notranjost mejnega kroga (Grenzkreisuniformisierung analytischer Gebilde, 1911). Postavil in dokazal je nadalje izrek o konformni upodobitvi kolobarja z analitično prirejenostjo robnih točk na polje z linearno prirejenostjo (Die Abbildung eines Ringbereiches, 1933).

Tudi v teoriji enolistnih analitičnih funkcij so izsledki akademika Plemlja pomembni. V svojem dunajskem predavanju na zborovanju Nemškega matematičnega udruženja leta 1913 je dal prvi kvantitativno in obenem najostrejšo formulacijo izreku o analitičnem raztegu slik, ki je podlaga za vso teorijo enolistnih analitičnih funkcij.

Med manjšimi prispevki bodi omenjen preprost dokaz Fermatovega problema za pete potence (1912) in pa rekonstrukcija Galoisovega izreka o znižanju stopnje modulske enačbe (Sur l'abaissement du dégré de l'équation modulaire, 1923).

---

* É. Picard: Sur quelques applications de l'équation fonctionelle de M. Fredholm str. 244. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. XXII, 1906.

Letos spomladi je izdala Slovenska akademija znanosti in umetnosti njegovo knjigo »Teorija analitičnih funkcij«. To delo je za nas Slovence prav posebno važno. Čeprav je to učbenik, ki obsega v nekoliko razširjeni obliki njegova predavanja iz tega predmeta v matematičnem seminarju v letu 1926/27, je v njem mnogo vsebinsko in metodično novega, posebno v zadnjem delu, ki obravnava tista poglavja, na katerih je avtor sam veliko delal. Naša velika želja je, da bi se jubilantu posrečilo pripraviti za tisk in izdati še predavanja iz teorije diferencialnih in integralnih enačb, variacijskega računa, algebre in teorije števil, da bi tako imeli v tiskani obliki pred seboj njegov čudoviti triletni matematični kurz, za katerega nas more upravičeno zavidati ves svet. Zbirka teh učbenikov bi bila tudi res reprezentativna afirmacija znanstvene in publikacijske aktivnosti Akademije, ki bi daleč presegla regionalni značaj in bi utrdila naš znanstveni sloves v svetu.

S pomembnimi rezultati svojih raziskavanj se je akademik Plemelj uvrstil med prve sodobne matematike in si pridobil priznanje znanstvenega sveta doma in v tujini. Nikoli se ni lotil lahkih problemov. Publiciral je samo zrele izsledke dolgih študij, za katere si je izbral vselej izrazito težke matematične probleme, ki se jih kljub njihovi fundamentalni važnosti drugim ni posrečilo rešiti. Njegove raziskave segajo povsod v globino in do jedra. Vsa njegova dela so do podrobnosti izdelana in se odlikujejo po premišljeni dispoziciji, sugestivni jasnosti, eleganci in izbrano lepem jeziku. Posebno nekatera so prave mojstrovine v tem oziru, za kar je tudi žel odkrita priznanja v matematičnem svetu. Velik je vpliv njegovih publikacij na poznejši razvoj obravnavanih vprašanj zlasti v potencialni teoriji, kjer še po 40 letih sloni dobršen del najnovejših raziskavanj na Plemljevih idejah. Važnost njegovih izsledkov se prav lepo vidi iz Enciklopedije matematičnih ved (Enzyklopedie der mathematischen Wissenschaften), kjer se omenja akademik Plemelj pri problemih, s katerimi se je ukvarjal, vedno v taki obliki in s takim poudarkom, da se jasno vidi, kako je prav značilno zgrabil problem, ga izčrpno rešil in tudi pokazal pot, po kateri so mogli kasnejši matematiki usmeriti svoja raziskavanja.

Slovenci imamo v akademiku Plemlju res vidnega znanstvenika svetovnega slovesa, na katerega smo upravičeno ponosni, ki daleč presega okolico in kakršen se rodi tudi večjim narodom le v prav redkih primerih. Zavedamo se prav dobro, koliko je storil za razvoj znanstvenega mišljenja med Slovenci v teku svoje skoro petintridesetletne učne dejavnosti na univerzi, ko je kot neprekosljiv učitelj navdušil celo generacijo študentov pri svojih čudovitih predavanjih, jih upeljal v abstraktni svet matematike in vzgojil ves današnji predavateljski kader matematike in fizike na univerzi in visokih šolah v Ljubljani. Nam vsem, ki smo imeli to veliko srečo, da smo bili njegovi učenci, je današnji jubilant svetel zgled znanstvenika, ki je tako dosledno neizprosen pri ugotavljanju znanstvene resnice, preprost in jasen pri razlaganju doseženih izsledkov, tako toplo človeški pri odnosu do svojih kolegov in učencev. Mislim, da smem zaključiti ta skromni prikaz znanstvene aktivnosti našega velikega matematika z iskreno željo vseh njegovih znancev in prijateljev, njegovih kolegov na tem visokem zboru, na univerzi in visokih šolah, da bi nam bil ohranjen še dolgo vrsto let tako svež in delaven, dragocen prijatelj in neprekosljiv učitelj.

Z dovoljenjem prof. J. Plemlja objavljamo v naslednjem prevoda dveh njegovih del

PRAVILNI SEDMEROKOTNIK

J. PLEMELJ: Die Siebenteilung des Kreises. Monatshefte 23, 309 (1912).
— Prevedel N. Prijatelj

Teoretično je že dolgo znano, da je delitev kroga na sedem delov izvedljiva s tretjinjenjem kota. Naslednja geometrična konstrukcija je poleg enostavnosti posebno upoštevanja vredna zato, ker prav uveljavlja staro pravilo Abdula Wafâ Mohameda (940—998), kasneje občeznano z imenom »indijsko pravilo«, kot najnaravnejši približek.

Kakor vemo, je delitev kroga na sedem delov odvisna od rešitve enačbe $(x^7 - 1)/(x - 1) = 0$. Koreni te enačbe so $e^{2k\pi i/7}$, kjer postavimo $k = 1, 2, 3, \ldots 6$. Označimo koren $e^{6\pi i/7} = -e^{-\pi i/7}$ s ζ, torej $\zeta = -e^{-\pi i/7}$. Količine $\zeta + \zeta^{-1}$, $\zeta^2 + \zeta^{-2}$, $\zeta^4 + \zeta^{-4}$ so koreni enačbe

$$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0 \qquad (1)$$

Stranica s_7 sedmerokotnika v enotnem krogu je enaka $2 \sin \pi/7$, torej je $s_7 = i(\zeta^{-1} - \zeta)$. Zato je $s_7^2 = 2 - (\zeta^2 + \zeta^{-2})$. Ker pa je $\zeta^2 + \zeta^{-2}$ en koren enačbe (1), izhaja od tod, da dobimo s substitucijo $s^2 = 2 - y$ ali $y = 2 - s^2$ v enačbo (1), neko enačbo za s, kateri zadošča stranica sedmerokotnika. Ker so 1, 2, 4 kvadratni ostanki (mod. 7), -1, -2, -4 pa ne, takoj vidimo, da razpade enačba šeste stopnje, brž ko privzamemo en kvadratni koren, v dve kubični enačbi, katerih ena ima korene $i(\zeta - \zeta^{-1})$, $i(\zeta^2 - \zeta^{-2})$, $i(\zeta^4 - \zeta^{-4})$, druga pa ravno nasprotne. Res nam da enostavna substitucija $y = 2 - s^2$ v (1) enačbo $s^6 - 7s^4 + 14s^2 - 7 = 0$, ki očitno razpade v obe enačbi

$$s^3 \pm \sqrt{7}(s^2 - 1) = 0 \qquad (2)$$

Enačbi (2) moremo takoj rešiti po Cardanovi formuli, če ju pišemo

$$1/s^3 - 1/s = \pm 1/\sqrt{7}$$

Ker sodi ta enačba v »casus irreducibilis«, jo rešimo, kakor je to navada, z vpeljavo pomožnega kota. Zlahka dobimo $1/s = \pm (2/\sqrt{3}) \cos (\alpha/3)$, če je $\cos \alpha = 3\sqrt{3}/2\sqrt{7}$, $\sin \alpha = 1/2\sqrt{7}$, $\operatorname{tg} \alpha = 1/3\sqrt{3}$. Iz tega torej dobimo za stranice pravilnega sedmerokotnika pri polmeru r

$$s_7 = \tfrac{1}{2} r\sqrt{3}/\cos (\alpha/3), \text{ kjer je } \operatorname{tg} \alpha = 1/3\sqrt{3}$$

Konstrukcija tega izraza je izredno enostavna in je podana v krogu na sliki. Upoštevajmo, da je $\frac{1}{2}\sqrt{3} = \cos 30^0$, $1/\sqrt{3} = \operatorname{tg} 30^0$. Namesto delitve kota α na tri dele, lahko, zaradi njegove majhnosti, tretjinimo tangento. Na sliki moremo torej praktično postaviti $DB = {}^1/_3\, CB = {}^1/_9\, OB$. Tako dobimo pravilno

$$s_7 = \tfrac{1}{2} r\sqrt{3} : \cos 3^0 37'52'',\ 07 = r \,.\, 0{,}8677675 \ldots$$

približno $\quad s_7 = \tfrac{1}{2} r\sqrt{3} : \cos 3^0 40'53'',\ 79 = r \,.\, 0{,}8678055 \ldots$

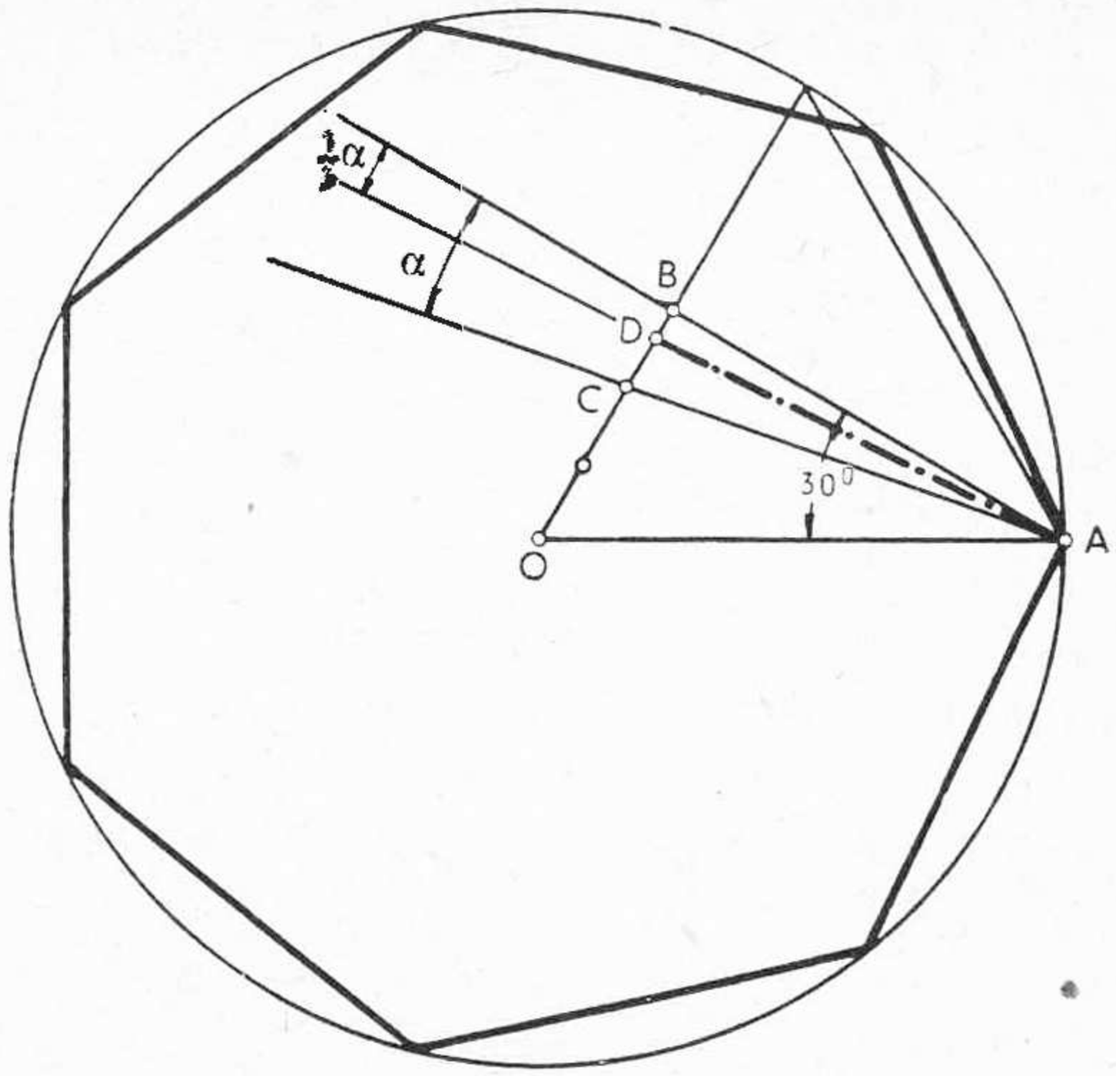
po pravilu Abdula Wafâ $\quad s = \tfrac{1}{2} r\sqrt{3} \quad = r \,.\, 0{,}8660254 \ldots$

Napaka prve približne konstrukcije je pri radiju 1 metra samo 0,038 mm in je torej praktično ne moremo ugotoviti. V uporabi pa že popolnoma zadošča »indijsko pravilo«.

Na elementaren način pridemo do zgornje enačbe šeste stopnje tako, da postavimo izraz

$$\sin 7\varphi = -\sin\varphi\,[2^6\sin^6\varphi - 7.2^4\sin^4\varphi + 14.2^2\sin^2\varphi - 7]$$

enak nič, kjer je potem $2\sin\varphi = s_7$. To pot najdemo pri E. Heisu, Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der allgem. Arithmetik und Algebra, 36. Aufl. Köln 1874, str. 381.* Ta primer me je leta 1892 napotil do zgornje rešitve in geometrične konstrukcije. Kaže, da še ni poznana. Tako je ni na primer v knjigi Th. Vahlen: Konstruktionen und Aproximationen etc., Leipzig 1911. Zato jo sedaj objavljam.



NEREŠLJIVOST ENAČBE $x^5 + y^5 + z^5 = 0$ V OBSEGU $K(\sqrt{5})$

J. PLEMELJ: Die Unlösbarkeit von $x^5 + y^5 + z^5 = 0$ im Körper $k\sqrt{5}$. Monatshefte *23*, 306 (1912). — Prevedel in dodal opombe I. Vidav

Fermatova trditev, da enačba $x^n + y^n + z^n = 0$ v celih številih ni mogoča, je eno najzanimivejših vprašanj v teoriji števil. Dokaz o nerešljivosti enačbe $x^3 + y^3 + z^3 = 0$ pa je priznan kot eden izmed najpomembnejših šolskih zgledov za uporabo teorije obsega $K(\sqrt{-3})$. (Hilbert, predavanja v zimi 1897/98). Za pete potence je dal prvi neoporečni dokaz te trditve L. Dirichlet, in sicer v bistvu v obsegu $K(\sqrt{5})$. Njegova pot pa je še dokaj kompliciran. Čudno je, da poteka dokaz nerešljivosti za 7. potence, kakor ga je našel Lamé in bistveno poenostavil Lebesgue, popolnoma v obsegu racionalnih števil, da pa niso znani taki dokazi za 3. in 5. potence.

V prepričanju, da ni mogoče predavanj iz teorije števil bolj poživiti kakor s takimi zgledi, zlasti ker le-ti obravnavajo vprašanje, ki posebno zdaj[1] zbuja splošno zanimanje, objavljam preprost dokaz za nerešljivost enačbe $x^5 + y^5 + z^5 = 0$, kakor sem si ga priredil za svoje predavanje (Dunaj, 1903/1904). Ker je ta dokaz zelo podoben dokazu za 3. potence

* Tam gre za približno določanje korenov enačbe šeste stopnje.

[1] Leta 1908 je bila razpisana Wolfskehlova nagrada v znesku 100.000 mark za tistega, ki bi prvi pravilno rešil Fermatov problem. Ta nagrada je privabila mnogo nematematikov, do so se lotili reševanja tega problema. Razne »rešitve« so kar deževale na uredništva matematičnih časopisov. Seveda te »rešitve« niso dale niti najmanjšega prispevka. Inflacija po prvi svetovni vojni je popolnoma uničila Wolfskehlovo nagrado.

in komaj kaj bolj zapleten, nudi šolski primer redke lepote za uporabo obsega $K(\sqrt{5})$. Vloga, ki jo imajo enote pri splošnih Kummerovih raziskavah, je tu že mnogo bolj očitna. Končno protislovje je osnovano na tem, da postopoma znižujemo število različnih prafaktorjev, podobno kakor je to storil Kummer, ko je dokazal s teorijo krožnega obsega nerešljivost za neregularne eksponente 37, 59, 67. (Abh. d. Akad. d. Wiss., Berlin 1857.)

V obsegu $K(\sqrt{5})$ veljajo navadni zakoni o razcepitvi. Osnovna enota ε in konjugirana ε' sta

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5}), \qquad \varepsilon' = \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{5}), \qquad \varepsilon\varepsilon' = -1$$

Ker je $\varepsilon = -2 + \frac{1}{2}(5 + \sqrt{5})$, $\varepsilon^2 = -1 + \frac{1}{2}(5 + \sqrt{5})$, imamo $\varepsilon \equiv -2$ in $\varepsilon^2 \equiv -1 \pmod{\sqrt{5}}$. Takoj se vidi,[2] da je ε^{10} najnižja potenca enote ε, ki je $\equiv -1,(5)$. Od tod sklepamo, da so potence izraza $-\varepsilon^{10}$ edine enote, ki so $\equiv 1,(5)$ in da predstavljajo enote

$$\pm 1, \quad \pm\varepsilon, \quad \pm\varepsilon^2, \ldots, \pm\varepsilon^9$$

za modul 5 popolen sistem ostankov takih števil, ki niso deljiva s $\sqrt{5}$.[3]

V $x^5 + y^5 + z^5 = 0$ mora biti vsaj eno izmed števil x, y, z deljivo s $\sqrt{5}$. Vsako število, ki ni deljivo s $\sqrt{5}$, da po modulu $\sqrt{5}$ enega izmed ostankov $\pm 1, \pm 2$, peta potenca torej enega izmed ostankov $\pm 1, \pm 32$ za modul $5\sqrt{5}$.[4] S takimi števili pa niti kongruenca $x^5 + y^5 + z^5 \equiv 0, (5\sqrt{5})$ ne bi bila izpolnjiva.

Zato smemo za nadaljnje raziskovanje vzeti enačbo z obliko

$$x^5 - y^5 = \sqrt{5}^{5+\mu} z^5 \qquad (1)$$

kjer so x, y, z brez skupnega delitelja in tudi niso deljiva s $\sqrt{5}$.

Izraz $x^5 - y^5$ se da razstaviti. Ugodno je pisati (1) v obliki

$$(x - y)\left[(x - y)^4 + 5xy(x - y)^2 + 5x^2y^2\right] = \sqrt{5}^{5+\mu} \cdot z^5 \qquad (2)$$

Faktor v oglatem oklepaju in $x - y$ imata skupaj kvečjemu delitelj 5, ta pa tudi očitno zmerom obstaja, tako da je $x - y$ deljiv s $\sqrt{5}^{3+\mu}$, torej velja kongruenca

$$x \equiv y,(5) \qquad (3)$$

Če delimo x, y, z s primerno enoto, moremo po prejšnjem doseči, da bo $x \equiv 1,(5)$.[5] Kongruenca (3) pa da potem še $y \equiv 1,(5)$.

---

[2] Lihe potence enote ε so namreč kongruentne $\pm 2, (\sqrt{5})$. Nadalje je $\varepsilon^4 \equiv \varepsilon^8 \equiv \equiv 1, (\sqrt{5})$. Lahek račun pa pokaže, da tudi ε^6 ni $\equiv -1,(5)$.

[3] Popolen sistem ostankov za kak modul je tak sistem števil, da je vsako drugo število kongruentno enemu in samo enemu izmed teh števil.

Oglejmo si na primer popolni sistem ostankov za modul 5. Vsa cela algebraična števila iz obsega $K(\sqrt{5})$ pišimo v obliki $a + b\varepsilon$ s celima a in b. Potem je očitno $a + b\varepsilon \equiv a' + b'\varepsilon,(5)$ tedaj in le tedaj, če je $a \equiv a'(5)$ in $b \equiv b',(5)$. Torej dobimo vse ostanke, če vzamemo $a = 0, \pm 1, \pm 2$ in $b = 0, \pm 1, \pm 2$. Vseh možnih kombinacij je tedaj 25. Od teh je 5 deljivih s $\sqrt{5}$, namreč tistih 5, kjer je $b \equiv -2a,(5)$. Števila $\pm 1, \pm\varepsilon, \pm\varepsilon^2, \ldots \pm\varepsilon^9$ pa so vsa med seboj nekongruentna po modulu 5, ker bi sicer bilo $\varepsilon^n \equiv \pm\varepsilon^m,(5)$, če je $n > m$, in od tod bi imeli $\varepsilon^{n-m} \equiv \pm 1,(5)$, $0 < n - m < 10$. V resnici pa je šele $\varepsilon^{10} \equiv -1,(5)$.

[4] Naj bo n pr. $x \equiv \alpha, (\sqrt{5})$, torej $x = \alpha + \beta\sqrt{5}$. Potem je $x^5 = \alpha^5 + 5\alpha^4\beta\sqrt{5} + \ldots$ in je res $x^5 \equiv \alpha^5, (5\sqrt{5})$.

[5] Velja namreč $x \equiv \pm\varepsilon^n,(5)$, torej $\pm x\varepsilon^{-n} \equiv 1,(5)$.

Ako izpustimo zgoraj v oglatem oklepaju faktor 5, dobimo

$$x^2y^2 + xy(x-y)^2 + \tfrac{1}{5}(x-y)^4 \tag{4}$$

in ta izraz se da razcepiti v tale dva očitno tuja si faktorja

$$\begin{aligned} xy + \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}(x-y)^2 \qquad & [= \xi^5] \\ xy + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}(x-y)^2 \qquad & [= \eta^5] \end{aligned} \tag{5}$$

katerih produkt, pomnožen s 5 $(x-y)$, da levo stran $x^5 - y^5$ enačbe (1), t. j. $\sqrt{5}^{5+\mu} . z^5$.

Faktorja (5) sta vsebovana v z^5. Zato je očitno, da morata biti v obsegu $K(\sqrt{5})$ obe peti potenci ξ^5 in η^5, pomnoženi mogoče še s kako enoto. Da pa se smeta enoti, ki prideta mogoče k ξ^5 in η^5 kot faktorja še zraven, izpustiti, ker se izkažeta kot peti potenci enot, se da takole uvideti: Če se iz ξ in η izpostavita primerni enoti, postaneta te števili $\equiv 1, (\sqrt{5})$. Zaradi $x \equiv y \equiv 1,(5)$ pa sta izraza (5) oba $\equiv 1$ za modul 5. Ker je tudi $\xi^5 \equiv \eta^5 \equiv \equiv 1,(5)$,[4] morata biti morebitni enoti pri ξ^5 in η^5 prav tako $\equiv 1,(5)$. Take enote pa, kakor je bilo zgoraj dokazano, so vse potence enote $-\varepsilon^{10}$ in se smejo kot take združiti s ξ^5 in η^5.

Za $x - y$ imamo obliko

$$x - y = \sqrt{5}^{3+\mu} . \zeta^5 \tag{6}$$

Odštevanje enačb (5) pa da z upoštevanjem (6) enačbo

$$\xi^5 - \eta^5 = \sqrt{5}^{5+2\mu} . \zeta^{10} \tag{7}$$

kjer je

$$\xi\eta\zeta = z \tag{8}$$

in so števila ξ, η, ζ brez skupnega faktorja.

Enačba (7) ima enako obliko kakor prvotna (1), je pa bolj preprosta, ker vsebuje ζ zaradi (8) manj različnih prafaktorjev kakor z, razen če nista ξ in η oba hkrati enoti. To pa ni mogoče, kar spoznamo takole: če bi bila ξ in η enoti, bi bil tudi njun produkt enota in prav tako izraz (4), ki bi ga smeli vzeti, da je kar $= 1$. Izraz (4) je namreč $\equiv 1,(5)$ in ima pozitivno vrednost, saj je enak izrazu $(x^5 - y^5)/5(x-y)$. Zato bi moral imeti obliko ε^{20n}. Če delimo števila x, y, z vsa z isto enoto ε^{5n}, pa dobi izraz (4) natančno vrednost 1. Potem sta ξ^5 in η^5 konjugirani enoti in iz izrazov (5) se lahko spozna, da sta x in y konjugirani števili,[6] torej imata obliko

$$x = \tfrac{1}{2}(a + b\sqrt{5}), \qquad y = \tfrac{1}{2}(a - b\sqrt{5}).$$

Te vrednosti, vstavljene v (4), ki je enak 1, dajo enačbo $a^4 + 10a^2b^2 +$

[6] Ker sta izraza (5) konjugirani števili, dobimo najprej, če ta izraza odštejemo, da je $(x-y)^2$ celo število. Seštevanje pa nam da, da je tudi produkt xy celo racionalno število. Lahek račun pokaže, da je to mogoče le, če sta bodisi x in y bodisi x in $-y$ konjugirani števili, ali pa če sta x in y racionalna.

$+ 5b^4 = 16$, ki ima očitno le nekaj neuporabnih rešitev.[7] Ker torej ξ in η ne moreta biti hkrati enoti, ima število ζ^2 v (7) manj različnih prafaktorjev kakor analogno število z v (1). Zaporedna uporaba istega postopka na novonastalo k (1) analogno enačbo pelje do protislovja. Enačba $x^5 + y^5 + z^5 = 0$ torej nikdar ne obstaja med števili obsega $K(\sqrt{5})$.

OBSEG K($\sqrt{5}$)

I. VIDAV

Ker so verjetno med bralci Obzornika tudi taki, ki ne poznajo raznih pojmov iz teorije števil, nastopajočih v članku prof. J. Plemlja »Nerešljivost enačbe $x^5 + y^5 + z^5 = 0$ v obsegu $K(\sqrt{5})$«, hočemo te pojme tu na kratko razložiti.

Deljivost števil. Celo število a se imenuje deljivo s celim številom b, če se delitev izide brez ostanka, če je torej kvocient a/b celo število. V tem primeru je b delitelj števila a in a večkratnik števila b.

Praštevilo je tako število, ki je deljivo le z 1 in s samim seboj. Vsako drugo število je sestavljeno ter se da pisati, in to v bistvu na samo en način, kot produkt samih praštevil.

Skupni delitelj dveh števil a in b imenujemo vsako število, ki deli a in b. Dve taki števili, ki razen 1 nimata nobenega skupnega delitelja, se imenujeta *tuji si števili. Tu velja izrek: Če je produkt bc deljiv s številom a in faktor b tuj proti a, potem je drugi faktor c deljiv z a.* Od tod se da takoj dokazati zgoraj omenjena enoličnost razcepitve na praštevila.

Vse to je znano iz elementarne matematike, dokazi so pa isti kakor v obsegu $K(\sqrt{5})$, ki ga bomo v nadaljnjem obravnavali.

Pojem kongruence. Število a imenujemo kongruentno številu b po modulu c, v znakih $a \equiv b, (c)$, če je razlika $a - b$ deljiva s c. Seveda je potem tudi $b \equiv a,(c)$. N. pr. 8 je kongruentno 2 po modulu 3, ker je razlika $8 - 2 = 6$ deljiva s 3, torej $8 \equiv 2,(3)$. V posebnem primeru pomeni $a \equiv 0,(c)$, da je a deljiv s c. S kongruencami računamo skoraj tako kakor z enačbami. Če je $a \equiv b,(c)$, je za vsak d tudi $a + d \equiv b + d$, $a - d \equiv b - d$ in $ad \equiv bd,(c)$. Vse te lastnosti so neposredno razvidne iz definicije kongruence. Narobe pa moremo sklepati iz $ad \equiv bd,(c)$ na $a \equiv b,(c)$ le, ako sta c in d tuji si števili. Če je namreč diferenca $ad - bd = (a - b)d$ deljiva s c, števili d in c pa sta si tuji, je faktor $a - b$ deljiv s c, torej res $a \equiv b,(c)$. Nadalje velja tole: če je $a \equiv b,(c)$ in $a_1 \equiv b_1,(c)$, je tudi $aa_1 \equiv bb_1,(c)$. Prva kongruenca namreč da $a - b = nc$, druga pa

[7] V tej enačbi sta a in b celi števili. Vsi členi na levi so pozitivni. Zato je b lahko le 0 ali ± 1. Potem je $a = \pm 2$ ali $a = \pm 1$. Prva možnost nam da trivialno rešitev $x = y = \pm 1$, $z = 0$. Druga da $x = \pm \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$, $y = \pm \frac{1}{2}(1 \mp \sqrt{5})$, kar pa ne ustreza enačbi (1).

Preostaneta še drugi dve možnosti, da sta namreč x in $-y$ konjugirana ali pa x in y racionalni števili. V prvem primeru imamo $x = \frac{1}{2}(a + b\sqrt{5})$, $y = \frac{1}{2}(-a + b\sqrt{5})$. To nam da enačbo $a^4 + 50a^2b^2 + 125b^4 = 80$, ki nima nobene rešitve v celih številih. V drugem primeru pa ustrezata x in y enačbi $x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 = 5$, ki jo lahko pišemo tudi v obliki $(2x^2 + xy)^2 + 2x^2y^2 + (xy + 2y^2)^2 = 20$. Na levi stoji vsota kvadratov celih števil. Zato more imeti ta enačba le nekaj rešitev. S poskušanjem dobimo takoj, da eksistira samo trivialna rešitev: $x = y = \pm 1$.

$a_1 - b_1 = n_1 c$, kjer sta n in n_1 celi števili. Potem je $a = b + nc$ in $a_1 = b_1 + n_1 c$, tedaj $aa_1 = bb_1 + (bn_1 + b_1 n)c + nn_1 c^2$, torej $aa_1 \equiv bb_1,(c)$. Od tod imamo v posebnem primeru: ako je $a \equiv b,(c)$, je tudi $a^2 \equiv b^2,(c)$ in splošno $a^n \equiv b^n,(c)$ za vsak eksponent n.

Če je $a \equiv b,(2)$, sta a in b oba soda ali oba liha. Od tod je potem $a^2 \equiv b^2,(4)$, ker sta v diferenci $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ oba faktorja soda.

Obseg. Taka skupnost števil, v kateri so osnovne računske operacije: seštevanje, odštevanje, množenje in deljenje vedno izvršljive — izvzeto je le deljenje z nič — se imenuje obseg števil. Če sta torej a in b dve števili obsega, spadajo $a + b$, $a - b$, ab in a/b v isti obseg. Najmanjši obseg tvorijo vsa racionalna števila, največjega pa vsa kompleksna. Vsak obseg ima vsa racionalna števila: če vsebuje namreč obseg kako od nič različno število a, ima po definiciji tudi kvocient $a/a = 1$, potem pa prav tako vsako pozitivno in negativno celo število in končno vsako racionalno število, ker je le-to kvocient dveh celih števil.

Obseg $K(\sqrt{5})$. Vsa števila z obliko $a + b\sqrt{5}$, kjer sta a in b poljubni racionalni števili, tvorijo obseg, ki ga zaznamujemo s $K(\sqrt{5})$. Očitno sta namreč vsota in diferenca dveh števil take oblike zopet števili iste vrste, produkt $(a + b\sqrt{5})\,(a' + b'\sqrt{5}) = aa' + 5bb' + (ab' + a'b)\sqrt{5}$ pa prav tako. Zadošča, če še spoznamo, da ima tudi recipročna vrednost isto obliko. To pa je, saj imamo $1/(a + b\sqrt{5}) = (a - b\sqrt{5})/(a^2 - 5b^2)$. S tem smo dokazali, da tvorijo vsa števila $a + b\sqrt{5}$ z racionalnima a in b res obseg.

Števili $a + b\sqrt{5}$ in $a - b\sqrt{5}$ imenujemo konjugirani števili. Vsota dveh takih števil je $2a$, produkt pa $a^2 - 5b^2$. Oba sta racionalna. Konjugirana vrednost vsote je vsota konjugiranih vrednosti sumandov, konjugirana vrednost produkta pa produkt konjugiranih vrednosti faktorjev. Števili $a + b\sqrt{5}$ in $a' + b'\sqrt{5}$ imata namreč vsoto $(a + a') + (b + b')\sqrt{5}$ in produkt $aa' + 5bb' + (ab' + a'b)\sqrt{5}$. Če b in b' prevržeta znak, spremenita v vsoti in produktu samo faktorja pri $\sqrt{5}$ znak, drugo pa ostane.

Norma števila $\alpha = a + b\sqrt{5}$, zaznamujemo jo z $N(\alpha)$, se imenuje produkt števila α s konjugiranim $a - b\sqrt{5}$. Torej je norma $N(\alpha) = a^2 - 5b^2$ racionalno število. Upoštevajoč dejstvo, da je konjugirana vrednost produkta produkt konjugiranih vrednosti faktorjev, dobimo takoj, da je norma produkta produkt norm posameznih faktorjev: $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$. Isto velja za kvocient: $N(\alpha/\beta) = N(\alpha)/N(\beta)$.

Cela števila obsega. Vsako število $x = a + b\sqrt{5}$ iz obsega $K(\sqrt{5})$ ustreza enačbi

$$x^2 - 2ax + a^2 - 5b^2 = 0 \qquad (1)$$

ki ima racionalne koeficiente, pri x^2 pa je koeficient 1. Enačbi (1) ustreza pa tudi konjugirano število $a - b\sqrt{5}$. *Če so koeficienti v (1) cela števila, se imenuje* $x = a + b\sqrt{5}$ *celo algebraično število obsega* $K(\sqrt{5})$. Torej je $a + b\sqrt{5}$ celo algebraično število tedaj, če sta $2a$ in $a^2 - 5b^2$ celi racionalni števili.[1] Tu imamo sedaj dve možnosti: 1. a je celo število, potem mora biti tudi b celo število. Zato je $a + b\sqrt{5}$ s celima a in b zmerom celo

[1] Da bomo ločili navadna cela števila 0, ±1, ±2, ... od celih algebraičnih števil, bomo prva imenovali cela racionalna števila.

algebraično število; 2. $2a$ je celo liho število. Ker je $4(a^2 - 5b^2) = (2a)^2 - 5(2b)^2$ sodo število, prvi sumand na desni pa lih, se vidi od tod, da mora biti tudi $2b$ liho število. V tem primeru se da celo algebraično število pisati v obliki $\frac{1}{2}(a + b\sqrt{5})$, kjer sta a in b celi lihi števili. Primer 1. pa dobimo v isti obliki, če sta a in b soda. Tako smo spoznali, da se da vsako celo algebraično število našega obsega pisati v obliki $\frac{1}{2}(a + b\sqrt{5})$, kjer sta a in b pozitivni ali negativni celi racionalni števili in obe hkrati bodisi sodi bodisi lihi, torej $a \equiv b,(2)$. Narobe pa je vsako število s to obliko res celo algebraično število. Posebej je vsako celo racionalno število tudi celo algebraično število obsega.

Celo algebraično število $\alpha = \frac{1}{2}(a + b\sqrt{5})$, $a \equiv b,(2)$, se da pisati tudi takole: $\alpha = \frac{1}{2}(a - b) + \frac{1}{2}b(1 + \sqrt{5})$. Postavimo $\varepsilon = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$! Ker je $\frac{1}{2}(a - b)$ celo število, moremo dati vsakemu celemu algebraičnemu številu obliko $a + b\varepsilon$ s celima a in b. Narobe je tudi vedno $a + b\varepsilon$ s celima racionalnima a in b celo algebraično število. Posebej velja to za ε. Zaznamujmo z ε' konjugirano vrednost števila ε, torej $\varepsilon' = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$. Potem je $\varepsilon + \varepsilon' = 1$ in $\varepsilon\varepsilon' = -1$. Lahek račun pa pokaže, da ustrezata ε in ε' enačbi $\varepsilon^2 - \varepsilon - 1 = 0$.

Cela algebraična števila imajo tole lastnost: vsota, diferenca in produkt dveh takih števil je spet celo algebraično število. Vzemimo namreč dve celi algebraični števili $\alpha = a + b\varepsilon$ *in* $\alpha' = a' + b'\varepsilon$. Potem ima vsota $\alpha + \alpha' = (a + a') + (b + b')\varepsilon$ isto obliko, produkt $\alpha\alpha' = aa' + (ab' + a'b)\varepsilon + bb'\varepsilon^2 = aa' + bb' + (ab' + a'b + bb')\varepsilon$ pa tudi.

Ker je $\varepsilon' = 1 - \varepsilon$, je konjugirana vrednost $\alpha' = a + b\varepsilon' = a + b - b\varepsilon$ celega algebraičnega števila α tudi celo algebraično število.

Norma celega algebraičnega števila $\alpha = \frac{1}{2}(a + b\sqrt{5})$, $a \equiv b,(2)$, je celo racionalno število: $N(\alpha) = \frac{1}{4}(a^2 - 5b^2)$, ker je $a^2 \equiv b^2,(4)$ in zato $a^2 - 5b^2 \equiv -4b^2 \equiv 0,(4)$.

Pojem deljivosti se da prenesti na cela algebraična števila. α je deljiv z β, če je kvocient α/β zopet celo algebraično število. Število α je kongruentno številu β po modulu γ, v znakih $\alpha \equiv \beta,(\gamma)$, če je razlika $\alpha - \beta$ deljiva z γ. S kongruencami računamo tu prav tako kakor v primeru celih racionalnih števil.

Enote. Tako celo algebraično število, ki je delitelj števila 1, se imenuje enota. Torej je E enota v obsegu $K(\sqrt{5})$, če je tudi recipročna vrednost $1/E$ celo algebraično število. Produkt dveh enot je zopet enota. Če sta E_1 *in* E_2 enoti, sta $1/E_1$ in $1/E_2$ celi algebraični števili in njun produkt $1/E_1E_2$ prav tako. Od tod vidimo, da je produkt E_1E_2 delitelj števila 1, torej je enota. Norma enote je ± 1. Ker je namreč $E \,.\, (1/E) = 1$, imamo $N(E) \,.\, N(1/E) = 1$. Normi celih algebraičnih števil E in $1/E$ sta po prejšnjem celi racionalni števili, zato je $N(E) = \pm 1$. Narobe je pa tudi res: Tako celo algebraično število E, ki ima normo ± 1, je zmerom enota. Po definiciji norme je namreč $EE' = \pm 1$, če je E' konjugirana vrednost k E. Od tod pa se vidi, da je $1/E = \pm E'$ celo algebraično število, torej E enota. Zato je $E = \frac{1}{2}(a + b\sqrt{5})$ enota tedaj in le tedaj, če je $N(E) = \frac{1}{4}(a^2 - 5b^2) = \pm 1$. Vse enote obsega $K(\sqrt{5})$ dobimo potemtakem iz rešitev enačbe

$$a^2 - 5b^2 = \pm 4 \qquad (2)$$

v celih številih a in b. Od tod se vidi, da so hkrati z $\frac{1}{2}(a + b\sqrt{5})$ tudi $\frac{1}{2}(\pm a \pm b\sqrt{5})$ enote.

Če je enota $\frac{1}{2}(a + b\sqrt{5})$ večja od 1, sta a in b pozitivna. Ako bi bilo n. pr. $a > 0$, $b < 0$, bi imeli $a - b\sqrt{5} > a + b\sqrt{5} > 2$ in od tod $a^2 - 5b^2 > 4$, kar pa pri enoti ne more biti. Prav tako se vidi, da ni $a < 0$, $b > 0$. Od tod sklepamo, da je $\varepsilon = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ najmanjša pozitivna enota, ki je po vrednosti > 1. Potence $\pm \varepsilon^{\pm n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, so tudi enote. Spoznali bomo, da so to vse. Naj bo namreč $E = \frac{1}{2}(a + b\sqrt{5})$ kaka poljubna enota. Smemo vzeti $a > 0$ in $b > 0$. Potem je $E > 1$. Ker potence ε^n hkrati z n rastejo preko vsake meje, moremo določiti tak n, da je $\varepsilon^n \leqq E$ in $\varepsilon^{n+1} > E$. Torej je $E \cdot \varepsilon^{-n}$, produkt enot E in ε^{-n}, enota, ki je $\geqq 1$ in $< \varepsilon$. Ker pa je po prejšnjem ε najmanjša enota, ki je > 1, mora biti $E\,\varepsilon^{-n} = 1$ ali $E = \varepsilon^n$. S tem smo pa želeno dokazali.

Števili α in β imenujemo tuji si števili, če razen enot nimata drugega skupnega delitelja. V obsegu $K(\sqrt{5})$ velja, kakor za cela racionalna števila, tole osnovno dejstvo: *Če je produkt $\beta\gamma$ deljiv z α in sta si β in α tuja, potem je γ deljiv z α.* To dejstvo dokažemo z Evklidovim algoritmom takole: Kvocient β/α, ki spada v obseg $K(\sqrt{5})$, se da pisati v obliki $m + n\varepsilon$, kjer sta m in n racionalni števili. Naj bo sedaj c tisto celo število, ki je najbližje m, in c' tisto, ki je najbližje n. Potem je $|m - c| \leqq \frac{1}{2}$ in $|n - c| \leqq \frac{1}{2}$. Seveda je $\varkappa = c + c'\varepsilon$ celo algebraično število. Lahek račun pokaže, da ima $(m - c) + (n - c')\varepsilon = \beta/\alpha - \varkappa$ normo, ki je absolutno < 1, torej $|N(\beta/\alpha - \varkappa)| < 1$. Če postavimo $\alpha_1 = \beta - \varkappa\alpha$, je α_1 celo algebraično število in $|N(\alpha_1)| < |N(\alpha)|$. Ako je β deljiv z α, je seveda $\alpha_1 = 0$. V nasprotnem primeru lahko α delimo z α_1 in po isti metodi določimo kvocient $\varkappa_1$ in ostanek α_2. Če tako nadaljujemo, dobimo tabelo

$$
\begin{aligned}
\beta &= \varkappa\,\alpha + \alpha_1\,, && |N(\alpha_1)| < |N(\alpha)| \\
\alpha &= \varkappa_1\alpha_1 + \alpha_2\,; && |N(\alpha_2)| < |N(\alpha_1)| \\
\alpha_1 &= \varkappa_2\alpha_2 + \alpha_3\,, && |N(\alpha_3)| < |N(\alpha_2)| \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots && \\
\alpha_{n-1} &= \varkappa_n\,\alpha_n + \alpha_{n+1} && |N(\alpha_{n+1})| < |N(\alpha_n)| \\
\alpha_n &= \varkappa_{n+1}\,\alpha_{n+1} &&
\end{aligned}
\qquad \text{(I)}
$$

Ker so absolutne vrednosti norm $N(\alpha)$, $N(\alpha_1)$, ... cela pozitivna števila in se zmanjšujejo, se po nekaj korakih ta delitev gotovo izide. Naj bo α_{n+1} zadnji od nič različni ostanek. Enačbe (I) povedo, da je α_{n+1} in vsak njegov delitelj tudi delitelj števil α_n, α_{n-1}, ... α_1, α, β, in narobe gre vsak skupni delitelj števil α in β tudi v α_{n+1}.

V našem primeru pa sta α in β tuji si števili. Zato je α_{n+1} enota. Pomnožimo sedaj ves sistem (I) z γ! Ker je $\beta\gamma$ deljiv z α, pove prva enačba, da je tudi $\alpha_1\gamma$ deljiv z α, nato pa naslednje enačbe, da so $\alpha_2\gamma$, $\alpha_3\gamma$, ..., $\alpha_{n+1}\gamma$ vsi deljivi z α. Faktor α_{n+1} pa je enota in zato sklepamo iz deljivosti produkta $\alpha_{n+1}\gamma$ z α, da je γ deljiv z α. To pa je bilo treba dokazati.

Prašteviło v obsegu $K(\sqrt{5})$ imenujemo tako celo algebraično število π, ki je deljivo s celim algebraičnim številom α le tedaj, če je bodisi

delitelj α ali pa kvocient π/α enota. Ako je torej π praštevilo in $\pi = \alpha\beta$, je eden izmed faktorjev α in β enota.

Gornji izrek se glasi v primeru, da je delitelj praštevilo, takole:

Produkt $\beta\gamma$ je deljiv s praštevilom π le tedaj, če je vsaj eden izmed faktorjev deljiv s π.

Od tod imamo potem osnovni izrek: *Vsako število iz obsega $K(\sqrt{5})$ se da razstaviti v produkt samih praštevil in sicer v bistvu le na en način, če se ne oziramo na vrstni red faktorjev in na enote.*

Dokaz: Če α ni praštevilo, se da pisati kot produkt $\alpha = \beta\gamma$, kjer ni niti β niti γ enota. Potem je $N(\alpha) = N(\beta)N(\gamma)$, $|N(\gamma)| > 1$ in zato $|N(\beta)| < |N(\alpha)|$. Če β ni praštevilo, je zopet $\beta = \delta\delta_1$ in $|N(\delta)| < |N(\beta)|$. Ako tako nadaljujemo, pridemo gotovo do faktorja, ki je praštevilo, saj se pri tem norme stalno zmanjšujejo, so pa cela števila absolutno > 1. Zato je $\alpha = \pi_1\alpha_1$, kjer je π_1 praštevilo. Prav tako vidimo, da je tudi $\alpha_1 = \pi_2\alpha_2$ in potem $\alpha = \pi_1\pi_2\alpha_2$ itd. Končno dobimo

$$\alpha = \pi_1\pi_2 \ldots \pi_n \tag{1}$$

Enoličnost razcepitve pa dokažemo takole: Vzemimo, da je tudi

$$\alpha = \pi'_1\pi'_2 \ldots \pi'_m \tag{2}$$

Ker je α deljiv s praštevilom π_1, je vsaj eden izmed faktorjev π'_1, π'_2, $\ldots \pi'_m$ deljiv s π_1. Smemo vzeti, da je to kar π'_1, saj je vrstni red faktorjev poljuben. Torej je $\pi'_1 = \varepsilon_1\pi_1$, kjer je ε_1 enota, ker je tudi π'_1 praštevilo. Potem imamo $\pi_2 \ldots \pi_n = \varepsilon_1\pi'_2 \ldots \pi'_m$. Leva stran je deljiva s π_2, zato je tudi eden izmed faktorjev na desni deljiv s π_2, n. pr. kar $\pi'_2 = \varepsilon_2\pi_2$. Če tako nadaljujemo, dobimo, da je $m = n$ in da nastopajo v (1) isti prafaktorji kakor v (2). Torej se da vsako celo algebraično število pisati v obliki

$$\alpha = E\pi_1^{k}\pi_2^{l} \ldots \pi_s^{r} \tag{3}$$

če so $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_s$ med seboj različni prafaktorji in E enota.

Od tod sklepamo na tole: *Če je $\alpha^n = \beta\gamma$ in sta si faktorja β in γ tuja, sta β in γ do enot n-ti potenci:* $\beta = \varepsilon_1\alpha_1^n$, $\gamma = \varepsilon_2\alpha_2^n$. Ker sta si β in γ tuja, gre vsako praštevilo, ki deli n. pr. β, tolikokrat v β, kolikorkrat gre v α^n. Enačba (3) pa da $\alpha^n = E^n\pi_1^{kn}\pi_2^{ln} \ldots \pi_s^{rn}$. Zato je eksponent najvišje potence vsakega praštevila, ki deli α^n, deljiv z n. Torej je n. pr. $\beta = \varepsilon_1\pi_1^{kn} \ldots$ $\ldots \pi_p^{tn} = \varepsilon_1\alpha_1^n$ in potem $\gamma = \varepsilon_2\pi_{p+1}^{vn} \ldots \pi_s^{rn} = \varepsilon_2\alpha_2^n$.

ENOLISTE KONFORMNE UPODOBITVE

F. KRIŽANIČ

V letošnjem letu, ko slavi prof. J. Plemelj svoj visoki življenjski jubilej, poteka tudi štirideset let od njegovega pomembnega odkritja v teoriji enolistih konformnih preslikav. Na dunajskem zborovanju društva Deutsche Mathematiker-Vereinigung je poročal 24. septembra 1913 o svojih raziskovanjih v zvezi s Koebejevimi izreki o enolistih konformnih upodobitvah. Pričujoči članek je napisan ob tej obletnici. V kratkih potezah naj nakaže probleme in zanimivosti tega poglavja, poda naj najvažnejše uspehe raziskovanj v tej smeri, med katerimi zavzema delo prof. J. Plemlja eno najvidnejših mest.

1.

Analitična funkcija $w = f(z)$ preslika polje ravnine (z), na katerem je definirana in regularna, v določeno polje ravnine *(w)*. Ta upodobitev je konformna v vseh točkah, kjer je $f'(z) \neq 0$. Infinitezimalno majhne daljice z enim krajiščem v točki *z* preidejo v sorazmerno podaljšane ali skrčene daljice s krajiščem v prirejeni točki *w*. Sorazmernostni faktor je $|f'(z)|$ (upodobitveno razmerje). Kot, ki ga oklepata katerikoli dve daljici iz tega šopa, se pri preslikavi ohranja. Po vzporednem prenosu iz točke *z* v točko *w* se torej vse daljice šopa zasučejo za isti kot v istem smislu. Ta kot je enak smernemu kotu odvoda arc $f'(z)$ (zasuk).

Zanimale nas bodo le enoliste analitične funkcije. To so analitične funkcije, ki enolično in obratno enolično preslikajo polje na ravnini *(z)* v neko predpisano polje na ravnini *(w)*. Taka funkcija zavzame vsako vrednost kvečjemu enkrat. Je enolična in $f(z_2) = f(z_1)$ le, če je $z_2 = z_1$.

Za polje na ravnini *(z)* izberimo kar enotni krog $|z| \leqslant 1$. Vemo, da je vedno mogoče najti tako analitično funkcijo, ki ta krog prevede v predpisano enostavno sovisno polje ravnine *(w)*, če le ni to polje cela ravnina *(w)* ali ravnina *(w)* z eno izvzeto točko. Pri tej preslikavi moremo še poljubno predpisati, v katero točko naj preide središče kroga in v katero smer skozi sliko središča naj preide smer pozitivne realne osi. (Riemannov izrek.*)

Funkcijo, ki posreduje preslikavo enotnega kroga $|z| \leqslant 1$, normirajmo tako, da prevede središče kroga v točko $w = 0$, infinitezimalno okolico središča pa upodobi nespremenjeno: nepovečano in brez zasuka! Pri taki preslikavi je upodobitveno razmerje v središču enako 1, zasuk pa 0. Tako normirano funkcijo razvijemo v potenčno vrsto:

$$w = f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$$

Funkcije, zapisane s tako vrsto, ki enolično in obratno enolično upodobe enotni krog $|z| \leqslant 1$ na neko polje ravnine (w), se imenujejo funkcije rodu *S*.

Z normiranjem smo od funkcije *S* zahtevali več, kakor nam dovoljuje sam Riemannov izrek. Predpis raztega v izhodišču prav gotovo vpliva na razmere v celotni sliki enotnega kroga. Prvi je opozoril na te posledice P. Koebe leta 1907, ko je naletel na funkcije *S* pri obravnavi uniformizacije poljubnih analitičnih krivulj. Koebejeve izsledke moremo povzeti v tehle treh najvažnejših izrekih:

I. *Na ravnini (w) je krog* $|w| \leqslant d \neq 0$, *ki je skupen vsem poljem, v katera prevedejo funkcije* S *enotni krog.*

Vsebino tega izreka moremo povedati tudi takole:

Rob polja, v katero prevede funkcija S *enotni krog, se približa izhodišču kvečjemu do neke končne oddaljenosti* d.

Že Koebe je domneval, da je polmer $d = \frac{1}{4}$, dokazal pa je to leta 1916 G. Faber.

II. *Naj bo* $r < 1$. *Funkcija* S *preslika krog* $|z| \leqslant r$ *v polje, ki leži v krogu* $|w| \leqslant R$, *katerega polmer R je odvisen le od polmera prvotnega kroga r, prav nič pa od funkcije, ki posreduje preslikavo.*

---

* Dokaz glej: J. Plemelj: Teorija analitičnih funkcij, str. 331.

III. *Naj bosta* z_1 *in* z_2 *točki kroga* $|z| \leqq r$. *Možno je najti število* Q, *odvisno le od* r, *da velja neenačba:*

$$1/Q < |f'(z_1)/f'(z_2)| < Q$$

za vsako funkcijo S. (Izrek o raztegu slike, Verzerrungssatz.)

Koebe je pri svojih raziskavah izhajal iz potencialne teorije, ki mu je sicer omogočala kvalitativno formulacijo izrekov, ni mu pa dala sredstev, ki bi privedla do vrednosti vseh v izrekih nastopajočih števil. Potrebno je bilo novo izhodišče, iz katerega bi raziskave vodile do kvantitativne oblike navedenih izrekov.

To važno delo je opravil prof. J. Plemelj. V svojem predavanju je pred štiridesetimi leti pokazal, da vsi ti izreki prav preprosto slede iz ocene koeficienta a_2 v potenčni vrsti (S).

V času, ko je poročal o svojem odkritju, ocena za a_2 še ni bila znana. Prof. J. Plemelj sam je pokazal, da je $|a_2| < 5$, kasneje je uspel mejo še znižati na $|a_2| < 3$. Domneval pa je, da je ostra meja $|a_2| \leqq 2$ in s to domnevo je tudi izvedel Koebejeve izreke o raztegu slik.

Domneva, da je $|a_2| \leqq 2$, je bila potrjena z dokazom šele leta 1916, po Fabrovem dokazu izreka I. V Fabrovem dokazu je zametek ideje, ki se je razvila v klasično metodo raziskovanj v teoriji enolistih konformnih upodobitev. Gre za uporabo ploščinske metode, ki nosi danes Bieberbachovo ime. Osnoven je tale izrek:

Funkcija

$$w = z + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots \qquad (\Sigma)$$

enolista in regularna v vnanjosti enotnega kroga $|z| > 1$ *razen v* $z = \infty$. *preslika to vnanjost v vnanjost nekega polja na ravnini* (w), *katerega ploščina je enaka:*

$$\pi(1 - \Sigma\, n|b_n|^2)$$

Ploščina je pozitivna ali kvečjemu enaka 0, zato je:

$$\Sigma\, n|b_n| \leqq 1$$

in seveda tudi: $|b_1| \leqq 1$.

Pa naj bo $f(z)$ funkcija rodu S. Tedaj je tudi

$$F(z) = [f(z^2)]^{\frac{1}{2}} = z + \tfrac{1}{2} a_2 z^3 + \ldots$$

funkcija istega rodu. Funkcija

$$\Phi(z) = 1/F(1/z) = z - \tfrac{1}{2} a_2 z^{-1} + \ldots$$

za ima obliko Σ, torej je koeficient pri z^{-1} manjši od 1, ali:

$$|a_2| \leqq 2 \qquad (1)$$

S to oceno v roki brž doženemo vse tri Koebejeve izreke. Ustavimo se kar pri prvem! Naj bo p točka, ki leži izven polja ali pa na robu polja, v katero prevede funkcija $f(z)$ enotni krog. Za vsak $|z| < 1$ je torej $f(z) \neq p$. Funkcija

$$pf(z)/(p - f(z)) = z + (a_2 + 1/p)z^2 + \ldots$$

je hkrati s funkcijo $f(z)$ član rodu S in zato velja $|a_2 + 1/p| \leqslant 2$ ali $|p| \geqslant \frac{1}{4}$. To nam pove, da se rob polja ne more približati izhodišču bolj kakor do $\frac{1}{4}$.

Tudi izreka II in III moremo najti iz ocene (1). Pri tem iskanju bomo popolnoma sledili izvajanjem prof. J. Plemlja.*

Oceno za $|f'(z)|$ najdemo takole: Točko z_0, $|z_0| < 1$ prevedimo v točko $\zeta = 0$ z linearno transformacijo $z = (\zeta + z_0)/(1 + z_0^*\zeta)$, ki preslika krog $|z| \leqslant 1$ v krog $|\zeta| \leqslant 1$. Tako postane $f(z)$ neka funkcija spremenljivke ζ, v njenih koeficientih pa nastopa z_0. To funkcijo spremenljivke ζ normirajmo in dobimo funkcijo

$$\varphi(\zeta) = \frac{f[(\zeta + z_0)/(1 + z_0^*\zeta)] - f(z_0)}{f'(z_0)(1 - z_0 z_0^*)} = \zeta + a_2\zeta^2 + \ldots$$

ki je normirana in enolista v enotnem krogu. Koeficient kvadratnega člena je $a_2 = \frac{1}{2}\varphi''(0) = \frac{1}{2}[(1 - z_0 z_0^*)f''(z_0)/f'(z_0) - 2z_0^*]$ in ocena $|a_2| \leqslant 2$ nam da neenačbo, iz katere je mogoče izračunati oceno za upodobitveno razmerje:

$$(1 - |z|)/(1 + |z|)^3 \leqslant |f'(z)| \leqslant (1 + |z|)/(1 - |z|)^3 \qquad (2)$$

(namesto z_0 smo pisali kar z, saj je bila z_0 poljubna točka v enotnem krogu).

Tako smo prišli do neke oblike izreka o raztegu slike. Moremo mu dati pa tudi prvotno Koebejevo obliko. Upoštevajmo, da doseže absolutna vrednost odvoda $f'(z)$, ki je v krogu $|z| \leqslant r$ povsod regularna, svoje ekstremne vrednosti na obodu kroga, pa uvidimo, da velja neenačba:

$$(1 - r)/(1 + r)^3 \leqslant |f'(z)| \leqslant (1 + r)/(1 - r)^3$$

za vsak z, ki je absolutno $\leqslant r$. Postavimo v to neenačbo $z = z_1$, nato pa $z = z_2$ ($|z_1| \leqslant r$, $|z_2| \leqslant r$) in obe tako dobljeni neenačbi delimo. Tako najdemo izrek o raztegu:

$$[(1 - r)/(1 + r)]^4 \leqslant |f'(z_1)/f'(z_2)| \leqslant [(1 + r)/(1 - r)]^4 \qquad (2^*)$$

Z integriranjem dobimo iz neenačbe (2) tudi oceno za absolutno vrednost funkcije $f(z)$:

$$|z|/(1 + |z|)^2 \leqslant |f(z)| \leqslant |z|/(1 - |z|)^2 \qquad (3)$$

ki nam pripoveduje več kakor prvotni izrek II, ki je omenjal le neko zgornjo mejo za $|f(z)|$. Z neenačbo (3) je prof. Plemelj pokazal, da je absolutna vrednost funkcije tudi navzdol omejena, zgornja in spodnja meja pa se prav preprosto izražata z oddaljenostjo $|z|$ od izhodišča. Geometrijsko moremo vsebino neenačbe (3) povedati takole:

Vsaka funkcija S preslika krožnico $|z| = r$ *v krivuljo, ki poteka vsa v notranjosti kolobarja, ki je popolnoma določen s polmerom prvotnega kroga* r, *prav nič pa ni odvisen od funkcije same.*

Vse meje v navedenih neenačbah so ostre. To se pravi, da je v rodu S funkcija, ki te meje res doseže. To je funkcija:

$$K(z) = \frac{z}{(1 - z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \ldots$$

---

* Glej: loc. cit. str. 368—374.

ki preslika enotni krog v ravnino, prerezano vzdolž realne osi od $-\infty$ do $-\frac{1}{4}$. Razvoj funkcije $K(z)$ v potenčno vrsto nam pokaže, da je $\alpha_2 = 2$, slika kroga enote pa ima rob, ki se res približa izhodišču v razdaljo $\frac{1}{4}$.

Tudi meje za absolutno vrednost funkcije in za upodobitveno razmerje doseže funkcija $K(z)$. Prav lahko uvidimo, da se rob polja, v katero prevede $K(z)$ krog $|z| = r$, dotika obeh ograj kolobarja, ki ga določa neenačba (3). Notranjega kroga se dotakne v točki realne osi $-r$, zunanjega pa v točki $+r$. V obeh točkah doseže svoje mejne vrednosti tudi $|K'(z)|$.

Neenačbi (2) in (3) ne opišeta vseh posledic normiranja. Izkaže se namreč, da je pri preslikavah s funkcijami S omejen tudi zasuk arc $f'(z)$. Neko mejo za arc $f'(z)$ je prvi našel L. Bieberbach iz ocene koeficienta α_2 v potenčni vrsti za funkcijo $\varphi(\zeta)$. Ocena:

$$|\arc f'(z)| < 2 \ln (1 + |z|)/(1 - |z|)$$

pa ni ostra. Ostro oceno za arc $f'(z)$ je našel šele leta 1936 M. G. Golusin. Z Löwnerjevo variacijsko metodo mu je uspelo dokazati, da je zasuk takole omejen:

$$\arc f'(z) \leqslant \begin{cases} 4 \arc \sin r, & r < 1/\sqrt{2} \\ \pi + \log r^2/(1 - r^2), & 1/\sqrt{2} < r < 1 \end{cases} \tag{4}$$

$\operatorname{Log} f'(z) = \operatorname{Log} |f'(z)| + i \arc f'(z)$ je v enotnem krogu enolična funkcija, ker je povsod $f'(z) \neq 0$. To pa nam pove, da je tudi arc $f'(z)$ enoličen, odvisen le od točke z. Pojasnimo si to. Izhodišče in točko z zvežimo s poljubno krivuljo, ki ima v vsaki točki določeno tangento! Funkcija $w = f(z)$ preslika to krivuljo v krivuljo, ki veže izhodišče na ravnini (w) s točko w. Tangenta na krivuljo v točki z in tangenta na sliko krivulje v točki w oklepata kot arc $f'(z)$, ki je neodvisen od prvotne krivulje. Golusinova neenačba nam pove, da je ta kot zaradi normiranja omejen. V točkah, ki leže znotraj kroga $|z| < 1/\sqrt{2}$, je vedno manjši od π. Čim pa prestopi točka z krožnico $|z| = 1/\sqrt{2}$, more biti kot med tangentama že večji od π. Bolj kot se točka z približuje po krivulji robu enotnega kroga, toliko večji je lahko kot med tangentama, celo poljuben večkratnik polnega kota lahko postane; slika krivulje lahko napravi poljubno mnogo zavojev, čeprav krivulja na ravnini (z) stalno stremi od izhodišča proti robu kroga $|z| \leqslant 1$.

2

Ključni izrek, iz katerega slede vsi nadaljnji izreki, kar smo jih navedli o funkcijah S, je izrek o omejenosti koeficienta a_2. Meja $|a_2| \leqslant 2$ je ostra, saj jo doseže funkcija $K(z)$. Pogled na razvoj funkcije $K(z)$ v potenčno vrsto pa nam kar vsiljuje domnevo, da so tudi ostali koeficienti v potenčnih vrstah za funkcije S omejeni tako, da doseže njihove meje funkcija $K(z)$. Domnevo, da velja ocena

$$|a_n| \leqslant n \tag{5}$$

čez in čez, je postavil leta 1916 L. Bieberbach. Dokaz te domneve doslej v splošnem še ni uspel. Le za nekatere podzvrsti rodu S se je posrečilo dokazati pravilnost te domneve: za funkcije S z realnimi koeficienti in za funkcije S, ki upodobe krog enote v zvezdasto polje. Za funkcije S,

ki upodobe krog enote v konveksno polje, pa moremo mejo še znižati in dokazati, da velja za koeficiente takih funkcij ocena $|a_n| \leqslant 1$ pri vsakem n.

Vse dokaze moremo nasloniti na tale

LEMMA: *Koeficienti funkcije*

$$\varphi(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

ki ima pozitivno realno komponento, so vsi absolutno manjši od 2: $|a_n| \leqslant 2$.

S ζ_k ($k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$) označimo n-te korene enote $\zeta_k = e^{k2\pi i/n} = \zeta_1{}^k$. Vsak tak koren zadošča enačbi $\zeta^n - 1 = 0$. Vzemimo koren ζ_1, ki je $\neq 1$. Tedaj moremo enačbo deliti z razliko $\zeta_1 - 1 \neq 0$ in dobimo enačbo, ki ji zadošča $\zeta_1 : 1 + \zeta_1 + \zeta_1{}^2 + \ldots \zeta_1{}^{n-1} = 0$. To pa moremo pisati tudi takole:

$$\zeta_0 + \zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_{n-1} = 0$$

in vidimo, da so n-ti koreni enote med seboj linearno odvisni. Prav ista zveza pa velja tudi med potencami $\zeta_k{}^m$ ($k = 0, 1, 2, \ldots n-1$), kjer eksponent m ni deljiv z n, ker so v tem primeru potence $\zeta_k{}^m$ spet vsi n-ti koreni enote, le v nekem drugem vrstnem redu. Povsem drugače pa je, če je eksponent m večkratnik števila n. Pišimo $m = ln$, pa vidimo, da je: $\zeta_k{}^m = e^{kln2\pi i/n} = e^{kl2\pi i} = 1$ in to prav pri vsakem k. Povzemimo:

$$\zeta^m + \zeta_1{}^m + \ldots + \zeta_{n-1}{}^m = \begin{cases} 0 & \text{če } m \text{ ni deljiv z } n \\ n & \text{če je } m \text{ večkratnik } n \end{cases} \qquad (*)$$

Tvorimo funkcijo:

$$\varphi_n(z) = n^{-1} \Sigma\, \varphi(\zeta_k z^{1/n})$$

kjer seštevamo po k-ju od 0 do n-1. V vrsti za $\varphi_n(z)$ nastopajo le tisti členi, kjer je eksponent spremenljivke z celo število, vsi ostali členi pa so enaki 0. To velja zaradi zveze (*). Funkcijo $\varphi_n(z)$ razvijemo torej v vrsto:

$$\varphi_n(z) = 1 + a_n z + a_{2n} z^2 + \ldots$$

Tudi $\varphi_n(z)$ ima pozitivno realno komponento, njena vrednost v začetni točki pa je 1. Za funkcijo

$$\tau_n(z) = \frac{\varphi_n(z) - 1}{\varphi_n(z) + 1} = \tfrac{1}{2} a^n z + \ldots$$

velja po Schwartzovem lemma ocena $|\tau_n(z)| \leqslant |z|$ ali $|\tau_n(z)/z| \leqslant 1$*. V limiti $z \longrightarrow 0$ privede to do ocene $|\tau_n'(0)| \leqslant 1$; ker pa je $\tau'(0) = \frac{1}{2} a_n$, je

$$|a_n| \leqslant 2$$

s čimer pa je lemma dokazan.

Dokažimo sedaj, da je za funkcije S z realnimi koeficienti Bieberbachova domneva upravičena. Naj bo f(z) taka funkcija. V konjugiranih točkah ima f(z) konjugirane vrednosti, ker so njeni koeficienti realni. Imaginarna komponenta funkcije f(z) je enako predznačena v vseh točkah, ki leže na isti strani realne osi. V splošnem se lahko primeri, da preide

* Glej: loc. cit. str. 317—318.

spodnja polovica ravnine v zgornjo polovico ravnine, toda pri funkcijah S smo z normiranjem dosegli, da se točke, ki leže na zgornji polovici ravnine (z), upodobe v točke zgornje polovice ravnine (w). Spomnimo se le, da se okolica izhodišča zaradi normiranja upodobi nespremenjena. To lastnost moremo izreči tudi takole: *Imaginarna komponenta funkcije* S *z realnimi koeficienti in imaginarna komponenta spremenljivke* z *sta enako predznačeni.*

Funkcija $w = f(z)$ naj bo regularna tudi na robu enotnega kroga. Tedaj je tudi funkcija

$$\varphi(z) = f(z)(1 - z^2)/z = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

regularna za vsak z, ki leži v notranjosti ali na robu kroga $|z| \leqslant 1$. Dokažimo, da je realna komponenta funkcije $\varphi(z)$ pozitivna! Ekstremne vrednosti zavzame realna komponenta, ki je regularna v notranjosti in na robu polja, le na robu polja. Zadošča torej dokaz, da je realna komponenta funkcije $\varphi(z)$ povsod na robu enotnega kroga pozitivna, pa bomo prepričani, da je tudi v notranjosti kroga povsod pozitivna. Realna komponenta te funkcije je enaka: $\frac{1}{2}[w(1 - z^2)/z + w^*(1 - z^{*2})/z^*]$, na obodu kroga, kjer je $zz^* = 1$ pa ima vrednost:

$$-\tfrac{1}{2}(z - z^*)(w - w^*) = 2\,[(z - z^*)/2i]\,[(w - w^*)/2i]$$

ki je enaka dvakratnemu produktu imaginarnih komponent funkcije w in spremenljivke z. Ker sta ti dve komponenti enako predznačeni, je realna komponenta funkcije $\varphi(z)$ na obodu kroga pa seveda tudi v njegovi notranjosti povsod pozitivna.

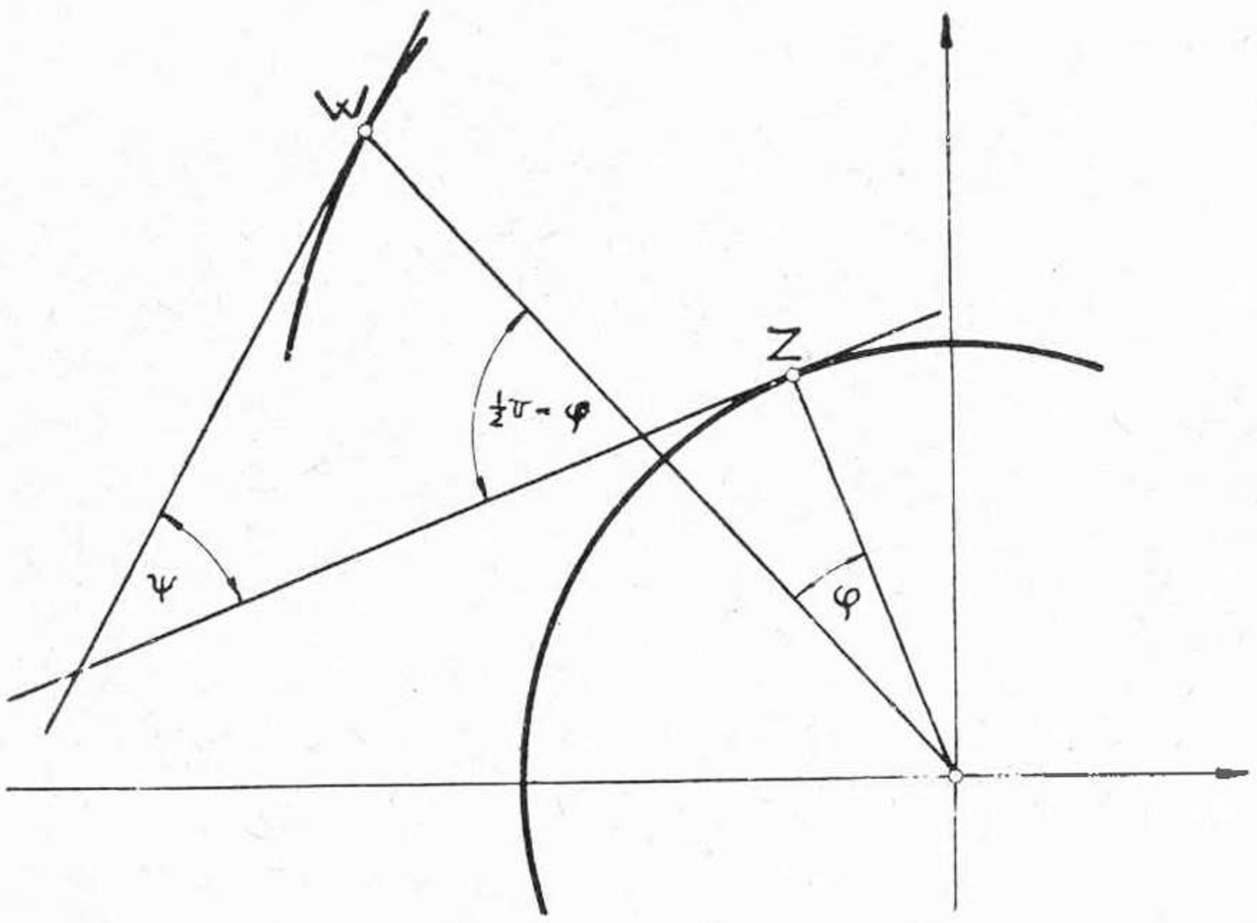
Koeficient funkcije $\varphi(z)$ znamo oceniti in kaj lahko ocenimo tudi koeficiente funkcije f(z). Primerjajmo koeficiente na obeh straneh enačbe $f(z)/z = \varphi(z) \,.\, 1/(1 - z^2)$:

$$1 + a_2 z + a_3 z^2 + \ldots = (1 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots)\,(1 + z^2 + z^4 + \ldots)$$

pa vidimo, da je

$$a_n = a_1 + a_3 + \ldots + a_{n-1} \qquad \text{če je } n \text{ sod}$$
$$a_n = 1 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{n-1} \qquad \text{če je } n \text{ lih}$$

V obeh primerih dobimo oceno $|a_n| \leqslant n$ in se tako prepričamo, da je Bieberbachova domneva pri funkcijah S z realnimi koeficienti upravičena.



Lotimo se še funkcij, ki preslikajo enotni krog v zvezdasto polje. Zvezdasto polje je odlikovano s tem, da leži spajnica katerekoli točke polja s središčem vsa v notranjosti polja. Radijvektor, ki spaja izhodišče s sliko točke z, se vrti stalno v isti smeri okoli izhodišča, ko potuje točka z po krožnici $|z| = 1$. Mislimo si ravnini (z) in (w) položeni drugo vrh druge tako, da se koordinatna sistema ujemata! Točka z

in njena slika w ležita sedaj na isti kompleksni ravnini. Kot, ki ga oklepata radijvektorja obeh točk, je $\varphi = \arg w - \arg z$. Ločni element na krogu oklepa z radijvektorjem točke z kot $\frac{1}{2}\pi$, njegova slika v točki w pa mora oklepati z radijvektorjem kot, ki je $\leqq \pi$. Kot, ki ga oklepa tangenta na krog v točki z s tangento na rob polja v točki w, je enak $\psi = \arg w'$. Obe tangenti in radijvektor točke w oklepajo trikotnik, ki ima kota $\frac{1}{2}\pi - \varphi$ in ψ. Njuna vsota je manjša od π, ali $\psi - \varphi < \frac{1}{2}\pi$. To pa je $\arg w' - \arg w + \arg z < \frac{1}{2}\pi$ ali $\arg zw'/w < \frac{1}{2}\pi$. Realna komponenta funkcije

$$\varphi(z) = z\,f'(z)/f(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

je torej pozitivna [saj je enaka $\cos \arg \varphi(z)$], če je $f(z)$ funkcija S, ki prevede enotni krog v zvezdasto polje. Primerjajmo koeficiente na obeh straneh enačbe $z\,.\,f(z) = f(z)\,.\,\varphi(z)$

$$z + 2a_2 + 3a_3 z^3 + \ldots = (z + a_2 z^2 + \ldots)\,(1 + a_1 z + \ldots)$$

pa vidimo, da je:

$$n\,a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\,a_2 + \ldots + a_1\,a_{n-1} + a_n$$

Upoštevajmo, da je $|a_n| \leqq 2$, pa dobimo odtod:

$$(n-1)\,|a_n| \leqq 2\,(1 + |a_2| + \ldots + |a_{n-1}|)$$

Za $n = 2$ dobimo odtod $|a_2| \leqq 2$, dalje pa sklepajmo po indukciji: naj velja $|a_k| < k$ za vsak $k < n$, tedaj je za $k = n$:

$$(n-1)\,|a_n| \leqq 2\,[1 + 2 + \ldots + (n-1)] = n(n-1)$$

in torej tudi:

$$|a_n| \leqq n$$

Končno nas bodo zanimale še funkcije, ki privedejo enotni krog v konveksno polje. Ograja konveksnega polja je krivulja, ki ima povsod enako predznačeno krivino. To pomeni, da se kot τ, ki ga oklepa tangenta na obod polja s pozitivno smerjo realne osi, spreminja stalno v istem smislu, ko točka z obkroža krožnico $|z| = 1$. Tangenta krožnice oklepa v točki z z realno osjo kot $\frac{1}{2}\pi + \arg z$, pri prehodu v točko w se ta poveča za $\arg w'$. Torej je $\tau = \frac{1}{2}\pi + \arg zw'$. Kot τ se spreminja stalno v istem smislu, če se spreminja tako $\arg zw'$. Oglejmo si polje, v katero prevede enotni krog funkcija $F(z) = z\,.\,f'(z)$, ki je hkrati s $f(z)$ član rodu S. Radijvektor, ki sega od središča do točke na robu tega polja, oklepa z realno osjo kot $\arg zw'$, torej se radijvektor suče stalno v isti smeri, ko obkroža točka z krožnico $|z| = 1$. To pa pomeni, da prevede funkcija $F(z) = zf'(z)$ krog enote v zvezdasto polje, če prevede funkcija $f(z)$ krog enote v konveksno polje. Pišimo $F(z) = z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \ldots$ in primerjajmo koeficiente:

$$z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \ldots = z + 2a_2 z^2 + 3a_3 z^3 + \ldots$$

pa vidimo, da je $n\,|a_n| = |A_n| \leqq n$ in torej $|a_n| \leqq 1$. Meja je ostra, doseže jo funkcija:

$$z/(1 - z) = z + z^2 + z^3 + \ldots$$

ki preslika enotni krog v tisti del ravnine $(w) = (u + iv)$, ki leži desno od premice $u = -\frac{1}{2}$.

Odvrnimo svoje zanimanje od podzvrsti rodu S in posvetimo ga spet celotnemu rodu! Videli smo že ob začetku, da je Bieberbachova domneva upravičena pri koeficientu kvadratnega člena. Kaj pa je z nadaljnjimi členi? Samo še za naslednji koeficient je dokazana pravilnost domneve. Dokaz je uspel leta 1923 K. Löwnerju. Löwner je dognal, da se dajo koeficienti predstaviti z integrali neke funkcije $k(t)$, ki ima absolutno vrednost enako 1 : $|k(t)| = 1$. Takole je mogel zapisati prva dva koeficienta:

$$a_2 = -2\int_0^\infty e^{-t} k(t)\,dt$$

$$a_3 = -2\int_0^\infty e^{-2t} k(t)^2\,dt - 4\left(\int_0^\infty e^{-t} k(t)\,dt\right)^2$$

in odtod je našel oceno: $|a_2| \leqslant 2$, $|a_3| \leqslant 3$. Še enkrat se je posrečilo najti oceno $|a_3| \leqslant 3$. Leta 1943 sta po svoji poti prišla do nje A. C. Shaeffer in D. C. Spencer. Oba dokaza — Löwnerjev in oni, ki sta ga podala Schaeffer in Spencer — slonita na metodah, ki jih danes imenujemo variacijske.

Klasične metode, osnovane na ocenah določenih ploščin, so dovedle še do neke zgornje meje splošnega koeficienta. Leta 1925 je tako dognal J. E. Littlewood, da velja splošna ocena $|a_n| < en$. Prepričajmo se o tem! Za dokaz bomo potrebovali ploščino polja, v katero prevede funkcija $f(z)$ krog $|z| \leqslant r < 1$. Ta ploščina je enaka:

$$\int_0^r \int_0^{2\pi} |f'(z)|^2 r\,dr\,d\varphi = \pi\,(r^2 + 2|a_2|^2 r^4 + 3|a_3|^2 r^6 + \ldots)$$

Račun ni prav nič težak, zato ga kar preidimo. V vrsti

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$$

izrazimo spremenljivko z s polarnimi koordinatami $z = re^{i\varphi}$, pomnožimo vrsto z $e^{-ni\varphi}$ in integrirajmo po φ od 0 do 2π! Vrsto, ki je enakomerno konvergentna, smemo členoma integrirati in tako dobimo:

$$\int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi}) e^{-in\varphi}\,d\varphi = 2\pi a_n r^n$$

To nam da oceno:

$$2\pi r^n |a_n| \leqslant \int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|\,d\varphi$$

Upeljimo nove spremenljivke z zvezami: $z = \zeta^2$, $\zeta = \varrho e^{i\psi}$ in $f(z) = f(\zeta^2) = [F(\zeta)]^2$! Svojo neenačbo moremo sedaj zapisati takole:

$$2\pi r^n |a_n| \leqslant \int_0^{2\pi} |F(\zeta)|^2\,d\psi$$

Razvijmo $F(\zeta)$ v potenčno vrsto $F(\zeta) = \zeta + b_2\zeta^2 + b_3\zeta^3 + \ldots$ in izračunajmo vrednost integrala:

$$r^n |a_n| \leqslant \varrho^2 + |b_2|^2\varrho^4 + |b_3|^2\varrho^6 + \ldots =$$

$$= 2\int_0^\varrho (\varrho + 2|b_2|^2\varrho^3 + 3|b_3|^2\varrho^5 + \ldots)\,d\varrho$$

Izraz pod integralom je vprav ploščina polja, v katero preslika funkcija $F(\zeta)$ krog $|\zeta| \leqslant \varrho \leqslant 1$, deljena s $\pi\varrho$. To ploščino pa lahko prav preprosto ocenimo s pomočjo izreka o raztegu. Neenačba (3) nam pove, da je $|F(\zeta)|^2 = |f(\zeta^2)| \leqslant r/(1-r)^2 = \varrho^2/(1-\varrho^2)^2$, ker je $r = \varrho^2$. Ploščina polja, v katero prevede $F(\zeta)$ krog $|\zeta| \leqslant \varrho$, prav gotovo ni večja od kroga s polmerom $\varrho/(1-\varrho^2)$, ki je enaka $\pi\varrho^2/(1-\varrho^2)^2$. Delimo še s $\pi\varrho$, pa dobimo oceno:

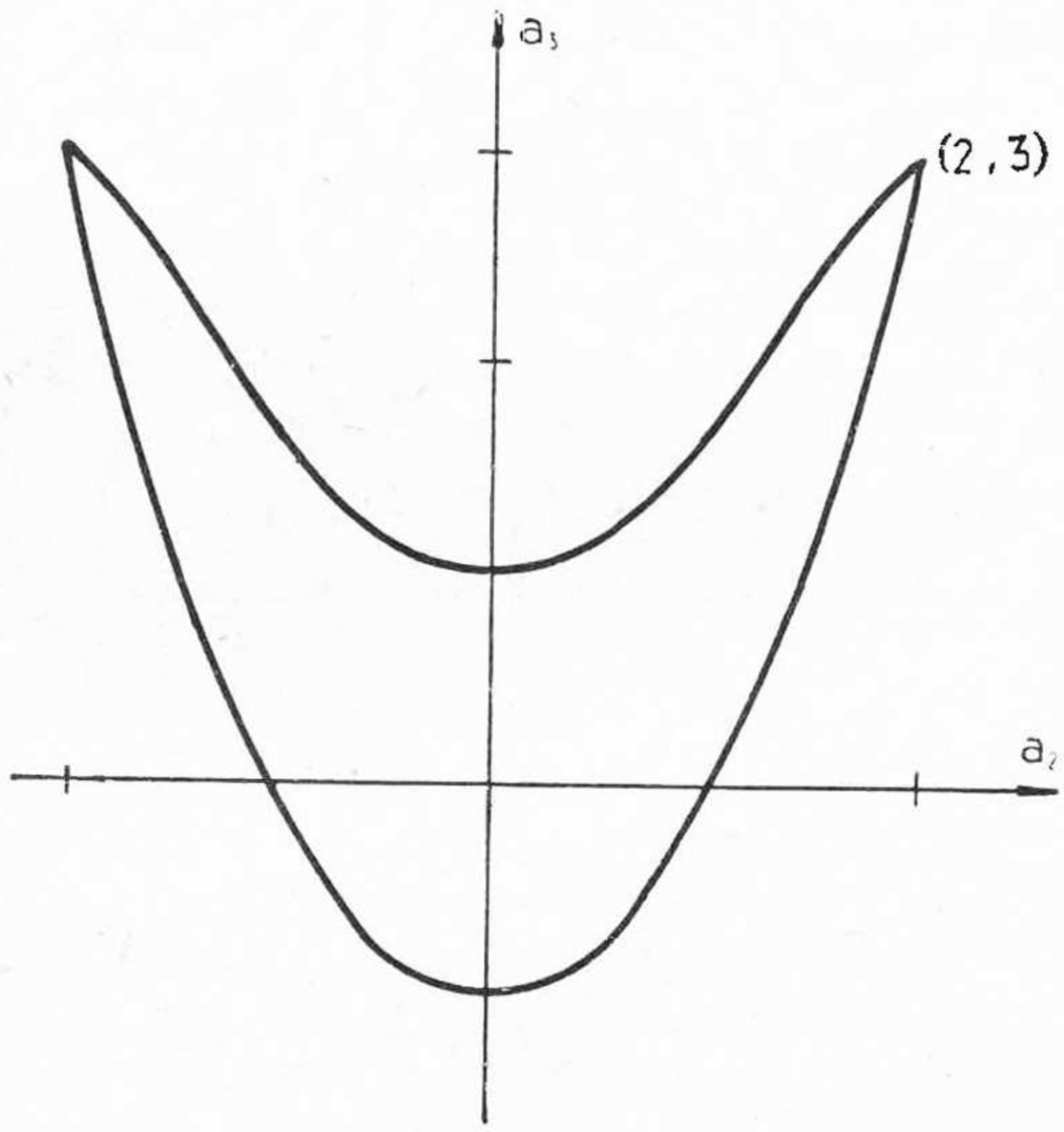
$$r^n |a_n| \leqslant 2 \int_0^\varrho \varrho \, d\varrho/(1-\varrho^2)^2 = \varrho^2/(1-\varrho^2) = r/(1-r)$$

Upoštevajmo, da je polmer r poljubno število < 1. Postavimo tedaj kar $r = 1 - 1/n$ in dobimo za $|a_n|$ oceno:

$$|a_n| \leqslant n/(1-1/n)^{n-1} = n[1 + 1/(n-1)]^{n-1} < en$$

To oceno je izboljšal G. M. Golusin, ki je leta 1948 dokazal, da je $|a_n| < \frac{3}{4} en$. V istem letu je našel I. E. Bazilevič še nižje meje: $|a^n| < 1.924\, n$, če je $n \geqslant 4$, $|a_n| < 1.759\, n$, če je $n \geqslant 10$ in $|a_n| < 1.621\, n$ za $n \geqslant 100$. Za posamezne koeficiente pa je bilo mogoče mejo še bolj potisniti navzdol. Tako vemo, da je $|a_4| < 4.0891$ (S. D. Bernardi) in $|a_5| < 8$ (G. Szegö).

Na koncu omenimo še en problem, ki zanima raziskovalce funkcij S. Predmet tega problema so spet koeficienti potenčne vrste, v katero je razvita funkcija S. Tolmačimo imaginarne in realne komponente koeficientov kot koordinate v večdimenzionalnem prostoru. Tedaj nam n-torica koeficientov $(a_2, a_3, \ldots . a_{n+1})$ predstavlja točko v evklidskem prostoru z $2n$ razsežnostmi. Vse točke, ki jih dobimo, če tvorimo te n-torice za vse funkcije rodu S, leže v notranjosti nekega zaprtega polja. To trditev je postavil L. Bieberbach leta 1916. Kakšna so ta polja v posameznih primerih, pa je še kaj malo raziskano. Vemo, da se točka (a_2) na ravnini lahko giblje le v notranjosti kroga $|a_2| \leqslant 2$. L. 1937 je E. Peschl našel polje, v katerem leži točka (a_2, a_3), če sta oba koeficienta realna. To dvodimenzionalno polje vidimo na sliki.



Od spodaj ga ograja parabola $a_3 = a_2^2 - 1$, zgornji rob pa je pri $a_2 \geqslant 0$ krivulja:

$$a_2 = 2x(1 - \log x);\ a_3 = 1 + x^2 + (a_2 - x)^2 \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

pri $a_2 < 0$ pa njena zrcalna slika preko osi (a_2). Štiridimenzionalno polje, v katerem leži točka (a_2, a_3), če sta a_2 in a_3 kompleksni števili, sta našla Shaeffer in Spencer leta 1946.

Za točke polja (a_2, a_3) moremo oceniti tudi njihovo razdaljo od izhodišča. Tole velja:

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{3} \leqslant (|a_2|^2 + |a_3|^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{13}$$

Največjo vrednost doseže razdalja pri funkciji $z/(1+z)^2$, najmanjšo pa pri funkciji $z/(1 - 2^{-\frac{1}{2}} z + z^2)$.

O PORAZDELITVI REDUCIRANIH ULOMKOV

I. VIDAV

Če vzamemo dve poljubni celi števili n in k ter delimo večje z manjšim, se delitev v splošnem ne izide in dobimo neki delitveni ostanek. Kolikšna je verjetnost, da je kvocient med ostankom in divizorjem manjši od x, kjer je $0 \leqq x \leqq 1$? Očitno je ta verjetnost enaka 1 za $x = 1$, ker je vsak ostanek manjši od divizorja. Za $x = 0$ pa je verjetnost enaka 0.

Preden odgovorimo na to vprašanje, si oglejmo neki drug problem, o katerem se bo izkazalo, da je z le-tem v ozki zvezi. Vzemimo namreč kako naravno število N in ga delimo po vrsti s števili 1, 2, 3, . . ., N. Dobimo N ulomkov $N/1$, $N/2$ . . ., N/N. Odštejemo od vsakega teh ulomkov največje celo število, ki ga ne presega. Na kratko bomo rekli, da smo te ulomke *reducirali modulo 1. Reducirani ulomki* leže vsi na intervalu od 0 do 1. Ulomek N/k reduciramo tako, da najprej delimo N s k. Če dobimo pri delitvi kvocient q in ostanek O_k, je $N/k = q + O_k/k$. Ako torej N/k reduciramo modulo 1, dobimo ulomek O_k/k. Vzemimo sedaj kako realno število x med 0 in 1 in preštejmo tiste reducirane ulomke, ki so manjši od x. Naj jih bo N_x. Razmerje $N_x : N$ pove, koliki del vseh reduciranih ulomkov leži med 0 in x. Vsiljuje se sedaj vprašanje, kako bi to razmerje izračunali in ali eksistira limita, če gre $N \longrightarrow \infty$. To vprašanje si je postavil in ga rešil v sredi preteklega stoletja matematik G. L. Dirichlet (Journal f. d. reine u. angew. Math., Bd. 47).

Poiščimo najprej, koliko je takih celih števil k, pri katerih leži kvocient N/k med q in $q + x$, kjer je q poljubno naravno število. Vsak tak k ustreza neenačbi $q \leqq N/k < q + x$. Od tod dobimo takoj, da je

$$N/(q + x) < k \leqq N/k$$

Torej je toliko k-jev z zahtevano lastnostjo, kolikor je celih števil med $N/(q + x)$ *in* N/k. Le-ta pa so

$$[N/(q + x)] + 1,\ [N/(q + x)] + 2, \ldots, [N/q]$$

Z $[a]$ smo zaznamovali, kakor je to v navadi, največje celo število, ki ne presega a. Tako je n. pr. $[1{,}3] = 1$, $[0{,}5] = 0$, $[\pi] = 3$, itd. Vseh iskanih k je potemtakem ravno $[N/q] - [N/(q + x)]$. Število reduciranih ulomkov N/k, ki so pod x, pa dobimo, če vstavimo v ta izraz po vrsti $q = 1, 2, \ldots, N - 1$ in dobljene vrednosti seštejemo. Torej je

$$\begin{aligned} N_x = N - [N/(1 + x)] + [N/2] - [N/(2 + x)] + \\ + \ldots + [N/(N - 1)] - [N/(N - 1 + x)] \end{aligned} \tag{1}$$

Sedaj skušajmo oceniti N_x pri velikem N. Vsoto (1) razdelimo na dva dela: na tisti del, kjer je $q \leqq \sqrt{N}$, in na onega, kjer je $q > \sqrt{N}$. Očitno je kvocient $N/k > \sqrt{N}$ le, če je $k < \sqrt{N}$. Zato je drugi del vsote (1), ki da za te k število reduciranih ulomkov N/k z zahtevano lastnostjo, manjši od $\sqrt{N}$. V prvem delu vsote pa povsod izpustimo oglati oklepaj. Napaka, ki smo jo pri tem napravili, je absolutno manjša od $\sqrt{N}$, Vsak člen zase

se je namreč spremenil za manj od 1. Od tod imamo gornjo oceno skupne napake, ker je vseh členov $\leqq \sqrt{N}$. Zato lahko pišemo

$$N_x = N \sum \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q+x} \right) + R_N$$

Vsota se nanaša na $q = 1, 2, \ldots, \sqrt{N}$. Ostanek je $|R_N| < 2\sqrt{N}$. Če raste N preko vsake meje, limitira zato kvocient R_N/N proti nič. Od tod sklepamo, da konvergira tudi kvocient N_x/N in sicer je v limiti

$$v(x) = \lim_{N \to \infty} \frac{N_x}{N} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1+x} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2+x} \right) + \ldots \qquad (2)$$

Vrsta na desni je konvergentna, kar takoj vidimo, če jo pišemo v obliki

$$v(x) = \frac{x}{1(1+x)} + \frac{x}{2(2+x)} + \frac{x}{3(3+x)} + \ldots \qquad (2^*)$$

kjer so členi manjši od istoležnih členov konvergentne vrste $1 + (\frac{1}{2})^2 + + (\frac{1}{3})^2 + \ldots$ Za $x = 1$ ima vrsta (2) vsoto 1, ker se po dva zaporedna člena od drugega naprej med seboj uničita. To je v skladu z zgoraj omenjenim dejstvom, da je $N_1 = N$. Iz (2*) vidimo, da reducirani ulomki niso enakomerno porazdeljeni med 0 in 1. Če namreč v imenovalcih postavimo $x = 1$, ima dobljena vrsta vsoto $= x$. Ker je njena vsota za $x < 1$ manjša od prvotne, je $v(x) > x$ za $x < 1$. Pri enakomerni porazdelitvi pa bi moralo biti $v(x) = x$.

Gre sedaj za to, da spoznamo, kaj pomeni vrsta (2) in kako se izraža z znanimi funkcijami. Očitno je konvergentna za vsak $x > 0$. Pa vzemimo vrsto

$$\varphi(z) = \frac{z}{1} - \frac{z^{1+x}}{1+x} + \frac{z^2}{2} - \frac{z^{2+x}}{2+x} + \ldots \qquad (3)$$

ki je odvisna tudi od z in smo jo kot tako zaznamovali s $\varphi(z)$. Ta vrsta je enakomerno konvergentna, če je $0 \leqq z \leqq 1$. Zato je njena vsota $\varphi(z)$ zvezna funkcija z-ja in je $\varphi(1) = v(x)$. Če (3) členoma odvajamo, dobimo

$$\varphi'(z) = 1 - z^x + z - z^{1+x} + \ldots \qquad (4)$$

ki je za $0 \leqq z < 1$ tudi enakomerno konvergentna vrsta in je zaradi tega odvod vrste (3). Ta odvod sestoji iz dveh neskončnih geometričnih vrst

$$1 + z + z^2 + \ldots \qquad \text{in} \qquad z^x(1 + z + z^2 + \ldots)$$

ki sta obe konvergentni za $0 \leqq z < 1$ in imata vsoti $1/(1-z)$ ter $z^x/(1-z)$. Torej je

$$\varphi'(z) = (1 - z^x)/(1 - z)$$

Ker je $\varphi(0) = 0$, dobimo od tod z integriranjem

$$\varphi(z) = \int_0^z \frac{1 - z^x}{1 - z}\, dz$$

Vsota vrste (2) je potem

$$v(x) = \int_0^1 \frac{1 - z^x}{1 - z}\, dz \tag{5}$$

Integral na desni je v ozki zvezi z Eulerjevo funkcijo gama, ker je

$$\int_0^1 \frac{1 - z^x}{1 - z}\, dz = \frac{\Gamma'(1 + x)}{\Gamma(1 + x)} + C$$

kjer je $C = 0{,}577\ldots$ Eulerjeva konstanta. (Glej n. pr. knjigo I. Vidav, Višja matematika II, str. 215.)

V posebnem primeru $x = \frac{1}{2}$ se integral (5), če vpeljemo $z = u^2$, glasi

$$\int_0^1 \frac{1 - u}{1 - u^2}\, 2u\,du = 2\int_0^1 \frac{u\,du}{1 + u} = 2 - 2\log 2 = 0{,}614\ldots$$

Od tod vidimo tole: Če delimo kako veliko število N po vrsti z 1, 2, 3, ..., N, je približno 61 % delitvenih ostankov, ki so manjši od polovice divizorja, 39 % pa jih je večjih od polovice divizorja. Torej so ulomki $N/1$, $N/2, \ldots, N/N$, če jih po zgornjem predpisu reduciramo modulo 1, pri velikem N bolj na gosto posejani med 0 in $\frac{1}{2}$ kakor pa med $\frac{1}{2}$ in 1.

Integral (5) zvezno narašča od 0 do 1, ko gre x od 0 do 1. Račun pokaže, da doseže vrednost $\frac{1}{2}$, ko je $x = 0{,}385\ldots$ Zato je pri velikem N približno ravno toliko reduciranih ulomkov med 0 in 0,385, kolikor jih je med 0,385 in 1.

Povrnimo se sedaj na našo prvotno nalogo! Trdimo namreč, da daje iskano verjetnost vrsta (2) oziroma integral (5). Preden bomo skušali dokazati to trditev, pa moramo najprej za ta primer nekoliko natančneje opredeliti pojem verjetnosti.

Naj bo N kako veliko celo število, ki ga bomo potem večali preko vsake meje. Izberimo si dve poljubni celi števili med 1 in N. Ker ne gre tu za vrstni red izbranih števil, je vseh možnih parov $\frac{1}{2}N(N + 1)$. To hitro uvidimo takole: Ko smo prvo število izbrali, je za drugo še $N - 1$ možnosti, ako sta obe različni. Skupaj je torej $N(N - 1)$ parov različnih števil. Vsak par pa je dvakrat štet, ker nam ne gre za vrstni red. Zato je v resnici le $\frac{1}{2}N(N - 1)$ takih parov. Ako prištejemo še N tistih, kjer sta obe števili enaki, jih dobimo $\frac{1}{2}N(N + 1)$. Tu vzamemo, da vsaka izmed teh $\frac{1}{2}N(N + 1)$ možnosti nastopa z isto verjetnostjo. Koliko pa je takih parov, pri katerih leži kvocient večjega števila z manjšim, med q *in* $q + x$ (q je celo število)? Če je večje število n, pridejo za manjše k v poštev vsa cela števila med $n/(q + x)$ in n/q. Takih k je torej $[n/k] - [n/(q + x)]$. Za n lahko vzamemo še katero koli vrednost od 1 do N. Zato je vseh parov z zahtevano lastnostjo

$$\Sigma\{[n/q] - [n/(q + x)]\}$$

kjer se vsota nanaša na vse n od 1 do N. Če zopet izpustimo oglate oklepaje in upoštevamo, da je $1 + 2 + \ldots + N = \frac{1}{2}N(N + 1)$, dobimo za gornjo vsoto izraz

$$\tfrac{1}{2}N(N + 1)\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q + x}\right) + R_N$$

kjer je ostanek $|R_N| < N$. Verjetnost $v_{qN}(x)$, da leži kvocient n/k med q in $q + x$, pa je razmerje med številom ugodnih in številom vseh možnih parov torej

$$v_{qN}(x) = \frac{1}{q} - \frac{1}{q+x} + \frac{2R_N}{N(N+1)}$$

Zadnji člen na desni limitira proti nič, če gre $N \longrightarrow \infty$, kar nam pove zgornja ocena za R_N. Limito izraza $v_{qN}(x)$ za $N \longrightarrow \infty$ bomo imenovali verjetnost $v_q(x)$, da leži kvocient dveh poljubno izbranih naravnih števil (večje vzeto kot dividend) med q in $q + x$. Ta verjetnost je torej $v_q(x) = 1/q - 1/(q + x)$.

Če vzamemo dve poljubni števili, delimo večje z manjšim in je kvocient delitvenega ostanka z divizorjem manjši od x, potem leži kvocient teh dveh števil ali med 1 in 1 + x ali med 2 in 2 + x itd. Verjetnost $v(x)$, da je kvocient delitvenega ostanka z divizorjem pod x, je torej enaka vsoti verjetnosti $v_q(x)$ za vse q. Zato je

$$v(x) = \sum v_q(x) = \frac{1}{1} - \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2+x} + \dots$$

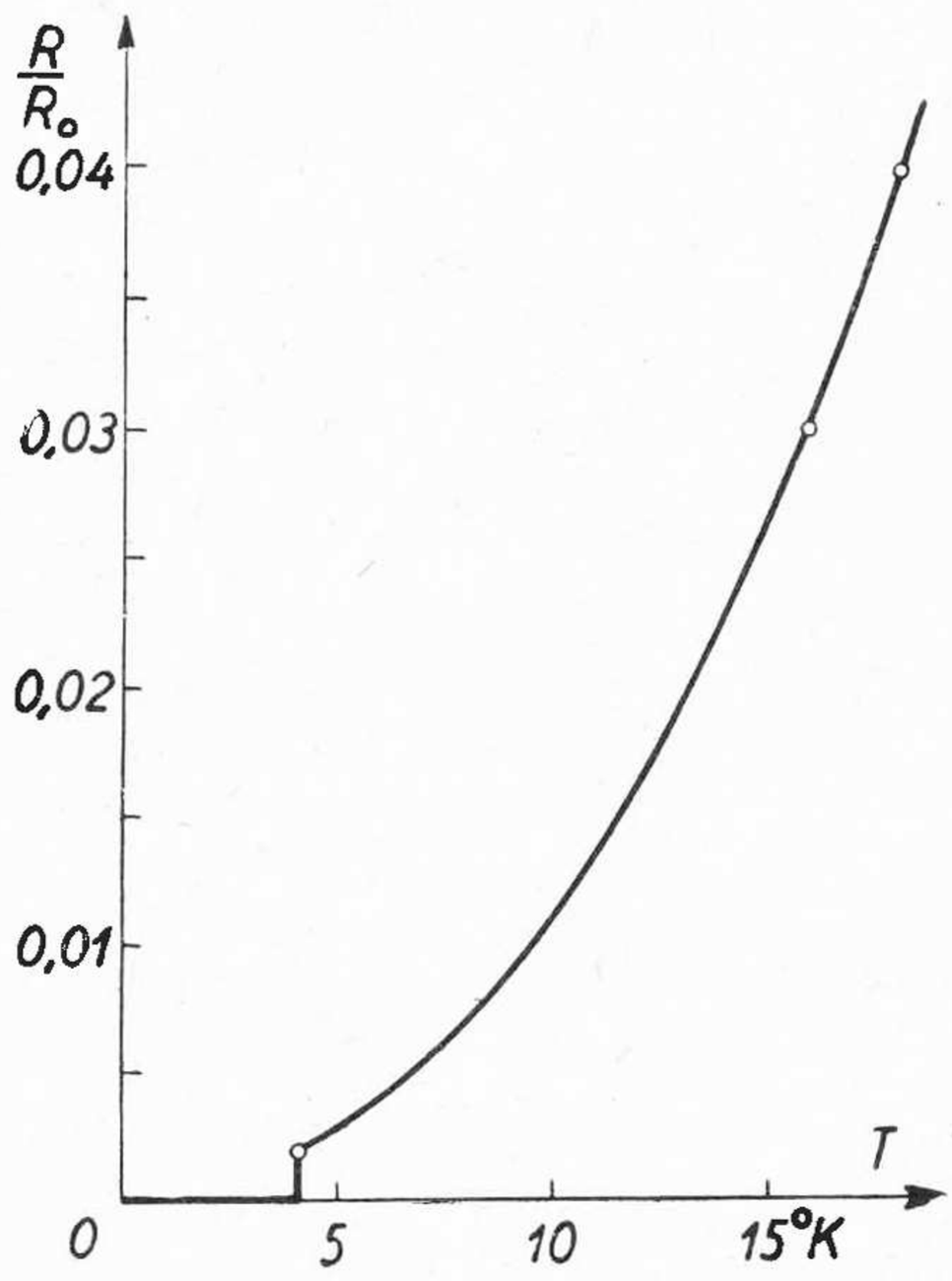
To pa je prav vrsta (2). S tem smo dokazali zgornjo trditev.

SUPRAPREVODNOST

Po članku gospe dr. Frauke Cirkler, Physikalische Blätter 1952—53, priredil F. Ahlin.

Zahvaljujemo se avtorici in uredništvu Physikalische Blätter, ki sta nam dovolila objavo članka. V prevodu je izpuščen seznam literature.

Uvod. Še v začetku sedanjega stoletja niso dobro vedeli, kako je s prevodnostjo kovin pri skrajno nizkih temperaturah. Nekateri so domnevali, da postanejo pri absolutni ničli vsi prevodniki izolatorji, drugi pa, da pojema upor kovin s pojemajočo temperaturo do vrednosti nič. Ko se je Kamerlingh Onnesu v letu 1908 posrečilo vtekočinjenje helija in je s tem mogel doseči temperature 4,2° K in nižje, je bilo mogoče to vprašanje raziskovati s poskusi. Pri preiskavi zelo čistega živega srebra je leta 1911 prišel do prav presenetljivega rezultata: električni upor Hg se je do 4,2° K zvezno manjšal, ob tej *preskočni temperaturi* pa je v intervalu nekaj stotink stopinje skokovito padel na nemerljivo majhno vrednost. (Sl. 1.) Živo srebro je postalo *supraprevodno*. Nadaljnje meritve so pokazale, da supraprevodnost ni samo lastnost Hg,



Sl. 1. Specifična upornost živega srebra v odvisnosti od temperature

temveč splošnejši naravni pojav. Danes poznamo supraprevodnost že pri 22 kovinskih elementih.

Kovinski supraprevodniki in njihove preskočne temperature:

Kovina	Atomska štev., skupina	Preskočna temper. v ^{0}K	Kovina	Atomska štev., skupina	Preskočna temper. v ^{0}K
Niobij (Nb)	41, Va	9,22	Aluminij (Al)	13, IIIa	1,14
Svinec (Pb)	82, IVb	7,26	Galij (Ga)	31, IIIb	1,07
Lantan (La)	57, IIIa	4,71	Renij (Re)	75, VIIa	0,95
Tantal (Ta)	23, Va	4,38	Cink (Zn)	30, IIb	0,79
Vanadij (V)	23, Va	4,3	Cirkonij (Zr)	76, VIII	0,71
Živo srebro (Hg)	80, IIb	4,12	Kadmij (Cd)	40, IVa	0,70
Kositer (Sn), tetrag.	50, IVb	3,69	Hafnij (Hf)	48, II b	0,54
Indij (In)	49, IIIb	3,37	Titan (Ti)	22, IVa	0,53
Talij (Tl)	81, IIIb	2,38	Osmij (Os)	44, VIII	0,47
Torij (Th)	90, IIIa	1,32	Rutenij (Ru)	72, IVa	0,35
Uran (U)	92, IIIa	1,25			

Domneve, da je nastop supraprevodnosti v zvezi s položajem elementa v periodičnem sistemu ali da je odvisen od kristalne strukture ali od atomske prostornine, so se izkazale kot nepravilne ali nezanesljive. Boljšo zvezo z atomskimi količinami je dobil Welker, ki je namesto atomske prostornine vzel prostornino na prevodniški elektron. Vsi supraprevodni elementi imajo prav majhne elektronske prostornine. Poleg tega se v posameznih periodah preskočne temperature večajo, če se volumen na prevodniški elektron manjša.

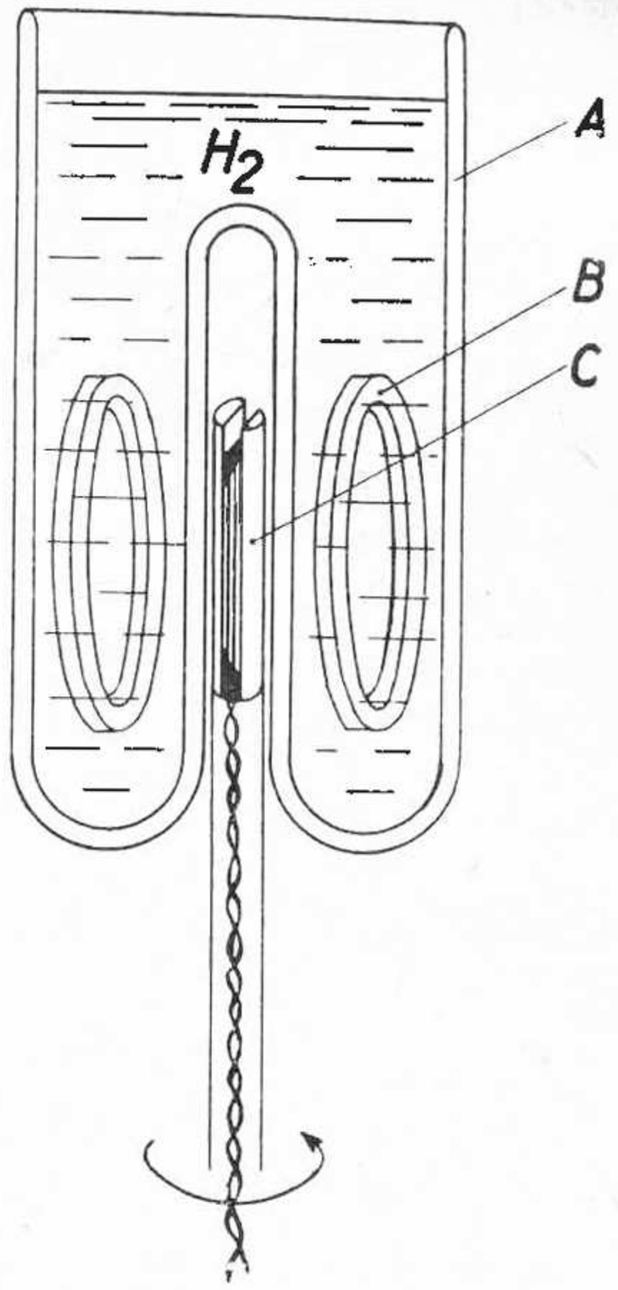
Že 1941. leta je Justi raziskoval, ali je kaj razlike med izotopi istega elementa glede preskočne temperature. Toda ni mogel dobiti zanesljivih rezultatov. V zadnjih letih so se v USA in v Angliji zopet lotili teh poskusov. Raziskovali so izotope Hg in Sn in našli, da imajo težji izotopi nekoliko nižjo preskočno temperaturo kot lažji, in sicer tako, da velja približno zakon $T_s M^{\frac{1}{2}} = \text{konst.}$, če je T_s preskočna temperatura, M pa atomska masa.

Supraprevodne ne postanejo le čiste kovine, temveč tudi nekatere zlitine in medkovinske spojine. Pri tem moreta biti supraprevodnika obe komponenti (kot n. pr. In in Pb), ali pa je ena komponenta supraprevodnik, druga pa normalno prevodna (n. pr. Pb in Bi) ali pa ni nobena komponenta supraprevodnik (n. pr. pri medkovinski spojini Au, Bi). Preskočne temperature zlitin pogosto znatno presegajo preskočne temperature komponent. Še višje so preskočne temperature nekaterih supraprevodnih spojin, zlasti karbidov in nitridov težkih kovin, n. pr. NbN (do 23^0 K).

Leta 1946 so bili objavljeni poskusi z natrijevimi raztopinami v amonijaku, pri katerih baje nastopi supraprevodnost celo že pri kakih 200^0 K. Številne kasnejše kritične preiskave natrijevih raztopin po različnih avtorjih sicer potrjujejo zelo močan padec upora teh raztopin, toda supraprevodnosti pri teh raztopinah v tem temperaturnem območju niso mogli ugotoviti. Res je le, da je upor precej padel, bil pa je še vedno kakih 300-krat večji kot upor bakra pri sobni temperaturi.

Poskus s trajnim tokom. Pri svojih prvih poskusih je mogel Kamerlingh Onnes najprej navesti samo to, da je po nastopu supraprevodnosti upor vsaj milijonkrat manjši kot pri ledišču. Večje natančnosti z navadnimi merskimi metodami ni bilo mogoče doseči. Zato si je Onnes izmislil zelo originalno metodo s trajnim tokom. V kratko spojeni tuljavi iz supraprevodnega materiala je po zadostni ohladitvi z izklopitvijo magnetnega polja induciral tokovni sunek. V navadnih razmerah tokovni sunek v

tuljavi v zelo kratkem času premine zaradi omskega upora, ki spremeni njegovo energijo v Joulejevo toploto; to se zgodi tem hitreje, čim večji je omski upor (časovna konstanta = L/R). Če pa upora ni, mora inducirani tok teči v tuljavi kar naprej z nezmanjšano jakostjo. Onnesova ideja je bila, da ugotovi časovno pojemanje induciranega toka in odtod izračuna upor supraprevodnika. Po opisani Kamerlingh Onnesovi ideji je Justi priredil demonstracijski poskus. V Dewarjevi posodi s tekočim vodikom sta dva obroča iz niobijevega nitrida, med njima pa se vrti majhna kotva z obliko dvojnega T, ki je na navadni temperaturi (Sl. 2). Če teče v obeh obročih iz NbN trajni tok, povzroči njuno magnetno polje v navitju vrteče se kotve izmenično napetost, ki jo izmerimo in iz nje izračunamo jakost trajnega toka.

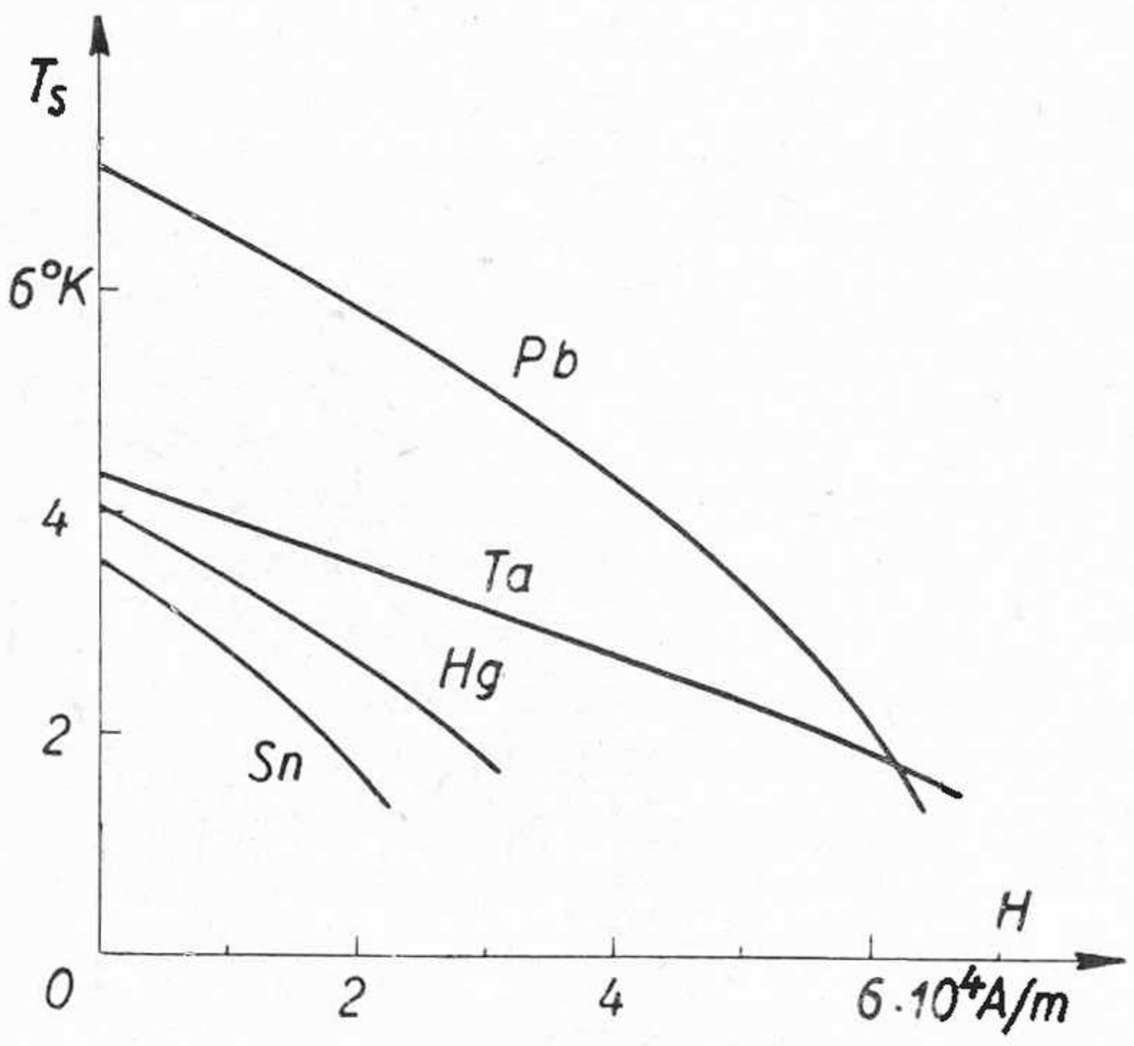


Sl. 2. Poskus s trajnim tokom v supraprevodnem NbN. *A* Dewarjeva posoda, *B* obroča iz NbN, *C* indukcijska tuljava (kotva)

Trajni tok je uporabil Justi tudi za vzbujanje elektromagneta. Železno jedro s premerom 10 mm je obdajal obroč iz NbN, v katerem je tekel trajni tok 600 A. Nosilnost elektromagneta je bila 7,5 kp.

Natančne meritve pojemanja trajnega toka in s tem tudi električnega upora supraprevodnika je izvedel Grossmann, ki je ponovil Onnesov poskus, a z natančnejšimi merskimi napravami. Tudi on ni mogel ugotoviti pri supraprevodniku nikakega upora, čeprav bi mogel izmeriti še upor, ki bi bil 2×10^{15} krat manjši kot upor pri ledišču.

Magnetne lastnosti supraprevodnika. Onnes je prvi opazil, da magnetno polje zniža preskočno temperaturo. Tudi lastno polje toka v supraprevodniku vpliva v tem smislu. Z magnetnim poljem dovolj velike jakosti ali pa z zadostno tokovno obremenitvijo moremo supraprevodnost preprečiti. Krivulje, ki kažejo odvisnost preskočne temperature od poljske jakosti $T_s(H)$, so za neke snovi prikazane na sl. 3.



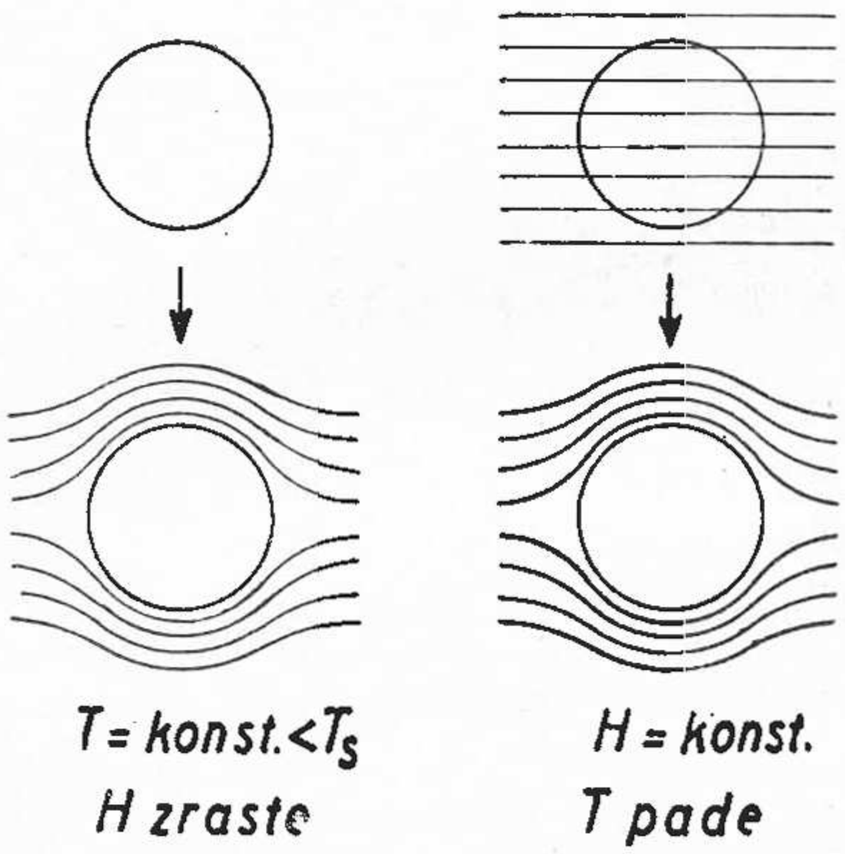
Sl. 3. Odvisnost preskočne temperature od magnetne poljske jakosti

Če pri stalnem polju znižujemo temperaturo, pridemo do supraprevodnosti ravno pri $T_s(H)$. Če pa pri neki stalni temperaturi, ki mora biti nižja kot $T_s(0)$, znižujemo poljsko jakost, se pojavi supraprevodnost pri neki *preskočni poljski jakosti H (T)*, ki je funkcija temperature (ta funkcija je inverzna k prejšnji; T_s in H_s sta v analogni zvezi kakor n. pr. vrelišče in parni pritisk tekočine).

Da se zaradi toka zniža preskočna temperatura, je mogoče pokazati tudi z elektromagnetom na

trajni tok. Če temperatura supraprevodnega obroča iz NbN počasi raste, odpade pri neki temperaturi kotva z obtežitvijo. Če napravimo potem še poskus z manjšo obtežitvijo, pa odpade kotva pri višji temperaturi. Trajni tok se je toliko zmanjšal, da se je preskočna temperatura pomaknila nad temperaturo vodnika.

Meissner in Ochsenfeld sta v letu 1933 s poskusi pokazala, da sta supraprevodnost in magnetizem še v tesnejši zvezi. Iz Maxwellovih enačb, ki so se bile dotlej še vedno obnesle, sledi, da ostane notranjost supraprevodnika brez polja, če po nastopu supraprevodnosti napravimo okrog njega homogeno magnetno polje. Če pa polje že obstoji, ko prevodnik še normalno prevaja, bi po teh izvajanjih moralo polje v prevodniku ostati nespremenjeno tudi po ohladitvi prevodnika pod preskočno temperaturo. Meissner pa je s poskusi dognal, da je notranjost dovolj debelega supraprevodnika v vsakem primeru brez magnetnega polja. Magnetno polje ($H < H_s$), ki ga napravimo šele pod preskočno temperaturo, v supraprevodnik ne more prodreti. Polje, napravljeno še nad preskočno temperaturo, pa se pri ohladitvi pod T_s iz prevodnika izrine (sl. 4). Supraprevodnik se torej vede kot telo s permeabilnostjo $\mu = 0$. Na navidez popolni diamagnetizem supraprevodnika povzročijo električni »zaščitni tokovi«, ki nastanejo na površju supraprevodnika ob navzočnosti magnetnega polja. Tam trajno tečejo in so ravno toliki in tako usmerjeni, da njihovo magnetno polje natančno uniči primarno polje.

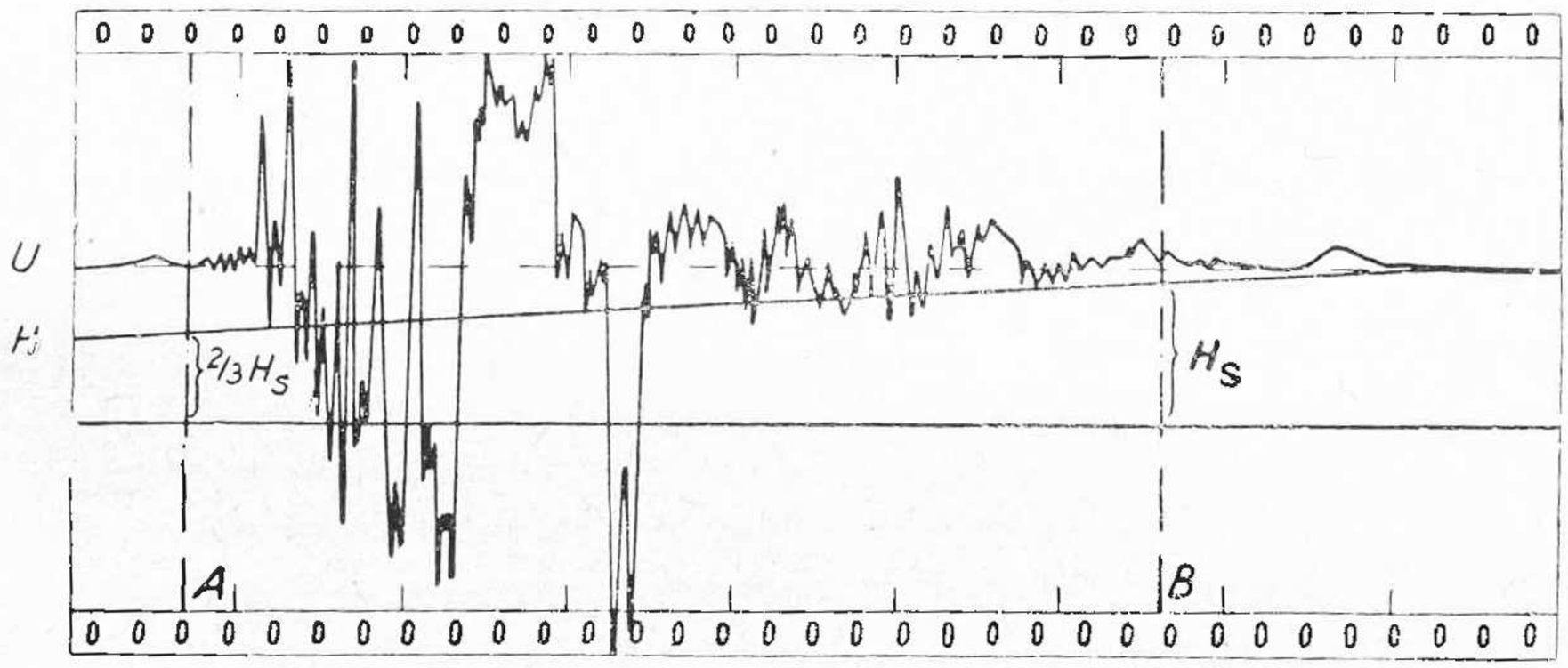


Sl. 4. Levo: Če naredimo okoli supraprevodnika magnetno polje, to polje ne prodre v supraprevodnik. Desno: Če bi bilo magnetno polje navzoče že pred ohladitvijo pod preskočno temperaturo, je to polje ob preskoku v supraprevodnost izrinjeno iz prevodnika (Meissner-Ochsenfeldov efekt)

Meissner-Ochsenfeldov efekt je za supraprevodnik tako značilen, da ga uporabljajo namesto merjenja upora kot kriterij za nastop supraprevodnosti. Pri tem načinu merjenja moremo namreč spoznati, ali je supraprevoden ves vzorec, ali pa so supraprevodne v njem le tanke žile, ki narede kratek stik, tako da se zdi prevodnik v celem prerezu supraprevoden, če ugotavljamo supraprevodnost z njegovim uporom.

Prehodno stanje. Pri prvih merjenjih Kamerlingh-Onnesa na živem srebru je padel upor ob preskoku v intervalu nekaj stotink stopinje od normalne vrednosti na nemerljivo majhno vrednost. Za zelo čist monokristalni kositer brez notranjih napetosti sta de Haas in Voogd ugotovila skok celo v intervalu 10^{-4} stopinje. Na splošno pa opažajo (tudi brez obtežbenega toka) širše prehodno temperaturno področje med normalno prevodnostjo in supraprevodnostjo; pri supraprevodnih spojinah ima to področje širino nekaj desetink stopinje. To je področje prehodnega stanja. Če je supraprevodnik v magnetnem polju, se področje prehodnega stanja znatno razširi. To moremo razložiti po Londonovi domnevi, da obstajajo v prehodnem stanju druga poleg drugih prav majhna normalna in supraprevodna področja. Merjenja de Haasa in Guinauja na supraprevodnih kroglah v magnetnem polju so podprla to domnevo.

Justi je s poskusi dokazal obstoj teh majhnih področij tako, da je dobil Barkhausenovemu efektu analogni efekt pri prehodu v supraprevodno stanje. Supraprevodno kroglo iz kositra je obdal s tuljavo, vse skupaj pa je postavil v počasi naraščajoče magnetno polje. Vsak napetostni sunek, ki se je induciral v tuljavi zaradi spreminjanja strukture, je z ojačevalcem in zvočnikom napravil slišen in ga tudi registriral z oscilografom (sl. 5). Oscilogram kaže, da nastopajo napetostni sunki med tem, ko polje dosega jakosti med $\frac{2}{3}H_s$ in H_s. Ta izid razlagajo takole: Kot vidimo iz slike 4, se magnetno polje zaradi Meissner-Ochsenfeldovega efekta ob ekvatorju poveča, in sicer na tripolovično vrednost. To pomeni, da je na ekvatorju prej dosežena preskočna poljska jakost kot na ostalih delih krogelnega površja, to pa že takrat, ko doseže zunanje polje jakost $(^2/_3)Hs$. Pri tej poljski jakosti se začenja tam podirati supraprevodnost.



Sl. 5. Oscilogram napetostnih sunkov, ki se inducirajo ob preskokih supraprevodnih mikropodročij v normalno stanje zaradi naraščanja jakosti zunanjega magnetnega polja (vzorec ima obliko krogle)

Zaščitni tok se cepi v množico majhnih trajnih tokov, ki ščitijo manjša supraprevodna področja. Ob tem trganju prvotne homogene supraprevodne faze na mala področja nastajajo v indukcijski tuljavi napetostni sunki. Do tedaj, ko zunanje polje doseže jakost H_s, preminejo vsi zaščitni tokovi malih področij. Induciranih napetostnih sunkov ni več; vsa krogla je postala normalno prevodna.

Ko je krogla v zunanjem magnetnem polju, so mikropodročja prehodnega stanja sestavljena iz iglic, ki so usmerjene vzporedno z zunanjim magnetnim poljem. Če pa odpravljamo supraprevodnost v žici s poljem lastnega toka, so mikropodročja prečne ploščice.

Znano je, da moremo čisto tekočino znatno podhladiti, preden se stvori prvo kristalizacijsko jedro (klica) in da tekočina sama od sebe kristalizira. Nekaj podobnega more nastopiti tudi pri prehodu od normalne prevodnosti k supraprevodnosti. NbN je n. pr. treba ohladiti do okrog 15^0 K, da postane supraprevoden, čeprav je preskočna temperatura precej višja. Pri ponovitvi poskusa pa zadošča že ohladitev do $20{,}4^0$ K, če le ni bil material medtem segret na previsoko temperaturo. Šele segretje na 100^0 K uniči klice supraprevodnosti. Zdi se pa, da ni izključeno, da je supraprevodnost vsaj v mikropodročjih obstojna celo še nad vreliščem zraka.

Ob merjenjih v prehodnem področju so odkrili nov pojav, *paramagnetni efekt.* Če imamo ob navzočnosti vzdolžnega zunanjega magnet-

nega polja še zadosten tok, se pri ohlajanju vzdolžni magnetni pretok v notranjosti supraprevodnika najprvo poveča. Tako je pri Hg opazil Meissner v notranjosti prevodnika več kot osemkratno povečanje magnetnega pretoka. Šele pri nadaljnjem nižanju temperature nastopi ob koncu prehodnega področja zelo hitro že omenjeno diamagnetično izrinjenje polja iz prevodnika.

Termodinamika supraprevodnosti. Meissner-Ochsenfeldov efekt ima velik pomen zato, ker je omogočil uporabo termodinamike pri supraprevodnosti. Ker ostane notranjost supraprevodnika vselej brez polja ne glede na to, kaj je bilo prej z materialom, je stanje supraprevodnosti ravnovesno stanje. Prehodi iz normalne prevodnosti v supraprevodnost so torej popolnoma obrnljivi. Energijska gostota v magnetnem polju z jakostjo H je $\frac{1}{2} HB = \frac{1}{2} \mu_0 H^2$. Normalni vodnik s permeabilnostjo $\mu = 1$ in s prostornino V ima zaradi tega polja energijo $\frac{1}{2} \mu_0 H^2 V$. Pri prehodu iz supraprevodnega stanja, ko v vodniku ni polja, v normalno stanje pri konstantnem zunanjem H pridobi vodnik energijo $\frac{1}{2} \mu_0 H^2 V$ z magnetnim delom. Za toliko se torej poveča njegova prosta entalpija G (= Gibbsova funkcija). Spremembo entropije dobimo z odvajanjem na temperaturo: $\Delta S = -\partial(\Delta G)/\partial T = -\mu_0 HV dH/dT$. Ker je odvod preskočne poljske jakosti na temperaturo dH/dT negativen (glej sliko 3), je $\Delta S \geqq 0$.

Natančno tako kakor n. pr. talilna toplota pri taljenju se porabi pri prehodu iz supraprevodnega v normalno stanje latentna toplota $\Delta Q = T\Delta S = -\mu_0 THV dH/dT$. Latentna toplota prehoda je enaka nič, če je $H = 0$, sicer pa je pozitivna. Za kositer znaša največ $1{,}3 \cdot 10^{-3}$ Kal/kmol. To latentno toploto sta Keesom in Kok tudi izmerila. Toplotno izoliran prevodnik se segreje, če ga z zmanjševanjem poljske jakosti spravimo iz normalnega stanja v stanje supraprevodnosti, pri zopetni ukinitvi supraprevodnosti pa se zopet ohladi. Popolno obrnljivost prehoda dokazuje magnetokalorični poskus na taliju. Takoj, ko preseže zunanje magnetno polje preskočno poljsko jakost, nastopi znižanje temperature; vsako zmanjšanje pod to jakost pa zviša temperaturo na prvotno vrednost. Na koncu poskusov je imel vzorec isto temperaturo kot v začetku, ne glede na to, koliko obojnih prehodov je bilo napravljenih. Pri prehodu iz supraprevodnosti v normalno prevodnost se torej energija $\frac{1}{2} \mu_0 H^2 V$ ustreznih zaščitnih tokov ni pretvorila v Joulejevo toploto, ampak obrnljivo v notranjo energijo kristalne mreže.

Tudi razliko v vrednosti specifične toplote so določili s poskusi in rezultat se je ujemal z vrednostjo, izračunano po enačbi:

$$\Delta c_p = (T/m)\, d\Delta S/dT = -\mu_0 (T/\varrho)[H d^2H/dT^2 + (dH/dT)^2]$$

Razlika Δc_p je različna od nič, tudi če se prehod izvrši pri $H = 0$. Pač pa je tedaj $\Delta S = 0$ in zato $\Delta Q = 0$, kot že omenjeno. Zato štejemo tak prehod med *fazne spremembe drugega reda,* medtem ko je prehod ob navzočnosti polja navadna fazna sprememba (prvega reda).

Merjenje specifične toplote sta opravila Keesom in van Laer na kositru. Za normalno stanje je ta sestavljena iz deleža zaradi nihanja mreže (po Debyeju) in deleža zaradi vodniških elektronov (po Sommerfeldu). Za nizke temperature velja za kositer: $c_p = (0{,}62\, T^3 - 3{,}4\, T) \cdot 10^{-6}$ Kal/kg. Pri prehodu v supraprevodnost se c_p poveča za zgoraj omenjeno razliko, nato pa pojema približno sorazmerno s tretjo potenco absolutne tempera-

ture. Iz tega sklepamo, da v supraprevodniku vodniški elektroni nič ne prispevajo k specifični toploti.

Šele leta 1940 je uspelo de Haasu in Rademakersu določiti toplotno prevodnost za supraprevodni svinec. Če preprečimo supraprevodnost z zadosti močnim magnetnim poljem, toplotna prevodnost s padajočo temperaturo zvezno raste. V stanju supraprevodnosti (brez zunanjega polja) pa s pojemajočo temperaturo najprej počasi pada, gre preko rahlega minima, pod 2^0 K pa močno pade, kot da bi postala snov toplotni izolator. Avtorja sta od tod sklepala, da bi se pri padajoči temperaturi vedno več elektronov vključuje v supraprevodnost in da potem nič več ne prispevajo k toplotni prevodnosti. Novejša Mendelssohnova merjenja na drugih snoveh prav tako potrjujejo strmi padec toplotne prevodnosti supraprevodnika. Zaradi teh dejstev so predlagali, da bi supraprevodnike uporabljali kot nekakšna magnetna stikala za toplotni tok pri poskusih z nizkimi temperaturami.

Meissner, Steiner in Grassmann so delali meritve termoelektrične napetosti; pokazali so, da je termoelektrična napetost med dvema supraprevodnikoma nemerljivo majhna. Merska meja je bila pri 5×10^{-14} V/stop.

Supraprevodnost tankih plasti. Meissnerjev efekt je vedel do sklepa, da je notranjost supraprevodnika s tokovi na površju zaščitena zoper zunanja magnetna polja. Ker more biti tokovna gostota zaradi končnega števila prevodniških elektronov le končno velika, mora biti tudi globina, do katere sega zaščitni tok v supraprevodnik, končna. Zato pa mora tudi zunanje magnetno polje segati v supraprevodnik do končne, čeprav zelo majhne globine (približno 10^{-5} cm). Poljska jakost pada v prevodniku eksponentno, nekako tako kot pri kožnem efektu. Če so mere supraprevodnika približno take kot ta globina, potem notranjost ni brez polja. Meissnerjev efekt, značilnost supraprevodnosti, ni več popoln. Vprašanje, kako tanke smejo biti plasti, da še lahko postanejo supraprevodne, je raziskoval Shalnikov na svincu, Appleyard in sodelavci pa na živem srebru. Plasti svinca z debelino 50 A in do 250 A debele plasti živega srebra so postale še supraprevodne. Toda že pri znatno debelejših plasteh (približno 2 000 do 4 000 A) postane preskočna poljska jakost odvisna od debeline plasti in narašča, če se debelina manjša. Hilsch in sodelavci so splošno preiskovali električno vedenje tankih plasti pri nizkih temperaturah. Našli so n. pr., da postane 500 A debela naparjena plast bizmuta, ki je pri 8^0 K kondenzirala, pri 6^0 K supraprevodna, čeprav sicer pri bizmutu še niso mogli ugotoviti supraprevodnosti. Toda ko so plast segreli na 14^0 K, niso mogli več ponovno doseči supraprevodnost.

Teorija supraprevodnosti. Fenomenološka teorija opisuje zunanje pojave pri supraprevodnosti. Meissnerjev efekt je pokazal, da ne moremo vseh Maxwellovih enačb brez nadaljnjega uporabiti pri supraprevodnikih. Za normalne prevodnike velja Ohmov zakon, po katerem je jakost električnega polja premo sorazmerna tokovni gostoti. $\mathbf{E} = \sigma^{-1}\mathbf{j}$, če je σ^{-1} specifična upornost. Nekaj takega kot Ohmov zakon pri elektriki velja za gibajoče se telo v močni viskozni tekočini: sila je sorazmerna hitrosti. Kadar ni trenja, pa vemo, da je sila sorazmerna pospešku. Ker se supraprevodnostni elektroni gibljejo brez trenja, smemo domnevati, da tu velja $\mathbf{E} = \lambda\partial\mathbf{j}/\partial t$, kjer je λ neki novi koeficient. Za Hg je približno $\lambda = 10^{-21}\Omega$ms. Da bi upošteval še Meissnerjev efekt, je London postuliral še drugo enačbo λ rot $\mathbf{j}_s = \mathbf{B}$. Obe ti dve enačbi sta znani kot *Londonovi enačbi.* Iz prve

vidimo, da pri časovno stalni gostoti supratoka v supraprevodniku ni električnega polja. Šele če v supraprevodniku teče izmenični tok, nastopi končna jakost električnega polja. V splošnem primeru pa je treba še upoštevati, da niso vsi elektroni v supraprevodnem stanju, temveč eksistirajo tudi še elektroni v normalno prevodnem stanju, tako da je tokovna gostota sestavljena iz dveh deležev, normalnega in supraprevodnega: $\mathbf{j} = \mathbf{j}_n + \mathbf{j}_s$. Za prvega velja Ohmov zakon $\mathbf{j}_n = \sigma \mathbf{E}$, za drugega pa Londonovi enačbi. Sledi torej, da je $\mathbf{j}_n = \sigma\lambda\partial\mathbf{j}_s/\partial t$. Če predpostavimo, da se $\mathbf{j}_s$ periodično spreminja (s krožno frekvenco ω), takoj dobimo razmerje amplitud obeh deležev: $\mathbf{j}_n/\mathbf{j}_s = \omega\sigma\lambda$. Za kratke Hertzove valove s krožno frekvenco $\omega = 10^{10}\,\mathrm{sec}^{-1}$ je pri živem srebru $\omega\sigma\lambda = 10^{-2}$, za infrardeče žarke s krožno frekvenco $\omega = 10^{14}\,\mathrm{sec}^{-1}$ pa $\omega\sigma\lambda = 10^{2}$. Pri vidni svetlobi pa je $\omega\sigma\lambda$ še nad 10 krat večji. To pomeni, da pri optičnih pojavih močno prevladuje omski tok; supraprevodnik se mora torej za te frekvence vesti kot normalni prevodnik. V tem, da se supraprevodnik za oko ne razlikuje od normalnega prevodnika, je prepričljiv dokaz za eksistenco omskega toka (Laue). Tudi na krivulji za skok v supraprevodnost pri tantalu, ki jo je določil Mac Lennan s sodelavci za izmenični tok 10^7 Hz, se pozna skupno učinkovanje obeh tokov, omskega in supratoka, ker odstopa od krivulje za istosmerni tok.

Laue je to fenomenološko teorijo izdelal do podrobnosti. Zadnje čase diskutirajo, ali Londonove enačbe v dosedanji obliki zadostujejo za opis vseh pojavov in ali ni morebiti treba smatrati konstanto supraprevodnosti kot odvisno od tokovne gostote, tako da nastanejo potem komplicirane nelinearne enačbe.

Precej odprta je še vedno atomistična razlaga supraprevodnosti v okviru elektronske teorije kovin. Heisenberg opira svojo teorijo na predpostavko, da povzroči prehod v stanje supraprevodnosti vzajemno učinkovanje med elektroni po Coulombovem zakonu. Fröhlich in neodvisno od njega Bardeen pa smatrata za odločilno vzajemno učinkovanje med elektroni in kristalno mrežo.

Justi meni, da je vprašanje o bistvu supraprevodnosti, ki ga tako pogosto postavljajo razni nespecialisti, v toliko nespretno, ker smatrajo vsakdanje omsko prevajanje kot normalni primer premikanja elektronov v trdnih telesih, ki da se lahko pojasni (»normalno« prevajanje!). Če pa se osvobodimo tega, po zgodovinskem razvoju pogojenega stališča in postavimo vprašanje čisto stvarno, moramo izhajati iz kvantne teorije, v kateri je gibanje elektronov po tirih brez trenja samo po sebi umljivo. Če pa hočemo priti do omskega prevajanja, je treba vpeljati v kvantno teorijo njej čisto tuji pojem proste poti. Ne smemo pozabiti, da v elektronski teoriji absolutnega specifičnega upora ni mogoče izračunati niti za najenostavnejše kovine. V osnovi so torej za razumevanje supraprevodnosti prav take težave kot za omsko prevajanje, če ne še celo načelno manjše.

NOVICE

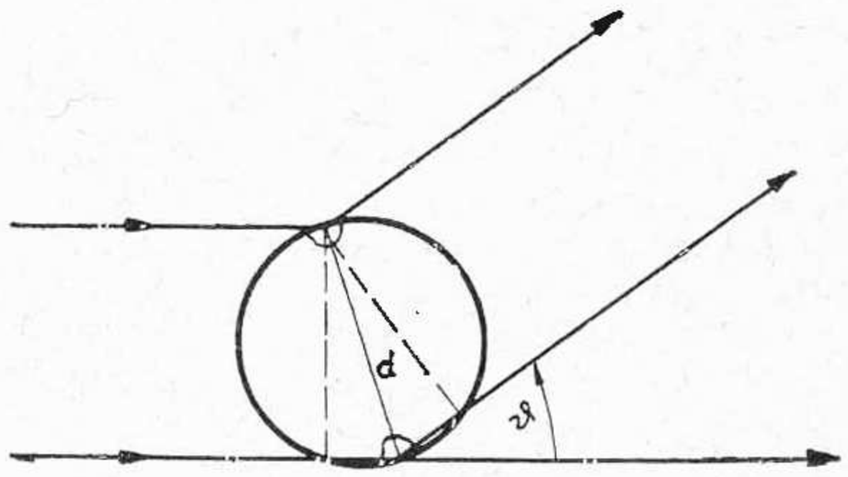
Velikost in oblika velemolekul, določena z rentgenskim sipanjem pod majhnimi koti

Povzeto po predavanju, ki ga je imel dr. O. Kratky iz Graza 10. junija 1953 na Fizikalnem institutu J. Stefana v Ljubljani.

Elektromagnetno valovanje, ki zadene na delce, se ob njem uklanja. Iz delca izhaja *sekundarno valovanje*. Pravimo tudi, da delec *siplje* (razpršuje) svetlobo. Na zaslonu ali na fotografski plošči dobimo *uklonsko sliko*. Če je delcev več in so pravilno razporejeni, sekundarna valovanja od posameznih delcev interferirajo med seboj, na uklonski sliki se pa pojavijo novi maksimi, katerih jakost je sorazmerna kvadratu števila delcev. Kot primera se spomnimo uklonske mreže in rentgenskih interferenc na kristalih! Če so enaki delci brez reda razmetani, je uklonska slika prav taka, kakršno bi dal en sam delec, jakost uklonjenega valovanja pa je sorazmerna številu delcev.

Delci, na katerih se svetloba uklanja, so lahko prav različni: atomi, molekule, koloidni delci, vodne kapljice, dim, prah, ledni kristali itd. Vsak dan vidimo take uklonske pojave: modrina neba, soj okoli žarnice v megli, lunin dvor, dvojna sonca in sončni križ. Vsak od teh pojavov nam lahko nekaj pove o delcih, ki uklanjajo svetlobo. Zato pa moramo vedeti, kako je uklonska slika odvisna od velikosti, oblike in sestava delcev ter od valovne dolžine. Izračunati je treba, kakšna je kotna porazdelitev jakosti razsute svetlobe pri danih pogojih.

Iz vsakega kosa osvetljenega delca izhaja sekundarno valovanje. Ako je tak kos dovolj majhen, siplje kot dipol. Če je vpadajoča svetloba nepolarizirana, je jakost svetlobe, ki je razsuta pod kotom ϑ proti vpadajočemu žarku, sorazmerna $(1 + \cos^2 \vartheta)$. Sekundarna valovanja, ki izhajajo iz posameznih kosov, pa so koherentna in interferirajo med seboj. Njihove fazne razlike so odvisne od velikosti delca, od valovne dolžine in od kota ϑ. Največja razlika poti je $2d \,.\, \sin(\vartheta/2)$, kjer je d premer delca. Dokler je ta razlika še majhna proti valovni dolžini svetlobe, je oslabitev zaradi interference le neznatna; z naraščajočim kotom ϑ pa jakost sipane svetlobe hitro pada. Ako je premer krogle



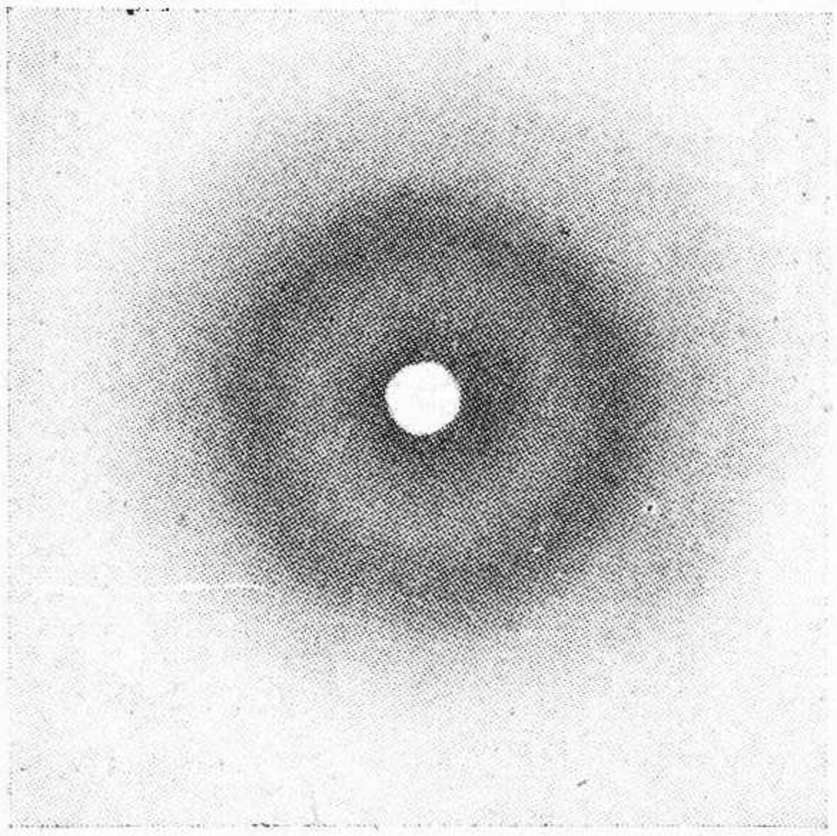
Sl. 1. Razlika poti med dvema sekundarnima valovanjema

tisočkrat večji kot valovna dolžina, pade jakost sipane svetlobe na polovico že pri kotu 6′. To velja tako za navadno svetlobo kot za rentgensko.

Koloidni delci imajo velikosti od nekaj 10 A do nekaj 1000 A, so torej precej manjši kot valovne dolžine vidne svetlobe. Zato dá sipanje vidne svetlobe njihovo velikost, le malo pa pove o njihovi notranji zgradbi, ker je ta predrobna. Rentgenska svetloba ima nasprotno tako majhno valovno dolžino, da pri kotih od 15^0 do 165^0, kjer običajno merimo rentgenske interference, ne pove ničesar o zgradbi koloidnega delca, temveč le o njegovih gradnikih — atomih in atomskih skupinah. Za preiskavo zgradbe koloidnih delcev bi bili primerni mehki rentgenski žarki

ali kratki ultravijoličasti. Žal se prav ti žarki absorbirajo v snoveh tako močno, da jih za preiskavo strukture snovi ne moremo uporabljati. Zadovoljiti se moramo z rentgensko svetlobo okoli 1 A in meriti sipanje pri zelo majhnih kotih v obsegu od nekaj minut do nekaj stopinj. V zadnjih dveh desetletjih so to področje uporabe rentgenskih žarkov že tako razvili, da tvori rentgensko sipanje pod majhnimi koti samostojno mersko metodo, ki zahteva posebno merilno tehniko.

Kratky[1] je uporabil rentgensko cev z bakreno anodo. Monokromator z ukrivljenim kremenjakovim kristalom je izluščil črto $K\alpha$, ki ima $\lambda = 1{,}54$ A. Kristal služi obenem tudi kot konkavno zrcalo, ki daje močno in ostro sliko izvora, zato da osvetlitve niso predolge. Razdalja med filmom, ki leži v ravnini slike, in preiskovanim vzorcem je 9,15 cm. Primarna slika je široka le 0,32 mm, tako da je lahko meril uklonsko sliko v območju od 0,5 do 5 mm, torej pri kotih od 18′ do 3°. V tem obsegu se je jakost sipane svetlobe zmanjšala preko 1000-krat. Ker na nobenem filmu ni mogoče meriti počrnitve v takem obsegu zaradi ozadja in nasičenosti počrnitve, je za vsak vzorec naredil 8 posnetkov z različnimi časi osvetlitve od 2 minut do 4 ure. S fotometriranjem posnetkov, upoštevavanjem korektur zaradi ozadja in končne dolžine reže je dobil eksperimentalno odvisnost jakosti sipane svetlobe od kota ϑ.



Sl. 2. Rentgenska uklonska slika vode. Močan maksimum se pojavi pri 5°

To krivuljo je nato primerjal s krivuljami, ki jih je izračunal za posamezne vrste delcev. Ako so delci okrogli z Gaussovo porazdelitvijo mase okoli središča, pada jakost sipane svetlobe s kotom ϑ prav tako po Gaussovi funkciji.[2] Za majhen ϑ namreč velja:

$$J = J_0 \exp[-(4\pi^2/3\lambda^2) R^2 \vartheta^2] \qquad (1)$$

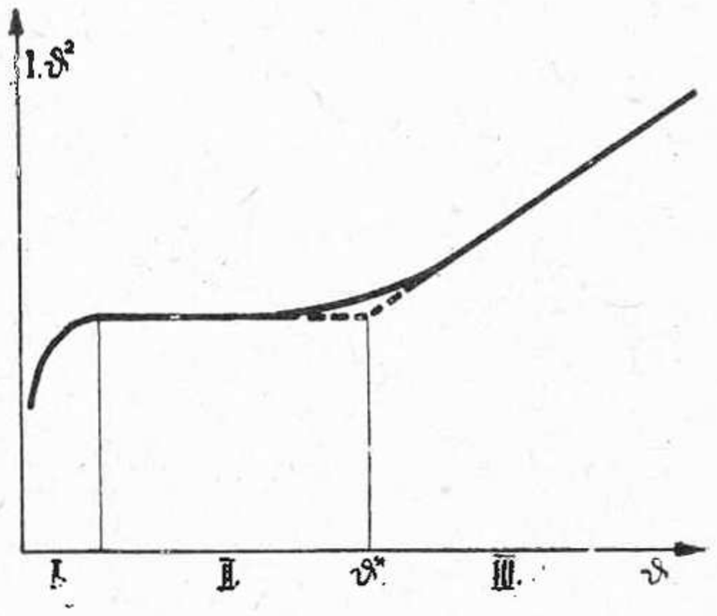
V diagramu, ki kaže $\ln J$ v odvisnosti od ϑ^2, dobimo premico, katere strmina pove povprečni radij R delca. Presečišče premice z ordinatno osjo daje jakost sipanja v mejnem primeru $\vartheta = 0$, torej jakost razsute svetlobe v smeri primarnega žarka. V tej smeri so vse fazne razlike enake nič in je zato jakost sorazmerna kvadratu mase delca. Tako dobimo torej za kroglast delec njegov povprečni radij in maso. Če delci niso okrogli, je odvisnost od kota ϑ drugačna; v diagramu za $\ln J$ ne dobimo premice.

Da je izračunal, kako vpliva oblika delca, je Kratky[3] izbral preprost model. Paličaste delce si je mislil sestavljene iz enakih kroglic, ki so nanizane v eno smer. Če si jih je mislil nanizane v dveh smereh, je dobil različne ploščice. Izkazalo se je, da je treba za zelo dolgo palčko prejšnji rezultat za eno kroglo še pomnožiti s faktorjem $1/\vartheta$. Pri večjih kotih pa se pojavijo maksimi, ki dajo periodo takega niza. Meritve sipanja na hemocianinu se ujemajo z modelom palčke, ki je sestavljena iz kroglice. Maksimum, ki nastopi pri Braggovem kotu ϑ ($2 \sin \vartheta/2 = \lambda/2R$), daje radij kroglic. Našli pa so dva maksima in s tem dva različna premera, 260 A in 160 A. Iz tega bi sledilo, da te molekule niso kroglice, temveč elipsoidi, ki se včasih družijo v nize vzdolž daljše osi, drugič pa vzdolž krajše.

Pri ploščicah in drugih tvorbah, ki so močno raztegnjene v dve smeri, je odstopanje še večje; dodatni faktor je $1/\vartheta^2$.

Nitaste velemolekule[4] pa niso raztegnjene v palčke, temveč so zvite v klobčiče, ki imajo Gaussovo porazdelitev mase okoli središča. V smeri vpadajočega žarka in pri zelo majhnih kotih siplje cela velemolekula in sicer tako kot krogla (1). Jakost pada po Gaussovi funkciji. Pri večjih kotih se uveljavi sipanje na njenih manjših kosih, ki so močno ukrivljene nitke, in jakost pada sorazmerno $1/\vartheta^2$. Vsakemu intervalu kota ϑ ustreza namreč neka velikost prostorskih delov, na katere smo razdelili velemolekulo. Manjšim prostorskim delom ustrezajo večji koti. Ako pa nitasto velemolekulo razdelimo na še manjše dele, smemo smatrati zelo kratke dele za ravne palčke in jakost pada zato pri večjih kotih le še z $1/\vartheta$. Pri dovolj velikih kotih pa pride do izraza sipanje na posameznih gradnikih velemolekule, nastopajoči maksimi dajo velikost in zgradbo gradnikov. Meritve na polivinilbromidu se dobro skladajo s teorijo. Iz mejnega kota ϑ^* na prehodu iz odvisnosti $1/\vartheta^2$ v $1/\vartheta$ dobimo za dolžino prosto gibljivih členkov velemolekule vrednost 10,9 A, kar se sklada z drugimi meritvami. Pri velikih kotih nastopata dva maksima, od katerih daje prvi za dolžino gradnika 2,56 A, medtem ko drugi še ni pojasnjen. Pri nitrocelulozi je mersko dosegljiv le predel $1/\vartheta$, tako da je dolžina prostega členka gotovo večja kot 150 A, kar se ujema z meritvami strujnega dvojnega loma.

M. Čopič



Sl. 3. Pri nitastih molekulah so štiri območja odvisnosti jakosti od kota ϑ: I. klobčič, $J \sim \exp(-k\vartheta^2)$, II. močno ukrivljeni deli nitke, $J \sim 1/\vartheta^2$, III. ravne palčke, $J \sim 1/\vartheta$, IV. posamezni gradniki dajo maksime (ni vrisano na sliki). Zato da je prehod iz predela II. in III. bolj izrazit, je na ordinato nanešena vrednost $J \cdot \vartheta^2$

Literatura

[1] H. Janeschitz-Kriegel, O. Kratky, G. Porod: Röntgen-Kleinwinkelmessungen an porösen Hydratzellulosefäden. Z. Elektrochem. *56*, 146 (1952).

[2] A. Guinier: Détermination de la taille des particules submicroscopiques par les rayons X. J. Chim. Phys. *40*, 133 (1943).

[3] O. Kratky: Die Abhängigkeit der Röntgen-Kleinwinkelstreuung von der Grösse u. Form der kolloiden Teilchen in verdünnten Systemen. Monatsch. Chem. *76*, 352 (1947).

[4] O. Kratky, G. Porod: Röntgenuntersuchung gelöster Fadenmoleküle. Rec. Trav. Chim. Pays-Bas *68*, 1106 (1949).

Današnje stanje dokazov v prid splošni teoriji relativnosti

Znano je, da moremo resničnost Einsteinove splošne relativnostne teorije overoviti na treh posledicah, ki jih terja ta nauk, in sicer: 1. na sekularnem gibanju Merkurjevega perihela; 2. na premiku spektralnih črt Sonca in nekaterih drugih zvezd proti rdečemu delu spektra, in 3. na odklonu zvezdnega žarka, ki gre skozi težnostno območje Sonca.

Ali se je zvezdoslovcem posrečilo odkriti te tri učinke in, če so jih našli, ali se njihova velikost ujema z napovedjo? Oglejmo si na kratko po vrsti, kako je s temi dokazi danes, ko je Einsteinov nauk star že skoraj 40 let!

Einstein trdi, da se mora perihel Merkurja premakniti v enem stoletju za 42,9″ v direktni smeri. Že v prejšnjem stoletju je iz klasične teorije gibanj velikih planetov Newcomb izluščil znesek $41{,}2'' \pm 2{,}1''$, ki se ni dal razložiti na osnovi Newtonovega zakona splošne težnosti. Merkurjevo gibanje je ponovno prerešetal G. M. Clemence iz Washingtona za obdobje 1765—1937 ter dospel do enakega zaključka. Glede prvega dokaza smemo tedaj reči, da je soglasje med novim naukom o težnosti in ugotovljenim stanjem. Za ostala dva dokaza pa je zadeva drugačna.

Po splošni teoriji relativnosti utrpi vsak foton, ki zapusti Sonce, izgubo na svoji energiji. Frekvenca žarka se zato zmanjša, kar ima za posledico premik spektralne črte proti rdeči strani spektra. Premik se tiče vseh sončnih črt ter je enak $\Delta\lambda = -\Delta\Phi . \lambda/c^2$, kjer je $\Delta\Phi$ razlika gravitacijskih potencialov na površini Sonca in pri opazovalcu. Če vstavimo v enačbo vrednosti, dobimo: $\Delta\lambda = 2{,}12 . 10^{-6}\lambda$. Dosedanja opazovanja so pokazala, da takega konstantnega premika, ki bi ga morali ugotoviti povsod na sončni plošči, ni mogoče izslediti. Sicer so dognali neki premik, ampak ta je v središču sončne plošče manjši od izračunanega ter se veča, če gremo v kakršnikoli smeri od središča proti sončnemu robu. Prav blizu roba pa premik hitro narašča in doseže na robu dvakratno od teorije napovedano vrednost. Kaj je vzrok tej neskladnosti? Odgovor ni lahek ter se more opirati samo na domneve. Mogoče je terjani premik zabrisan ali spačen po drugih premikih, izvirajočih iz radialnih gibanj površinskih plasti Sonca in iz pritiskov, ki vladajo tam. To so pa stvari, o katerih še nimamo nobene prave podobe. Najhujše je, da je na robu ugotovljeni premik tako velik. Kajti ravno tu, na robu, to je v najvišjih plasteh Sonca, so pritiski in radialni tokovi neznatni in napovedani premik bi moral imeti tako vrednost, kakršno terja teorija.

Za kvantitativni dokaz relativističnega premika spektralnih črt so Sirijev spremljevalec in drugi beli pritlikavci, torej zvezde z izjemno velikimi gostotami, neuporabni, ker ne poznamo točno njihovih gostot in polmerov in ker premikov njihovih črt ne moremo izmeriti s potrebno natančnostjo.

Za odklon L zvezdnega žarka, ki gre mimo Sonca v razdalji d od njegovega središča, daje relativnostna teorija vrednost $L = 4\varkappa M/c^2 d$, kjer je M masa Sonca. Če je d enak sončnemu polmeru, je odklon največji in meri 1,75″, sicer pa upada obratno sorazmerno z razdaljo. Težave pri merjenju odklona so praktične in teoretične narave. Praktične težave povzroča dejstvo, da so priložnosti za ugotovitev odklona le ob popolnih sončnih mrkih, ki trajajo komaj nekaj sekund. Mimo tega moramo fotografirati sončno okolico skozi velike daljnoglede v neprikladnih razmerah in pri tem doseči kar največjo natančnost. Težave teoretične narave zadevajo izmeritve fotografskih plošč ter upoštevanje vseh mogočih vplivov na lego zvezdnih slik, ki so precej zapletenega značaja. Dosedanje meritve potrjujejo napovedani odklon, dado pa povprečno za 25 % večji rezultat, kakor ga predpisuje teorija.

Pripomniti moramo, da so premiki spektralnih črt in odkloni zvezd v dosegu natančnosti sodobnih meritev in ne na meji dosega, kakor se navadno trdi. Preglavice dela ugotovitev, da se oba učinka po velikosti ne ujemata s teoretičnim in da se prvi učinek ne spreminja tako, kakor terja teorija. K zmešnjavam je prispevala tudi sugestivna moč Einsteinovega nauka, ko so — posebno v začetku — znanstveniki bili prepričani,

da morajo opazovanja, če jih izpeljemo smotrno, dokazati pravilnost splošne relativnostne teorije. Jasno je, da navedene neskladnosti ne smemo podtakniti kar teoriji sami; verjetnost je velika, da gredo divergence med njo in opazovanjem na račun učinkov in prikazni, ki jih premalo ali celo nič ne poznamo. Teoretike in praktike čaka tedaj še veliko dela, preden bodo vsa ta vprašanja razčiščena.

S. Breskvar

E. Finlay-Freundlich: Der heutige Stand der empirischen Bestätigung der allgemeinen Relativitätstheorie. Physikalische Blätter, 1953, str. 14.

Določitev vezalne energije devterona

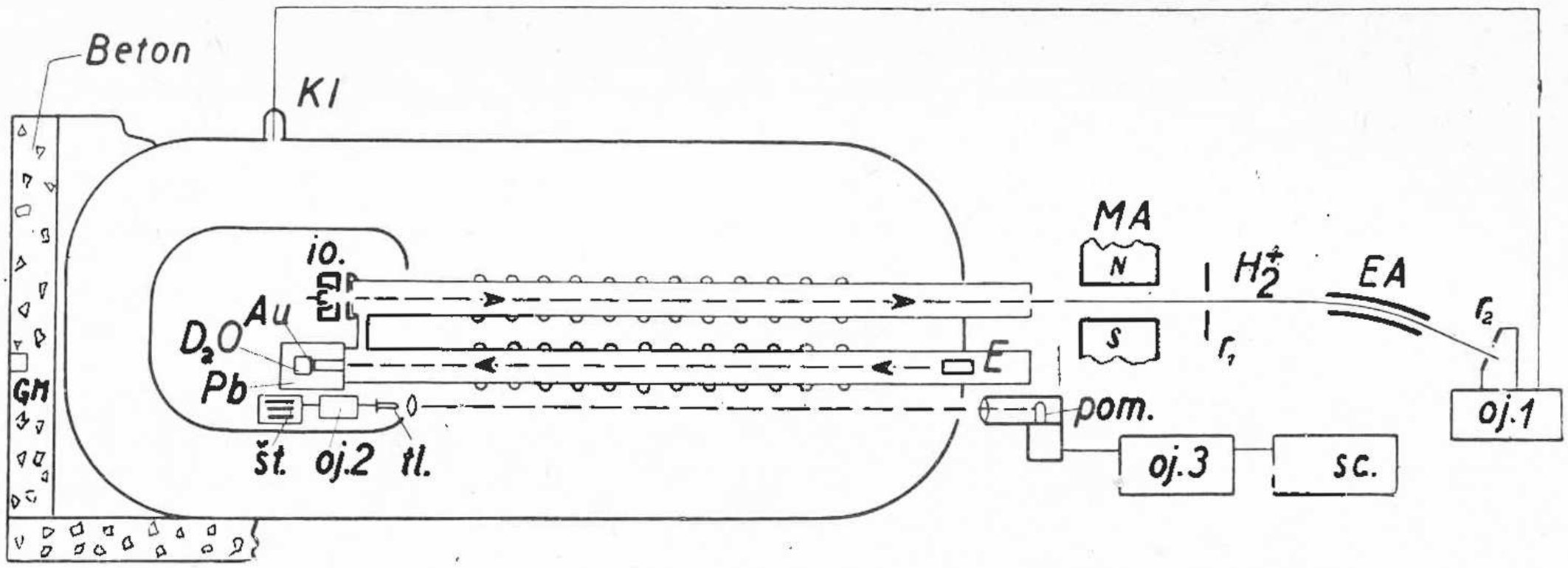
Devteron lahko razpade v proton in nevtron, če absorbira foton z zadostno energijo: $d + \gamma \longrightarrow p + n$. Energija fotona mora biti večja od neke najmanjše energije, ki meri v tem primeru 2,227 MeV in ki jo imenujemo *reakcijski prag*. Prag ni natančno enak vezalni energiji devterona, ampak je za 0,0013 MeV večji. To lahko razumemo, ako upoštevamo, da se pri reakciji ohranja gibalna količina. Foton ima gibalno količino $h\nu/c$, katero po reakciji prevzame sistem $p + n$. Hitrost težišča tega sistema dobimo torej iz enačbe $h\nu/c = mv$, kjer je m skupna masa obeh delcev. Njuna skupna kinetična energija je najmanjša, če po reakciji ne zletita vsaksebi, ampak se gibljeta oba z enako hitrostjo. To bi dobili lahko le s fotonom, čigar energija je ravno enaka pragu, torej $h\nu = 2{,}227$ MeV. Za omenjeno minimalno energijo sledi iz prejšnjega

$$\tfrac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2\,m}\left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 = \frac{(2{,}227\ \mathrm{MeV})^2}{2\,.\,1878\ \mathrm{MeV}} = 0{,}0013\ \mathrm{MeV}$$

To energijo mora poleg vezalne energije dovesti foton.

Zadnjo in najbolj natančno meritev tega praga sta izvedla l. 1950 Mobley in Laubenstein[1] z Van de Graaffovim generatorjem. Generator je dajal rentgenske žarke z maksimalno energijo 2,225 do 2,245 MeV, s katerimi sta obsevala posodo s težko vodo in štela nastale nevtrone s proporcionalnimi števci, poljnenimi z BF_3. Merila sta število nevtronov na minuto v odvisnosti od energije elektronov. Prag reakcije sta določila z ekstrapolacijo na tisto vrednost energije, pri kateri ravno ni več nevtronov.

Napravo, s katero sta izvedla meritve, kaže slika. Generator, ki je zaprt v tanku pod pritiskom, ima dve pospeševalni cevi. Zgornja skrbi za meritev napetosti in za stabilizacijo. V tej cevi se pospešujejo pozitivni vodikovi ioni, ki jih potem magnetni analizator (MA) razdeli v ločena curka protonov in ionov H_2^+. Curek ionov H_2^+ gre najprej skozi režo (r_1), nato pa skozi elektrostatični analizator (EA), čigar napetost je s potenciometrom zelo natančno stabilizirana. Polji obeh analizatorjev sta vzporedni, tako da odklanjata v pravokotnih smereh. Za električnim analizatorjem mora curek ionov H_2^+ še skozi izhodno režo (r_2) med dvema izoliranima kovinskima ploščama. Ti plošči prestrezata bočne dele curka in dobivata tako pozitiven naboj. Kadar gre curek ravno po sredi, sta naboja enaka in zato med ploščama ni napetosti. Ojačevalec (*oj.* 3), na čigar vhod sta plošči vezani, ne daje tedaj na izhodu nobene napetosti. Če pa n. pr. napetost generatorja zraste, se curek manj ukrivi in zgornja plošča dobi večji naboj. Med ploščama nastopi napetost, ki jo ojačevalec



Shema generatorja in ostalih aparatov, ki so služili za meritev vezalne energije devterona: *io.* — ionski izvor, *MA* — magnetni analizator, *EA* — elektrostatični analizator, r_1 — reža, r_2 — izstopna reža, *št* — števci, *tl* — tlivka, *pom.* — pomnoževalka, *oj. 1, 2, 3* — ojačevalci, *sc* — števna naprava, *KI* — koronska igla, *GM* — geigerski števec. E — izvor elektronov. Magnetni analizator razcepi curek v curek ionov H_2^+ in curek protonov. Samo prvi je prikazan na sliki, medtem ko je drugi curek za sliko

ojači. Ojačeno negativno napetost dobi koronska igla (*KI*), ki zato odvzema krogli ojačen koronski tok tako dolgo, dokler ne pade napetost generatorja zopet na prvotno vrednost.

Generatorjeva napetost je sorazmerna napetosti analizatorja. Da bomo vedeli, kakšna je napetost generatorja pri raznih napetostih analizatorja, je potrebna ena sama umeritev. Za ta namen služi prag reakcije $Li^7 + p \longrightarrow Be^7 + n$, ki je dobro poznan in enak 1,882 MeV. Curek protonov, ki smo ga z magnetnim analizatorjem odcepili od curka H_2^+, prestrežemo s ploščico litija; s spreminjanjem napetosti pa ugotovimo, kje je prag omenjene reakcije. Spodnja cev generatorja pospešuje elektrone v nasprotno smer. Elektroni padajo na tarčo iz zlata, kjer nastajajo rentgenski žarki. Tarča, težka voda in števci so nameščeni tesno skupaj v krogli generatorja. Svinčen oklep, ki obdaja tarčo in težko vodo, ščiti števce in ostali material pred rentgenskimi žarki. Na izhod števcev je vezan ojačevalec (*oj.* 2), ki je tudi v krogli in ima na izhodu privezano tlivko (*tl*). Tlivka posveti pri vsakem sunku števca. Sistem leč projicira njeno svetlobo v elektronsko pomnoževalko (*pom.*), ki je izven tanka. Pomnoževalka je vezana preko ojačevalnika z diskriminatorjem na števno napravo. Tako so z optičnim prenosom zvezani števci v krogli na števno napravo zunaj visokih napetosti.

Izven generatorja za betonsko steno je geigerski števec v višini curka elektronov. Ta števec, ki meri rentgenske žarke najvišjih energij, rabimo kot monitor zaradi morebitnega kolebanja intenzitete rentgenskih žarkov. Izmerjeno število nevtronov, merjeno z nevtronskimi števci, je treba vedno reducirati na isto intenziteto.

Poskusi pokažejo, da je kvadratni koren iz nevtronskega toka Φ (t. j. iz števila na sekundo nastalih nevtronov) sorazmeren razliki med energijo elektronov E in pragom E_1. Rezultate meritev vnesemo v diagram. Na ordinatno os nanašamo $\sqrt{\Phi}$, na abscisno os pa $E - E_1$. Presečišče dobljene premice z abscisno osjo pokaže, kolikšen je prag. Dobili so $E_1 = 2{,}227 \pm 0{,}003$ MeV in za vezalno energijo devterona potem $E_0 = 2{,}226 \pm 0{,}003$ MeV.

Ta vrednost ni važna samo za teorijo devterona samega, ampak tudi zato, ker jo potrebujemo za določitev mase nevtrona. Masi devterona je treba dodati maso vezalne energije, da dobimo vsoto mas protona in nevtrona:

$$m_D + E_0/c^2 = m_p + m_n$$

Ker ustreza masni enoti ($= 1/16\ 0^{16}$) energija 931 MeV, je $E_0/c^2 = 0{,}002390$ ME. Atomski masi devterona in protona sta dobro znani.[2] Maso nevtrona pa dobimo iz sledečega računa:

masa devterona	2,014186 ME
+ masa vezalne energije devterona . . .	+ 0,002390 ME
− masa protona	− 1,007593 ME
masa nevtrona	1,008983 ME

R. Korbar

[1] R. C. Mobley, R. A. Laubenstein: Photo-Neutron Thresholds of Beryllium and Deuterium, Phys. Rev. *80*, 309 (1950).

[2] J. W. M. DuMond, R. Cohen: Least-Squares Adjustment of the Atomic Constants 1952. Rev. Mod. Phys.*25*, 691 (1953).

Temperatura 0,0014° K

Pred skoraj 50 leti se je Kamerlingh-Onnesu posrečilo, da je utekočinil helij, ki ima med vsemi snovmi najnižje vrelišče: 4,216° K (pri 760 tor). Za dve do tri stopinje niže moremo priti še s hitrim črpanjem helijeve pare, ker se vrelišče helija z znižanjem pritiska zniža. Tako je Keesom dosegel 0,7° K. Dosti niže pa na ta način ni mogoče priti, ker je potem parni tlak helija tako nizek, da je izhlapevanje prepočasno.

Debye in Giauque sta leta 1927 prišla na misel, da bi bilo možno doseči še nižje temperature na čisto drug način, in sicer z adiabatnim razmagnetenjem paramagnetne snovi. Da bomo to laže razumeli, primerjajmo lastnosti paramagnetne snovi z lastnostmi plina. — Pri kakršnikoli spremembi stanja je sprememba notranje energije enaka vsoti dovedene toplote in na telesu opravljenega dela: $dU = dQ + dA$. Pri stiskanju plina je $dA = -p\,dV$. Pri magnetenju pa opravimo delo $dA = VHdB$. Pri obravnavanju magnetnih sprememb imata H in VB tak pomen kot količini $-p$ in V pri prostorninskih spremembah. Magnetne spremembe opravimo navadno pri konstantnem pristisku. Prostorninske spremembe so tako majhne, da bomo smeli prispevek $-pdV$ k delu zanemariti.

Stisnjeni plin lahko opravlja delo, če se razteza. Če ga na zunaj toplotno izoliramo ($dQ = 0$, adiabatni proces), gre opravljeno delo na račun notranje energije in zaradi tega se plin ohladi. Pri obrnljivem adiabatnem raztezanju je delo največje. Tedaj je $dU = -pdV$. Podobno mora paramagnetna snov opraviti delo tudi pri razmagnetenju. Če je razmagnetenje adiabatno in obrnljivo, je $dU = VHdB$. Videli bomo, da se tudi sedaj snov ohladi.*

* Tu nastane vprašanje, kam gre delo pri adiabatnem razmagnetenju. Če smo snov namagnetili z magnetnim poljem tuljave, se ob izklopitvi inducira napetostni sunek, tako da dobimo vloženo energijo končno povrnjeno kot Joulovo toploto. Če je v tuljavi paramagnetna snov, je sunek za spoznanje večji in tudi Joulova toplota postane večja.

Ohladitev moremo izračunati, če poznamo entropijo in sicer pri plinu kot funkcijo temperature in pritiska $S = S(T, p)$, pri paramagnetni snovi pa kot funkcijo temperature in poljske jakosti $S = S(T, H)$. Diferenciala entropije sta v obeh primerih

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T dp \qquad \text{ter} \qquad dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_H dT + \left(\frac{\partial S}{\partial H}\right)_T dH.$$

To pa lahko zapišemo še drugače, in sicer s količinami, ki so meritvam laže dostopne:

$$dS = \frac{mc_p}{T} dT - \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dp \qquad \text{ter} \qquad dS = \frac{mc_H}{T} dT + V\left(\frac{\partial B}{\partial T}\right)_H \quad (1)^{**}$$

Tu pomeni c_p specifično toploto pri stalnem pritisku, c_H pa specifično toploto pri stalni poljski jakosti.

Za idealni plin velja $pV = nRT$, torej $(\partial V/\partial T)_p = nR/p$. Pri tem je n število kilomolov, torej $n = m/M$ (m = masa, M = molekulska masa). Drugačno zvezo pa imamo pri paramagnetnih snoveh, kjer moramo upoštevati, da je susceptibilnost večinoma obratno sorazmerna temperaturi: $\mu - 1 = C/T$ *(Curiejev zakon)*; zato je $B = (1 + C/T)\,\mu_0 H$ ter $(\partial B/\partial T) = -(C/T^2)\,\mu_0 H$. Pri obrnljivi adiabatni spremembi je entropija konstantna ($dS = 0$). Iz zgornjih enačb dobimo, kakšna je pri taki spremembi zveza med spremembo temperature in spremembo pritiska ali poljske jakosti:

$$\frac{dT}{T} = \frac{R}{Mc_p} \cdot \frac{dp}{p} = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \cdot \frac{dp}{p} \quad \text{ter} \quad dT = \frac{VC}{mc_H T}\,\mu_0 H dH = \frac{\mu - 1}{\varrho c_H}\,\mu_0 H dH \quad (2)$$

Kot primer izračunajmo, kakšno znižanje temperature lahko dobimo z razmagnetenjem kromovega galuna $[KCr(SO_4)_2 . 12H_2O]$, ki ima pri temperaturi $T = 293^0\,K$ *perm*eabilnost $\mu = 1{,}00029$ ter gostoto $\varrho = 1{,}83$ g/cm³. Domnevati smemo, da se c_H in c_p skoraj ne razlikujeta; zato bomo uporabili podatek za slednjega: $c_p = 1350\,J$/kgst. Če razmagnetimo od $H = 10^6$ A/m do $H = 0$, je znižanje temperature:

$$-\Delta T = \frac{\mu - 1}{c_p \varrho} . \tfrac{1}{2}\mu_0 H^2 = 8 . 10^{-5} \text{ stopinj},$$

kar je tako malo, da ta efekt pri navadnih temperaturah sploh ne pride v poštev. Toda pri nizkih temperaturah, n. pr. blizu $T = 1^0$ K, je efekt veliko močnejši, ker je susceptibilnost precej večja, specifična toplota pa mnogo manjša. Tedaj lahko dobimo znižanje temperature velikostnega reda cele stopinje. Pri tako nizki temperaturi pa je znižanje za 1^0 K tudi vse, kar hočemo doseči.

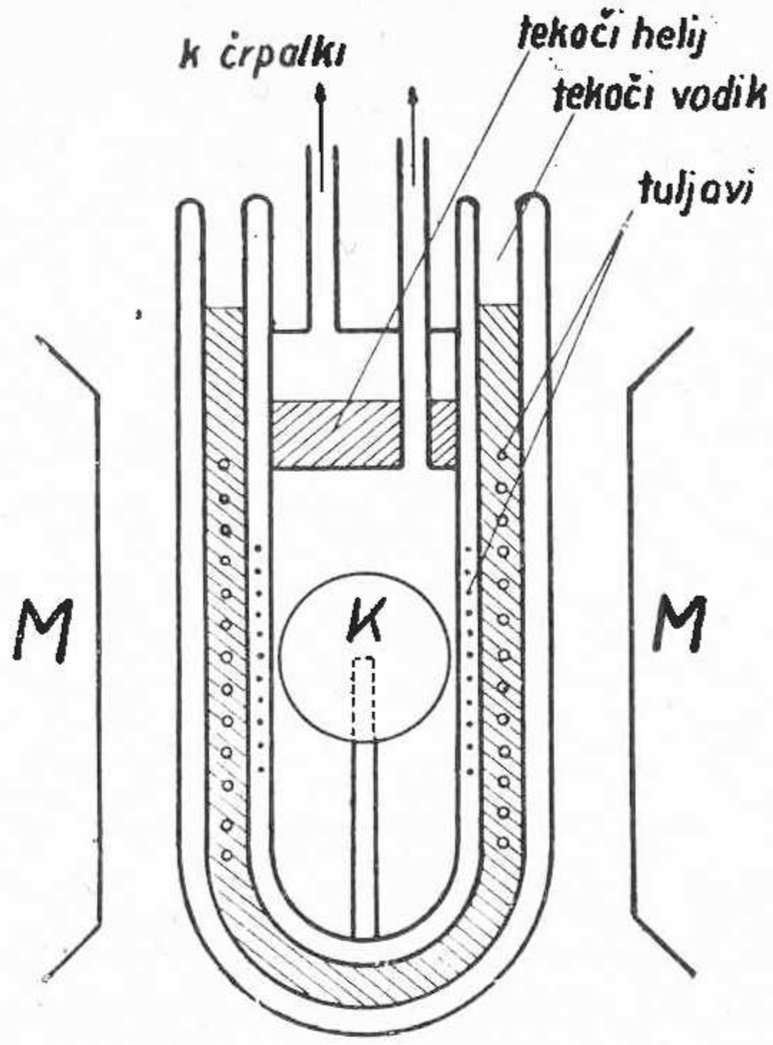
Prve poskuse sta napravila de Haas v Leidenu in von Simon v Oxfordu v letih 1933 in 1934 in prišla do temperature $0{,}03^0$ K. Od tedaj so se mnogo ukvarjali z adiabatnim razmagnetenjem. Leta 1950 so de Klerk, Steenland in Gorter dosegli že temperaturo 0,0014 K, kar je menda

---

** Odvod entropije po pritisku dobimo najhitreje iz Gibbsove funkcije (proste entalpije): $G = U + pV - TS$. Njen diferencial je $dG = dU + pdV + Vdp - TdS - SdT = V\,dp - S\,dT$, ker je $dU = T\,dS - p\,dV$. Od tod razberemo, da sta V *in* $-S$ prva odvoda funkcije G po p in T. Mešani drugi odvod $(\partial^2 G/\partial T \partial p)$ lahko dobimo na dva načina: $(\partial V/\partial T)_p = -(\partial S/\partial p)_T$, s čimer smo dobili iskani izraz za odvod entropije. Če vpeljemo namesto G analogno funkcijo $G^* = U - VHB - TS$, dobimo s prav takim računom, da je pri magnetnih spremembah $(\partial S/\partial H)_T = V(\partial B/\partial T)_H$.

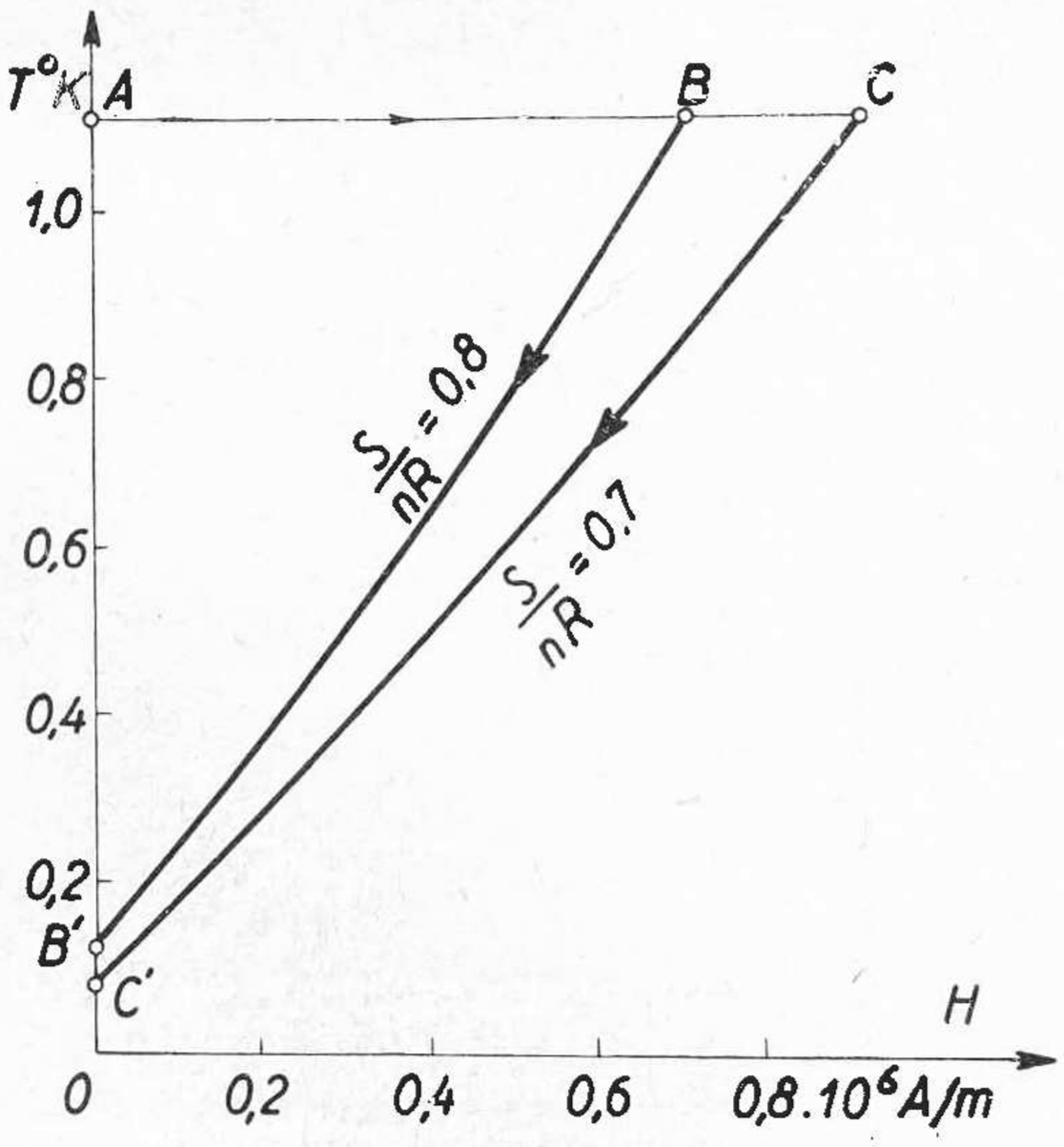
najnižja do danes dosežena in izmerjena temperatura. Pri tem so uporabili kot paramagnetno snov kromov galun, pomešan z nekoliko aluminijevega galuna. Začetna temperatura je bila 1,085^0 K, začetna magnetna poljska jakost pa 1,740 . 10^6 A/m (B = = 2,187 Vs/m^2).

Priprava za razmagnetenje je narisana na sliki 1. Paramagnetna snov K je pritrjena v dvojni Dewarski posodi, ki je postavljena med poloma magneta. Tekoči helij ohladijo s črpanjem pare na približno 1^0 K. V prostoru med kristalom in posodo s tekočim helijem so helijeve pare, ki skrbijo za prevajanje toplote. Ko se tudi kristal ohladi na 1^0 K, je treba paro izčrpati, da je kristal toplotno izoliran. Sedaj se šele začne razmagnetenje, ki traja približno 10 minut, tako da je sprememba čim bolj obrnljiva.



Sl. 1. Priprava za adiabatno razmagnetenje. Paramagnetna snov K je pritrjena v dvojni Dewarski posodi, ki je med poloma močnega elektromagneta M. Tuljavici služita za merjenje susceptibilnosti

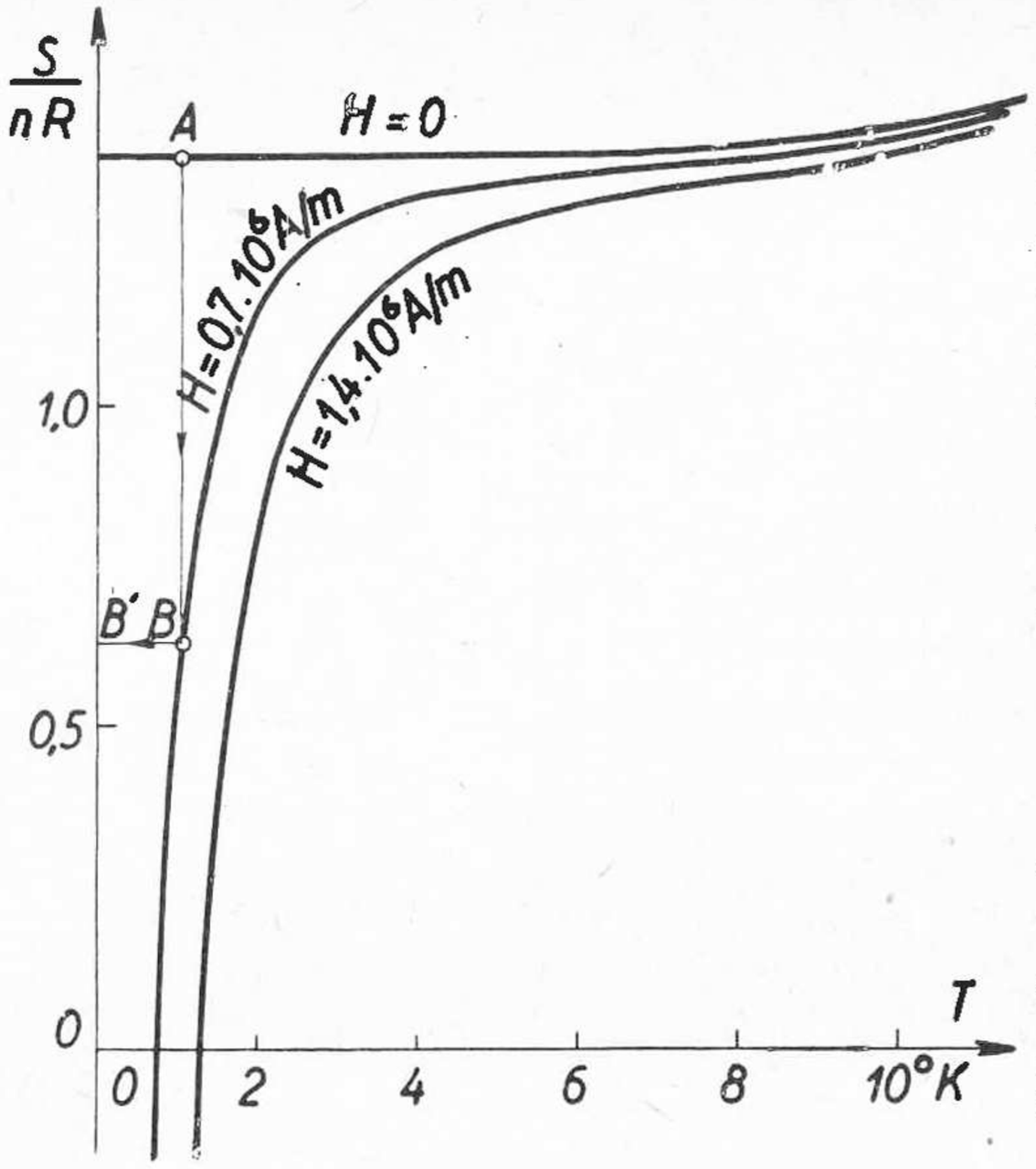
Najtežji del poskusa je meritev temperature, ker za tako nizke temperature odpovedo vsi navadni termometri. Plinski termometer s helijem odpove kmalu pod vreliščem helija. Niže pridemo z merjenjem parnega pritiska helijeve pare, ki ga računamo po Clausius-Clapeyronovi enačbi. Tudi ta način odpove pod 0,7 K. Vse možnosti pa s tem še niso izčrpane, ker vsaka snov, pri kateri je kakšna lastnost odvisna od temperature, služi lahko za termometer, čeprav ga je morda še treba umeriti. Susceptibilnost paramagnetne snovi je že taka lastnost. Tuljavi, ki sta na sliki narisani, služita za merjenje susceptibilnosti. Iz te bi po Curiejevem zakonu lahko računali temperaturo. Toda izkazalo se je, da Curiejev zakon pri tako nizkih temperaturah ne velja več. Zato se je treba zateči k termodinamski definiciji temperature, ki je popolnoma splošna in ni vezana na nobene posebne lastnosti snovi. Če neko snov segrejemo samo z dovajanjem toplote (brez dela), je $dU = dQ = T\,dS$. Pri paramagnetni snovi ni dela, če ni magnetnega polja. Zato velja



Sl. 2. Temperatura kot funkcija magnetne poljske jakosti pri adiabatnem razmagnetenju kromovega galuna. Pri vsaki adiabati je pripisana vrednost kvocienta S/nR, ki je brez dimenzije (n = število kilomolov)

$$T = \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{H=0}$$

Da to izračunamo, moramo dobiti dU in dS pri neki mali spremembi,



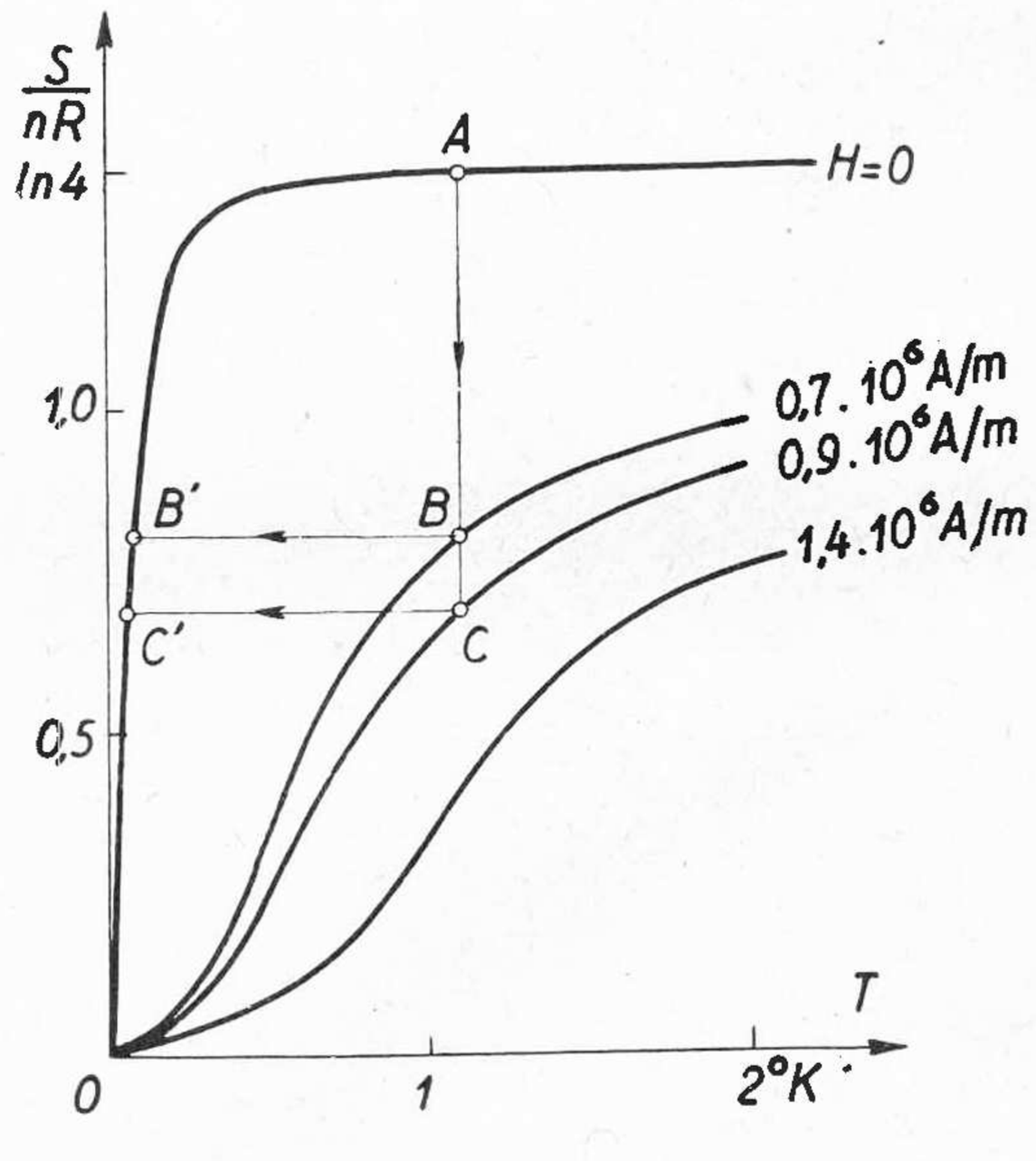
Sl. 3. Entropija kot funkcija temperature in magnetne poljske jakosti. Narisani diagram bi bil pravilen, če bi veljal Curiejev zakon do absolutne ničle. Računano je iz podatkov za kromov galun

pri navadni temperaturi in predpostavljali, da je neodvisna od temperature. Imenovani avtorji so namesto tega izrabili feromagnetne lastnosti, ki jih snov že ima pri tako nizkih temperaturah. Snov so dali v izmenično magnetno polje. kjer se je zaradi histereze segrevala. Na ta način so izvedli veliko število meritev in ugotovili, kako se razne lastnosti uporabljene snovi spreminjajo s temperaturo.

Videli smo, da moremo z adiabatnim razmagnetenjem v enem koraku doseči skoraj 1000-kratno znižanje temperature. Pri logaritemskem vrednotenju temperature je to več kot vse, kar je bilo doseženo z utekočinjenjem helija, preko tekočega zraka in vodika. Seveda nastane vprašanje, ali je možno z adiabatnim razmagnetenjem doseči tudi samo absolutno ničlo. Če bi strogo veljal Curiejev zakon, dobimo iz enačbe (1) naslednji izraz:

n. pr. pri prehodu iz točke C' v B' na sliki 2. Ti točki kažeta stanji, ki sta bili doseženi z razmagnetenjem, začenši z dvema različnima poljskima jakostima (začetni stanji kažeta točki *B* in *C* v sliki 2). Iskana sprememba entropije je ravno tolikšna kot pri prehodu od *B* do *C*, ki jo izračunamo po enačbi (1) ali (3) (gl. niže). Sedaj pa je treba še izmeriti spremembo notranje energije pri prehodu od *B'* do *C'*. Snovi, ki je v stanju C', dovedemo toliko energije, da pride v stanje *B'*. Z nadziranjem susceptibilnosti ugotovimo, kdaj je doseženo to stanje (namreč isto stanje, kot smo ga dobili pri procesu $B \rightarrow B'$).

Največje težave pa dela dovajanje odmerjene energije. Pri prvih poskusih so segrevali kristal z žarki γ. Absorpcijo so izmerili



Sl. 4. Entropija kromovega galuna v odvisnosti od T in H. Krivulja za $H = 0$ je narejena po podatkih de Klerka in sodelavcev. Spodnje krivulje pa so izračunane brez upoštevanja feromagnetizma, pač pa s kvantno statistiko. Upoštevano je bilo, da ima $Cr^{\cdots}$ tri neparne elektrone (spin 3/2, 4 »možne orientacije«; glej B. Zega, Obz. mat. fiz. 2, 175, 1952). Enak račun da pri prvi krivulji ($H = 0$) za $T \rightarrow 0$ vrednost

$$\lim (S/nR) = \ln 4$$

$$S = \int_0^T (mc_H/T)dT - \frac{VC}{T^2}\,\mu_0\,\frac{H^2}{2} + \text{konst} \qquad (3)$$

v diagramu $S(T)$ pa krivulje, ki jih kaže slika 3. Absolutna ničla bi bila dosegljiva n. pr. po poti $A \rightarrow B \rightarrow B'$. Treba bi bilo le snov predhodno dovolj ohladiti in dovolj namagnetiti. Toda meritve kažejo drugače (sl. 4). Vse krivulje $S\,(T, H)$ za $H = \text{konst}$ se stikajo v eni točki pri $T = 0$. Tu je torej entropija neodvisna od poljske jakosti. Pri kakršni koli obrnljivi magnetni spremembi pri $T = 0$ ostane entropija nespremenjena. Izkazalo se je, da velja to sploh za obrnljive spremembe in ne le za magnetne (*Nernstov zakon* ali *tretji zakon termodinamike*). Zato si smemo dovoliti, da za vsako ravnovesno stanje pri $T = 0$ predpišemo, da je $S = 0$. Pri $T > 0$ je potem entropija vselej pozitivna. Od tod pa že sledi, da z nobeno adiabatno spremembo, pa naj bo še tako idealizirana, ne moremo doseči absolutne ničle. Za magnetne spremembe je to prikazano na sliki 4. Spremembi $B \rightarrow B'$ in $C \rightarrow C'$ ne privedeta do $T = 0$, ker je $S > 0$.

B. Povh

Literatura

1. D. de Klerk, M. J. Steenland and C. J. Gorter, Physica *15*, 649 (1949).
2. P. Debye, Physik. Zeitschr. 35, 923 (1934).

Avstrijski računski centrum

Kakor je članom in prijateljem našega društva gotovo znano, je društvo svoj čas ustanovilo matematično službo, katere naloga je reševati praktične matematične in fizikalične probleme, ki bi se pojavljali v industriji, gospodarstvu in podobno. Te dni smo pa prejeli vest, da je bil v novembru ustanovljen na Dunaju podoben računski odsek kot pri nas. Pobudo za ustanovitev je dalo Avstrijsko statistično društvo. Odsek, ki deluje pod okriljem tega društva in v okviru zvezne poskusne in raziskovalne ustanove Arsenal, se imenuje *Avstrijski računski centrum za gospodarstvo in raziskovanje* (Österreichisches Rechenzentrum für Wirtschaft und Forschung, Wien III., Arsenal, Objekt 221). Namen računskega centra je, reševati z uporabo modernih numeričnih metod s stroji probleme iz gospodarstva in raziskovanja.

Predsednika te institucije sta univ. prof. *dr. Wilhelm Winkler*, direktor statističnega instituta dunajske univerze, in univ. prof. *dr. Johann Radon*, predstojnik matematičnega instituta na dunajski univerzi. Posle centra vodi univ. prof. *dr. Nikolaus Hofreiter*, avstrijski delegat za uporabno matematiko pri Unescu. Univ. prof. *dr. Edmundu Hlawki* pa je bilo poverjeno formiranje strokovnega sosveta.

Centrum želi znanstvenega stika s podobnimi ali zainteresiranimi ustanovami.

Vprašanje kadra za pouk matematike in fizike na nižjih in višjih gimnazijah

V republiki Sloveniji je v šolskem letu 1953/54 34 gimnazij z višjimi razredi, ki imajo 639 oddelkov in 22 187 učencev, ter 163 nižjih gimnazij s 1007 oddelki in 34 815 učenci.

V kakšnih razmerah se razvija pouk matematike in fizike na teh šolah, kažejo naslednji podatki:

1. na gimnazijah z višjimi razredi (popolne gimnazije) je na nižji stopnji 1837 ur matematike in 516 ur fizike, medtem ko je na višji stopnji 725 ur matematike in 433 ur fizike na teden;

2. na samostojnih nižjih gimnazijah je 4504 ur matematike in 1145 ur fizike.

Zasedba teh ur po strokovnjakih, profesorjih in predmetnih učiteljih je mogoča na temelju naslednjih številk:

a) na gimnazijah, navedenih pod 1, potrebujemo 157 kvalificiranih moči, t. j. 67 profesorjev in 90 predmetnih učiteljev;

b) na gimnazijah, navedenih pod 2, je potrebnih 226 profesorjev in predmetnih učiteljev.

Skupno je torej treba 383 kvalificiranih učnih moči samo za potrebe občeizobraževalnega šolskega sistema, medtem ko ostale šole s predmetnim poukom v tem pregledu niso vključene.

Na teh šolah je danes nameščenih 76 profesorjev in 120 predmetnih učiteljev z naslednjimi podatki po spolu in službeni dobi:

Predmetni učitelji po službenih letih

	do 5 let	5—10	10—20	20—30	30—35	nad 35	skupno
moški	7	13	3	10	14	7	54
ženske	16	11	15	12	4	8	66
Skupaj	23	24	18	22	18	15	120

Profesorji po službenih letih

	do 5 let	5—10	10—20	20—30	30—35	nad 35	skupno
moški	8	9	15	9	3	2	46
ženske	9	4	13	4	—	—	30
Skupaj	17	13	28	13	3	2	76

Na temelju tega pregleda vidimo, da se bo to število zmanjšalo v 5 letih zaradi upokojitve za približno 10 profesorjev in 30 predmetnih učiteljev, torej za 40 kvalificiranih ljudi, ter bi znašal ves primanjkljaj:

$$383 - (120 + 76) + 40 = 227$$

Kako rešujemo te kadrovske težave, pa razvidimo iz naslednjih tabel:

Nižje gimnazije:

Kdo poučuje	Matematika Štev. učn. oseb.	Skupno štev. ur na ted.	Štev. ur na 1 učno moč	%	Fizika Štev. učn. oseb.	Skupno štev. ur na ted.	Štev. ur na 1 učno moč	%
Profesorji	9	170	18,8	30,4	4	32	8	37,4
predmetni učitelji	70	1180	16,8		54	384	7,1	
profesorji raznih strok	32	390	12,2		8	47	5,8	
predm. učit. raz. strok	33	266	8,0	69,6	14	73	5,2	62,6
učitelji	169	2293	13,6		92	547	5,9	
honorarni učitelji	11	136	12,3		6	29	4,8	
	324	4435	13,6		178	1112	5,2	
nezasedeno	—	69	—		—	33	—	

Gimnazije:

nižja stopnja

Kdo poučuje	Matematika Štev. učn. oseb.	Skupno štev. ur na ted.	Povp. na 1 učno moč	%	Fizika Štev. učn. oseb.	Skupno štev. ur na ted.	Povp. na 1 učno moč	%
Profesorji	46	422	9,1	59,2	34	201	5,9	75
predmetni učitelji	43	666	15,5		24	186	7,7	
profesorji raznih strok	30	258	8,6		9	75	8,3	
predm. učit. raz. strok	12	143	11,8	40,8	3	21	7	25
učitelji	14	201	14,3		3	20	6,6	
honorarni učitelji	12	147	12,2		3	13	4,3	
	157	1837	11,6		76	516	6,7	

višja stopnja

Kdo poučuje	Matematika Štev. učn. oseb.	Skupno štev. ur na ted.	Povp. na 1 učno moč	%	Fizika Štev. učn. oseb.	Skupno štev. ur na ted.	Povp. na 1 učno moč	%
Profesorji	61	628	10,3	86,4	56	394	7	85,8
predmetni učitelji	9	56	6,2		5	21	4,2	
profesorji raznih strok	—	—	—		—	—	—	
predm. učit. raznih strok	—	—	—	13,6	2	12	6	4,2
učitelji	1	4	4		—	—	—	
honorarni učitelji	4	37	9,2		1	6	6	
	75	725	96,0		64	433	6,7	

Iz pregleda, kdo poučuje matematiko — fiziko na samostojnih nižjih gimnazijah, vidimo, da znaša % učnih ur, kjer poučujejo kvalificirane moči, v povprečju za oba predmeta 31,9 % (30,4 % in 37,4 %), medtem ko

so razmere na gimnazijah z višjimi razredi ugodnejše. Tu je % kvalificiranega pouka na nižji stopnji v povprečju 67,1 % (59,2 % in 75 %), na višji pa 91,1 % (86,4 % in 95,8 %).

S primerjavo obeh skupin gimnazij vidimo, da je pri prvih 1/3, v drugih pa 2/3 kvalificiranega kadra v vsej republiki.

Odstotek kvalificiranega pouka na samostojnih gimnazijah je vsekakor prenizek in ga ne bo mogoče drugače rešiti kot z usposabljanjem kadra. Ker učenci na tej razvojni stopnji nujno potrebujejo kvalificiranih predavateljev, se potrebe po predmetnem kadru ne bodo zmanjšale, temveč še povečale, četudi bi se sistem šolanja spremenil. Naloge naših vzgojnih ustanov so, da pripravijo in usposobijo potreben kader. Če predvidevamo, da bo VPŠ usposobila letno po 10 učiteljev za pouk matematike in fizike, prirodoslovno matematična fakulteta pa po 5, skupno torej 15, bomo imeli dovolj učnega osebja za matematiko in fiziko šele v 15 letih. Zato bo treba posvečati več pažnje vzgoji strokovnih učiteljev in profesorjev, obenem pa tudi zboljšati pouk matematike in fizike na vseh stopnjah splošno izobraževalnega šolstva.

J. Žabkar

Občni zbor društva

13. decembra 1953 je bil na I. gimnaziji v Ljubljani redni letni občni zbor Društva matematikov in fizikov LRS.

Iz poročil predsednika dr. I. Vidava in drugih članov dosedanjega odbora je bilo razvidno uspešno delo društva v pretekli poslovni dobi. Poročilo je podal tudi prof. F. Bezjak, predsednik mariborske podružnice, ki se prav tako uspešno razvija. V javnosti so društveno delo kazali predvsem: Obzornik za matematiko in fiziko, predavanja, brošura Terminologija elementarne matematike, tečaji iz srednješolske matematike ter drugo sodelovanje z Ljudsko univerzo, spomin stoletnice rojstva slovenskega matematika Hočevarja.

Redno izhajanje Obzornika zavira predvsem obremenjenost tiskarne in pomanjkanje primernega tiskarskega materiala, kar tudi dviga tiskarske stroške. Število naročnikov se giblje okrog 1000. — V Ljubljani je bilo v priredbi Sekcije za dvig pouka in predavanja 8 javnih in 9 internih predavanj. Mariborska podružnica je na rednih mesečnih sestankih obravnavala kombinirano znanstvene in metodične teme, povprečno je bilo 15 udeležencev. Terminologija elementarne matematike, ki jo je pripravil dr. A. Vadnal s sodelovanjem društvene komisije za terminologijo, je izšla v 1000 izvodih in tako ustvarila primerno bazo za nadaljnje delo na tem področju. Prvi tečaji iz srednješolske matematike so bili uspešno zaključeni. Tudi mariborska podružnica je uspešno priredila tečaj iz infinitezimalnega računa.

Svet za prosveto in kulturo LRS je izdatno podprl društveno delo s tem, da je omogočil z dotacijo obdržati naročnino za Obzornik na dosedanji višini 250 din letno, saj ta naročnina krije komaj tretjino dejanskih stroškov. Prav tako je odobril društvu 80 000 din za priredbo proslave ob dvestoletnici rojstva velikega slovenskega matematika Jurija Vege, ki bo marca 1954. Občni zbor je izrekel Svetu posebno zahvalo za razumevanje in pomoč društvu.

Predsednik je v svojem poročilu prikazal tudi naloge, ki jih bo moralo društvo izvršiti v zvezi z drugim kongresom matematikov in fizikov FLRJ, ki bo oktobra 1954 v Zagrebu. V ta namen deluje pri društvu kongresni odbor, ki ga vodi dr. A. Peterlin.

Občni zbor je izvolil nov upravni odbor, nadzorni odbor in častno razsodišče. V upravnem odboru so: dr. I. Vidav — predsednik, L. Gabrovšek — podpredsednik, N. Benkovič — tajnik, F. Kvaternik — blagajnik; I. Štalec, M. Klopčičeva, N. Prijatelj, dr. A. Vadnal, dr. F. Dominko, M. Blejec, dr. I. Kuščer in A. Moljk — odborniki. V nadzornem odboru so: dr. A. Vakselj, F. Jeran in M. Potiskova; v častnem razsodišču pa: dr. A. Peterlin, dr. S. Dolar in I. Molinaro.

N. Benkovič

Pregled dela Sekcije za dvig pouka in predavanja v okviru Društva matematikov in fizikov LRS

Vzporedno z občnim zborom Društva matematikov in fizikov LRS 13. decembra 1953 zaključuje Sekcija za dvig pouka in predavanja letos tretje leto organizirane dejavnosti. Z vštetim družabnim večerom in občnim zborom društva je bilo v tem letu 22 sestankov. Sekcija je imela dve vrsti predavanj, čeprav se je ponovno postavljalo vprašanje, ali ustrezata še danes oba načina. Predavanja so bila naslednja:

a) *za širšo javnost:* I. Vidav: Quasiperiodične funkcije. — I. Kuščer: Merjenje razpolovnih časov radioaktivnih snovi. — A. Vadnal: O definicijah matematične verjetnosti. — B. Zega: Nekovinske feromagnetne snovi. — E. Kansky: O fotocelici. — A. Strojnik: O elektronski mikroskopiji in kongresu elektronske mikroskopije v Bristolu 1952. — E. Cilenšek: O gradnji elektrostatičnega pospeševalca pri nas. — F. Debevc: Računski stroji Hollerith.

b) *Predavanja v strokovnem aktivu:* S. Škreblin: O posebnem načinu reševanja iracionalnih enačb. — E. Bračko: O valovni optiki. — N. Prijatelj: Matematika in fizika v sistemu angleških srednjih šol. — E. Kozina: O težavah, uspehih, poskusih in prizadevanjih v pouku fizike na nižji in višji stopnji srednje šole. — S. Breskvar: Pravilo za določevanje smeri pri elektromagnetnih pojavih. — F. Dominko: O problemih astronomije na naših visokih šolah. — S. Breskvar: O problemih astronomije na osnovnih in srednjih šolah. — F. Ahlin in F. Dominko: Nekaj aktualnosti Društva matematikov in fizikov FLRJ (poročilo iz plenuma v Skoplju). — F. Dominko: Ob 400-letnici smrti Nikolaja Kopernika. — K temu je treba prišteti še ogled računskih strojev na Zavodu za statistiko in evidenco LRS in demonstracijo telurija A. Dragana.

Na javnih predavanjih je bilo od 16 do 92 obiskovalcev. Izrazili so mnenje, da se predavanja v nadaljevanjih ne obnesejo. Želeli bi tudi, da določijo predavatelji stopnjo strokovnosti svojega predavanja v skladu s povprečno razgledanostjo matematika in fizika. Dolžina predavanja naj ne presega 45 minut. Težko je razumeti, zakaj stoji ob strani sorazmerno precejšen procent na naših srednjih šolah zaposlenih matematikov in fizikov, zlasti mlajših. Saj je obisk sestankov vprašanje naše zavesti do poklicnega strokovnega dela in njegove problematike. Nekateri stro-

kovno-pedagoški večeri (Kozina, Škreblin, Breskvar) so se oprli na naše dosedanje šolsko izkustvo in na razvoj tega izkustva. N. Prijatelj je pokazal na pouk matematike in fizike v sistemu angleških srednjih šol. Obravnavalo se je še vprašanje pedagoškega delovnega stila kot sestavnega dela fizikalnega pouka (E. Bračko). Večkrat je stopilo v ospredje vprašanje fizikalnih in matematičnih učil. Predavanje Astronomija in naše šole je dalo nekaj dobrih zaključkov in jih bo dokončno izdelala astronomska sekcija v okviru Društva matematikov in fizikov LRS.

Naš srednješolski kader je pokazal največ zanimanja za predavanje S. Škreblina, medtem ko so bili vsi ostali sestanki manj obiskani. Obisk je nihal med 22 in 74. Mnenja smo, da manjka predavateljev, ki bi prinašali v delo strokovnega aktiva živo problematiko prakse, vse svoje uspehe in neuspehe, težave in dosežene rezultate pri pouku matematike in fizike. Člani aktiva dajejo vse premalo pobud in predlogov za reformo v učnih načrtih in v učnih knjigah, o metodi in vsebini dela, o eksperimentu v fiziki in podobno.

Sekcija je navezala stike s predavatelji izven Ljubljane in Društvom matematikov in fizikov NRH.

V zvezi z izboljšanjem dela v sekciji pozdravljamo kritiko in pomoč pri skupnih naporih, ki naj rastejo iz sodelovanja vseh, zlasti pa na naših srednjih in strokovnih šolah zaposlenih matematikov in fizikov.

M. Klopčičeva

STROKOVNA KNJIŽNICA

Na zadnjem občnem zboru Društva matematikov in fizikov je bila poverjena upravi društva naloga, da osnuje strokovno knjižnico, ki bi bila dostopna vsem članom. Namen knjižnice naj bi bil predvsem v zbiranju domače in tuje strokovne periodike, učbenikov za srednje šole in standardnih del s področja elementarne matematike in eksperimentalne fizike.

Upravi je uspelo dobiti na VI. gimnaziji v Šubičevi ulici sobo, v kateri bo knjižnica začasno nastanjena. Za skromen začetek bo knjižnica poslovala vsak petek od 18. do 19. ure.

Ker je naša želja, da bi bili v knjižnici zastopani vsi stari učbeniki matematike in fizike, ki so se v preteklosti uporabljali na slovenskih šolah, naprošamo vse člane, ki jih imajo in bi jih hoteli odstopiti, da nas obveste. Za vsa obvestila in pojasnila se obračajte na naslov: Prijatelj Niko, VI. gimnazija, Ljubljana, Šubičeva 1.

* * *

Neki strokovnjak mi je zatrjeval, da mu ni žal, da je pozabil vso višjo matematiko, ker je v svojem poklicu še nikdar ni rabil. To rad verjamem, kajti človek rabi le toliko matematike, kolikor je zna.

Josip Plemelj

Profesor FRAN JERAN

Dne 31. maja 1954 je umrl prof. Fran Jeran. Njegovo zdravstveno stanje zadnje čase sicer ni bilo trdno, a njegove smrti vendar nismo pričakovali. Saj ga je smrt odtrgala od dela; pripravljal je namreč prenovljene Osnovne pojme opisne geometrije.

Prof. Jeran je znan v naši javnosti zlasti zaradi svojih učbenikov in kot strokovnjak metodičnega oblikovanja v šoli. Do tega dela je imel posebno veselje in zanj tudi velike sposobnosti. Znal je napraviti šolsko učno snov zanimivo in lahko, razen tega pa se je znal s svojim dobrohotnim in taktnim nastopom izredno približati mladini. Zgodaj se je lotil pisanja učnih knjig. Že leta 1913, šele kakih 5 let po svojem nastopu, je že imel pripravljen za pomoč slovenskim dijakom tedanje ljubljanske realke slovenski rokopis Osnovnih pojmov opisne geometrije. Učni jezik je bil tedaj seveda nemški in avstrijska vlada ni dovolila natisa tega rokopisa. Prvi večji delovni vzpon je bil prof. Jeranu omogočen šele po zlomu Avstrije, ko je nastala velika potreba po slovenskih učnih knjigah na slovenskih šolah. Leta 1920 so izšli Osnovni pojmi opisne geometrije, leta 1921 in 1922 pa predelave učbenikov Matek-Mazi, Geometrija za 6., 7. in 8. razred, Matek-Mazi, Geometrija za 4. in 5. razred ter Matek-Peterlin, Aritmetika za 1., 2. in 3. razred gimnazij. Odliki njegovega dela sta posebno lahka razumljivost in velika nazornost. Kot izkušen metodik matematičnega pouka je imel tiste čase in kasneje več predavanj o matematičnem pouku; na njih je znal zelo živo pritegniti svoje poslušalce.

Zaradi njegovega taktnega nastopa in organizacijskih sposobnosti so ga pritegnili zelo močno v društveno dejavnost, tako da se je njegova strokovna delavnost do osvoboditve omejevala predvsem na šolsko delo.

Med okupacijo se je pridružil našemu osvobodilnemu gibanju in je ostal ves čas njegov zvest član. Po osvoboditvi pa se zopet začne zelo živa doba njegovega šolsko-organizacijskega in strokovno-metodičnega dela. Takoj po osvoboditvi je prevzel vodstvo I. gimnazije, uspešno je sodeloval pri učnih načrtih za matematiko, predaval je in organizacijsko delal na številnih tečajih za dvig matematičnega kadra in z veliko energijo se je lotil tudi pisanja učbenikov. Bil je sodelavec pri izdaji Vaj iz trigonometrije in analitične geometrije za srednje šole (1947) ter učbenikov za ta dva predmeta (1951). Mnogo prispevkov je dal tudi slovenski matematični terminologiji. Ko je bilo ustanovljeno Društvo matematikov in fizikov LRS, je bil prof. Jeran njegov prvi predsednik.

Nikdar v svoji 42-letni službeni dobi (1908—1950) se ni pritoževal čez poklicne težave. Ob delu z mladino je živel, ko pa je to prenehalo, je kar hitro omahnil v 73. letu svoje starosti.

Vedno nam bo ostal vzor zaradi svoje delavnosti in ljubezni do mladine!

F. Ahlin

NOVE KNJIGE

Josip Plemelj: Teorija analitičnih funkcij

Izdala Slovenska akademija znanosti in umetnosti. Ljubljana, 1953. Strani XVI + 516.

Knjiga obsega štiri dele: I. Kompleksno število in njegova upodobitev. II. Splošna teorija analitičnih funkcij. III. Eliptične funkcije. IV. Geometrična funkcijska teorija.

V zadnjih letih smo dobili v slovenskem jeziku že nekaj knjig iz višje matematike. Kljub temu pa si še do nedavnega skoraj misliti nismo upali, da bi moglo pri nas iziti tako delo, katerega vsebina sega prav do mej, ki so jih v zadnjem času dosegla raziskavanja v funkcijski teoriji. Že zato smo lahko te knjige veseli in tudi ponosni nanjo. Toda tu nimam namena pisati o odlikah te knjige v strokovnem in metodičnem oziru, o njeni bogati vsebini in o tem, kako je vsa snov v njej do podrobnosti premišljena in dognana; saj vsi, ki jim je knjiga namenjena, avtorja s te strani prav dobro poznajo. Opozoril bi rad na tem mestu predvsem na stvari, ki so gotovo večini bralcev neznane: Čeprav je to samo učbenik funkcijske teorije, je v njem marsikaj, česar v drugih knjigah ni dobiti, vsaj zbranega ne v taki obliki. Zadnji del pa vsebuje mnogo avtorjevih lastnih raziskav, ki jih je sicer mogoče najti tudi drugod, toda le raztresene po raznih matematičnih revijah. V podkrepitev gornje trditve hočem navesti nekaj primerov: Ko obravnava avtor eksponencialno funkcijo, upelje kotni funkciji siny in cosy s potenčnima vrstama (glej str. 83 i. d.). Seveda tu še ni neposredno razvidno, da sta to ravno znani funkciji iz elementarne trigonometrije. Avtor pa prav lepo iz vrst samih izlušči vse lastnosti teh funkcij: adicijski teorem, število π, ki ga dobi med 3 in $\sqrt{10}$, periodičnost in končno identiteto vrst pri realnem y z navadnimi kotnimi funkcijami. Vzemimo nadalje Galoisovo trditev, da je Galoisova grupa transformacijske enačbe eliptičnih funkcij za $p > 3$ enostavna. Dokazi te trditve so drugod v literaturi zelo komplicirani. Avtor pa je našel do tega izreka bolj preprosto pot, s katero pa še vedno ni bil zadovoljen in je razmišljal dalje. Prav dobro se še spominjam, kako mi je v lanskih počitnicah — knjiga je bila tedaj že v tisku — z veseljem naznanil, da se mu je končno posrečilo dokaz poenostaviti, kolikor je le mogoče. Res zavzema sedaj dokazovanje v knjigi komaj dobro stran. Za primerjavo bodi omenjeno, da je v učbeniku Durege-Maurer: Elliptische Funktionen to vprašanje obravnavano na petih straneh. Mislim, da je prav, če se ohrani, čigav je ta poenostavljeni dokaz.

V prvih treh delih, ki obravnavajo splošno funkcijsko teorijo in eliptične funkcije, to se pravi področja, ki imajo že dolgo več ali manj ustaljeno obliko, tu seveda ne more biti veliko originalnega dela prof. Plemlja. Omenim naj le njegovo metodo, po kateri je mogoče nadomestiti bikvadratični izraz v eliptičnem integralu s kubičnim izrazom. Ustrezna transformacija je popolnoma racionalna (str. 211 i. d.). Zadnji del, ki govori o potencialni teoriji, o konformnem upodabljanju in o uniformizaciji, pa vsebuje zelo mnogo originalnega avtorjevega dela, takega sicer, ki ga je že po večini objavil, ki pa je v knjigi še bolj v podrobnostih razmišljeno.

Tako je n. pr. avtor vprašanje robnih vrednosti analitičnih funkcij v knjigi nekoliko drugače obdelal kakor v prvotni razpravi in so eksistenčni dokazi v novi obliki bolj preprosti. Osnovni Riemannov izrek, da se da vsako enostavno sovisno enolistno polje konformno upodobiti v krog, je v knjigi dvakrat dokazan. Oba dokaza sta taka, da ne dasta samo eksistenco funkcije, ki posreduje upodobitev, temveč tudi metodo, po kateri je vsaj teoretično mogoče to funkcijo z zaporednimi približki izračunati. Pri dokazovanju konvergence procesov se avtor v obeh primerih poslužuje metode, ki jo je izdelal za primer uniformizacije v mejnem krogu, torej metode, ki nam da upodobitev poljubne enostavno sovisne Riemannove ploskve v krog. To metodo je še poenostavil z uporabo Schwarzovega lema.

Za teorijo uniformizacije algebraičnih funkcij ima osnovni pomen izrek o analitičnem raztegu enolistnih slik (str. 368 i. d.), ki ga je v kvalitativni obliki našel P. Koebe, najostrejšo formulacijo pa mu je dal avtor sam. Posebno elegantna je tu izpeljava formule za velikost ploščine, ki je slika ne pokriva. Problem uniformizacije sam je v knjigi obdelan dokaj izčrpno. Dokazana je eksistenca uniformizirajoče spremenljivke, ki preslika pripadajoče enostavno sovisno polje v notranjost mejnega kroga, in pa uniformizacija Riemannove ploskve s p povratnimi rezi. Izhodišče za eksistenčni dokaz uniformizacije v drugem primeru je avtorju stavek o konformni upodobitvi kolobarja z analitično prirejenostjo robnih točk v tak kolobar, kjer so robne točke prirejene linearno. Ta izrek, ki je že sam po sebi zanimiv, kakor je zanimiv tudi njegov dokaz, je v bistvu le poseben primer uniformizacije za $p = 1$. Avtor ga je objavil pred dvajsetimi leti v beograjski reviji Publications Mathématiques.

Na koncu hočem omeniti še neko ‚slabo stran' te knjige: za naše razmere je predraga. Marsikdo, ki bi si jo sicer rad kupil, namreč ne bo premogel dveh tisočakov, kolikor stane knjiga.

I. Vidav

Splošna mehanika

J. Pérès, Mécanique générale. Paris 1953, založba Masson et Cie. Cena 210 franc. frankov.

Pod gornjim naslovom in na približno 400 straneh velike osmerke je podal avtor, ki je profesor na prirodoslovni fakulteti univerze v Parizu, klasično mehaniko pretežno v analitični obliki, toda brez kinematike in brez geometrije mas. V prvem delu knjige so obdelane najprej splošne gibalne enačbe togih sistemov z upoštevanjem reaktivnih sil, nato pa je šele formuliran princip virtualnih premikov in je pokazano, kako se da ta princip skupaj z D'Alembertovim principom neposredno uporabiti za obravnavanje dinamičnih problemov: S temi sredstvi obdela avtor v posebnih poglavjih nekatere klasične probleme dinamike točke (n. pr. gibanje težke točke po rotacijski ploskvi, sferično nihalo) in togega telesa (med drugim Eulerjev in Langrangeov primer gibanja okrog stalne točke). Nekoliko pred sredo knjige pridejo šele na vrsto Langrangeove in Appellove enačbe, katerim sledi obravnavanje Hamiltonovega in Maupertnisovega principa in kanoničnih enačb. Uporaba sredstev analitične mehanike je pokazana v glavnem na primeru malih nihanj in (v spremenjeni obliki) pri obravnavanju trka. V zadnjem poglavju so podane osnove racionalne

mehanike podajnih teles v glavnem na primeru niti in palice; splošni zakoni so obravnavani le nepopolno in zelo kratko. Pač pa se je pisec dokaj obširno zadržal pri vprašanju širjenja diskontinuitet pri gibanju niti, kar naj bi služilo kot uvod v obravnavanje analognih pojavov v hidrodinamiki.

Delo obravnava torej v glavnem snov, ki je postala že zdavnaj klasična, in tudi pri načinu obravnavanja se drži poznanih poti. Zato pa je pisec vsa izvajanja skrbno pretehtal, tako da se da povsod takoj zaslediti vodilna misel razpravljanja. Posebno pažnjo je posvetil obravnavanju lastnosti, ki jih v analitični mehaniki pridajemo telesom in vezem; prav pogosto obravnava knjiga tudi vprašanje, kako se spremenijo zakoni mehanike, če telesa ne ustrezajo gornjim zahtevam. Ker so taki zakoni večkrat zelo surov približek resničnim razmeram in so daleč proč od popolne logične jasnosti, zato je dal avtor svoji knjigi nekoliko nenavaden naslov: splošna mehanika. Kljub priznani visoki stopnji matematičnega pouka na srednjih in visokih šolah v Franciji, je pisec knjige pri uporabi matematičnih sredstev razmeroma skromen in seznani n. pr. čitatelja v besedilu samem z osnovnimi lastnostmi Jacobijevih eliptičnih funkcij za realno območje.

Knjiga bo koristila predvsem študentom matematike in fizike; pa tudi tehniki si bodo mogli z njo razširiti predvsem svoje teoretično znanje in bolje spoznati zvezo med analitičnimi metodami in sredstvi tehnične mehanike. Škoda samo, da ne gre pri mehaniki podajnih teles dovolj daleč, čeprav so nekateri odstavki iz dinamike niti zelo poučni! Oprema knjige je odlična.

A. Kuhelj

(Institut za tehnično mehaniko na TVŠ)

Hrvatsko prirodoslovno društvo nam je poslalo sledeče izdaje:

1. *Razbijeni atomi,* D. Radovanović, Zagreb 1952, 60 strani, 14 slik, cena 40 din.

Knjižica je uvod, ki daje potrebno znanje za razumevanje izvora in uporabe atomske energije. Na preprost način tolmači avtor fizikalne osnove o elektronu, atomskem jedru, nevtronu in protonu, radioaktivnosti in izotopih.

2. *Atomska energija,* D. Radovanović, Zagreb 1952, 64 strani, 22 slik, cena 40 din.

Knjižica tvori s prejšnjo zaokroženo celoto. Razpravlja o sprostitvi atomske energije, o atomskih gorivih in eksplozivih, pokaže pa tudi princip atomske bombe, njeno konstrukcijo in delovanje.

3. *Galileo Galilei,* G. Loria, prevod iz italijanščine, Zagreb 1952, 22 slik na boljšem papirju, 116 strani.

Razprava vsebuje zanimive podrobne podatke o delu velikega prirodoslovca, o njegovi borbi za resnico s tedanjim svetom ter o njegovih uspehih v fiziki in astronomiji. I. Š.

4. *Almanah Bošković za leto 1953.* Zagreb, 211 strani.

V letošnji izdaji je opuščeno poglavje o osnovnih pojmih sferične astronomije, razpredelnice astronomskih konstant in drugih podatkov ter pomožne razpredelnice. Na novo pa so vstavljene razpredelnice za čase vzhajanja in zahajanja Sonca in Lune, ki jih moremo z interpolacijo

določiti za vse kraje od 40^0 do 50^0 zem. širine. Nova je tudi razpredelnica leg temeljnih zvezd. Karte za gibanje Marsa, Jupitra, Saturna in Urana so prenesene na notranjo stran platnic, kar je gotovo priročnejše, na mesečnih zvezdnih kartah pa so lege teh premičnic zaznamovane z rdečimi znamenji.

Pridobljeni prostor so odmerili šestim razpravam, ki zavzemajo skoraj dve tretjini knjige. Dr. S. Hondl dopolnjuje svojo, lansko leto začeto obravnavo »Boškovićev dalekozor s vodom«, dr. D. Nikolić pa poroča o knjigi irskega jezuita H. V. Gilla, ki je izšla leta 1941 v Dublinu z naslovom »Roger Boscovich, S. J. (1711—1787), Forerunner of Modern Physical Theories«. V daljšem članku razpravlja francoski zvezdoslovec D'Azambuja o sončnih mrkih na splošno in posebej o mrku februarja 1952. Posebno pozornost zasluži temeljita in zanimivo pisana poljudna razprava R. Vernića o problemu treh teles. V prispevku »Doprinos Jugoslovena astronomskim naukama« navaja dr. D. Nikolić važnejše Jugoslovane prejšnjih stoletij, ki so se pečali z zvezdoslovjem. Od Slovencev omenja Vego, Stefana, Voduška, Ogrinca in pri nas doslej neznanega Danila Kmeta, o katerem pravi: »Danilo Kmet (1783—1825), rodjen je u Sloveniji, u Brezo Ribnice (?). Napisao je veliki broj radova: Observationes astronomicae . . ., Buda 1821; Astronomia popularis, Offen 1823. Pored toga dao je veliki broj članaka.« Vrsto razprav zaključuje L. Randić s svojim poročilom o kongresu mednarodne astronomske zveze v Rimu preteklega leta. Opazka v almanahu navaja, da je izšla letošnja izdaja s podporo Sveta za prosveto in kulturo N. R. Hrvatske in — Jugoslovanske akademije.

S. Breskvar

Tehnika zvuka

I. Svezak: Sonično područje i zvuk u zraku

Technical Aspects of Sound. Edited by E. G. Richardson, B. A., Ph. D., D. Sc. Elsevier Publishing Company, Amsterdam—Houston—London—New York, 1953, 544 stranica.

Praktičnoj primjeni zvuka, jednom vrlo zanimljivom djelu tehničke fizike pristupili su tokom poslednje polovice ovog stoljeća teoretski, to jest sa željom razumjevanja zbivanja, interesenti sa najrazličitijih strana. Glazbenici, fiziolozi, gradjevinari, arhitekti, električari a u poslednje vrijeme sve više i fizičari. Razlog za ove studije bili su djelomice stvarni teoretski interesi ali u večini slučajeva bio je uzrok problematika prenašanja zvuka većem broju ljudi ili ograničavanje intenziteta zvuka. Postojeća literatura postala je na taj način prilično šarena i fizičar koji se je htio posvetiti ovoj grani znanosti imao je velike poteškoće kad se je htio snaći u publikacijama te htio saznati rezultate istraživanja, jer su pojedine grupe interesenata radile na svojim problemima a da se obično nisu brinule jedna za drugu.

Gore navedena knjiga pokriva prvi put cijelo područje pod zajedničkom redakcijom i izdavaču je uspjelo da nadje suradnike u istaknutim laboratorijima cijelog svijeta. Knjiga je rad od devet pisaca iz Engleske, Amerike, Holandije i Njemačke. Na taj način je nastala jedna vrst enciklopedije tehnike zvuka sa sljedećim sastavcima. Uvodni članak sa teoretskom osnovom, na koji se nastavlja prvi dio sa akustičkim mjerama,

akustičkim mjerenjem i svojstvima absorbirajučih materijala. Drugi dio obradjuje teoriju prenašanja zvuka i akustiku dvorana. Treći dio se bavi sa mjerenjem buke i ograničavanjem buke. Na to nadovezuje četvrti dio sa pitanjima govora i slušanja u vezi sa prenašanjem zvuka. U ovom dijelu obradjuju se obširnije kraj fizioloških problema i mikrofoni. Peti dio prikazuje reprodukciju zvuka t. j. zvučnike i telefone te dokumentaciju zvuka i to mehaničke optičke i magnetske metode, te stereofoničku reprodukciju. Deveti dio prikazuje analiziranje zvuka, te tradicionalna i električna glazbala. Knjigu zaključuje katalog koeficijenata absorbcije akustičkih materijala i jedan indeks. Svaki stavak ima svoj posebni pregled važnije literature.

Sadržaj knjige je jednoličniji nego što bi se očekivalo i obseg prikaza je zadovoljavajući za nešto više nego prvu orijentaciju. Odlično opremljena knjiga pretstavlja danas standard knjigu o primjenjenoj akustici. U drugom dijelu koji treba da izadje obraditi će se i ultrazvuk.

F. I. Havliček

Tensorski račun

Barry Spain: Tensor Calculus. University Mathematical Texts. Oliver and Boyd, London, Edinburgh, 1953. Strani VIII + 125.

Knjiga, ki obsega osem poglavij, daje v prikupni in pregledni obliki oris tensorskega računa z najvažnejšimi uporabami v geometriji in fiziki. Prvi dve poglavji vsebujeta tensorsko algebro v zvezi z merilnim tensorjem in ločnim elementom v poljubnodimenzionalnem Riemannovem prostoru. V naslednjih treh poglavjih obravnava avtor najprej lastnosti Christoffelovih simbolov ter kovariantno odvajanje vektorjev in tensorjev, geodetične krivulje vpelje kot ekstremale variacijskega problema, torej kot krivulje, za katere je prva variacija ločne dolžine enaka nič. Paralelni premik, ukrivljenost Riemannovega prostora in druga vprašanja, ki so v tej zvezi, so tudi v teh poglavjih na kratko objasnjena. Šesto poglavje, ki ima predvsem namen pokazati uporabnost tensorske tehnike v diferencialni geometriji, tridimenzionalnega evklidičnega prostora, je posvečeno teoriji krivulj v prostoru (Frenetove formule), predvsem pa teoriji ploskev. Zadnji dve poglavji sta posvečeni uporabi tensorskega računa v teoretični fiziki in sicer v teoriji elastičnosti in v relativnostni teoriji. Na koncu mnogih paragrafov so dodane naloge, ki ilustrirajo obravnavano teorijo.

I. Vidav

UTRINKI

NOVA DEFINICIJA ZA VOLT. — Volt je delo, ki ga opravi električna privlačna (ali pa odbijalna) sila enote elektrenine vzdolž poti enega centimetra, ko vlači oziroma odbija drugo enoto elektrenine.

ELEKTRON BREZ TEŽE? — Meni se pa zdi, da je elektron le samo 1840-krat manj vztrajen kakor nevtron oziroma proton, da pa ne tehta nič. V vsemirju najbrž ni nikjer fizikalno popolnoma nepotrebnih stvari oziroma lastnosti. Elektronu so gravitacijski prijemi nepotrebni, zato jih verjetno sploh ne pozna.

M. *Vidmar:* Razgovori o skrivnostih elektrotehnike (Ljubljana 1952), str. 82 in 38

ODGOVORI

2

Gozd ima obliko kroga, drevesa pa rastejo v njem tako, da tvorijo kvadratno mrežo. Drevesa so okrogla in enako debela. Kako velik mora biti polmer debla, da človek, ki stoji v središču gozda, ne vidi več iz gozda?

Središče gozda izberimo za izhodišče koordinatnega sistema, koordinatni osi pa naj bosta vzporedni mreži! Stranica mreže naj bo daljica enote. V središču gozda ni drevesa. Koordinati drevesnega središča sta v tako izbranem sistemu celi števili p, q, ki zadoščata neenačbi $1 \leqslant p^2 + q^2 \leqslant R^2$, kjer je R polmer gozda. R je očitno celo število, saj raste na robu gozda drevo s središčem $(R, 0)$. Naj bo r polmer debla in ϱ meja med tistimi polmeri, pri katerih je gozd iz središča še prozoren in onimi polmeri, za katere ni več prozoren. Za ϱ velja ocena:

$$1/(R^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \leqslant \varrho < 1/R$$

Gozd je prozoren, če prodre pogled vsaj v eni smeri iz gozda na plan. Preden presodimo, kdaj je gozd iz središča prozoren, preglejmo, katera drevesa lahko objame oko iz središča. Upoštevajmo, da vidimo od vseh dreves, ki leže na isti premici skozi izhodišče, le najbližje drevo, pa lahko ugotovimo, da so iz središča vidna le tista drevesa, pri katerih sta koordinati središča p in q dve tuji si števili. V primeru, da imata p in q skupen faktor μ, moremo pisati $p = \mu p'$, $q = \mu q'$ in lahko ugotovimo, da ležita drevesi (p, q) in (p', q') na isti premici skozi izhodišče, drevo (p', q') pa zaslanja drevo (p, q). Posebej je treba obravnavati drevesa, ki leže na koordinatnih oseh. Od teh dreves so očitno vidna le štiri najbližja drevesa, katerih ena koordinata je enaka $+1$ ali -1.

Sedaj, ko smo našli vsa drevesa, ki jih lahko vidimo iz središča, poglejmo, kdaj lahko med drevesi gledamo skozi gozd. Izberimo si v gozdu neko drevesno središče s tujima si koordinatama (p, q)! V tej točki določimo mejni polmer tako, da se pri manjših r vidi mimo drevesa skozi gozd, pri večjih pa je pogled že zastrt. Dogovorimo se še to, da bomo vedno gledali levo od drevesa, saj so razmere na desni zaradi simetrije povsem enake. Napravimo pa takole: Izhodišče in točko (p, q) zvežimo s premico $qx - py = 0$, nato pa poiščimo tej premici najbližjo vzporednico, na kateri so točke s celimi koordinatami (najbližjo vzporedno vrsto dreves)! V družini vzporednic $qx - py + \lambda = 0$ nosijo točke s celimi koordinatami tiste premice, kjer je parameter λ celo število. Najmanjši tak λ pa je $\lambda = 1$. Na premici $qx - py + 1 = 0$ res leže točke s celimi koordinatami, saj je diofantska enačba $py - qx = 1$ rešljiva, ker sta si koeficienta p in q tuja. Na najdeni vzporednici poiščimo skrajno točko mreže, ki je še v gozdu, njeni koordinati naj bosta (P, Q). Skozi središče potegnimo premico, ki je od točk (p, q) in (P, Q) enako oddaljena. Normirana enačba te premice naj bo $ax - by = 0$. Ker ležita točki (p, q) *in* (P, Q) na različnih straneh te premice in sta od nje enako oddaljeni, je $ap - bq = -(aP - bQ)$ ali $(p + P)a = (q + Q)b$; odtod pa najdemo $a = \mu(q + Q)$ $b = \mu(p + P)$ in spoznamo, da veže ta premica izhodišče z mrežno točko $(p + P, q + Q)$, ki leži že izven gozda. Polmer debla sme biti kvečjemu tolik, da je premica $(q + Q)x - (p + P)y = 0$ tangenta na drevo (p, q).

Če je polmer debla večji, seka tangenta drevesa (p, q) drevo (P, Q) in gozd ni prozoren v tej smeri, pri manjših polmerih pa je gozd gotovo prozoren. Tangenta na drvo (p, q) imej enačbo $kx - y = 0$. Gozd je prav gotovo prozoren, če leži presečišče premic

$$\begin{aligned} qx - py + 1 &= 0 \\ kx - \ y \quad &= 0 \end{aligned} \qquad (*)$$

v točki $(p + P, q + Q)$, ali pa je od središča oddaljeno bolj kakor ta točka. Koordinati presečišča sta $x = 1/(kp - q)$, $y = k/(kp - q)$ in njegova oddaljenost od središča je

$$(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = (k^2 + 1)^{\frac{1}{2}}/(kp - q) = 1/r$$

Izraz $(kp - q)/(k^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$ je namreč oddaljenost točke (p, q) od tangente $kx - y = 0$, to je vprav polmer debla r.

Presečišče premic (*) ne sme ležati bliže središču, kakor točka $(p + P, q + Q)$, če naj bo gozd prozoren. Pa vzemimo točko (1,0) na abcisni osi! Najbližjo vzporedno vrsto dreves nosi premica $y = 1$, zadnje drevo na njej pa ima koordinati $(R - 1, 1)$, saj leži naslednja točka mreže $(R, 1)$ že izven gozda. Njena oddaljenost od središča je $(R^2 + 1)^{\frac{1}{2}} > R$. Točki (p, q) s koordinatama $p = 1$, $q = 0$ pripada torej točka $P = R - 1$, $Q = 1$, obe točki pa določata točko $p + P = R$, $q + Q = 1$, ki leži v razdalji $(R^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$ od središča. Gozd je gotovo prozoren, če je polmer debel $r < 1/(R^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$. Tedaj namreč leži presek premic (*) dalje od izhodišča kakor točka $(p + P, q + Q)$.

Gozd je prav gotovo neprozoren, če se sekata premici (*) znotraj gozda ali pa na njegovem robu, če je torej $1/r \leqslant R$ ali $r \geqslant 1/R$.

Meja med polmeri, pri katerih je gozd še prozoren, in polmeri, pri katerih gozd ni več prozoren, leži torej v mejah $1/(R^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \leqslant \varrho < 1/R$, saj je gozd prozoren, če je $r < 1/(R^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$, in neprozoren, če je $r \geqslant 1/R$.

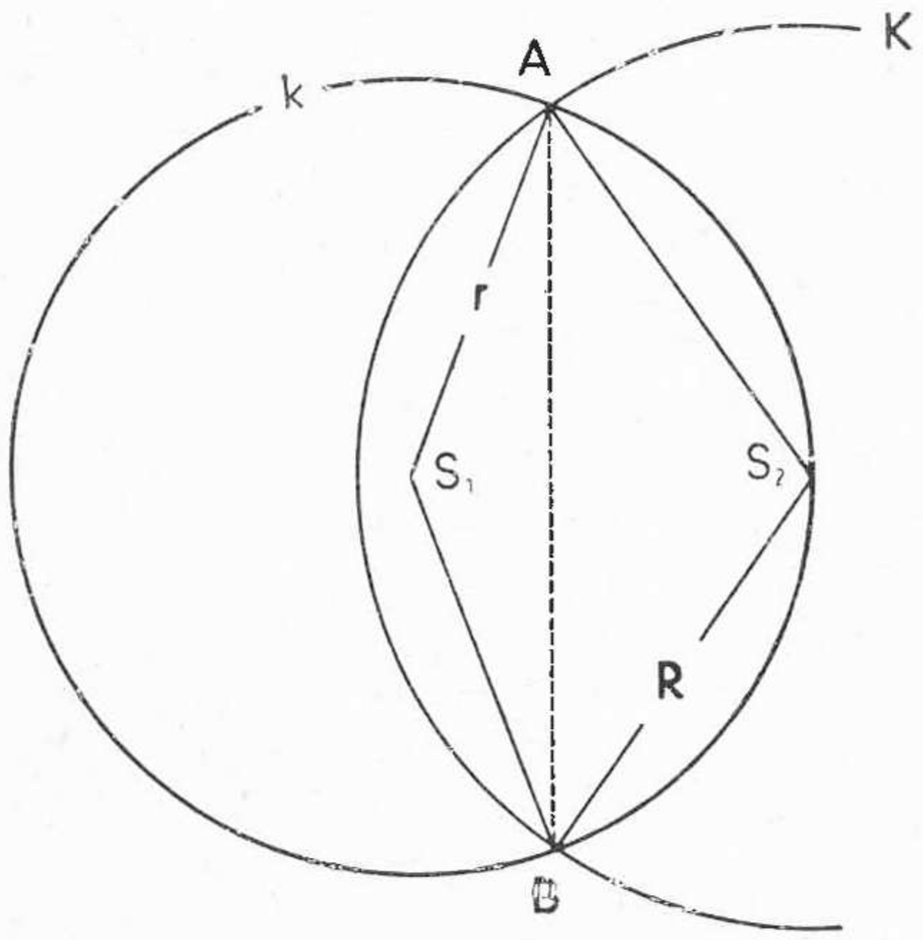
F. Križanič

3

Dan je krog k s polmerom r. Določi polmer kroga K, ki ima središče na obodu kroga k in ki razdeli k na dva enaka dela!

Lik, ki ga kroga oklepata, razdelimo na dva krožna odseka. Prvi (I) naj pripada krogu k, drugi (II) pa krogu K. Imamo potem

$$\mathrm{I} + \mathrm{II} = \tfrac{1}{2}\pi r^2 \qquad (1)$$



Ploščina krožnega odseka je $\frac{1}{2}r^2(\alpha - \sin\alpha)$, kjer je α odseku pripadajoči središčni kot (ločno merjen).

Pa zaznamujmo kot $\sphericalangle AS_2B$ z α (gl. sliko)! Potem je $\sphericalangle AS_1B = 2\pi - 2\alpha$ in $R = 2r\cos\frac{1}{2}\alpha$, če je R polmer kroga K. Po zgoraj navedenem obrazcu sta ploščini obeh odsekov enaki:

$$\mathrm{I} = \tfrac{1}{2}r^2(2\pi - 2\alpha + \sin 2\alpha)$$
$$\mathrm{II} = \tfrac{1}{2}R^2(\alpha - \sin\alpha) = 2r^2\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha\,(\alpha - \sin\alpha)$$

Če sedaj I in II vstavimo v enačbo (1), dobimo z enostavnim računom za α tole transcendentno enačbo:

$$\sin\alpha - \alpha\cos\alpha = \tfrac{1}{2}\pi \qquad (2)$$

Prvi grobi približek za iskani α je kar iz slike očiten. Kot α je namreč večji od $\frac{1}{2}\pi$, pa manjši od $\frac{2}{3}\pi$. Zaznamujmo s $\varphi(x)$ izraz $\varphi(x) = \sin x - x\cos x - \frac{1}{2}\pi$! Odvod te funkcije, $\varphi'(x) = x\sin x$, je na intervalu $(\frac{1}{2}\pi, \frac{2}{3}\pi)$ povsod pozitiven, zato $\varphi(x)$ tam narašča. Velja pa $\varphi(\frac{1}{2}\pi) < 0$ in $\varphi(\frac{2}{3}\pi) > 0$. Zaradi zveznosti funkcije $\varphi(x)$ lahko sklepamo od tod, da je φ na tem intervalu vsaj enkrat nič, zaradi monotonosti pa samo enkrat. To pa je koren enačbe (2), ki ga iščemo. Preprost numerični račun nam da za iskani koren naslednjo vrednost:

$$\alpha = 109^0 11' 17{,}93''$$

Polmer kroga K pa je $R = 1{,}158\,730\,r$.

Analogno vprašanje bi mogli staviti v prostoru za kroglo. Zanimivo pa je, da se da tu problem prevesti na algebraično enačbo

$$y^4 - 8y + 6 = 0$$

kjer je $y = 1/\cos\frac{1}{2}\alpha$, $R = 2r\cos\frac{1}{2}\alpha$. Zaznambe se nanašajo tudi na zgornjo sliko, ki pa jo smatramo sedaj za ravninski presek skozi obe središči krogel. Gornja algebraična enačba ni rešljiva s kvadratnimi koreni. Z numeričnim računom pa dobimo

$$y = 1{,}627\,954 \quad \text{in} \quad R = 1{,}22\,854\,r.$$

F. Avsec

4

V pesku je N zrn, med katerimi je A zrn granata, B zrn turmalina, C zrn distena in D zrn ostalih. To porazdelitev lahko dobimo s permutiranjem na $N!/A!B!C!D!$ različnih načinov. Verjetnost, da naletimo na zrno granata, je p, ustrezne verjetnosti za turmalin, disten in ostala zrna pa so q, r, s. Verjetnost, da dobimo v pesku eno od gornjih permutacij, je torej $p^A q^B r^C s^D$. Verjetnost, da dobimo prav gornjo porazdelitev, je potem:

$$W = [N!/A!B!C!D!]p^A q^B r^C s^D$$

pri čemer je $A + B + C + D = N$ in $p + q + r + s = 1$.

V našem primeru je bilo 82 % granata ($p = 0{,}82$), 13 % turmalina ($q = 0{,}13$), 3 % distena ($r = 0{,}03$ %) in 2 % ostalih ($s = 0{,}02$). Ker so q, posebno pa še r in s dosti manjši kot p, lahko gornjo verjetnost aproksimiramo s Poissonovo formulo. Zgoraj vstavimo: $p = 1 - (q + r + s)$ in $A = N - (B + C + D)$, pri čemer upoštevamo, da je $q + r + s \leqslant 1$ in $B + C + D \leqslant A$. Z običajnimi aproksimacijami dobimo končno:

$$W \approx [(Nq)^B/B!]e^{-Nq}[(Nr)^C/C!]e^{-Nr}[(Ns)^D/D!]e^{-Ns}$$

Celotna verjetnostna funkcija je enaka produktu treh posameznih verjetnostnih funkcij, ki so med sabo neodvisne. Efektivni odmiki (»standardne deviacije«) števil B, C in D od njihovih povprečij so enaki kvadratnim korenom iz teh povprečij: $\sigma_2 = \sqrt{Nq}$, $\sigma_3 = \sqrt{Nr}$ in $\sigma_4 = \sqrt{Ns}$.*

Pri granatu pa je kvadrat efektivnega odmika podan z enačbo:

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2 = 0{,}18\,N$$

Ker smo zahtevali, da naj bodo navedene vrednosti 82 %, 13 %, 3 % in 2 % natančne na 0,5 %, torej da naj bo $\sigma_i/N \leqslant 0{,}005$, dobimo iz te enačbe, da mora biti $N \geqslant 7200$. Najmanj 7200 zrn moramo prešteti, da dobimo tolikšno natančnost.

S. Pahor

Vprašanje uredništva: Kako naj rešimo zgornji problem na splošno, torej v primerih, ko ne prevladuje ena vrsta zrn?

* Definicija za σ_2 n. pr. je: $\sigma_2^2 = \overline{(B - \bar{B})^2}$.

7

Oglejmo si tale preprosti ekstremalni problem: Med vsemi kvadri z dano vsoto robov A in z dano površino $2B$ določi tistega, ki ima največjo prostornino! Če so x, y, z robovi kvadra, se ta problem glasi: Poišči ekstrem funkcije $V = xyz$ pri pogoju, da je $x + y + z = A$ in $xy + yz + xz = B$. Če iz teh dveh enačb izrazimo y in z z x, dobimo takoj $V = xyz = x^3 - Ax^2 + Bx = f(x)$. Tam, kjer nastopa ekstrem, je $f'(x) = 3x^2 - 2Ax + B = 0$. Ta enačba ima realne korene, če je $A^2 - 3B \geqq 0$. Ni se težko prepričati, da je ta pogoj pri kvadru z realnimi robovi vedno izpolnjen. Enakost $A^2 - 3B = 0$ je le pri kocki. Zaradi simetrije pa očitno ustrezata y in z isti enačbi kakor x, torej je $3y^2 - 2Ay + B = 0$ in $3z^2 - 2Az + B = 0$. Če enačbe za x, y in z seštejemo in upoštevamo, da je $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + xz) = A^2 - 2B$, dobimo $A^2 - 3B = 0$. To pa je protislovje, saj sta A in B še na razpolago in ju lahko tako izberemo, da je $A^2 - 3B > 0$. Pojasni, kje tiči napaka v gornjem računu!

8

Površina krogelne kapice je $2\pi av$, če je a polmer krogle in v višina kapice. Tu nastane vprašanje, ali je ta formula značilna za kroglo. Vzemimo torej sklenjeno konveksno ploskev z lastnostjo, da je površina vsake kapice, ki jo odreže kaka ravnina od te ploskve, proporcionalna višini kapice: $P = 2\pi av$. Ali je taka ploskev nujno krogla? Ta problem lahko postavimo tako, da dopuščamo, da sme biti sorazmernostni faktor a še odvisen od lege ravnine, s katero sečemo ploskev. Ni mi znano, ali je ta problem že rešen, to se pravi, ali ima samo krogla to lastnost, ali pa so še druge ploskve. Lažji je problem, če vzamemo, da je sorazmernostni faktor a neodvisen od lege ravnine. V tem primeru se da dokazati, da ima samo krogla zahtevano lastnost. Vendar je tudi ta problem še precej težek. Zato si vprašanje poenostavimo tako, da vzamemo le rotacijske ploskve. Torej je treba dokazati, da med vsemi rotacijskimi ploskvami velja samo za kroglo formula $P = 2\pi av$ za površino kapice oziroma pasu med dvema vzporednikoma.

9. **Centrifugalna verižnica**

Na konceh 1 m dolge vrteče se gredi je pripeta 2 m dolga veriga. Kakšno obliko zavzame veriga, če kroži tako hitro, da vpliv teže lahko zanemarimo? Kolikšen kot oklepa veriga z gredjo na konceh? Kako daleč je njeno teme od osi?

Pripomba: Del te naloge je pred vojno dal prof. Plemelj kot klavzurno nalogo za izpit »B« iz uporabne matematike. Naloga je prvotno imela olajševalni pristavek: Poišči enostavno periodične rešitve Eulerjeve diferencialne enačbe!