

Matematična knjižnica - Ljubljana

D

OBZORNIK ZA

MATEMATIKO

IN

FIZIKO

1953

LJUBLJANA

LETNIK III 2-

VSEBINA

Članki

O quasiperiodičnih funkcijah (I. Vidav)	33
Topološka klasifikacija zaprtih ploskev (A. Vadnal)	45
Jedrski reaktor kot raziskovalni pripomoček (A. H. Snell)	57

Novice

Apolarni polinomi (N. Prijatelj)	68
Mikroskopija v dveh stopnjah (M. Čopič)	72
Elektromagnetna črpalka (P. Gosar)	77
Apolonijev krug i izodinamički centri kod ravnokrakog trougla (B. Pešić)	80

Iz naših institutov

Fizikalni institut Jožefa Stefana (A. Peterlin)	84
Razstava jedrske fizike v Ljubljani (A. Moljk)	88

Odgovori	92
--------------------	----

Utrinki	95
-------------------	----

Vprašanja	96
---------------------	----

UREDNIŠTVO JE PREJELO V ZAMENO

Bilten na Društvo na mat. i fiz. od NRM, Skopje 1952, T. III.
 Elektrotehnični vestnik, Ljubljana 1953, XXI, št. 3—4, 5—6.
 Farmacevtski vestnik, Ljubljana 1953, IV, št. 1—2, 3—4, 5—6.
 Glasnik mat.-fiz. i astronomski, Zagreb 1953, T—8, No 1.
 Gospodarski vestnik, Ljubljana 1953, II, št. 27—72.
 Matematičko fizički list za učenike srednjih škola, Zagreb
 1952/53, III, št. 1, 2, 3, 4—5.
 Nastava matematike i fizike u srednjoj školi Beograd 1952,
 I, št. 1, 2, 3, 4.
 Proteus, Ljubljana 1952/53, XV, št. 8, 9, 10.
 Sodobna pedagogika, Ljubljana 1953, IV, št. 3—4, 5—6.
 Vartilna tehnika, Ljubljana 1953, II, št. 1.
 Zdravstveni vestnik, Ljubljana 1953, XXII, št. 3—4, 5, 6.
 Zobozdravstveni vestnik, Ljubljana 1953, VIII, št. 1, 2—3.

IZ UPRAVE

Letos bo imel Obzornik 6 števil po 32 strani. Naročnina je 250 din. Bralce prosimo, da naročnino čimprej poravnajo, da ne bo na koncu leta neprijetnih stroškov zaradi opominjanja. Kdor želi poravnati naročnino v dveh obrokih, mora plačati 20 din več. — V letu 1951 so izšle 4 številke, v letu 1952 pa 5 števil. Na zalogi imamo 2., 3. in 4. št. I. letnika za 120 din in vse številke II. letnika za 250 din. Naročajte s plačilom po ček. položnici *Društvo matematikov in fizikov LRS, Ljubljana*, ček. rač. št. 604-T-207.

O QUASIPERIODIČNIH FUNKCIJAH

I. VIDAV

Teorija quasiperiodičnih funkcij je eno izmed najpomembnejših del predlanskem umrlega danskega matematika Haraldja Bohra (1887—1951), brata znanega fizika N. Bohra. To teorijo, za katero mu je dal pobudo študij Riemannove funkcije $\zeta(s)$, je Bohr obdelal v treh obsežnih razpravah, ki so izšle pod skupnim imenom Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen v letih 1925-26 v časopisu Acta Mathematica (45, 46, 47). Prvi dve razpravi sta posvečeni teoriji realnih, zadnja pa teoriji analitičnih quasiperiodičnih funkcij. V tem članku se bomo omejili le na realne quasiperiodične funkcije.

1. Lastnosti periodičnih funkcij. Ker so quasiperiodične funkcije v nekem smislu posplošitev periodičnih funkcij, zato se hočemo najprej spomniti na najvažnejše lastnosti le-teh. Povsod v tem članku naj pomeni $f(x)$ zvezno funkcijo realne spremenljivke x . Sme pa imeti $f(x)$ kompleksne vrednosti, torej $f(x) = u(x) + iv(x)$, kjer sta $u(x)$ in $v(x)$ realni zvezni funkciji realnega x .

Funkcijo $f(x)$ imenujemo *periodično*, če je za kak $p \neq 0$ vedno

$$f(x + p) = f(x) \quad (1)$$

Število p s to lastnostjo je *perioda* funkcije $f(x)$. Očitno so hkrati s p tudi vsi pozitivni in negativni večkratniki $\pm p, \pm 2p, \pm 3p, \dots$ periode funkcije $f(x)$. Če te večkratnike $np, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, naneseemo na številsko premico, dobimo neskončno mnogo ekvidistantnih točk, ki se imenujejo periodne točke. Vsak interval z dolžino p ima vsaj eno periodno točko.

Zvezna periodična funkcija $f(x)$ je omejena in enakomerno zvezna na vsem intervalu od $-\infty$ do $+\infty$. To se vidi od tod, ker zavzame funkcija vse vrednosti, ki jih je sploh zmožna zavzeti, že na intervalu širine p . Vsota $F(x)$ dveh periodičnih funkcij $f_1(x)$ in $f_2(x)$ je tudi periodična funkcija, če sta si periodi p_1 in p_2 obeh sumandov v racionalnem razmerju, torej če je $p_1 : p_2 = n_1 : n_2$. Potem je namreč $P = n_2 p_1 = n_1 p_2$ perioda vsote, ker je $F(x + P) = f_1(x + P) + f_2(x + P) = f_1(x + n_2 p_1) + f_2(x + n_1 p_2) = f_1(x) + f_2(x) = F(x)$. Če pa periodi nista v racionalnem razmerju, ne moremo več trditi, da je vsota $F(x)$ periodična funkcija. Pač pa je mogoče v tem primeru določiti dve celi števili n_1 in n_2 tako, da je razlika $n_1 p_1 - n_2 p_2$ poljubno majhna. Potem je $\tau = n_1 p_1$ skoraj mnogokratnik periode p_2 , zaradi zveznosti pa se potem $f_2(x + n_1 p_1)$ zelo malo razlikuje od $f_2(x + n_2 p_2) = f_2(x)$. Zato je tudi diferenca $F(x + \tau) - F(x)$ absolutno majhna. Tako število τ , ki ima to lastnost, imenujemo *quasiperiodo* funkcije $F(x)$. Ta pojem bomo pozneje natančneje opredelili.

Kar smo pravkar povedali za vsoto dveh periodičnih funkcij, velja tudi za diferenco in produkt. Vidimo torej tu pomanjkljivost, da se periodičnost pri osnovnih računskih operacijah ne ohranja.

Vsaka periodična funkcija $f(x)$ pomeni neko nihanje. Najpreprostejše nihanje, tako imenovano harmonično nihanje, izražata kotni funkciji $\sin x$ in $\cos x$, ali v kompleksni obliki e^{ix} . Vsako drugo nihanje z določeno frekvenco se da sestaviti s superpozicijo samih harmoničnih nihanj, ki imajo za frekvence večkratnike te frekvence. Matematično se to pravi, da se da periodična funkcija $f(x)$ razviti v Fourierovo vrsto, ki se glasi

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \dots \quad (2)$$

ali v kompleksni obliki

$$f(x) \sim \alpha_0 + \alpha_1 e^{ix} + \alpha_{-1} e^{-ix} + \alpha_2 e^{2ix} + \alpha_{-2} e^{-2ix} + \dots \quad (2^*)$$

Zaradi enostavnosti smo tu vzeli, da je perioda kar 2π . Kakor je znano, Fourierova vrsta zvezne funkcije $f(x)$ ni vedno konvergentna, zato v (2) ne smemo zapisati enačaja. Koeficienti a_n , b_n , oziroma α_n pri (2*), se dobe iz formul

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

oziroma

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Vedno jih je mogoče izračunati, če je le funkcija $f(x)$ integrabilna. Fourierova vrsta natančno določa funkcijo $f(x)$ v tem smislu, da ne moreta imeti dve zvezni periodični funkciji obe iste Fourierove vrste, če nista identično enaki. Torej so le za funkcijo $f(x) = 0$ vsi Fourierovi koeficienti nič.

Čeprav Fourierova vrsta ni vedno konvergentna, se da kljub temu vsaka zvezna periodična funkcija $f(x)$ aproksimirati s trigonometričnimi polinomi, to je s polinomi takele oblike

$$s(x) = \alpha_0 + \alpha_1 e^{ix} + \alpha_{-1} e^{-ix} + \alpha_2 e^{2ix} + \alpha_{-2} e^{-2ix} + \dots + \alpha_n e^{inx} + \alpha_{-n} e^{-inx}$$

To trdi Weierstrassov izrek, ki se glasi: *K poljubno majhnemu pozitivnemu številu ε je mogoče najti tak trigonometrični polinom $s(x)$, da je $|f(x) - s(x)| < \varepsilon$ za vsak x .*

Ko smo tako našli najvažnejše lastnosti periodičnih funkcij, preidimo na quasiperiodične funkcije in si oglejmo, katere teh lastnosti in v kakšnem smislu se dajo prenesti na le-te.

2. Definicija quasiperiodičnih funkcij. Najprej točno definirajmo quasiperiodo kake funkcije $f(x)$. Število $\tau = \tau(\varepsilon)$ je za funkcijo $f(x)$ quasiperioda k $\varepsilon > 0$, če je $|f(x + \tau) - f(x)| < \varepsilon$ za vsak x . Od tod se takoj vidi, da je vsota ali razlika dveh quasiperiod τ_1 in τ_2 k ε , quasiperioda k 2ε . Velja namreč

$$|f(x + \tau_1 + \tau_2) - f(x)| \leq |f(x + \tau_1 + \tau_2) - f(x + \tau_1)| + \\ + |f(x + \tau_1) - f(x)| < 2\varepsilon$$

Isto je za diferenco $\tau_1 - \tau_2$.

Če bi imenovali quasiperiodično funkcijo tako funkcijo $f(x)$, ki ima k vsakemu ε vsaj eno od nič različno quasiperiodo τ , bi bila ta definicija preširoka. Saj bi bila vsaka enakomerno zvezna funkcija že quasiperiodična, ker za te funkcije vedno eksistira zadosti majhen τ s to lastnostjo. Da bomo prišli do prave definicije, se spomnimo zgoraj omenjene lastnosti periodičnih funkcij, da je namreč na vsakem intervalu dolžine p vsaj ena perioda. Podobno lastnost moramo zahtevati od quasiperiodičnih funkcij.

(I). Zvezno funkcijo $f(x)$ imenujemo quasiperiodično, če moremo najti k vsakemu pozitivnemu ε neko tako dolžino $L = L(\varepsilon)$, da ima funkcija $f(x)$ na vsakem intervalu z dolžino L vsaj eno quasiperiodo $\tau = \tau(\varepsilon)$ k predpisanemu ε . Pri poljubnem a je torej med a in $a + L$ vsaj eno tako število τ , da je

$$|f(x + \tau) - f(x)| < \varepsilon \quad (3)$$

za vsak x .

Če naneseemo vse quasiperiode k danemu ε na številsko premico, dobimo neskončno množico točk, ki so relativno goste v tem smislu, da ni med njimi poljubno velikega razmaka. V splošnem pa ne tvorijo aritmetičnega zaporedja kakor pri periodičnih funkcijah.

Iz definicije (I) je takoj razvidno, da je vsaka periodična funkcija tudi quasiperiodična. Vse periode so hkrati quasiperiode. Narobe pa seveda ni res.

Izpeljimo sedaj nekaj najvažnejših lastnosti quasiperiodičnih funkcij.

a) *Absolutna vrednost* $|f(x)|$ *quasiperiodične funkcije je spet taka funkcija*. To se vidi neposredno iz definicije, saj je

$$||f(x + \tau)| - |f(x)|| \leq |f(x + \tau) - f(x)| < \varepsilon.$$

b) *Hkrati z* $f(x)$ *je tudi* $Af(x)$, *če je* A *konstanta, quasiperiodična funkcija*. Imamo namreč $|Af(x + \tau) - Af(x)| < A\varepsilon$ in je vsaka quasiperioda $k\varepsilon$ za $f(x)$ quasiperioda $kA\varepsilon$ za $Af(x)$.

c) *Vsaka quasiperiodična funkcija* $f(x)$ *je za* $-\infty < x < \infty$ *na obe strani omejena*. To lastnost, ki je za periodične funkcije očitna, dokažemo takole: Po definiciji (I) določimo dolžino L za $\varepsilon = 1$. Na intervalu $0 \leq x \leq L$ je $f(x)$ kot zvezna funkcija absolutno omejena, na primer $|f(x)| < B$. Za vsak x zunaj tega intervala lahko določimo quasiperiodo τ tako, da je $-x < \tau < -x + L$. To je mogoče, ker ima ta interval dolžino L . Potem je $0 < x + \tau < L$ in zaradi tega

$$|f(x)| \leq |f(x + \tau)| + |f(x + \tau) - f(x)| < B + 1 = A$$

ker je $|f(x + \tau) - f(x)| < 1$ in leži $x + \tau$ na intervalu $(0, L)$.

Iz pravkar dokazane lastnosti sklepamo, da je *kvadrat quasiperiodične funkcije zopet quasiperiodična funkcija*. Ker je povsod $|f(x)| < A$, velja namreč

$$|f^2(x + \tau) - f^2(x)| = |f(x + \tau) + f(x)| \cdot |f(x + \tau) - f(x)| < 2A\varepsilon$$

Ta ocena pove, da je vsaka quasiperioda $k \epsilon$ za funkcijo $f(x)$ quasiperioda $k \cdot 2 A \epsilon$ za kvadrat $f^2(x)$.

č) *Quasiperiodična funkcija $f(x)$ je enakomerno zvezna na vsem intervalu $(-\infty, \infty)$.* To se pravi, k vsakemu $\epsilon > 0$ pripada tak $\delta > 0$, da je $|f(x_2) - f(x_1)| < \epsilon$, kjer koli ležita x_1 in x_2 , če je $|x_2 - x_1| < \delta$. Ker je $f(x)$ v vsaki točki zvezna funkcija, je gotovo na vsakem končnem intervalu enakomerno zvezna. Pa določimo po definiciji (I) dolžino $L = L(\frac{1}{3} \epsilon)$ za $\frac{1}{3} \epsilon$. Vzemimo sedaj interval $(-1, L + 1)$! Na tem je $f(x)$ enakomerno zvezna funkcija in je zato mogoče določiti tak $\delta > 0$, da je $|f(x_2) - f(x_1)| < \frac{1}{3} \epsilon$ za $|x_2 - x_1| < \delta$, kjer koli sta x_1 in x_2 na tem intervalu. Seveda smemo tu vzeti $\delta < 1$. Naj bo sedaj x_1 zunaj tega intervala! Določimo, kar je mogoče, quasiperiodo $\tau = \tau(\frac{1}{3} \epsilon)$ tako, da je $x_1 + \tau$ na intervalu $(0, L)$. Če je $|x_2 - x_1| < \delta$, leži gotovo $x_2 + \tau$ med -1 in $L + 1$. Potem pa je

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq |f(x_2 + \tau) - f(x_2)| + |f(x_1 + \tau) - f(x_1)| + \\ + |f(x_2 + \tau) - f(x_1 + \tau)| < \epsilon$$

ker je razdalja točk $x_1 + \tau$ in $x_2 + \tau$ manjša od δ in ležita obe med -1 in $L + 1$, τ pa je quasiperioda $k \frac{1}{3} \epsilon$.

Enakomerna zveznost funkcije $f(x)$ pove, da se izraz $f(x + \tau) - f(x)$ zelo malo spremeni, če τ nekoliko povečamo ali pomanjšamo. Od tod pa lahko sklepamo, da eksistira na vsakem intervalu dolžine L cel interval širine δ , ki ima vse točke za quasiperiode funkcije $f(x)$. Za poljuben $\eta < \delta$ pa vsebuje vsak interval širine δ vsaj en večkratnik števila η . Tako smo dobili izsledek:

K vsakemu $\epsilon > 0$ je mogoče najti neki L in $\delta > 0$ tako, da ima za poljubno izbran pozitiven $\eta < \delta$ vsak interval dolžine L vsaj eno quasiperiodo $\tau(\epsilon)$, ki je večkratnik števila η , torej $\tau = n\eta$ s celim n .

To dejstvo bomo uporabili pri dokazovanju tele pomembne lastnosti quasiperiodičnih funkcij:

d) *Vsota dveh quasiperiodičnih funkcij $F(x) = f(x) + g(x)$ je tudi quasiperiodična funkcija.*

Tu gre za to, da najdemo skupne quasiperiode funkcij $f(x)$ in $g(x)$. Kajti če je $|f(x + \tau) - f(x)| < \epsilon$ in $|g(x + \tau) - g(x)| < \epsilon$, velja

$$|F(x + \tau) - F(x)| \leq |f(x + \tau) - f(x)| + |g(x + \tau) - g(x)| < 2 \epsilon$$

in je potem skupna quasiperioda τ za vsoto $F(x)$ quasiperioda $k \cdot 2 \epsilon$.

Določimo $k \frac{1}{3} \epsilon$ ustreznemu številu L_1 in δ_1 za $f(x)$ ter L_2 in δ_2 za $g(x)$. Naj bo L večji izmed L_1 in L_2 , η pa manjši izmed δ_1 in δ_2 . Potem ima vsak interval z dolžino L eno quasiperiodo τ_f funkcije $f(x)$ in eno quasiperiodo τ_g funkcije $g(x)$, ki sta obe večkratnika števila η , torej $\tau_f = n_1 \eta$ in $\tau_g = n_2 \eta$. Diferenca $\tau_f - \tau_g = (n_1 - n_2) \eta = n \eta$ je tudi večkratnik števila η in velja $|n \eta| = |\tau_f - \tau_g| < L$, ker sta τ_f in τ_g oba na istem intervalu s širino L . Vzemimo sedaj vse možne take quasiperiode τ_f in τ_g . Diference $\tau_f - \tau_g = n \eta$ so večkratniki istega η in vse so absolutno pod L . Zato jih je le končno mnogo med seboj različnih. Vsi pari quasiperiod te vrste razpadejo torej v končno mnogo razredov, če štejemo dva para τ_f , τ_g in τ'_f , τ'_g v isti razred, ako je $|\tau_f - \tau_g| = |\tau'_f - \tau'_g|$. Iz vsakega razreda vze-

mimo en par kot predstavnika tega razreda. Če je k različnih razredov, dobimo tako k parov $\tau_{i1}, \tau_{i2}, \tau_{i3}, \dots, \tau_{ik}, \tau_{gk}$. Naj bodo vsi ti τ absolutno pod l . Trdimo sedaj, da je na vsakem intervalu dolžine $L + 2l$ vsaj ena skupna quasiperioda za $f(x)$ in $g(x)$. Ker ima namreč interval $(a + l, a + l + L)$ dolžino L , je na njem gotovo en par quasiperiod τ_i, τ_g , kjer sta τ_i in τ_g večkratnika števila η . Ker spada tudi ta par v enega izmed razredov, n. pr. v p -ti razred, je $|\tau_i - \tau_g| = |\tau_{ip} - \tau_{gp}|$ in od tod $\tau_i \pm \tau_{ip} = \tau_g \pm \tau_{gp}$. Izraz $\tau_i \pm \tau_{ip}$ pa je kot vsota oziroma diferenca dveh quasiperiod $k \frac{1}{2} \epsilon$ quasiperioda funkcije $f(x)$ $k \epsilon$. Zato je $\tau_i \pm \tau_{ip}$ skupna quasiperioda $k \epsilon$ za obe funkciji $f(x)$ in $g(x)$. Ker je $a + l < \tau_i < a + l + L$ in $|\tau_{ip}| < l$, leži res $\tau_i \pm \tau_{ip}$ na intervalu $(a, a + L + 2l)$. S tem pa je naša trditev dokazana.

Lastnost d) lahko raztegnemo na vsoto poljubno mnogo quasiperiodičnih funkcij. Ker so periodične funkcije tudi quasiperiodične, dobimo za ta primer iz d), da je vsota periodičnih funkcij v splošnem quasiperiodična funkcija.

Produkt dveh quasiperiodičnih funkcij $f(x)$ in $g(x)$ je quasiperiodična funkcija, kar takoj uvidimo, če ga pišemo v obliki

$$f(x)g(x) = \frac{1}{4} \{ [f(x) + g(x)]^2 - [f(x) - g(x)]^2 \}$$

Vsota $f(x) + g(x)$ in razlika $f(x) - g(x)$ sta po prejšnjem quasiperiodični funkciji, kvadrata $(f + g)^2$ in $(f - g)^2$ pa potem tudi.

e) *Limita $f(x)$ enakomerno konvergentnega zaporedja quasiperiodičnih funkcij $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$ je zopet quasiperiodična funkcija.*

To dejstvo dokažemo takole: $f(x)$ je zvezna funkcija, ker je limita enakomerno konvergentnega zaporedja zveznih funkcij. Izberimo si sedaj tako naravno število n , da je $|f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{3} \epsilon$ za vsak x od $-\infty$ do $+\infty$. To je mogoče, saj je $f(x)$ limita zaporedja $f_n(x)$. Ker je $f_n(x)$ quasiperiodična funkcija, se da dobiti taka dolžina L , da ima vsak interval s to dolžino vsaj eno quasiperiodo τ funkcije $f_n(x)$ $k \frac{1}{3} \epsilon$, torej $|f_n(x + \tau) - f_n(x)| < \frac{1}{3} \epsilon$. Sedaj pa je

$$\begin{aligned} |f(x + \tau) - f(x)| &\leq |f_n(x + \tau) - f_n(x)| + |f(x + \tau) - f_n(x + \tau)| + \\ &+ |f(x) - f_n(x)| < \epsilon \end{aligned}$$

Torej isti τ je quasiperioda $k \epsilon$ za limitni $f(x)$.

Gornjemu izreku moremo dati tudi obliko: *Vsota enakomerno konvergentne vrste quasiperiodičnih funkcij je quasiperiodična funkcija.*

Imenujmo splošno trigonometrični polinom vsak takle izraz:

$$s(x) = \sum a_\lambda e^{i\lambda x}$$

Na desni je vsota končno mnogo sumandov za različne realne λ , ki ni treba, da so v razmerju celih števil. $e^{i\lambda x}$ je periodična funkcija. Zato je $s(x)$ kot vsota periodičnih funkcij vedno quasiperiodična funkcija. Vsaka funkcija $f(x)$, ki se da enakomerno aproksimirati s trigonometričnimi polinomi, je quasiperiodična funkcija. Vzemimo namreč zaporedje pozitivnih števil $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots$, ki limitirajo proti nič: $\epsilon_n \rightarrow 0$. Iz navedene

lastnosti funkcije $f(x)$ dobimo, da pripada k vsakemu ε_n tak trigonometrični polinom $s_n(x)$, da je povsod $|f(x) - s_n(x)| < \varepsilon_n$. Torej konvergira zaporedje teh polinomov $s_n(x)$ enakomerno proti $f(x)$. Ker so trigonometrični polinomi quasiperiodične funkcije, velja po pravkar dognanem izsledku isto za limitni $f(x)$. S tem smo želeno dokazali. Ena izmed glavnih nalog, ki si jo je H. Bohr zastavil v teoriji realnih quasiperiodičnih funkcij, pa je bila dokazati obratno lastnost: *Vsaka quasiperiodična funkcija se da enakomerno aproksimirati s trigonometričnimi polinomi.* Ta izrek leži mnogo globlje in dokaza ne moremo prnesti v tem kratkem članku.

3. Srednja vrednost quasiperiodičnih funkcij. Naj bo $f(x)$ quasiperiodična funkcija. Dokazali bomo, da vedno eksistira limita izraza

$$J(T) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx \quad (4)$$

kakor koli gre T preko vsake meje. Limitno vrednost zaznamujemo z $M\{f(x)\}$ in je torej

$$M\{f(x)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx, \quad (5)$$

Izraz $J(T)$ pomeni srednjo vrednost funkcije $f(x)$ na intervalu $(0, T)$. Zato je $M\{f(x)\}$ v nekem smislu srednja vrednost funkcije za vse x .

Dokažimo sedaj eksistenco te limite! Iz definicije konvergence vemo, da $J(T)$ limitira, če je mogoče k vsakemu $\varepsilon > 0$ najti tak $T_0 > 0$, da je

$$\left| \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} f(x) dx - \frac{1}{T_2} \int_0^{T_2} f(x) dx \right| < \varepsilon \quad (6)$$

za vse T_1 in T_2 , ki so večji od T_0 . Da bomo prišli do takega T_0 , ocenimo najprej diferenco

$$\int_0^T f(x) dx - \int_a^{a+T} f(x) dx \quad (7)$$

kjer je spodnja meja a poljubna. V ta namen poiščimo funkciji $f(x)$ k $\frac{1}{2}\varepsilon$ quasiperiodo τ , ki leži med a in $a + L$. Pišimo sedaj diferenco (7) v obliki

$$\int_0^T f(x) dx - \int_\tau^{\tau+T} f(x) dx + \int_{a+T}^{\tau+T} f(x) dx - \int_a^\tau f(x) dx$$

Ker je $\tau - a < L$ in $|f(x)| \leq A$ za vsak x , sta zadnja dva integrala absolutno pod AL . V drugega pa vpeljimo $x + \tau$ namesto x . Potem bo imel tudi ta meji 0 in T . Če ga združimo s prvim, moramo integrirati izraz $f(x) - f(x + \tau)$. Iz pomena števila τ pa imamo $|f(x + \tau) - f(x)| <$

$< \frac{1}{2}\epsilon$ in je torej diferenca prvih dveh integralov v gornjem izrazu absolutno pod $\frac{1}{2}\epsilon T$. Skupaj velja torej ocena

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx - \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(x) dx \right| < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{2AL}{T} \quad (8)$$

in je neodvisna od spodnje meje a . Sedaj pa postavimo v izraz (7) po vrsti za a vrednosti $0, T, 2T, \dots, (n-1)T$. Če vse tako dobljene izraze seštejemo in upoštevamo oceno (8), dobimo po delitvi z nT :

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx - \frac{1}{nT} \int_0^{nT} f(x) dx \right| < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{2AL}{T} \quad (9)$$

Naj bosta sedaj T_1 in T_2 dve števili v racionalnem razmerju, ki sta večji od T_0 , torej je $n_1 T_1 = n_2 T_2$. Po oceni (9) se $J(T_1)$ razlikuje od $J(n_1 T_1)$ za manj od $\frac{1}{2}\epsilon + 2AL/T_0$. Isto velja za $J(T_2)$ in $J(n_2 T_2)$. Ker pa je $J(n_1 T_1) = J(n_2 T_2)$, se razlikujeta $J(T_1)$ in $J(T_2)$ za manj od $\epsilon + 4AL/T_0$. Če izberemo T_0 tako velik, da je $4AL/T_0 < \epsilon$, je za dve taki števili T_1 in T_2 že izpolnjena neenačba (6) z 2ϵ na desni strani. Tu sta bili T_1 in T_2 v racionalnem razmerju, zaradi zveznosti integrala pa velja neenačba (6) splošno. Tako smo dokazali, da res eksistira limita (5). Prav tako je seveda tudi

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x) dx = M\{f(x)\}, \quad (5^*)$$

kar uvidimo takoj iz ocene (8), če pišemo v njej $2T$ namesto T in postavimo $a = -T$.

Kako velik T je treba vzeti, da daje integral (4) srednjo vrednost do natančnosti ϵ ? Na to vprašanje nam odgovori neenačba (9), ki velja za vsak celi n . Če n večamo preko vsake meje, dobimo

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx - M\{f(x)\} \right| < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{2AL}{T}$$

Za $T > 4AL/\epsilon$ da izraz (4) srednjo vrednost $M\{f(x)\}$ do natančnosti ϵ .

Če je $f(x)$ navadna periodična funkcija, kaj je v tem primeru njena srednja vrednost? Naj ima $f(x)$ periodo p . Ker je vseeno, kako gre T v neskončnost, vzemimo $T = np$ in naj raste celo število n preko vsake meje. Vrednost integrala periodične funkcije je neodvisna od spodnje meje, če ima integracijski interval širino periode. Zato je vrednost integrala v mejah od 0 do np enaka n -kratni vrednosti integrala v mejah $(0, p)$, torej

$$\frac{1}{np} \int_0^{np} f(x) dx = \frac{n}{np} \int_0^p f(x) dx = \frac{1}{p} \int_0^p f(x) dx$$

Če raste n preko vsake meje, limitira leva stran proti srednji vrednosti. Od tod dobimo za periodično funkcijo

$$M\{f(x)\} = \frac{1}{p} \int_0^p f(x) dx \quad (10)$$

Izračunajmo še srednjo vrednost eksponentialne funkcije $e^{i\lambda x}$, kjer je λ realen. Ker je nedoločeni integral te funkcije $e^{i\lambda x}/i\lambda$, je

$$M\{e^{i\lambda x}\} = \lim_{T \rightarrow \infty} (e^{i\lambda T} - 1)/i\lambda T = 0 \quad (11)$$

saj števec $e^{i\lambda T} - 1$ absolutno ni večji od 2. To velja seveda za $\lambda \neq 0$. Za $\lambda = 0$ je $e^{i\lambda x} = 1$ in $M\{1\} = 1$.

Neposredno iz definicije imamo te lastnosti srednje vrednosti:

a) *Srednja vrednost vsote dveh funkcij je vsota srednjih vrednosti obeh sumandov:* $M\{f(x) + g(x)\} = M\{f(x)\} + M\{g(x)\}$.

b) *Za konstanten A je* $M\{Af(x)\} = AM\{f(x)\}$.

c) *Če zaporedje quasiperiodičnih funkcij $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$ enakomerno konvergira proti $f(x)$, je* $\lim M\{f_n(x)\} = M\{f(x)\}$.

Pri zadosti velikem n je namreč $|R_n(x)| = |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ za vsak x . Iz definicije (5) pa je razvidno, da je $|M\{f(x)\} - M\{f_n(x)\}| < \varepsilon$, če je povsod $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$. Od tod imamo $|M\{R_n(x)\}| = |M\{f(x)\} - M\{f_n(x)\}| < \varepsilon$. Torej je res $\lim M\{f_n(x)\} = M\{f(x)\}$ za $n \rightarrow \infty$.

4. Fourierovi koeficienti in Fourierova vrsta quasiperiodične funkcije. Ker je hkrati z $f(x)$ tudi $f(x)e^{-i\lambda x}$ za poljuben realen λ quasiperiodična funkcija, eksistira njena srednja vrednost, ki jo zaznamujemo z $a(\lambda)$:

$$a(\lambda) = M\{f(x)e^{-i\lambda x}\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x)e^{-i\lambda x} dx \quad (12)$$

Vsak tak λ , pri katerem je $a(\lambda) \neq 0$, imenujemo *Fourierov eksponent*, pripadajoči $a(\lambda)$ pa *Fourierov koeficient* quasiperiodične funkcije $f(x)$. Če je funkcija $f(x)$ periodična, vzemimo jo kar s periodo 2π , je za $\lambda = n$ tudi $f(x)e^{-inx}$ periodična funkcija in po formuli (10) imamo

$$a(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx} dx = \alpha_n \quad (12^*)$$

torej Fourierov koeficient v navadnem smislu.

Za vsak λ je srednja vrednost $a(\lambda)$ natančno določeno število. Izredno pomembno za našo teorijo pa je dejstvo, da ima quasiperiodična funkcija $f(x)$ kvečjemu števno neskončno mnogo eksponentov. Torej $a(\lambda)$ je kvečjemu za števno mnogo vrednosti λ od nič različen.

To dokažemo takole: Vzemimo nekaj takih števil $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, za katere je pripadajoči koeficient $a(\lambda) \neq 0$. Tvorimo trigonometrični polinom

$$s(x) = \sum a(\lambda) e^{i\lambda x}, \quad \lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \quad (13)$$

kjer se sumacija nanaša na vse izbrane λ . Izraz $|f(x) - s(x)|^2$ je tudi quasiperiodična funkcija in ima zato neko srednjo vrednost, ki očitno ni negativna, saj je srednja vrednost funkcije, ki ni nikjer negativna. Je pa

$$|f(x) - s(x)|^2 = [f(x) - s(x)] [f^*(x) - s^*(x)] = f(x)f^*(x) - \\ - f(x) \sum a^*(\lambda) e^{-i\lambda x} - f^*(x) \sum a(\lambda) e^{i\lambda x} + \sum \sum a(\lambda) a^*(\mu) e^{i(\lambda - \mu)x}$$

V vseh vsotah zavzameta λ in μ zgoraj izbrane eksponente $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Zaradi lastnosti a) imamo

$$M\{|f(x) - s(x)|^2\} = M\{|f(x)|^2\} - \sum a^*(\lambda) M\{f(x) e^{-i\lambda x}\} - \\ - \sum a(\lambda) M\{f^*(x) e^{i\lambda x}\} + \sum \sum a(\lambda) a^*(\mu) M\{e^{i(\lambda - \mu)x}\}$$

Ker je $M\{f(x) e^{-i\lambda x}\} = a(\lambda)$, $M\{f^*(x) e^{i\lambda x}\} = a^*(\lambda)$ in $M\{e^{i(\lambda - \mu)x}\} = 0$ za $\lambda \neq \mu$ ter $= 1$ za $\lambda = \mu$, dobimo

$$\sum a(\lambda)^2 = M\{|f(x)|^2\} - M\{|f(x) - s(x)|^2\} \quad (14)$$

in od tod

$$|a(\lambda_1)|^2 + |a(\lambda_2)|^2 + \dots + |a(\lambda_n)|^2 \leq M\{|f(x)|^2\} \quad (15)$$

Iz te neenačbe spoznamo takoj, da je kvečjemu števno mnogo λ , ki imajo koeficient $a(\lambda) \neq 0$. Ker ima desna stran določeno končno vrednost C , je samo končno mnogo takih $a(\lambda)$, namreč manj od C , ki so absolutno večji od 1. Zaznamujmo ustrezne eksponente, urejene po velikosti, z $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, kjer je $r < C$. Če bi bilo takih λ več, bi takoj prišli v protislovje z neenačbo (15.) Prav tako pa vidimo, da je samo končno mnogo λ te zaznamujmo, urejene po velikosti, z $\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \dots, \lambda_s$, pri katerih leži $|a(\lambda)|$ med $\frac{1}{2}$ in 1. Isto velja za tiste λ , kjer je $|a(\lambda)|$ med $\frac{1}{4}$ in $\frac{1}{2}$. Če tako nadaljujemo, bo prišel očitno vsak od nič različen $a(\lambda)$ sčasoma na vrsto. Torej je res takih eksponentov $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ kvečjemu števno neskončno mnogo. Seveda imata v splošnem dve različni funkciji različne eksponente λ .

Če sedaj formalno tvorimo vsoto $\sum a(\lambda) e^{i\lambda x}$, ki se nanaša na vse Fourierove eksponente $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ funkcije $f(x)$, imenujemo to vrsto *Fourierovo vrsto quasiperiodične funkcije* $f(x)$, ne glede na to ali je vrsta konvergentna ali divergentna. Pripadnost vrste funkciji $f(x)$ zapišemo v obliki

$$f(x) \sim \sum a(\lambda) e^{i\lambda x}, \quad \lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots \quad (16)$$

Tudi če vrsta na desni konvergira, še ni rečeno, da je njena vsota ravno $f(x)$.

* Z zvezdico je tu zaznamovana konjugirano kompleksna vrednost, na primer $f^*(x) = u(x) - iv(x)$, če je $f(x) = u(x) + iv(x)$.

Pri periodični funkciji $f(x)$ se njena Fourierova vrsta ujema s Fourierovo vrsto v navadnem smislu. To ni samo ob sebi umevno, pač pa kaj lahko dokažemo. Naj ima $f(x)$ kar periodo 2π . Že zgoraj smo spoznali, da se za $\lambda =$ celo število koeficient $a(\lambda)$ ujema s Fourierovim koeficientom α_n [glej enačbo (12*)]. Dokazati je le še treba, da je za vsak drug λ pripadajoči $a(\lambda)$ enak nič. V formuli

$$a(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2n\pi} f(x) e^{-i\lambda x} dx$$

smemo vzeti za n celo število. Integral na desni, ki ima meje 0 in $2n\pi$, razstavimo v vsoto n integralov z mejami $(0, 2\pi)$, $(2\pi, 4\pi)$, ... $[2(n-1)\pi, 2n\pi]$. Če vpeljemo v te integrale novo spremenljivko tako, da je potem spodnja meja nič, dobimo

$$\int_0^{2n\pi} f(x) e^{-i\lambda x} dx = [1 + e^{-2\pi i \lambda} + \dots + e^{-2\pi i (n-1) \lambda}] \int_0^{2\pi} f(x) e^{-i\lambda x} dx$$

Faktor pri integralu na desni je vsota geometričnega zaporedja, ki jo lahko pišemo v obliki $(1 - e^{-2\pi i n \lambda}) / (1 - e^{-2\pi i \lambda})$. Ker λ ni celo število, je $e^{-2\pi i \lambda} \neq 1$. Koeficient $a(\lambda)$ dobimo, če gornji izraz delimo še z $2n\pi$ in večamo n preko vsake meje. Ker limitira kvocient $(1 - e^{-2\pi i n \lambda}) / 2n\pi$ proti nič za $n \rightarrow \infty$, je res $a(\lambda) = 0$. Fourierova vrsta v novem smislu je za periodične funkcije ista kakor Fourierova vrsta v navadnem smislu. Tu so Fourierovi eksponenti $2n\pi$ z $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ in tvorijo aritmetično zaporedje. Iz izreka o enoličnosti razvoja v Fourierovo vrsto lahko sklepamo, da je tudi narobe vsaka quasiperiodična funkcija, katere eksponenti tvorijo aritmetično zaporedje, periodična funkcija.

Ti izsledki kažejo, da je mogoče tudi quasiperiodično funkcijo v nekem smislu razstaviti na sama harmonična nihanja. Pripadajoče frekvence pa niso v tako preprosti zvezi kakor pri periodičnih funkcijah. Za eksponente $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ smemo namreč vzeti poljubno števno množico, celo tako, ki je povsod gosta za $-\infty < \lambda < \infty$. V vsakem primeru je mogoče najti quasiperiodično funkcijo, ki ima te λ za Fourierove eksponente. Kajti če izberemo koeficiente $a(\lambda)$ tako, da je vrsta $\sum a(\lambda) e^{i\lambda x}$ enakomerno konvergentna, je njena vsota quasiperiodična funkcija, ki ima eksponente λ_n in nobenega drugega. To vidimo takoj od tod, ker je srednja vrednost enakomerno konvergentne vrste quasiperiodičnih funkcij vsota srednjih vrednosti posameznih členov. Vrsta $\sum a(\lambda) e^{i\lambda x}$ pa je očitno enakomerno konvergentna, če postavimo kar $a(\lambda_n) = 2^{-n}$ za vsak n .

5. V tej zvezi se vsiljujejo razna vprašanja. Prav gotovo ni Fourierova vrsta za vsako quasiperiodično funkcijo konvergentna, saj ni že v periodičnem primeru. Toda ali Fourierova vrsta sama, čeprav mogoče ni konvergentna, določa funkcijo $f(x)$, to se pravi, ali moreta imeti dve quasiperiodični funkciji isto Fourierovo vrsto? Diferenci $f(x) - g(x)$ dveh quasiperiodičnih funkcij pripada Fourierova vrsta, ki jo očitno dobimo tako, da formalno odštejemo vrsto funkcije $f(x)$ od vrste funkcije $g(x)$.

Diferenca dveh funkcij z isto Fourierovo vrsto ima zato vse Fourierove koeficiente nič. Odgovor na gornje vprašanje daje potem tale izrek:

Če ima quasiperiodična funkcija $f(x)$ vse Fourierove koeficiente $a(\lambda)$ nič, je $f(x) = 0$ za vsak x .

Od tod imamo takoj izrek o enoličnosti razvoja v Fourierovo vrsto.

Dvema različnima quasiperiodičnima funkcijama pripadata vedno dve različni Fourierovi vrsti.

Iz neenačbe (15), ki velja za poljubno mnogo Fourierovih koeficientov $a(\lambda)$ funkcije $f(x)$, sklepamo, da je vrsta

$$|a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2 + \dots, \quad a_k = a(\lambda_k)$$

ki se nanaša na vse eksponente $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ funkcije $f(x)$, konvergentna, saj ima samo pozitivne člene in so njene delne vsote navzgor omejene. Tudi v limiti velja, da njena vsota ni večja od srednje vrednosti $M\{|f(x)|^2\}$. Če Fourierova vrsta funkcije $f(x)$ enakomerno konvergira proti $f(x)$, torej $s(x) \rightarrow f(x)$, kjer je $s(x)$ trigonometrični polinom (13), potem je tudi $M\{|f(x) - s(x)|^2\} \rightarrow 0$. Razlika med desno in levo stranjo v neenačbi (15) pa je ravno $M\{|f(x) - s(x)|^2\}$. Zato je v tem primeru

$$|a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2 + \dots = M\{|f(x)|^2\} \quad (17)$$

če se na levi razteza vrsta na vse Fourierove koeficiente funkcije $f(x)$. Naravna je sedaj domneva, da velja enačba (17) v vsakem primeru. Izkaže se, da je res tako.

Za periodično funkcijo $f(x)$ zaznamujmo Fourierove koeficiente z a_n , $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Enačba (17) preide v tako imenovano Parsevalovo enačbo

$$|a_0|^2 + |a_1|^2 + |a_{-1}|^2 + |a_2|^2 + |a_{-2}|^2 + \dots = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$$

ki velja pri zelo splošnih pogojih, saj niti ni treba, da je funkcija $f(x)$ zvezna, da le eksistira integral na desni. Zato imenujemo tudi za quasiperiodično funkcijo $f(x)$ enačbo (17) Parsevalovo enačbo.

Izrek o enoličnosti in Parsevalova enačba sta ekvivalentna v tem smislu, da sta ali oba veljavna ali oba neveljavna. Vzemimo namreč, da je enačba (17) pravilna. Če je $f(x)$ taka quasiperiodična funkcija, ki ima vse Fourierove koeficiente $a(\lambda) = 0$, dobimo iz (17), da je $M\{|f(x)|^2\} = 0$. Od tod pa ni težko dokazati, da je identično $f(x) = 0$. Tudi narobe izhaja iz izreka o enoličnosti Parsevalova enačba. Dokaz pa je v tem primeru bolj zamotan.

Izrek o enoličnosti leži precej globoko. Doslej poznamo že mnogo različnih dokazov, ki so pa vsi preveč komplicirani za naš članek.

Za konec si še oglejmo Fourierovo vrsto v nekem posebnem primeru. Spoznali smo že, da more imeti quasiperiodična funkcija za eksponente λ še zelo poljubno števno množico števil. V periodičnem primeru tvorijo λ aritmetično zaporedje, v splošnem pa so poljubno posejani. Vzemimo sedaj tako quasiperiodično funkcijo $f(x)$, pri kateri so ti eksponenti vsi med seboj linearno neodvisni. Tu imenujemo realna števila $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$, ki jih je lahko končno ali neskončno mnogo, linearno odvisna, če je med njimi kaka zveza z obliko

$$n_1 \lambda_1 + n_2 \lambda_2 + \dots + n_k \lambda_k = 0 \quad (18)$$

kjer so $n_1, n_2, \dots, n_k$ cela števila, ki niso vsa enaka 0. V enačbi (18) je samo končno mnogo izmed gornjih števil λ . V nasprotnem primeru, ko take zveze ni, so $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ linearno neodvisni. Tu je enačba oblike (18) mogoča le, če so vsi $n_p = 0$. Tako sta n. pr. števili 1 in e (osnova naravnih logaritmov) linearno neodvisni, ker ni nikdar $n_1 + n_2 e = 0$, saj bi bilo v nasprotnem primeru e racionalno število. Če so $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ linearno neodvisni, med njimi očitno ni števila 0, ker bi bila sicer enačba (18) izpolnjena s poljubnim n_1 in $n_2 = n_3 = \dots = n_k = 0$.

Naj bo torej $f(x)$ taka quasiperiodična funkcija, pri kateri so eksponenti $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ linearno neodvisni. Ustrezne Fourierove koeficiente zaznamujmo z $a_1, a_2, \dots$, tedaj $a_n = a(\lambda_n)$. Naj bo splošno $a = |a| e^{iv}$ kjer je v smerni kot kompleksnega števila a . Koeficientu a_k pripadajoči v naj ima indeks k , torej v_k . Funkcija

$$k(x) = 1 + \frac{1}{2} (e^{-ix} + e^{ix}) = 1 + \cos x$$

ni nikjer negativna. Vzemimo sedaj nekaj eksponentov $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ in tvorimo produkt

$$K_n(x) = \prod k(\lambda_r x + v_r), \quad r = 1, 2, \dots, n$$

kjer je v_r koeficientu a_r pripadajoči smerni kot. Če razvijemo $K_n(x)$, dobimo

$$K_n(x) = 1 + \frac{1}{2} \sum e^{-i\lambda x} e^{-iv} + R_n(x) \quad (19)$$

Vsota na desni se razteza na $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, R_n(x)$ pa je trigonometrični polinom z obliko $\sum c_\lambda e^{i\lambda x}$. Eksponenti λ so tu bodisi števila $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, bodisi vsota ali diferenca dveh ali več izmed teh števil. Ker so $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ linearno neodvisni, ni nobeden od teh eksponentov λ enak 0 ali $-\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3, \dots$. Zato je za vse te λ vedno $M\{f(x)e^{i\lambda x}\} = 0$. Od tod imamo po znanem pravilu za srednjo vrednost vsote

$$M\{f(x)K_n(x)\} = \frac{1}{2} (|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|)$$

Tu smo upoštevali, da je $M\{f(x)\} = 0$, ker $\lambda = 0$ ni Fourierov eksponent funkcije $f(x)$ in je zato pripadajoči koeficient enak 0. Nadalje je $M\{f(x)e^{-i\lambda_k x} e^{-iv_k}\} = a_k \cdot e^{-iv_k} = |a_k|$. Imamo pa povsod $|f(x)| \leq A$ in $K_n(x) \geq 0$. Velja tedaj ocena

$$|M\{f(x)K_n(x)\}| \leq AM\{K_n(x)\}$$

kar se takoj vidi iz definicije srednje vrednosti. Enačba (19) pa da $M\{K_n(x)\} = 1$, torej je

$$|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| < 2A$$

Ta ocena pove, da je vrsta $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ absolutno konvergentna in je zato Fourierova vrsta funkcije $f(x)$

$$a_1 e^{i\lambda_1 x} + a_2 e^{i\lambda_2 x} + a_3 e^{i\lambda_3 x} + \dots$$

enakomerno konvergentna. Njena vsota je taka quasiperiodična funkcija, ki ima iste eksponente in koeficiente kakor $f(x)$. Po izreku o enoličnosti Fourierove vrste je ta vsota ravno $f(x)$. Tako smo dobili izsledek:

Vsaka quasiperiodična funkcija, pri kateri so Fourierovi eksponenti linearno neodvisni, se da razviti v enakomerno konvergentno Fourierovo vrsto.

TOPOLOŠKA KLASIFIKACIJA ZAPRTIH PLOSKEV

A. VADNAL

1. Uvodna pojasnila

V naslednjem bomo obravnavali geometrične figure: telesa, ploskve, črte in točke v tridimenzijskem evklidskem prostoru.

Okolica poljubne točke x prostora je vsako telo, v katerem je točka x notranja točka. Okolica poljubne točke x ploskve je vsak lik, ki leži na tej ploskvi in v katerem je točka x notranja točka. Okolica poljubne točke x črte je vsak interval, ki leži na tej črti in v katerem je točka x notranja točka.

Vzemimo dve poljubni geometrični figuri A in B . Figuro A enolično preslikamo ali transformiramo v figuro B , ako priredimo vsaki točki a figure A po eno točko b figure B ; pri tem imenujemo točko b sliko točke a in točko a praslisko točke b . Denimo, da je transformacija taka, da ima vsaka točka b figure B v figuri A neko praslisko; ako priredimo vsaki točki b figure B njeno praslisko v figuri A , tedaj transformiramo figuro B v figuro A . Ta transformacija je prvotni transformaciji obratna. Transformacija je obratno enolična, ako je sama enolična in ako je njej ustrezna obratna transformacija tudi enolična.

Transformacija figure A v figuro B je zvezna v določeni točki a figure A , ako eksistira v vsaki okolici $O(b)$ točke b , ki je slika točke a , vsaj ena okolica $O(a)$ točke a , katere slika leži v okolici $O(b)$. Transformacija figure A v figuro B je zvezna, ako je zvezna v vseh točkah figure A .

Transformacija figure A v figuro B je topološka, ako je obratno enolična in obenem s svojo obratno transformacijo zvezna. Potemtakem je transformacija figure A v figuro B topološka, ako je obenem s svojo obratno transformacijo enolična in ako prevede vsako okolico poljubne točke v okolico njene slike.

Topološko transformacijo figure si moremo včasih ponazoriti z ustrezno deformacijo figure; pri taki deformaciji pa ne sme nikjer priti do kakega pretrganja figure ali pa do zgnetenja več točk v eno točko. Tako je n. pr. mogoče topološko transformirati polno kocko v polno kroglo; tej transformaciji ustreza pregnetenje kocke v kroglo. Vsaka deformacija pa seveda ni topološka transformacija! Tako n. pr. lahko pregnetemo polno kroglo v poln torus; ta transformacija pa nikakor ni topološka, ker ni zvezna, saj moramo v kroglo napraviti luknjo. Pa tudi vsake topološke transformacije v tridimenzijskem evklidskem prostoru ne moremo realizirati s kako deformacijo! Tako moremo n. pr. zavozlano zanko topološko transformirati v krožnico, nikakor je pa ne moremo v tridimenzijskem evklidskem prostoru razvozlati s kako deformacijo brez pretrganja. Razlika med zavozlano zanko in krožnico je namreč v tem, kako sta obe sklenjeni krivulji vloženi v prostor.

Dve geometrični figuri, ki ju moremo transformirati drugo v drugo s kako topološko transformacijo, sta homeomorfni. Homeomorfne so n. pr. naslednje figure: polna krogla, kocka, poln stožec, polna piramida in vsako polno telo, ki nima nobene luknje. Nadalje so tudi homeomorfne

naslednje figure: poln svitek, poročni prstan, polna kroglja z eno ročko in vsako polno telo, ki ima samo eno luknjo.

Pri topološki transformaciji se nekatere lastnosti geometrične figure spremenijo, nekatere pa ne. Spremenijo se predvsem oblika in metrične lastnosti figure. Tiste lastnosti figure, ki se pri topoloških transformacijah ohranjajo, imenujemo **topološke invariante**. Topološke invariante so n. pr. sklenjenost zanke, zaprtost ploskve, dimenzija figure itd.

Med najvažnejšimi nalogami topologije je ugotavljanje topoloških invariant in dokazovanje njih invariantnosti, nadalje ugotavljanje in dokazovanje homeomorfnosti ali nehomeomorfnosti dveh geometričnih figur itd. Geometrične figure je mogoče klasificirati v posamezne razrede homeomorfnih figur tako, da sta po dve nehomeomorfni figuri v različnih razredih. Topologije ne zanimajo metrični odnosi geometričnih figur in zato tudi ne pozna nobene metrike. Zaradi tega je s topološkega vidika prav vseeno, kakšne so metrične razsežnosti geometričnih figur. Homeomorfnost igra v topologiji podobno vlogo kakor skladnost v elementarni geometriji. Kakor ne razlikujemo z vidika elementarne geometrije skladnih figur, tako ne razlikujemo s topološkega vidika homeomorfnih figur.

V naslednjem bomo obravnavali geometrične figure z vidika njihovih topoloških lastnosti, ne upoštevajoč pri tem, kako so te figure vložene v tridimenzionalni evklidski prostor. S tega vidika n. pr. ne bomo razlikovali navadnega svitka od enkrat ali večkrat zavozlanega svitka.

Oglejmo si še en proces, ki je v topologiji izredno važen: **identifikacijo**! Identifikacijo geometričnih figur imenujemo proces, pri katerem identificiramo dve ali več figur, ki jih imamo po identifikaciji za isto figuro. Nazorno si identifikacijo ponazorimo z zlepljenjem identificiranih figur. Ako v geometrični figuri identificiramo dve ali več njenih točk, črt ali ploskev, dobimo neko novo figuro, ki se očitno od prvotne figure topološko razlikuje. Ako identificiramo vse točke krožnice nekega kroga, dobimo kroglo (ploskev). Ako identificiramo v kvadratu dve nasprotni stranici, dobimo plašč valja; ako v tem plašču zopet identificiramo oba roba, dobimo torus (ploskev).

Ploskev je **zaprtá**, ako ima vsaka njena točka vsaj eno okolico, ki je homeomorfna notranjosti kroga. Zaprta ploskev ima samo notranje točke, nima pa nobene robne točke. Primeri zaprtih ploskev so: površje krogle, kocke, torusa in vsakega realnega telesa. Kljub temu, da so zaprte ploskve zelo raznolike, jih je vendarle že uspelo s topološkega vidika klasificirati in jih sistematično urediti v posamezne razrede homeomorfnih zaprtih ploskev.

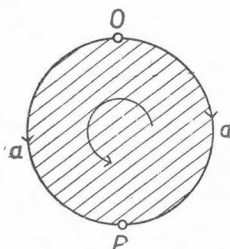
Ker bomo v naslednjem obravnavali samo ploskve, bomo z določenim izrazom za geometrično figuro imenovali površje te figure. V naslednjem torej pomeni kroglja krogelno ploskev, kocka kockino površje itd.

2. Fundamentalni mnogokotniki nekaterih zaprtih ploskev

Zaprte ploskve študiramo s pomočjo **fundamentalnih mnogokotnikov**, ki ustrezajo tem ploskvam. V naslednjem bomo na enostavnih primerih pokazali, kako dobimo določeni zaprti ploskvi ustrezni fundamentalni mnogokotnik.

1. *Krogla*. Vzemimo na krogli dve diametralni točki O in P ter ju zvežimo z meridianom a , ki ga orientiramo tako, da ima smer od O do P . Ako prerežemo kroglo po meridianu a in jo razgrnemo (topološko transformiramo) na ravnino, dobimo dvokotnik z ogliščema O in P in z dvema stranicama a , ki sta orientirani in identični. Ta dvokotnik je fundamentalni mnogokotnik krogle in je krogli očitvidno homeomorfen. Predpišimo dvokotniku določeno orientacijo, in sicer tako, kakor je označena na sliki 1. Fundamentalnemu dvokotniku ustreza neka shema njegovih stranic, ki jo dobimo takole: Od začetne točke O dvokotnika obidemo rob dvokotnika in zapišemo zaporedoma obe stranici roba; pri tem označimo vsako stranico z eksponentom $+1$ ali -1 ; stranico označimo z eksponentom $+1$ (ki ga pa običajno izpuščamo), ako se njena orientacija ujema z orientacijo dvokotnika, z eksponentom -1 pa jo označimo, ako je njena orientacija nasprotna orientaciji dvokotnika. Potemtakem je

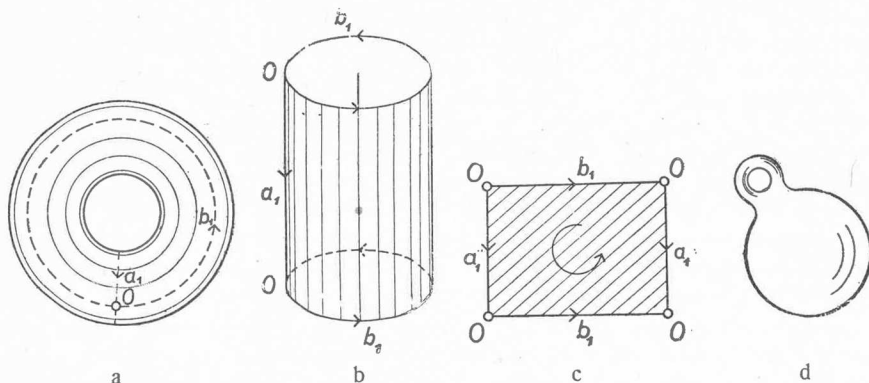
$$a a^{-1}$$



Sl. 1. Krogla

shema fundamentalnega mnogokotnika krogle. Navedeno shemo imajo fundamentalni mnogokotniki vseh zaprtih ploskev, ki so homeomorfne krogli, to je vseh krogel, kock in površij sploh vseh teles, ki so homeomorfna polni krogli.

2. *Torus*. Na torusu izberemo poljubno točko O ter potegnemo skozi njo meridian a_1 in vzporednik b_1 , ki ju orientiramo tako, kakor kaže slika 2 a. Ako prerežemo torus vzdolž vzporednika in ga zravnamo



Sl. 2. Torus

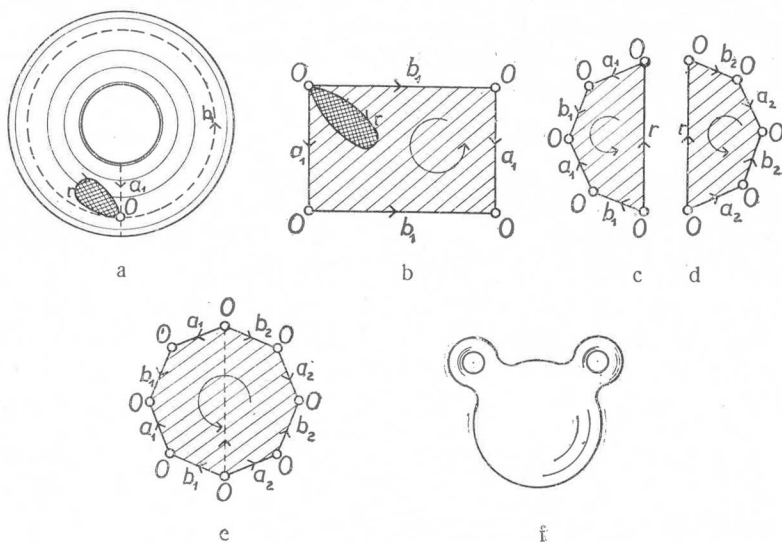
(topološko transformiramo), dobimo plašč valja, katerega robova sta identična in orientirana tako, kakor kaže slika 2 b. Ako nadalje prerežemo plašč valja vzdolž meridiana in ga razgrnemo (topološko transformiramo) na ravnino, dobimo četverokotnik na sliki 2 c, ki ima štiri identična oglišča O , dve identični stranici a_1 in dve identični stranici b_1 . Ta četverokotnik je fundamentalni mnogokotnik torusa in je torusu homeomorfen. Zato, da dobimo temu četverokotniku ustrezno shemo, ga najprej

orientirajmo tako, kakor se vidi na sliki 2 c. Po obhodu roba četverokotnika dobimo shemo:

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}$$

To shemo imajo fundamentalni mnogokotniki vseh zaprtih ploskev, ki so homeomorfne torusu, t. j. krogel z eno ročko (glej sliko 2 d) in površij sploh vseh teles, ki imajo po eno samo luknjo.

3. *Krogla z dvema ročkama.* Vzemimo, kakor prej, torus in izrežimo iz njega okroglo ploskvico tako, da gre zareza skozi točko O ; tako dobimo neko ploskev, ki ni več zaprta, ampak ima rob r , ki je tako orientiran kakor kaže slika 3 a. Tej ploskvi ustreza fundamentalni četverokotnik, iz katerega je izrezana ploskvica, ki jo omejuje rob r (slika 3 b). Preostala ploskev je homeomorfna peterokotniku na sliki 3 c, ki ima



Sl. 3. Krogla z dvema ročkama

pri dani orientaciji peterokotnika shemo: $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} r$. Vzemimo še en torus, iz katerega je prav tako izrezana okrogla ploskvica in ki naj mu ustreza fundamentalni peterokotnik na sliki 3 d s shemo: $r^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}$. Ako prilepimo oba torusa skupaj tako, da se pokrijeta njuni izrezani ploskvici, dobimo neko zaprto ploskev, ki ima dve luknji. To zlepljenje pomeni v fundamentalnih mnogokotnikih identifikacijo obeh robov r . Po identifikaciji teh dveh robov dobimo en sam mnogokotnik, ki ima, kakor se vidi na sliki 3 e, 8 identičnih oglišč O , 4 pare identičnih stranic a_1, a_2, b_1, b_2 in shemo:

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}$$

Ta fundamentalni mnogokotnik je homeomorfen dvojnemu torusu, krogli z dvema ročkama (slika 3 f) in površju sploh vsakega telesa, ki ima dve luknji.

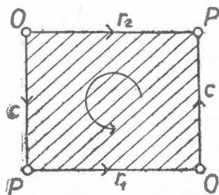
4. *Krogla z n ročkami.* Ako napravimo v krogli z dvema ročkama okroglo zarezo in nanjo prilepimo torus z enako zarezo na površini,

dobimo sfero s tremi ročkami. Ako ta postopek ponavljamo, dobivamo zaporedoma krogle z vedno večjim številom ročk. Po $n-1$ korakih dobimo kroglo z n ročkami, ki ima fundamentalni mnogokotnik s shemo:

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$$

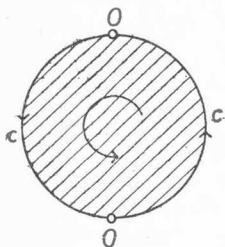
Vse ploskve, ki smo jih doslej obravnavali, so orientirane. Orientirana ploskev ima dve strani in s prve strani ni mogoče priti na drugo stran, ne da bi pri tem ne prešli roba ploskve. Na orientirani ploskvi ni mogoče s premikanjem po ploskvi spremeniti orientacije orientiranega lika. Zaprta orientirana ploskev ima dve povsem ločeni strani: notranjo in zunanjo stran.

Poleg orientiranih ploskev eksistirajo še neorientirane, ki se od orientiranih bistveno razlikujejo. Na neorientirani ploskvi je mogoče orientirati lik po ploskvi tako premakniti, da spremeni svojo orientacijo. Neorientirana ploskev ima samo eno stran; iz poljubne točke na neorientirani ploskvi moremo priti v antipodno točko na ploskvi, ne da bi bilo pri tem treba preiti rob ploskve. Pri zaprti neorientirani ploskvi ne razlikujemo zunanosti in notranosti ploskve. V naslednjem navajamo nekaj posebno enostavnih neorientiranih ploskev.



Sl. 4. Möbiusov list

1. *Möbiusov list.* Vzemimo fundamentalni pravokotnik, ki ima shemo $c r_1 c r_2^{-1}$ in ki je narisana na sliki 4. Ako zlepimo na sliki navedene identične elemente, dobimo neko ploskev, ki ni zaprta, ker ima rob, ki je homeomorfen krožnici. To ploskev imenujemo Möbiusov list. Möbiusov list si prav lahko ponazorimo s papirnatim trakom, ki mu zlepimo oba konca, potem ko smo en konec zavili za 180° . Na tem modelu prav lahko preverimo prej navedene lastnosti neorientiranih ploskev.



Sl. 5. Projektivna ravnina

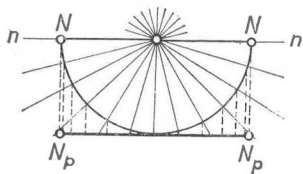
2. *Projektivna ravnina.* Ker je Möbiusov list odprta ploskev, katere rob je homeomorfen krožnici, ga moremo zapreti tako, da prilepimo na njegov rob krožnico kakega kroga. Tako dobimo neko zaprto ploskev; te ploskve pa ni mogoče vložiti v tridimenzionalni evklidski prostor tako, da bi sama sebe ne sekala. Ako zapremo Möbiusov list s krogom, izgineta njegova roba r_1 in r_2 in dobimo zaprto ploskev, katere fundamentalni mnogokotnik je dvokotnik na sliki 5. Ta dvokotnik ima shemo: $c c$

Zaprta Möbiusov list je homeomorfen projektivni ravnini; homeomorfnost projektivne ravnine in zaprtega Möbiusovega lista ugotovimo s pomočjo slike 6, ki upodablja ravninski presek tridimenzionalnega evklidskega prostora.

Projektivno ravnino dobimo iz evklidske ravnine tako, da izpopolnimo evklidsko ravnino z neskončno oddaljeno premico. Ako vzamemo na projektivni ravnini kak projektivni koordinatni sistem, ustreza obratno enolično vsaki točki projektivne ravnine po eno razmerje treh realnih števil $x_1 : x_2 : x_3$, pri čemer je izvzeto razmerje $0 : 0 : 0$. Ako

imamo trojice števil x_1 , x_2 in x_3 za navadne kartezične koordinate točk tridimenzionalnega evklidskega prostora, tedaj ustreza obratno enolično in zvezno vsaki točki projektivne ravnine po ena premica, ki gre skozi koordinatno izhodišče tridimenzionalnega prostora. Vse te premice tvorijo torej snop s središčem v koordinatnem izhodišču.

Vzemimo kroglo, ki ima svoje središče v središču snopa. Vsaka premica snopa seka kroglo v dveh diametralnih točkah. Vsaki premici snopa ustreza obratno enolično in zvezno po en par diametralnih točk. Ako imamo po dve in dve diametralni točki za identični, tedaj zadostuje, če obravnavamo samo spodnjo polovico krogle, na kateri pa so diametralne točke na ekvatorju identificirane. Premicam šopa ustrežajo torej obratno enolično in zvezno točke na polkrogli, na kateri so diametralne točke na ekvatorju identificirane.



Sl. 6. Homeomorfnost snopa premic in zaprtega Möbiusovega lista

Tega pa sledi, da je projektivna ravnina homeomorfna zaprtemu Möbiusovemu listu. Zaradi tega ima projektivna ravnina fundamentalni mnogokotnik, ki je dvokotnik s shemo: $c c$.

Kakor dobimo iz Möbiusovega lista zaprt Möbiusov list ali projektivno ravnino tako, da prilepimo na njegov rob rob lika, ki je homeomorfen krogu, dobimo obratno iz zaprtega Möbiusovega lista ali iz projektivne ravnine Möbiusov list tako, da iz zaprtega Möbiusovega lista ali iz projektivne ravnine kjerkoli izrežemo ploskev, ki je homeomorfna krogu.

3. *Kleinova steklenica*. Vzemimo zaprt Möbiusov list, ki ima shemo $c_1 c_1$ in katerega fundamentalni mnogokotnik je dvokotnik na sliki 7 a! Ako izrežemo iz tega fundamentalnega dvokotnika krog, ki ima rob r in ki gre skozi oglišče O , dobimo odprto ploskev s fundamentalnim trikotnikom na sliki 7 b in s shemo $c_1 c_1 r$. Vzemimo še en zaprt Möbiusov list, katerega fundamentalni dvokotnik ima shemo $c_2 c_2$ ter izrežimo iz njega krog z robom r ! Tej odprti ploskvi ustreza fundamentalni trikotnik na sliki 7 c, ki ima shemo $r^{-1} c_2 c_2$. Ako zlepimo obe ploskvi tako, da se njuni izrezani ploskvi pokrijeta, dobimo neko zaprto ploskev, ki ima fundamentalni četverokotnik na sliki 7 d s shemo:

$$c_1 c_1 c_2 c_2$$

To ploskev imenujemo Kleinovo steklenico, ki si jo nazorno predstavimo takole: V fundamentalnem četverokotniku na sliki 7 d potegnemo orientirano diagonalo d in prerežemo četverokotnik vzdolž te diagonale. Dobljena trikotnika zlepimo vzdolž identičnih stranic c_2 in dobimo fundamentalni četverokotnik na sliki 7 e, ki ima shemo $c_1 d c_1^{-1} d$. Ako zlepimo identični stranici c_1 , dobimo plašč valja na sliki 7 f. Ako zlepimo nadalje še identična roba tega plašča, upoštevajoč pri tem orientaciji robov,

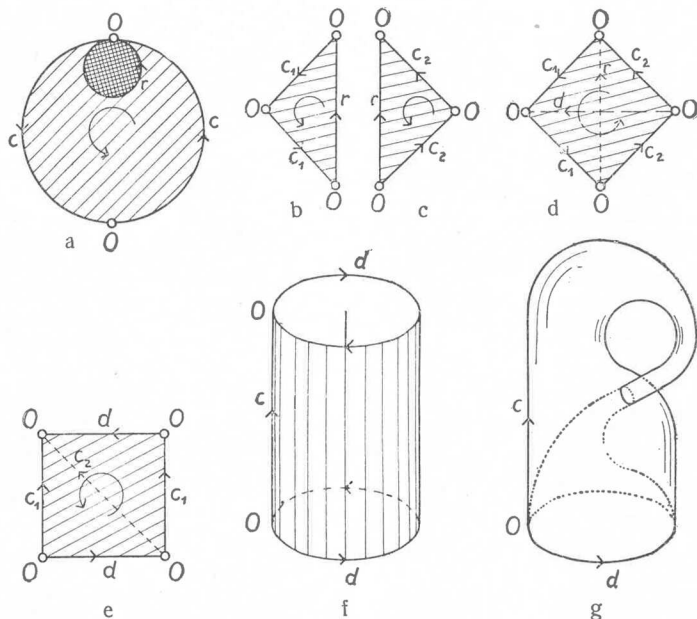
dobimo Kleinovo steklenico na sliki 7 g. Kleinove steklenice ni mogoče vložiti v tridimenzionalni evklidski prostor tako, da bi sebe ne sekala.

4. *Zaprta ploskev z n Möbiusovimi listi.* Ako napravimo na Kleinovi steklenici okroglo zarezo in prilepimo nanjo Möbiusov list, dobimo zaprto ploskev s tremi Möbiusovimi listi. Shemo fundamentalnega mnogokotnika te ploskve dobimo tako, da shemo prvotne ploskve dopolnimo s shemo prilepljenega lista.

Ako ta postopek ponavljamo, dobivamo zaporedoma zaprte ploskve z vedno večjim številom Möbiusovih listov. Po $n-1$ korakih dobimo zaprto ploskev z n Möbiusovimi listi, katere fundamentalni mnogokotnik ima shemo:

$C_1 C_1 C_2 C_2 C_3 C_3 \dots C_n C_n$

Vsaki zaprti ploskvi moremo prirediti neki njej homeomorfen fundamentalni mnogokotnik, ki ima določeno shemo. V nazornih primerih dobimo fundamentalni mnogokotnik tako, da ploskev primerno razrežemo in topološko razgrnemo na ravnino.



Sl. 7. Kleinova steklenica

3. Sistemi mnogokotnikov

S topološkega vidika je mnogokotnik vsak lik z določenimi oglišči, ki je homeomorfen krogu z ogliščem ustreznimi razdelišči krožnice. Vsak mnogokotnik ima določeno število stranic, ki je enako številu njegovih oglišč. Vsako poljubno končno množico poljubnih mnogokotnikov imenujemo sistem mnogokotnikov. V sistemu mnogokotnikov razlikujemo tri vrste točk: notranje točke, robne točke in oglišča.

Vzemimo sistem mnogokotnikov, ki zadošča naslednjim pogojem:

1. Po dve in dve stranici mnogokotnikov sta identificirani. Zaradi tega nastopa v sistemu mnogokotnikov vsaka stranica dvakrat, ki pa šteje zaradi identifikacije kot ena stranica. Sistem mnogokotnikov ima torej v vsakem primeru sodo število stranic.

2. V sistemu mnogokotnikov more biti identificiranih poljubno število oglišč.

3. Ako zlepimo vse mnogokotnike sistema mnogokotnikov z identifikacijo stranic in oglišč, dobimo en sam mnogokotnik, ne pa dveh ali več ločenih mnogokotnikov.

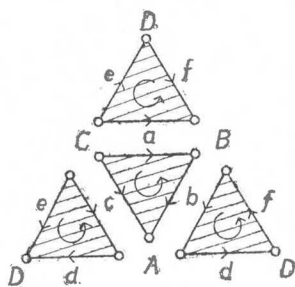
4. V tem zpleljenem mnogokotniku ima vsaka točka mnogokotnika vsaj eno okolico, ki je homeomorfna krogu.

Vsak sistem mnogokotnikov, ki ustreza navedenim pogojem, definira neko zaprto ploskev oziroma neki razred homeomorfnih zaprtih ploskev. Tako definira n. pr. sistem trikotnikov na sliki 8 površje tetraedra oziroma vsako ploskev, ki je homeomorfna kroglu.

Ako označimo v sistemu mnogokotnikov število mnogokotnikov z m , število stranic z s in število oglišč z o , imenujemo število:

$$E = o - s + m$$

Eulerjevo karakteristiko sistema. Ako razgrnemo kocko, tetraeder in oktaeder na ravnino v običajno mrežo, dobimo Eulerjevo



Sl. 8. Tetraeder

karakteristiko za kocko: $8 - 12 + 6 = 2$, za tetraeder: $4 - 6 + 4 = 2$ in za oktaeder: $6 - 12 + 8 = 2$; za torus izračunamo Eulerjevo karakteristiko s pomočjo fundamentalnega četrkotnika na sliki 2c: $1 - 2 + 1 = 0$, za Kleinovo steklenico pa jo izračunamo po sliki 7e: $1 - 2 + 1 = 0$.

Vsakemu mnogokotniku sistema odredimo neko orientacijo, ki označuje smer obhoda po robu mnogokotnika. Tudi vsaka stranica ima določeno orientacijo. Vsakemu mnogokotniku moremo prirediti njegovo shemo, v kateri si slede stranice zaporedoma, kakor si slede na robu mnogokotnika; stranice opremimo v shemi z eksponentom -1 ali $+1$, kakor smo to zgoraj že določili.

V sistemu mnogokotnikov sta identificirani vedno po dve stranici. Pri tem razlikujemo dve bistveno različni možnosti: identificirani stranici imata nasprotna ali pa enaka eksponenta.

Ako imata v vseh identificiranih parih identificirani stranici nasprotna eksponenta, tedaj je ploskev, ki jo definira sistem mnogokotnikov, orientirana. Ako pa nastopita vsaj v enem paru identificiranih stranic obe identificirani stranici z enakima eksponentoma, tedaj je ploskev, ki jo definira sistem mnogokotnikov, neorientirana.

V sistemu mnogokotnikov definiramo naslednje operacije, ki ne spremenijo Eulerjeve karakteristike ploskve, niti njene orientacije, niti njene topološke strukture.

1. *Razdelitev stranice* (slika 9 a). Z razdelitvijo stranice na dve stranici dobimo iz prvotne stranice dve novi stranici in eno vmesno novo oglišče. Orientacija ploskve se pri tem očitno ne spremeni, prav tako pa se tudi ne spremeni Eulerjeva karakteristika, ker pridobimo po eno stranico in po eno oglišče. To operacijo si ponazorimo z nalomljenjem stranice.

2. *Združitev dveh stranic* (slika 9 a). Z združitvijo dveh stranic v eno stranico dobimo iz prvotnih dveh stranic eno samo, izgubimo pa prvotno vmesno oglišče. Orientacija ploskve se pri tem očitno ne spremeni,

prav tako pa se ne spremeni Eulerjeva karakteristika, ker izgubimo po eno stranico in po eno oglišče. To operacijo si ponazorimo z izravnavo dveh stranic.

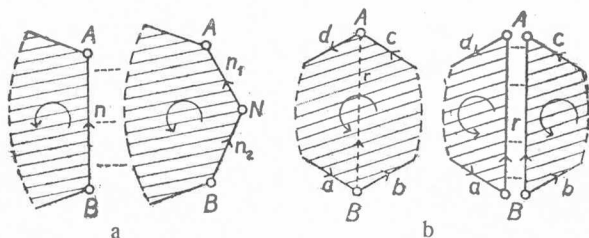
3. *Razdelitev mnogokotnika* (slika 9 b). Z razdelitvijo mnogokotnika na dva mnogokotnika dobimo iz prvotnega mnogokotnika dva nova mnogokotnika in eno novo stranico. Orientacija ploskve se pri tem očitvidno ne spremeni, Eulerjeva karakteristika pa tudi ne, ker pridobimo po en mnogokotnik in po eno stranico. To operacijo si ponazorimo z razrezanjem mnogokotnika na dva mnogokotnika.

4. *Združitev dveh mnogokotnikov* (slika 9 b). Z združitvijo dveh mnogokotnikov vzdolž ene stranice v en mnogokotnik dobimo iz prvotnih dveh mnogokotnikov enega samega, izgubimo pa prvotno vmesno stranico. Tudi tu se ne spremeni niti orientacija ploskve niti Eulerjeva karakteristika, ker izgubimo po en mnogokotnik in po eno stranico. To operacijo si ponazorimo z zlepljenjem dveh mnogokotnikov vzdolž ene stranice.

Z navedenimi operacijami moremo transformirati vsak sistem mnogokotnikov, ki ustreza prej navedenim pogojem, v določen kanonični mnogokotnik, ki mu ustreza določena kanonična shema.

Oglejmo si postopek, s katerim transformiramo poljuben sistem mnogokotnikov v kanonično obliko. Pri tem vseh posameznih korakov pri postopku ne bomo dokazovali. Vzemimo sistem mnogokotnikov, ki ustreza

prej navedenim pogojem in ki definira neki razred homeomorfnih zaprtih ploskev, ter ga transformirajmo v kanonično obliko!



Sl. 9. Operacije s stranicami in mnogokotniki

1. korak. Vse posamezne mnogokotnike sistema združimo v en sam mnogokotnik, ki ima določeno shemo. V tej shemi nastopajo stranice v parih in so opremljene z ustreznimi eksponenti. Glede števila stranic eksistirata dve možnosti: shema ima ali samo dve ali pa večje sodo število stranic. Obravnavajmo najprej prvo možnost! V tem primeru sta tudi samo dve možnosti:

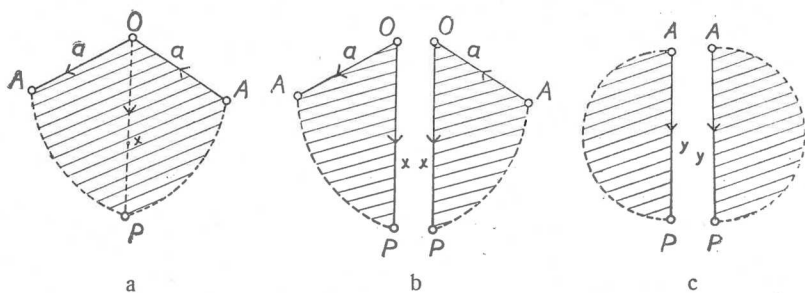
a) Stranici imata nasprotna eksponenta in shema ima obliko aa^{-1} ; v tem primeru definira sistem mnogokotnikov zaprto ploskev, ki je homeomorfná krogli; ploskev je orientirana in ima Eulerjevo karakteristiko: $E = 2 - 1 + 1 = 2$.

b) Stranici imata enaka eksponenta, shema pa obliko cc ; v tem primeru določa sistem mnogokotnikov zaprto ploskev, ki je homeomorfná zaprtemu Möbiusovemu listu ali projektivni ravnini; ploskev je neorientirana in ima Eulerjevo karakteristiko: $E = 1 - 1 + 1 = 1$.

Analizirajmo še drugo možnost, ko ima shema več kot dve stranici!

2. korak. Iz sheme eliminiramo vse skupine tipa aa^{-1} in dobimo tako shemo, v kateri nikjer ne nastopa kaka skupina tega tipa. Posamezne skupine tega tipa eliminiramo takole: Mnogokotnik na sliki 10 a

ima skupino aa^{-1} ; mnogokotnik prerežemo vzdolž diagonale x in dobimo dva mnogokotnika (slika 10 b). Po združitvi stranic a in x dobimo mnogokotnika na sliki 10 c. Po združitvi teh dveh mnogokotnikov vzdolž stranic y dobimo mnogokotnik, v katerem ne nastopa več skupina tipa aa^{-1} .



Sl. 10. Eliminiranje skupine aa^{-1} .*

3. k o r a k. V mnogokotniku eliminiramo razen enega vsa druga oglišča; tako dobimo mnogokotnik s samo enim ogliščem. Tak mnogokotnik dobimo v nazornih primerih, če razrežemo zaprto ploskev s samimi takimi rezi, ki izhajajo iz ene same točke, in nato ploskev razgrnemo na ravnino.

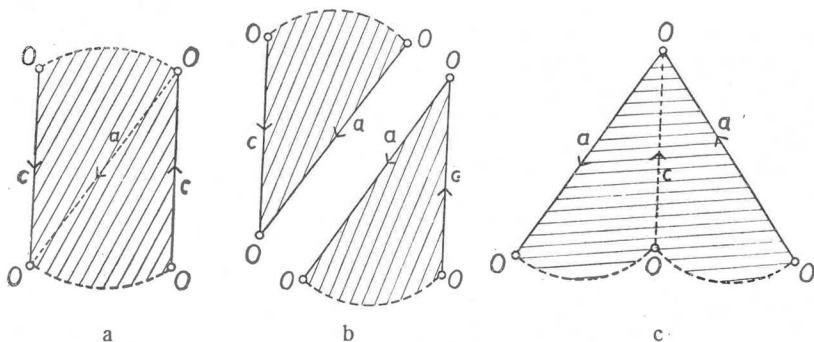
4. k o r a k. V shemi ločimo vse Möbiusove liste, seveda pri pogoju, da ti sploh eksistirajo, t. j. ako je ploskev neorientirana. Denimo torej, da ima mnogokotnik shemo:

$\dots c \dots c \dots$

v kateri sta stranici c in c ločeni z drugimi stranicami. To shemo je vedno mogoče transformirati v obliko:

$c c \dots$

v kateri sta stranici c in c skupaj in ločeni od drugih stranic. V ta namen transformiramo mnogokotnik, kakor se vidi na sliki 11 takole:



Sl. 11. Ločitev Möbiusovih listov

Mnogokotnik (slika 11 a), ki ima dve ločeni stranici c in c , prerežemo vzdolž stranice a in dobimo dva mnogokotnika (slika 11 b). Ta dva mnogokotnika združimo vzdolž stranice c in dobimo mnogokotnik, ki ima shemo $aa \dots$ (slika 11 c).

* (Popravek: stranica a na desni strani slik a in b je nasprotno orientirana.)

Ako je shema taka, da vsebuje izključno samo pare stranic z enakimi eksponenti, tedaj je mogoče posamezne pare stranic ločiti in prevesti shemo v obliko:

$$C_1 C_1 C_2 C_2 \dots C_n C_n$$

V tem primeru imamo opraviti s sistemom mnogokotnikov, ki definira zaprto ploskev, ki ima n Möbiusovih listov; ploskev je neorientirana in ima Eulerjevo karakteristiko: $E = 1 - n + 1 = 2 - n$. Pri tem je lahko n poljubno naravno število.

5. k o r a k. V shemi ločimo vse ročke, seveda pri pogoju, da te sploh eksistirajo. Vzemimo, da ima shema obliko:

$$\dots a \dots b^{-1} \dots b \dots a^{-1} \dots$$

v kateri nastopata vsaj dva para stranic z nasprotnimi eksponenti. To shemo je vedno mogoče transformirati v shemo:

$$a b a^{-1} b^{-1} \dots$$

v kateri so navedene štiri stranice ločene od drugih stranic. Ako ima shema izključno samo take četvorice stranic, tedaj je mogoče ločiti vsako tako četvorico in shema preide v obliko:

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$$

V tem primeru imamo opraviti s sistemom mnogokotnikov, ki definira zaprto ploskev, ki je homeomorfna krogli z n ročkami; ploskev je orientirana in ima Eulerjevo karakteristiko $E = 1 - 2n + 1 = 2(1 - n)$. Pri tem je n poljubno naravno število. Ako je $n = 1$, tedaj je ploskev homeomorfna torusu ali krogli z eno ročko; ta ploskev je orientirana in ima Eulerjevo karakteristiko $E = 1 - 2 + 1 = 0$. Ako je $n = 2$, tedaj je ploskev homeomorfna dvojnemu torusu ali krogli z dvema ročkama; ta ploskev je orientirana in ima Eulerjevo karakteristiko $E = 1 - 4 + 1 = -2$.

6. k o r a k. Na neorientiranih ploskvah substituiramo ročke z Möbiusovimi listi. Ako ima ploskev poleg ročk vsaj en Möbiusov list, ako ima torej njena shema obliko:

$$\dots a b a^{-1} b^{-1} \dots c c \dots$$

tedaj je vedno mogoče substituirati ročko z dvema Möbiusovima listoma in transformirati shemo v obliko:

$$\dots e e f f \dots c c \dots$$

V tem primeru imamo opraviti s sistemom mnogokotnikov, ki definira neko neorientirano zaprto poskev, ki ima določeno število Möbiusovih listov. Ta primer smo že obravnavali pri 4. koraku. Ta ploskev ima torej shemo:

$$C_1 C_1 C_2 C_2 \dots C_n C_n$$

je neorientirana in ima Eulerjevo karakteristiko $E = 1 - n + 1 = 2 - n$. Ako je $n = 1$, tedaj je ploskev homeomorfna projektivni ravnini; ta ploskev je neorientirana in ima Eulerjevo karakteristiko $E = 1 - 1 + 1 = 1$. Ako je $n = 2$, tedaj je ploskev homeomorfna Kleinovi stekle-

nici; ta ploskev je neorientirana in ima Eulerjevo karakteristiko $E = 1 - 2 + 1 = 0$.

Ker smo s tem izčrpali vse možnosti, je mogoče prevesti vsak sistem mnogokotnikov, ki ustreza prej navedenim pogojem, v kanonični mnogokotnik, ki mu ustreza ena izmed naslednjih kanoničnih shem:

$$a a^{-1},$$

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$$

$$c_1 c_1 c_2 c_2 c_3 c_3 \dots c_n c_n$$

pri čemer je n lahko poljubno naravno število. Vsaki izmed teh shem ustreza določena Eulerjeva karakteristika in pri vsaki izmed teh shem gre ali za orientirano ali pa za neorientirano ploskev. Zaradi tega sledi izrek:

Dva sistema mnogokotnikov, ki ustrezata prej navedenim pogojem, definirata dve homeomorfni zaprti ploskvi, ako imata enaki Eulerjevi karakteristiki in sta oba hkrati ali orientirana ali neorientirana.

Iz vsega navedenega sledi, da je mogoče klasificirati vse zaprte ploskve tridimenzionalnega evklidskega prostora v naslednje razrede homeomorfni ploskev:

Kanonična shema fundamentalnega mnogokotnika	Ploskev	Eulerjeva karak- teristika
<i>I. Orientirane zaprte ploskve</i>		
aa^{-1}	krogla	2
$aba^{-1}b^{-1}$	torus, krogla z eno ročko	0
$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots$	krogla z dvema ročkama	-2
$\dots$	$\dots$	$\dots$
$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$	krogla z n ročkami	$2(1 - n)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$
<i>II. Neorientirane zaprte ploskve</i>		
cc	projektivna ravnina	1
$c_1 c_1 c_2 c_2$	Kleinova steklenica	0
$c_1 c_1 c_2 c_2 c_3 c_3$	ploskev s tremi Möbiusovimi listi	-1
$\dots$	$\dots$	$\dots$
$c_1 c_1 \dots c_n c_n$	ploskev z n Möbiusovimi listi	$2 - n$
$\dots$	$\dots$	$\dots$

JEDRSKI REAKTOR KOT RAZISKOVALNI PRIPOMOČEK

ARTHUR H. SNELL*

Članek je prevod dela: A. H. Snell, The Nuclear Reactor as a Research Implement, ki je bilo objavljeno v American Journal of Physics 20, str. 527—535 (december 1952). Uredništvu in avtorju se zahvaljujemo za prijaznost, da sta nam dovolila prevod.

Opisal sem nekaj najvažnejših fizikalnih poskusov, ki so bili narejeni v zadnjih letih z jedrskim reaktorjem kot merilnim instrumentom ali kot izvorom nevtronov. Primeri so izbrani delno zaradi njihove važnosti ali pa zaradi pestrosti. Na kratko je opisano merjenje absorpcijskih presekov za nevtrone z reaktorskim oscilatorjem, merjenje energijskega spektra žarkov gama, ki nastanejo pri absorpciji nevtronov, študij nevtronskih resonanc s hitrostrnim spektrometrom, uklon nevtronov, odboj nevtronov in radioaktivni razpad nevtrona.

Deset let je minilo, odkar smo dobili prvi reaktor. Ta obletnica naj nam bo lepa priložnost, da pregledamo, kaj pomeni za nas kot raziskovalni pripomoček. Najbolje bomo to videli, ako opišemo nekaj najvažnejših eksperimentov. Vsega ne bomo mogli obseči v tem kratkem članku, zato bomo izpustili na primer celotno področje, ki ga imenujemo »produkcijo izotopov«. O tem je bilo že dovolj napisanega in ni potrebno, da bi še kaj dodajali. Zato bomo tu le bežno opisali nekaj laboratorijskih eksperimentov, ki se nam zdijo najvažnejši in najbolj elegantni, čeprav niso popolnoma novi.

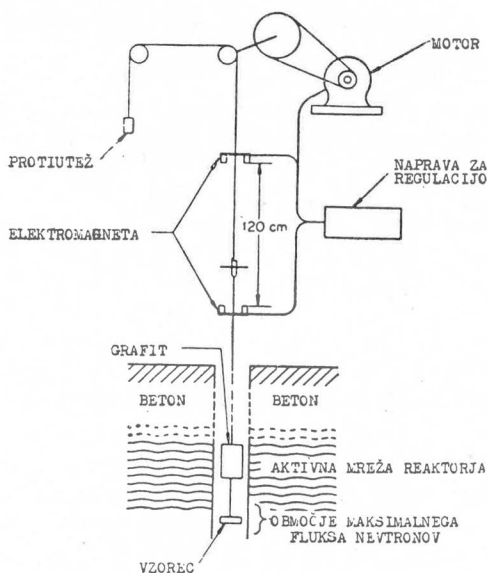
Eksperimente z reaktorjem lahko razdelimo v dve skupini. V prvi skupini je reaktor sam merilna priprava, v drugi je pa le izvor nevtronov. Za primer iz prve skupine bomo navedli merjenje absorpcijskih presekov za nevtrone.

Reaktorski oscilator

Ako je reaktor ravno kritičen, tedaj se tvori na sekundo toliko nevtronov, kolikor se jih na sekundo izgubi zaradi absorpcije, pobega ipd. Če damo v reaktor dodaten kos snovi, ki absorbira nevtrone, se bo verižna reakcija ustavila, ako ne potegnemo iz njega kontrolne palice za toliko, da obdržimo celotno absorpcijo v reaktorju na prvotni velikosti. Dolžina, za katero potegnemo kontrolno palico iz reaktorja, je mera za absorpcijo vstavljenega vzorca. Pomik kontrolne palice so umerili s snovmi, katerih absorpcijski preseki so poznani. Na ta način so merili absorpcijske preseke. Metoda pa ni zelo točna, ker je zaradi temperaturnega efekta in podobnih motenj pomik kontrolne palice nezanesljiv. Tej težavi se izognemo s tem, da vzorec periodično spuščamo v reaktor in ga vlečemo iz njega, tako da dobimo izmenični signal, ki ga merimo neodvisno od kolebanj v reaktorju. Metoda, ki jo je priporočil E. Wigner, je privedla do reaktorskega oscilatorja.

Taki oscilatorji so izdelani v Argonnskem državnem laboratoriju (Chicago, ZDA), v Harwellu (Anglija) in v Chatillonu (Francija). Na sliki 1 je skica francoskega oscilatorja.¹ Vzorec visi na žici in se periodično pomika od roba reaktorja do njegove sredine. Žica teče preko kolute, ki ga goni motor. Železna ploščica na žici preklaplja motor preko

* Prevedel M. Čopič.

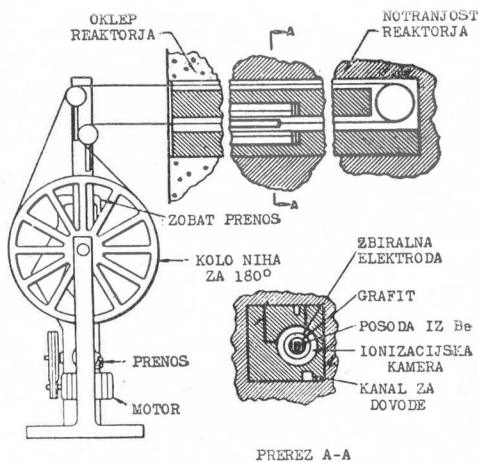


Sl. 1. Skica reaktorskega oscilatorja v Chatillonu. Vzorec, ki visi na spodnjem koncu žice, niha med središčem in robom reaktorja na težko vodo. Detektor in registrirna naprava nista narisana. Posneto iz članka 1.

Pri meritvah je treba upoštevati resonančno absorpcijo, sipanje in nečistoče v vzorcu, zaradi česar so potrebne korekture. Kljub temu daje ta metoda najbolj točne absorpcijske preseke za energijski spektrum nevtronov, ki prevladuje v reaktorju. Zaznamo lahko desetinko kvadratnega milimetra absorpcijskega preseka nasproti desetstičnemu kvadratnih centimetrov totalnega absorpcijskega preseka v celotnem reaktorju. Vzrok za tako veliko občutljivost je pomnoževalni faktor verižne reakcije. Moč reaktorja se spreminja s pomnoževalnim faktorjem k eksponentialno: $\exp[(k - 1) \cdot t / \tau]$, kjer je τ življenjski čas in ima vrednost približno 1 milisekunde. Ako niha k le malo okoli vrednosti 1,0000, se zaradi eksponentialnega faktorja moč kope znatno spreminja.

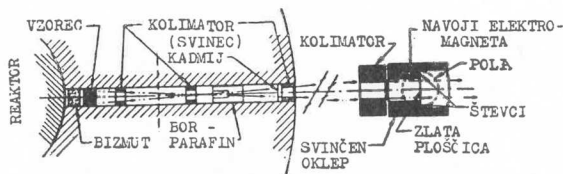
To pa ni edina oblika reaktorskega oscilatorja, ki se s pridom uporablja. V Oak Ridgeu imajo oscilator, ki deluje na drugem principu.²

dveh elektromagnetov, ki omejujejo pomik vzorca. Detektor je z borom napolnjena ionizacijska kamera, ki je nameščena daleč proč od nihajočega vzorca, tako da detektor zaznava nihanja moči celotnega reaktorja. Perioda nihanja je dovolj dolga, da zajame večino zakasnelih nevtronov; izgleda, da je 25 sekund primerna vrednost. Signal, ki ga daje ionizacijska kamera, je speljan na resonančni galvanometer, ki zabeleži amplitude posameznih nihajev. Vzame se povprečje kakih sto nihajev. Nato vstavijo standardni vzorec bora, katerega absorpcijski presek poznajo, in ponovno merijo nihanje galvanometra. Amplituda galvanometra je premo sorazmerna absorpciji vzorca, tako da je neznan absorpcijski presek jedra podan relativno z absorpcijskim presekom bora; seveda pa moramo poznati število atomov v obeh vzorcih.



Sl. 2. Reaktorski oscilator v Oak Ridgeu. Vzorec leži v berilijevi posodici, ki niha vodoravno skozi obročasto ionizacijsko kamero. Naprava je nameščena v grafitnem reflektorju reaktorja in ne v aktivni mreži, tako da instrument meri preseke za termične nevtrone. Iz članka 2.

Tu reaktor v celoti ni moduliran, temveč niha vzorec, ki naj ga merimo, prav blizu detektorja, tako da ta zaznava le lokalno zastrupljenje. [Vsaka dodatna absorpcija, pri kateri se ne porajajo novi nevtroni, je strup za reaktor. Op. prev.] Izmenični signal, ki ga daje detektor, ojačijo in merijo. Slika 2 kaže skico take aparature. Naprava je nameščena v reflektorju in ne v aktivni mreži reaktorja. Zato dobimo z njo absorpcijske preseke za termične in ne za »reaktorske« nevtrone. [V aktivni mreži reaktorja so hitri nevtroni, nevtroni srednjih hitrosti ali »resonančni« nevtroni in termični nevtroni. Op. prev.] Perioda nihanja je okoli ene sekunde. Za standardni vzorec služi zlato. S to aparaturο so bile izvršene najnatančnejše meritve absorpcijskih presekov za termične nevtrone in računajo, da napaka pri teh meritvah ne presega 5% absolutne vrednosti.



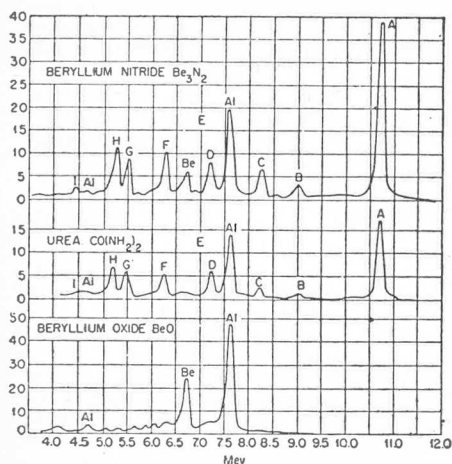
Sl. 3. Aparatura, ki jo uporabljajo v Chalk Riveru za merjenje energij žarkov gama, ki nastajajo pri absorpciji nevtronov. Reaktorska posoda je na skrajni levi, spektrometer na pare pa na desni, zunaj zaščitne stene reaktorja. Žarki gama, ki nastajajo v vzorcu, izstopajo skozi odprtino v zaščitni steni. Iz članka 3

Žarki gama, nastali pri absorpciji nevtronov

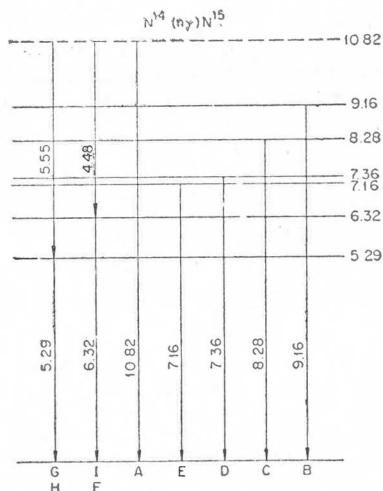
Oglejmo si sedaj eksperimente, pri katerih je reaktor le izvor nevtronov. Omeniti hočem meritve spektralne porazdelitve žarkov gama, ki nastanejo pri absorpciji nevtronov. Merili so Kinsey, Bartholomew in Walker v Chalk Riveru (Canada).³ Kos bizmuta ob steni reaktorske

posode zadrži žarke gama, ki nastajajo v reaktorju, propuša pa nevtrone, ki zadevajo v preiskovani vzorec. Vzorec lahko vsebuje tudi več kilogramov materiala. Žarki gama, ki nastanejo zaradi absorpcije nevtronov v vzorcu, grede skozi odprtino v zaščitni steni reaktorja. Vložek parafina in bora odstrani iz curka neizrabljene nevtrone. Žarki gama padajo na zlato ploščico spektrometra na pare. Pri različnih jakostih magnetnega polja spektrometra ugotavljajo s števci pogostost koincidenč elektron-pozitron.

Slika 4 daje pregled spektra dušika, ki so ga dobili s to aparaturο.⁴ Vzorec je bil Be_3N_2 . Vrhove, ki jih da dušik, so ločili od ostalih s posebnim opazovanjem spektrov sečnine $\text{CO}(\text{NH}_2)_2$ in berilijevega oksida BeO . Aluminijsata posoda daje vedno visok vrh pri 7,72 MeV. To so le



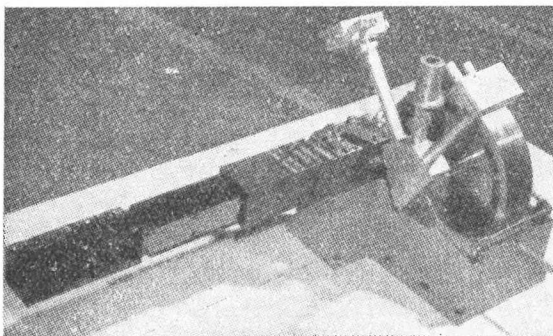
Sl. 4. Diagram spektra žarkov gama, ki nastajajo pri obstreljevanju dušika 14 z nevtroni. Trije maksimi pripadajo aluminiju in beriliju, kar dokazuje spodnja krivulja. Ostali maksimi, označeni s črkami od A do J, pa pripadajo dušiku. Iz članka 4



Sl. 5. Energijski nivoji N^{15} . Energije žarkov gama s slike 4 so enake diferencam že znanih nivojev. Absorpcija počasnega nevtrona pušča jedro vedno v nivoju 10,82 MeV, vendar žarkov gama, ki nastanejo pri prehodu jedra na prve štiri spodnje nivoje, ne morejo ugotoviti s spektrometrom na pare, ker je premalo občutljiv za žarke gama z energijami pod 3 MeV. Iz članka 4

Hitrostni spektrometer za nevtrone

Močni, stalni curki nevtronov, ki jih dajejo reaktorji, dopuščajo uporabo rotirajočih prekinjal, s pomočjo katerih lahko ločimo nevtrone po hitrostih glede na čas, ki ga potrebujejo, da preletijo določeno pot. Ena takih aparatov že dela v Argonnskem laboratoriju, druga je bila sedaj pognana v tek v Oak Ridgeu, tretjo (z večjo občutljivostjo) pa konstruirajo v Brookhavenu. Slika 6 je fotografija kolimatorja in rotorja v Oak Ridgeu.⁵ Na sliki je kolimator usmerjen v levo in je med obratovanjem potisnjen v kvadratno odprtino 10 cm $\times$ 10 cm v betonskem oklepu reaktorja. Pri boljši fotografiji bi bila vidna na koncu ozka špranja, ki gre skozi kolimator do rotorja na desni.



Sl. 6. Kolimator in rotor hitrostnega spektrometra za nevtrone v Oak Ridgeu pred montažo. Kolimator, ki je obrnjen v levo, bodo vstavili v primerno odprtino v zaščitni steni reaktorja. Skozi reže kolimatorja bo prihajal ozek curek nevtronov do rotorja. Po prehodu skozi rotor bo pulzirajoči curek nevtronov preletel razdaljo 11 m skozi evakuirano cev, na koncu katere je ionizacijska celica, polnjena z BF_3 . Aparaturo sta konstruirala in uporabljala G. S. Pawlicki in E. C. Smith

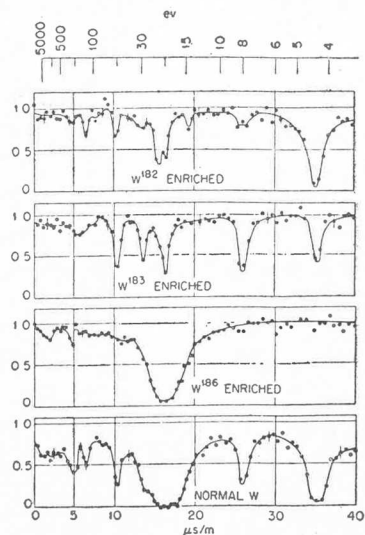
Dvanajst ozkih rež rotorja, ki so razmeščene na krogu s premerom okoli 37 cm, prihaja zaporedoma vstric špranje kolimatorja. Iz stalnega nevtronskega snopa v kolimatorju dobimo na ta način pakete nevtronov, ki trajajo približno 3 mikrosekunde. Paketi preletijo nato razdaljo 11 m in se pri tem raztegnejo zaradi različnih hitrosti nevtronov. Sunki z ionizacijske celice so speljani do 84 števec. Vsak od teh šteje le v določenem časovnem intervalu, ki sledi »odprtemu« položaju rotorja. Tako registrira vsak števec le sunke, ki jih dajo nevtroni določene hitrosti. Škatle na cevastih nastavkih nad osjo rotorja so del časovne aparature. Ko sovpadata reži kolimatorja in rotorja, sproži svetlobni žarek, ki ga meče zrcalo, nameščeno na osi rotorja, v fotocelici sunke, ki nastavljajo ničlo za štetje časa preleta nevtronov od rotorja do ionizacijske celice.

Različne naprave te vrste imajo mnogo skupnega in so vse podobne aparaturi s počasnim prekinjalom, ki ga je konstruiral Fermi v Argonnskem laboratoriju, in aparaturi Columbijske univerze, pri kateri služi moduliran ciklotron kot pulzirajoč izvor.

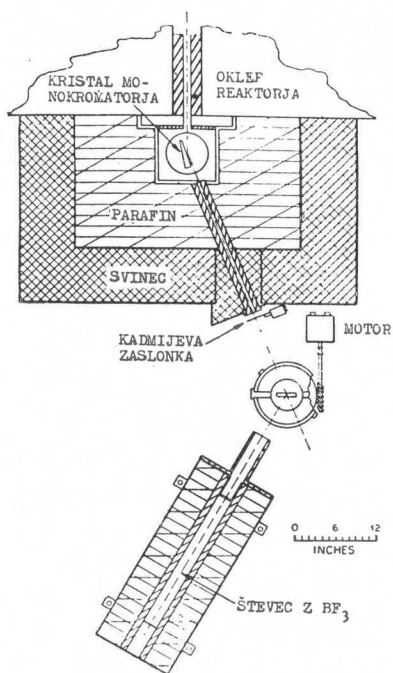
Eno lastnost pa je vredno še posebej omeniti. Vzorec, ki ga preiskujemo, je nameščen v kolimatorski reži pred rotorjem. Reža je velika $18\text{ mm} \times 4\text{ mm}$, tako da zadostuje že zelo majhna količina merjenja, da jo izpolni. To je važno predvsem, kadar raziskujemo snovi, kot so čisti izotopi ali celo radioaktivni izotopi. Slika 7 kaže rezultate, ki jih je dobil Selove⁶ z Argonnskimi hitrim prekinjalom. Določil je resonance v totalnem preseku volframa in tudi ugotovil, katerim izotopom pripadajo.

Uklon nevtronov

Omeniti moramo vedno širše področje uklona nevtronov, ker je važno in ker se mi zdi, da bo ta metoda dala nove podatke o zgradbi trdnih teles. Metode in mnogi podatki so slični kot pri rentgenskem uklonu. Slika 8 na primer kaže shematično ureditev pri metodi z dvema kristaloma, ki sta jo pogosto uporabljala Wolan in Schull.⁷ Usmerjeni curek nevtronov izhaja iz odprtine v oklepu reaktorja in pada pod primernim kotom na kristal NaCl, tako da dobimo po odboju curek monokromatskih nevtronov. Curek zadene na vzorec, ki ga raziskujemo (največkrat je v obliki prahu), in se na njem siplje. S števcem, ki se vrti okoli vzorca, merijo število nevtronov, ki se sipljejo pod določenim



Sl. 7. Diagrami propustnosti nevtronov običajnega in obogatenega volframa. Padci jakosti propuščenih nevtronov dajejo resonančne energije volframa. Nevtroni, ki imajo take energije, se močno absorbirajo ali pa sipljejo. Zgornja krivulja je dobljena na volframu, ki je obogaten z izotopom W182; druga na obogatenem W183, tretja na W186, spodnja krivulja pa je dobljena na navadnem volframu. Na abscisno os je nanesen čas preleta (v mikrosekundah na meter), odnosno v obratni smeri energija nevtronov (v eV). Iz članka 6



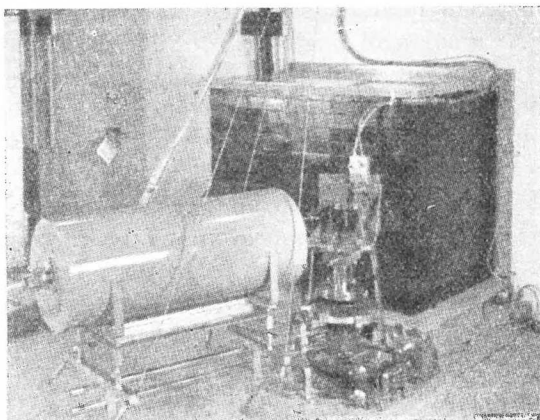
Sl. 8. Aparatura z dvema kristaloma za merjenje uklona nevtronov. Prvi kristal, ki služi kot monokromator, je postavljen pod primernim Braggovim kotom, tako da se odbijajo nevtroni z valovno dolžino 1 Å, katerih jakost v curku iz reaktorja je velika. Monokromatski žarek nevtronov se siplje na drugem kristalu (vzorec je lahko monokristal ali pa prah). Kotno odvisnost jakosti sipanih nevtronov merijo z BF_3 števcem.

Iz članka 7

kotom. Slika 9 je fotografija priprave za merjenje uklona nevtronov, kakršno imajo v Oak Ridgeu. Prvi kristal je v svinčenem ohišju v ozadju; zaščitna stena zadrži direktni curek nevtronov iz reaktorja. Monokromatski curek prihaja skozi vertikalno rezo (desno v sredini) proti opazovalcu. Vzorec je nameščen na mizici, ki je vrtljiva okoli vertikalne osi. Števec v valjastem oklepu je levo v sredini. Aparatura je popolno-

ma avtomatična; teče vso noč, registrira pogostost sunkov in posebej še ozadje pri določenem kotu in nato ponovi ves proces pri naslednjem kotu.

Slika 10 prikazuje dva diagrama uklona na bakru; zgornji del je dobljen z rentgensko svetlobo, spodnji pa z nevtroni.⁸ Oba diagrama sta si v tem primeru podobna. To pa ni vedno tako; v nekaterih primerih se pojavijo važne razlike. Eno vrsto razlik povzroča magnetni moment nevtrona, če je kakršna koli magnetna urejenost v preiskovanem vzorcu, ker nastopa v tem primeru koherentno *magnetno sipanje*. Slika 11 kaže dva posnetka uklona nevtronov na manganovem oksidu,⁹ prvi je bil posnet pri temperaturi 80° K, drugi pa pri sobni temperaturi. Iz slike je razvidno, da se maksimum (111) po ohlaiditvi pojavi pri 12° namesto pri 24° in da so ostali maksimi podobno premaknjeni. Mrežni razmak se je podvojil nasproti običajni vrednosti 4,43 Å. Kaj se je zgodilo, kaže slika 12. Pri ohlajanju je kristal prešel Curiejevo točko; magnetni momenti so se uredili, tako da so momenti



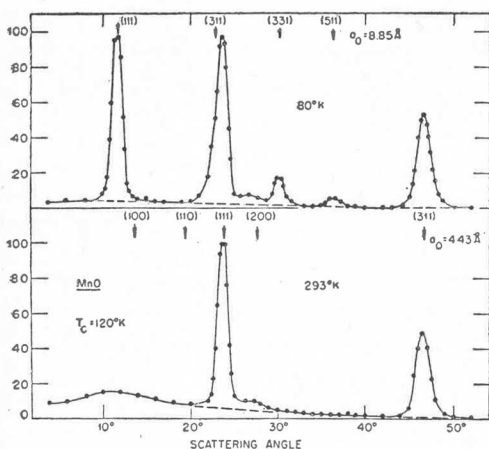
Sl. 9. Fotografija ene izmed originalnih aparatov za uklon nevtronov. Gola stena v ozadju je betonski oklep reaktorja. Kristal monokromatorja je skrit za črno steno svinčenih opek. Merjenec je na osi goniometra, desno v sredini. Nevtronski števec je v zaščitnem oklepu na levi. Nosijo ga štirje kabli, tako da se lahko vrti okoli vertikalne osi goniometra. Iz članka 7

sosednjih manganovih atomov orientirani antiparalelno. Taka ureditev se imenuje »antiferomagnetna«. Koherentno sipanje nevtronov nastopa sedaj izmenoma na vsakem drugem manganovem atomu. Dolžina osnovne celice je s tem podvojena. Tako je na presenetljiv način prikazan nastop antiferomagnetizma. Vzorec seveda ne kaže nobenega makroskopskega magnetnega momenta, tako da so doslej obstoj take ureditve lahko ugotovili le indirektno kot n. pr. iz temperaturnega poteka specifične toplote.

Druga zanimiva področja uklona nevtronov so: merjenje presekov za koherentno sipanje, ugotavljanje lege vodikovih atomov v kristalih (kar skoro ni možno z rentgenskimi žarki), študij nekaterih podrobnosti pri magnetnem sipanju, proizvajanje polariziranih nevtronskih curkov itd. Zdi se, da ima vsak laboratorij, ki razpolaga z reaktorjem, v načrtu tudi raziskave z nevtronskim uklonom.

Odboj nevtronov

Nevtronski valovi se na površinah lahko odbijajo. Vsa jedra v mejni plasti snovi dajo površino z neko povprečno vrednostjo potenciala, ki



Sl. 10. Diagrama uklona rentgenskih žarkov in nevtronov na bakru sta kvalitativno slična. Pri sedanjih reaktorjih moramo glede na jakost nevtronskih curkov uporabljati slabšo ločljivost (širši curki), kot pa so jo že dosegli z veliko bolj dognanim rentgenskim uklonom. Iz članka 8

vpliva na nevtronske valove. Tak odboj pri majnih kotih je sličen odboju svetlobe zelo kratkih valovnih dolžin; tudi tu lahko določimo lomni količnik in mejni kot totalnega odboja. Burgy, Ringo in Hughes¹⁰ so pred kratkim objavili opis zelo elegantnega poskusa, kjer so z nevtronskim odbojem zmerili amplitudo za koherentno sipanje nevtronov na vodiku in s tem dobili podatke o neodvisnosti jedrskih sil od naboja.

Pri sipanju počasnih nevtronov je lahko predznak amplitude sipanega vala pozitiven ali negativen, kar je odvisno pač od narave jeder, na katerih se nevtroni sipljejo. En predznak pomeni fazno razliko 180° , drugi pa 0° . Amplitudo a za koherentno sipanje

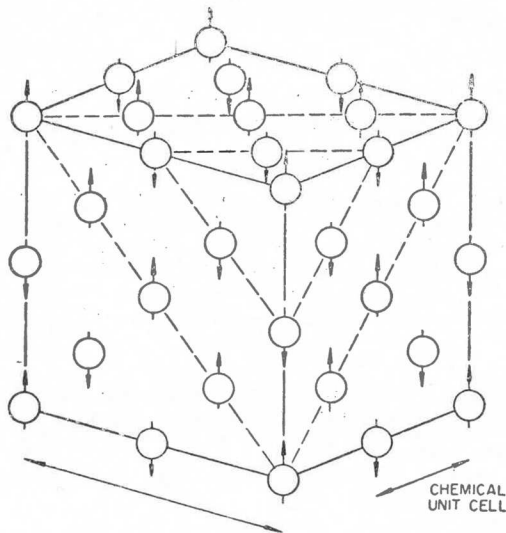
Sl. 11. Sprememba uklonskih diagramov manganovega oksida, ki jo povzroča koherentno magnetno sipanje nevtronov pri znižanju temperature pod antiFEROMagnetno Curijevo točko. Iz članka 9

nevtronov na ogljiku pa točno poznamo po vrednosti in predznaku, ki je pozitiven. (Totalni odboj lahko nastopi pri prehodu v snov le, če je predznak pozitiven. Op. prev.) Vodik pa siplje obratno, z negativno amplitudo. Ker je za odboj na zrcalni površini važen le povprečen potencial vseh jeder, lahko izkoristimo ta efekt povprečja kot ničelno mersko metodo, ki je zelo občutljiva. Vodik in ogljik sta mešana v takem razmerju, da se njihove amplitude ravno uničujejo. Zveza med mejnim

vpadnim kotom Θ totalnega odboja, valovno dolžino λ vpadlih nevtronov in še neuravnovešeno amplitudo sipanja Δa je

$$\Theta = \lambda (N \Delta a / \pi)^{1/2}$$

kjer je N število ogljikovih atomov na cm^3 zrcala. Ako držimo λ stalen, bo Θ padel na nič, ko bo sipanje na vodiku ravno v ravnovesju s sipanjem na ogljiku. Ugotovili so, da je najudobneje držati stalen λ na ta način, da vzdržujejo stalno število sunkov v števcu. Vzrok za to ne bo bralcu takoj razumljiv; odvisen je od valovnega spektra izvora in bolj podrobno razpravljanje o tem ne bi bilo umestno v tem članku.



Sl. 12. Antiferomagnetna ureditev ionskih magnetnih momentov ohlajenega manganovega oksida povzroča, da so pri magnetnem sipanju nevtronov linearne razsežnosti osnovne celice dvakrat večje kot pri običajni osnovni celici. Nad antiferomagnetno Curiejevo temperaturo so magnetni momenti neurejeni in zato magnetno sipanje izgine.

Iz članka 9

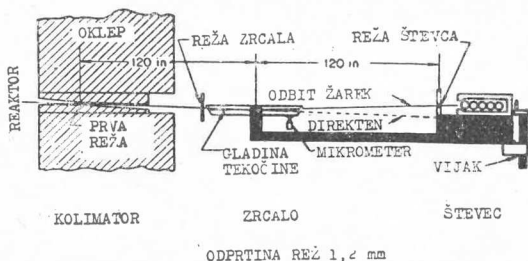
kraju števca je kar mera za odbojni kot. Na sliki 14 so zbrani rezultati meritev. Iz njih je razvidna linearna zveza med Θ^2 in Δa pri treh različnih valovnih dolžinah. Ekstrapolacija na $\Theta^2 = 0$ daje v vseh treh primerih isto vrednost za Δa . Iz tako določenega razmerja med ogljikovimi in vodikovimi jedri dobimo amplitudo koherentnega sipanja na vodiku, podano z amplitudo na ogljiku. Ker je ta točno poznana, nam daje eksperiment zadovoljivo vrednost za sipalno amplitudo $|a_{\text{koh}}|$ vodika.

Da bo bolj razumljiva važnost tega rezultata, moram nekoliko pojasniti njegov pomen. Totalni sipalni presek σ_{tot} nevezanega vodika so izmerili neodvisno, tako da je dal totalni odboj podatek, ki je še manjkal za točno določitev amplitud $|a_T|$ in $|a_S|$ tripletnega in singuletnega sipanja nevtronov na protonih iz istočasnih enačb

$$|a_{\text{koh}}| = 2 \left(\frac{3}{4} |a_T| + \frac{1}{4} |a_S| \right)$$

$$\sigma_{\text{tot}} = 4\pi \left(\frac{3}{4} |a_T|^2 + \frac{1}{4} |a_S|^2 \right)$$

Ako poznamo $|as|$, lahko izračunamo »efektivni doseg« jedrskih sil med nevtronom in protonom v singuletnem stanju, ako se spustimo nekoliko dalje v teorijo.¹¹ Tedaj lahko primerjamo efektivni doseg sil med $n-p$ z efektivnim dosegom med $p-p$ (tudi tu imamo singuletno stanje zaradi Paulijevega principa), ki so ga določili s sipanjem protonov na protonih. Oba dosega sta enaka in s tem je eksperimentalno potrjeno, da so jedrske sile neodvisne od naboja.



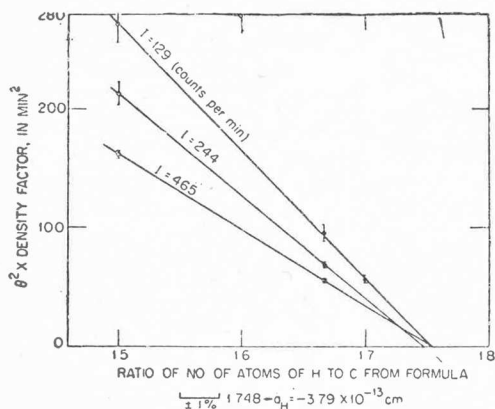
Sl. 13. Aparatura, ki jo uporabljajo za primerjanje amplitud koherentnega sipanja nevtronov na vodiku in ogljiku. Nevtronski žarek iz reaktorja se totalno odbije na površini tekočega ogljikovodika. Kot med direktnim in odbitim žarkom merijo z vijakom na skrajni desni. Iz članka 10

Razpad nevtrona

[Glej: M. Švikaršič: Radioaktivnost nevtrona, Obzornik 2, 74 (1952).]

Razpad nevtronov so napovedali, kakor hitro je bila točno znana razlika med masama protona in nevtrona (1934). Zaradi premajhne jakosti nevtronskih izvorov pa niso mogli meriti razpada nevtronov. Ta ovira je odpadla, ko smo dobili močne jedrske reaktorje. Takoj so se lotili problema v Oak Ridgeu in v Chalk Riveru ter prepričljivo dokazali radioaktivni razpad nevtrona.

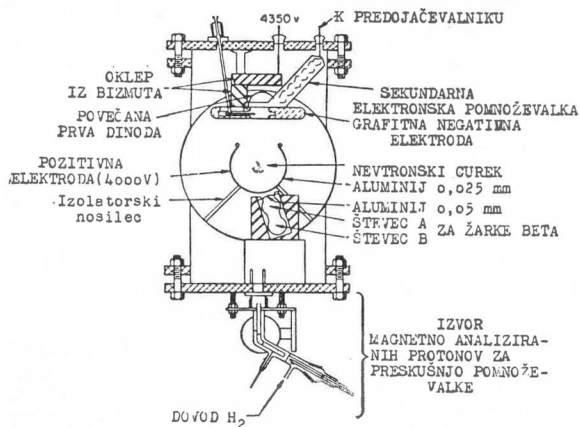
Slika 15 kaže prerez aparature v Oak Ridgeu.¹² Nevtronski curek iz reaktorja ima premer ca. 4 cm in gre skozi evakuirano posodo v smeri



Sl. 14. Rezultati poskusa, ki so ga naredili Burgy, Ringo in Hughes s tekočinskim zrcalom. Podatki, ki so jih dobili pri treh različnih pogostostih sunkov, ustrezajo meritvam pri treh konstantnih valovnih dolžinah vpadlih nevtronov. Z ekstrapolacijo na $\theta^2 = 0$ dobijo sestavo ogljikovodikovega zrcala, pri katerem bi bilo koherentno sipanje na vodiku točno v ravnotežju s koherentnim sipanjem na ogljiku. Iz članka 10

pravokotno na sliko. Prečno električno polje potegne iz curka protone, ki so nastali pri razpadu nevtronov, ter jih zbere na katodo elektronske pomnoževalke. Iskali so koincidence med sunki pomnoževalke in razelektrenji v primeri števeni cevi za delce beta, ki je bila nameščena spodaj. Za meritev so izbrali le tiste koincidence, ki so odvisne od pospeševalne napetosti za protone in od dolžine zakasnilnega voda do števca za delce beta (okoli 0,5 mikrosekund), t. j. za čas, ki ga potrebuje delec z maso 1, da pride do pomnoževalke. Dopolnilni eksperimenti so pokazali, da so 1. te koincidence odvisne od prisotnosti počasnih nevtronov v curku; 2. neodvisne od intenzivnih žarkov gama, ki nastajajo pri absorpciji počas-

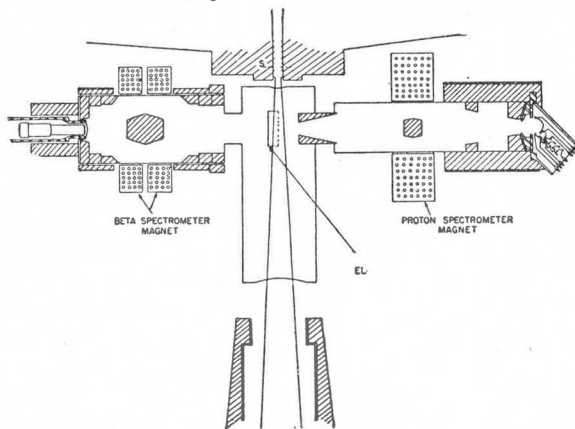
nih nevtronov; 3. neodvisne od ionizacije vodikovega plina, ki je v vakuumskem prostoru; 4. odvisne od debeline okenca števca za delce beta, za katere vemo iz masne razlike med nevtronom in protonom, da imajo maksimalno energijo 0,78 MeV.



Sl. 15. Skica koincidenčne naprave, s katero so v Oak Ridgeu demonstrirali razpad nevtrona. Polje med pospeševalno elektrodo in zgornjo grafitno elektrodo potegne navzgor protone, ki nastajajo v nevtronskem curku. Delce beta štejejo z dvojnim števcem, ki je nameščen spodaj. Iz članka 12

cija enolična.) Dodatni eksperimenti so prav tako pokazali, da je nastanek protonov odvisen od navzočnosti počasnih nevtronov v curku in ne od ionizacije preostalega plina v vakuumskem prostoru. Za razpolovno dobo nevtrona so dobili vrednost 12,8 minut, kar je v skladu z nekoliko manj natančnimi ocenitvami, ki so jih dobili iz rezultatov v Oak Ridgeu.

Zaradi izredne jakosti reaktorja v Chalk Riveru je Robson lahko nadaljeval s poskusi. Dodal je drugo magnetno lečo (na sliki 16 je na levi), ki služi kot spektrometer za delce beta. Desno lečo je nastavil na maksimum protonov in iskal koincidence med protoni in delci beta, pri čemer je spreminjal tok v spektrometru za beta. Na ta način je dejansko posnel beta spekter nevtronov; našel je, da je »dovoljen« po obliki, kar so že pričakovali iz poznanih spinov nevtrona in



Sl. 16. Aparatura, ki so jo uporabili v Chalk Riveru za merjenje beta razpada nevtronov. Pozitivna napetost nekaj kilovoltov na visokonapetostni elektrodi odbija protone iz območja nevtronskega curka skozi magnetno lečo do elektronske pomnoževalke na skrajni desni. Magnetno lečo na levi uporabljajo za merjenje energijskega spektra delcev beta; delce zaznavajo s scintilacijskim kristalom in pomnoževalko.

Iz članka 13

protona, in da je njegova maksimalna energija v soglasju z razliko mas $n-H$.

Zaključek

Za zaključek naj omenim še tri najvažnejše poskuse, ki so že v teku ali pa jih pripravljajo. Prvega delajo v Oak Ridgeu. Polarizirani nevtronski curek zadeva na jedra mangana, katerih spini so orientirani v določeno smer. Kaže, da bo poskus uspel. Drugi eksperiment delajo v Brookhavenu z odbojem nevtronov. Z njim raziskujejo medsebojno vplivanje elektronov in nevtronov. Poskus je podoben onemu s tekočim zrcalom, ki smo ga zgoraj opisali. Močno sipanje nevtronov na jedrih odpravijo s primerno izbiro pozitivnih in negativnih amplitud, tako da pride do veljave zelo šibko sipanje nevtronov na elektronih. Tretji poskus pa so meritve kotne porazdelitve protona in delca beta pri razpadu nevtrona — verjetno idealen odrivni eksperiment za določitev nevtrona. V načrtu ga imajo v Chalk Riveru in morda tudi v Oak Ridgeu. Vsi ti eksperimenti so težki, toda vsak od njih je osnovne važnosti, nobenega pa ne bi mogli resno zagrabiti brez jedrskega reaktorja.

Literatura

1. Benoist, Kowarski in Netter: Mesures d'absorption des nevtrons thermiques par la modulation d'une pile, *J. Phys. et radium* 12, 584 (1951).
2. Hoover, Jordan, Moak, Pardue, Pomerance, Strong in Wollan: Measurement of neutron absorption cross sections with a pile oscillator, *Phys. Rev.* 74, 864 (1948).
3. Kinsey, Bartholomew in Walker: Neutron-capture γ -rays from fluorine, sodium, magnesium, aluminum, and silicon; *Phys. Rev.* 83, 519 (1951).
4. Kinsey, Bartholomew in Walker: *Can. J. Phys.* 29, 1 (1951).
5. G. S. Pawlicki in E. C. Smith, privatno sporočilo.
6. Selove: Resonance-region neutron spectrometer measurements on silver and tungsten, *Phys. Rev.* 84, 869 (1951).
7. Wollan in Schull: The diffraction of neutrons by crystalline powders, *Phys. Rev.* 73, 830 (1948).
8. Schull in Wollan: X-ray, electron, and neutron diffraction, *Science* 108, 69 (1948).
9. Schull, Strauser in Wollan: Neutron diffraction by paramagnetic and antiferromagnetic substances, *Phys. Rev.* 83, 333 (1951).
10. Burgy, Ringo in Hughes: Coherent neutron-proton scattering by liquid mirror reflection, *Phys. Rev.* 84, 1160 (1951).
11. Salpeter: The effective range of nuclear forces, Effect of the potential shape, *Phys. Rev.* 82, 60 (1951).
12. Snell, Pleasonton in McCord: Radioactive decay of the neutron. *Phys. Rev.* 78, 310 (1950). Snell: Neutron decay: The problem and the experiments, *Nucleonics* 8, March, 3 (1951).
13. Robson: The radioactive decay of the neutron, *Phys. Rev.* 83, 349 (1951).

Apolarni polinomi

Pri raziskavah porazdelitve korenov algebraičnih enačb v kompleksni ravnini predstavljajo apolarni polinomi važno pomožno sredstvo. Dva polinoma imenujemo apolarna, če leži v vsakem zaprtem krožnem polju kompleksne ravnine, ki vsebuje vse ničle enega polinoma, vsaj ena ničla drugega. Krožno polje pa ne pomeni samo zaprte notranjosti nekega kroga, ampak tudi, kakor je navada v funkcijski teoriji in za kar nam daje osnovo že stereografična projekcija, zaprto zunanost kroga in zaprto polravnino.

Naša prva naloga bodi, poiskati osnovno relacijo, ki veže dva apolarna polinoma, tako imenovani »pogoj apolarnosti«. V ta namen vzemimo dva polinoma:

$$f(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots + A_n z^n \quad \text{in} \quad g(z) = B_0 + B_1 z + \dots + B_r z^r$$

pri čemer so koeficienti A_i in B_k realna ali kompleksna števila, in ju pišimo raje v obliki, ki je primernejša za naš račun:

$$f(z) = a_0 + \binom{n}{1} a_1 z + \binom{n}{2} a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$$

$$\text{in} \quad g(z) = b_0 + \binom{n}{1} b_1 z + \dots + b_n z^n$$

Naj bodo nadalje $a_1, a_2, \dots, a_n$ ničle polinoma $f(z)$ in $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ ničle polinoma $g(z)$. Označimo z

$$s_0 = 1, s_1 = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n, s_2 = \beta_1 \beta_2 + \dots + \beta_{n-1} \beta_n, \dots, s_n = \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n$$

osnovne simetrične funkcije ničel β_k . Zdaj pa postavimo naslednjo trditev:

Ako je izpolnjen pogoj

$$a_0 s_0 + a_1 s_1 + \dots + a_r s_n = 0 \quad (1)$$

potem vsebuje vsaka krožna domena k , v kateri so vse ničle a_i polinoma $f(z)$, vsaj eno ničlo β_k polinoma $g(z)$.

Preden dokažemo zgornjo trditev, ugotovimo še to, da vsebuje tudi obratno vsako krožno polje, v katerem so vse ničle β_k , vsaj eno ničlo a_i . Ako bi namreč lahko ogradili vse ničle β_k z nekim krogom tako, da bi ne bilo v njegovi notranjosti nobenega a_i , potem bi predstavljala po našem zgornjem dogovoru zunanost tega kroga tudi krožno polje, v katerem bi bili vsi a_i , pa noben β_k . To pa je v protislovju z našo trditvijo. Vidimo torej, da sta pri veljavnosti pogoja (1) polinoma $f(z)$ in $g(z)$ apolarna in da je izraz (1) prav iskani pogoj apolarnosti.

Dokaz zgornje trditve je res elementaren in matematično lep, toda nekoliko dolg. Zato si bomo najprej ogledali pot, po kateri bomo hodili. Za dokazovalno sredstvo si izberimo klasično metodo popolne indukcije. Po ugotovitvi, da velja trditev za $n = 1$, predpostavimo njeno veljavnost

za $(n-1)$ stopnjo. Pogoj (1) transformirajmo tako, da nastopajo v njem eksplicitno in linearno le osnovne simetrične funkcije prvih $n-1$ ničel β . Če tolmačimo tako dobljeni izraz kot pogoj apolarnosti za $(n-1)$ stopnjo glede na $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}$, dobimo iz koeficientov pri simetričnih funkcijah le-teh neki novi polinom, toda le $(n-1)$ stopnje. Ako še pokažemo, da so vse ničle novega polinoma v istem krogu k , ki vsebuje vse ničle α_i , je jasno, da je v tem krogu tudi vsaj ena izmed ničel $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}$, saj smo predpostavili pravilnost trditve za $(n-1)$ stopnjo.

Pojdimo po nakazani smeri do cilja! Za $n=1$ je izrek razviden. Imamo namreč $f(z) = a_0 + a_1 z$ in pogoj $a_0 + a_1 \beta_1 = 0$, torej je v tem primeru kar $\alpha_1 = \beta_1$. Zdaj pa pokažimo njegovo veljavnost za stopnjo n pri pogoju, da velja za stopnjo $(n-1)$. Zahtevati smemo, da vsaj en β_k ni v krogu k , sicer bi bil izrek že dokazan. Naj bo torej $\beta_n = \xi$ izven našega kroga k , ki vsebuje vse α_i . Označimo osnovne simetrične funkcije prvih $(n-1)$ ničel β s σ_i :

$$\sigma_0 = 1, \sigma_1 = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{n-1}, \dots, \sigma_{n-1} = \beta_1 \beta_2 \dots \beta_{n-1}$$

Med prej vpeljanimi s_k in le-temi dobimo naslednje zveze:

$$s_0 = \sigma_0, \quad s_1 = \sigma_1 + \sigma_0 \xi, \quad s_2 = \sigma_2 + \sigma_1 \xi \dots \\ \dots s_{n-1} = \sigma_{n-1} + \sigma_{n-2} \xi, \quad s_n = \sigma_{n-1} \xi$$

Če vstavimo te izraze v naš pogoj (1), dobimo

$$a_0 \sigma_0 + a_1 (\sigma_1 + \sigma_0 \xi) + \dots + a_{n-1} (\sigma_{n-1} + \sigma_{n-2} \xi) + a_n \sigma_{n-1} \xi = 0 \\ \text{ali } (a_0 + a_1 \xi) \sigma_0 + (a_1 + a_2 \xi) \sigma_1 + \dots + (a_{n-1} + a_n \xi) \sigma_{n-1} = 0 \quad (1')$$

Izraz (1') pa lahko tolmačimo kot pogoj apolarnosti za polinom $(n-1)$ stopnje

$$F(z) = (a_0 + a_1 \xi) + \binom{n-1}{1} (a_1 + a_2 \xi) z + \dots + (a_{n-1} + a_n \xi) z^{n-1} \quad (2)$$

glede na števila $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}$. Ker smo vzeli, da velja trditev za $(n-1)$ stopnjo, lahko torej rečemo: V vsakem krožnem polju, ki vsebuje vse ničle polinoma $F(z)$, je vsaj ena izmed ničel $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}$.

Kakor vidimo, nam je treba le še pokazati, da so vse ničle polinoma $F(z)$ v notranjosti kroga k , ki vsebuje vse ničle α_i našega izhodnega polinoma $f(z)$. V ta namen moramo poiskati za polinom $F(z)$ ugodnejšo obliko. Če namreč upoštevamo znano zvezo $\binom{n}{k} - \binom{n-1}{k-1} = \binom{n-1}{k}$,

imamo

$$z f'(z) - n f(z) = -n \left[a_0 + \binom{n-1}{1} a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} \right]$$

ali glede na (2)

$$z f'(z) - n f(z) = -n \left\{ F(z) - \xi \left[a_1 + \binom{n-1}{1} a_2 z + \dots + a_n z^{n-1} \right] \right\}$$

Ker je izraz v oglatem oklepaju prav $f'(z)/n$, imamo končno

$$n F(z) = n f(z) + (\xi - z) f'(z) \quad (3)$$

Zdaj pa pokažimo, da ne more biti nobeno število z_0 , ki je kakor ξ izven našega kroga k , ničla polinoma $F(z)$, torej velja $F(z_0) \neq 0$, če je le z_0 izven k . Ker so vse ničle polinoma $f(z)$ v krogu k , je $f(z_0) \neq 0$ in izraz (3) lahko pišemo za $z = z_0$ v obliki

$$n \frac{F(z_0)}{f(z_0)} = n + (\xi - z_0) \frac{f'(z_0)}{f(z_0)}$$

ali, če izrazimo še logaritmični odvod kot vsoto parcialnih ulomkov $f'(z_0)/f(z_0) = \sum (z_0 - \alpha_i)^{-1}$

$$n \frac{F(z_0)}{f(z_0)} = n + (\xi - z_0) \sum_{i=1}^n \frac{1}{z_0 - \alpha_i} = \sum_{i=1}^n \frac{\xi - \alpha_i}{z_0 - \alpha_i}$$

Treba se je torej prepričati, da vsota na desni ni enaka nič. Preslikajmo zato ravnino z na ravnino Z z linearno funkcijo $Z = (\xi - z)/(z_0 - z)$! Pri tem se nam krog k , kakor vemo, preslika zopet v neki krog K . Ker točki $z = \xi$ in $z = z_0$ ne ležita v krogu k , tudi njuni sliki $Z = 0$ in $Z = \infty$ nista v krogu K . Torej predstavlja K neko zaprto notranjost kroga, v kateri ni točke $Z = 0$. Nasprotno pa ležijo vse točke $A_i = (\xi - \alpha_i)/(z_0 - \alpha_i)$ v K , ker so vse točke α_i v k . Torej mora biti v polju K tudi njihova aritmetična sredina:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\xi - \alpha_i}{z_0 - \alpha_i}$$

ki je tedaj od nič gotovo različna. Dokaz naše trditve je tako končan.

Pogoju (1) moremo dati obliko, ki je bolj »enakopravna« glede na oba polinoma in izraža obenem vzajemno lastnost apolarnosti. Spomniti se moramo le na znano zvezo med koeficienti polinoma in njegovimi ničlami, po kateri velja za naš polinom $g(z)$ in simetrične funkcije s njegovih ničel relacija:

$$s_\nu = (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \frac{b_{n-\nu}}{b_n} \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots, n)$$

Pogoj (1) torej lahko pišemo

$$a_0 b_n - \binom{n}{1} a_1 b_{n-1} + \binom{n}{2} a_2 b_{n-2} - \dots + (-1)^n a_n b_0 = 0 \quad (4)$$

ali tudi

$$a_0 b_n - \binom{n}{n-1} a_1 b_{n-1} + \binom{n}{n-2} a_2 b_{n-2} - \dots + (-1)^n a_n b_0 = 0 \quad (4')$$

Tako dobimo iz naše prvotne trditve naslednji Graceov izrek:

Ako izpolnjujejo koeficienti dveh polinomov

$$f(z) = a_0 + \binom{n}{1} a_1 z + \dots + a_n z^n \text{ in } g(z) = b_0 + \binom{n}{1} b_1 z + \dots + b_n z^n$$

pogoj apolarnosti (4) oz. (4'), potem vsebuje vsako krožno polje, v katerem so vse ničle enega polinoma, vsaj eno ničlo drugega.

Kakor bomo videli na naslednjem zgledu, ki naj ilustrira uporabnost pravkar izpeljanega izreka, je često važno naslednje vprašanje:

Ako obstoji med koeficienti nekega polinoma

$$g(z) = B_0 + B_1 z + \dots + B_n z^n \quad (5)$$

linearna relacija

$$l_0 B_n + l_1 B_{n-1} + \dots + l_n B_0 = 0 \quad (6)$$

kjer so $l_0, l_1, \dots, l_n$ dane konstante, ki niso vse enake nič, kako se glasi h $g(z)$ pripadajoči apolarni polinom?

Z neposredno primerjavo izrazov (6) in (4') dobimo takoj odgovor:

$$f(z) = l_0 - \binom{n}{1} l_1 z + \binom{n}{2} l_2 z^2 - \dots + (-1)^n l_n z^n \quad (7)$$

Iz oblike polinoma (7) odberemo za prakso dragoceno pripombo: Pripadajoči apolarni polinom (7) dobimo iz linearne relacije (6) tako, da nadomestimo v le-tej koeficiente prvotnega polinoma (5) s koeficienti polinoma

$$h(x) = (x - z)^n = x^n - \binom{n}{1} z x^{n-1} + \binom{n}{2} z^2 x^{n-2} - \dots + (-1)^n z^n$$

pri katerem je z parameter.

Iz množice izrekov, pri katerih so apolarni polinomi koristno in udobno dokazovalno sredstvo, si izberemo za zgled tako imenovani Grace-Heawoodov izrek, ki predstavlja razširjavo ali boljše prenos iz realne analize znanega Rollejevega izreka na kompleksno področje. Kakor vemo, trdi Rolle: Ako zavzame funkcija $f(x)$, ki je zvezna v intervalu $[a, b]$, v krajiščih a in b isto vrednost in je odvedljiva v vsaki notranji točki intervala, potem se njen odvod uniči vsaj v eni notranji točki. Že enostaven primer eksponencialne funkcije nas pouči, da ta izrek v kompleksnem ne velja. Imamo namreč $e^{i\pi} = e^{-i\pi}$, pa vendar je $(e^z)' = e^z \neq 0$ za vsak z . Razširjava, ki sta jo dosegla neodvisno Grace in Heawood, se glasi:

Ako zavzame polinom stopnje n isto vrednost v točkah $z = -1$ in $z = +1$, potem ima njegov odvod vsaj eno ničlo v krogu z radijem $\text{ctg } \pi/n$ in s središčem v koordinatnem izhodišču.

Dokaz je preprost. Pišimo odvod tega polinoma v obliki

$$f'(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1}$$

Dejstvo, da je $f(+1) = f(-1)$, lahko izrazimo tudi v obliki

$$\int_{-1}^{+1} f'(z) dz = 2 a_0 + \frac{2}{3} a_2 + \frac{2}{5} a_4 + \dots = 0 \quad (8)$$

Tako smo dobili linearno relacijo med koeficienti polinoma $f'(z)$ in naša naloga je, poiskati njemu pripadajoči apolarni polinom. Tega pa lahko dobimo takoj na osnovi zgornje pripombe. Treba nam je le nadomestiti koeficiente a_i v pogoju (8) s koeficienti polinoma

$$h(x) = (x - z)^{n-1}$$

ki je seveda prav tako $(n-1)$ stopnje, kakor je $f'(z)$.

K $f'(z)$ apolarni polinom je torej

$$g(z) = \int_{-i}^{+i} (x-z)^{n-1} dx = \frac{(1-z)^n - (-1-z)^n}{n} = \frac{(-1)^n}{n} [(z-1)^n - (z+1)^n]$$

Ničle polinoma $g(z)$ dobimo iz enačbe

$$(z-1)^n - (z+1)^n = 0 \quad (9)$$

ki nam da $\frac{z-1}{z+1} = e^{2k\pi i/n}$

ali $z = \frac{1 + e^{2k\pi i/n}}{1 - e^{2k\pi i/n}} = -\frac{e^{k\pi i/n} + e^{-k\pi i/n}}{e^{k\pi i/n} - e^{-k\pi i/n}}$

Ker je $\operatorname{ctg} \varphi = i \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}$

dobimo končno $z_k = i \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{n}$, ($k = 1, 2, \dots, n-1$)

Ker so torej ničle $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ apolarnega polinoma $g(z)$ razvrščene vzdolž imaginarne osi in ima $z_1 = i \operatorname{ctg} \pi/n$ med njimi največjo absolutno vrednost, leže vse v krogu z radijem $\operatorname{ctg} \pi/n$. Torej je v tem krogu tudi vsaj ena ničla polinoma $f'(z)$, kar je bilo treba dokazati. Upošteva je definicijo krožnega polja, ki smo jo postavili na začetku, in lego ničel z_k , lahko še rečemo: Vsaj ena ničla polinoma $f'(z)$ je tudi a) v polravnini, na desno in levo od imaginarne osi; b) v vsakem krogu, ki gre skozi točki $+i \operatorname{ctg} \pi/n$ in $-i \operatorname{ctg} \pi/n$; c) izven ali na robu vsakega kroga, ki gre skozi dve zaporedni točki $i \operatorname{ctg} k\pi/n$ in $i \operatorname{ctg} (k+1)\pi/n$, ($k = 1, 2, \dots, n-2$).

N. Prijatelj

Viri

F. Simonart: Leçons d'Algèbre Supérieure (Gauthier-Villars/1945).

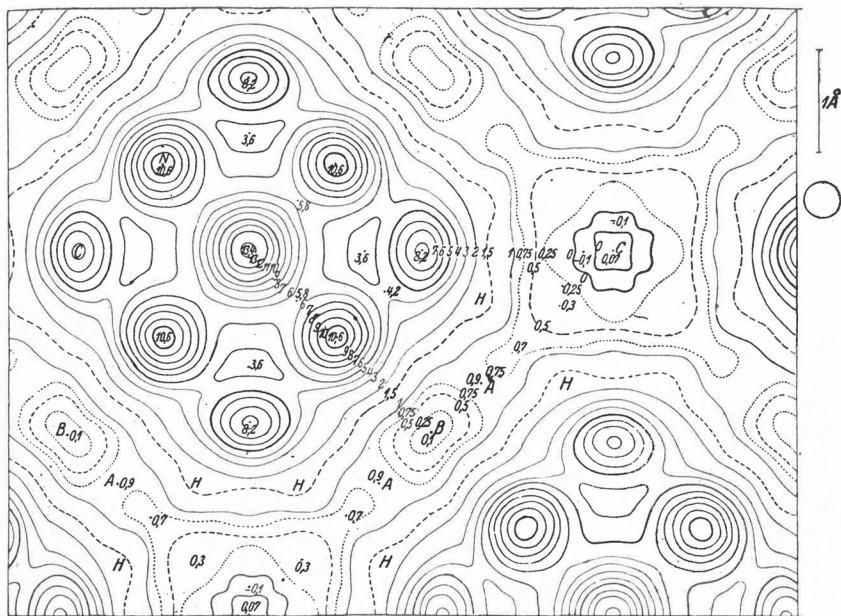
G. Szegő: Bemerkungen zu einem Satz von J. H. Grace über die Wurzeln algebraischer Gleichungen. (Mathematische Zeitschrift, 13. Band 1922.)

Mikroskopija v dveh stopnjah

Pri prehodu svetlobe skozi mrežo dobimo uklonsko sliko. Ako poznamo lastnosti mreže, lahko izračunamo uklonsko sliko; velja pa tudi obratno: iz uklonske slike lahko sklepamo nazaj, kakšna je mreža. Razmaki med uklonskimi maksimi povedo *mrežno konstanto*, t. j. razmak rež, razmerja intenzitet pa dado informacije o obliki reze.

Matematična obdelava tega pojava nas privede na Fourierovo vrsto (glej članek Zernike-Kuščer: Fazni mikroskop, Obzornik za matematiko in fiziko 1, 8 [1952]). Skupnost uklonskih maksimov je slika zaporedja koeficientov Fourierove vrste. Prehod z mreže na uklonsko sliko predstavlja Fourierovo analizo, obratni prehod pa Fourierovo sintezo. Mreža je

Računanje lastnosti mreže iz njene uklonske slike pride praktično v poštev pri rentgenskih uklonskih slikah kristalov, ker so mreže kristalov predrobne za direktno opazovanje. S takimi računi se je posrečilo ugotoviti ne samo razpored atomov v celicah kristalne mreže, ampak tudi razpored elektronov v atomih. Sestavili so cele zemljevide kristalnih ravnin z »izohipsami«¹ za elektronsko gostoto (slika 1).

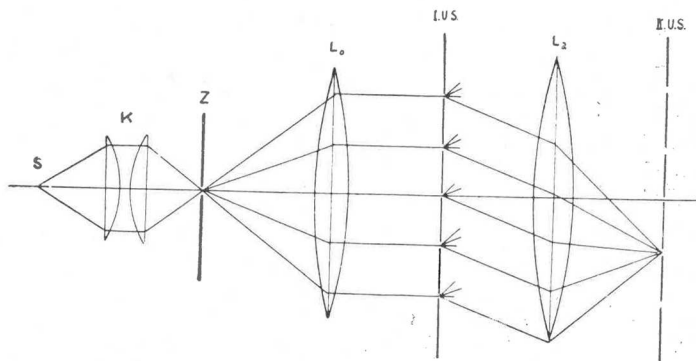


Ti računi so zelo zamudni. Zato so že zgodaj poskušali najti optične, s katerimi bi izvršili Fourierovo sintezo rentgenskih uklonskih. Spomnimo se samo, da vsak mikroskop dela oboje: Fourierovo analizo in sintezo. V smislu Abbejeve uklonske teorije mikroskopa nastane prava uklonska slika v zadnji goriščni ravnini objektiva, ki ni nič drugačna kot slika Fourierove razvrstitve objekta. Sekundarna uklonska slika, ki je prava slika objekta, pa nastane s Fourierovo sintezo primarne uklonske slike. Če se posreči rentgenske uklonske slike na podoben način sintetizirati, bomo dobili sliko kristalne mreže. M. J. Buerger¹ je v zadnjih letih tak postopek izdelal in izpopolnil, tako da je dobil zadovoljive rezultate. Buerger imenuje svojo metodo »two wave-length microscope« (mikroskopija na dve valovni dolžini), drugi² pa jo imenujejo *dvostopenjska mikroskopija*.

1. M. J. Buerger: Two wave-length microscope. J. Appl. Phys. 21, 909 (1950).
2. E. Brüche: Zwei-Schritt-Mikroskopie. Phys. Blätter 8, 313 (1952).

sko mrežo in ne ravninske. Druga težava pa je nastala ob vprašanju, kako naj za upodobitev dobe poleg intenzitet uklonskih maksimov tudi njihove faze, ki jih v večini primerov ne poznamo. Prvi problem sta rešila W. F. de Jong in J. Bouman³ 1938. leta. Njun *retigraf* daje uklonsko sliko poljubne kristalne ravnine, kot bi jo dobili z mikroskopom v zadnji goriščni ravnini objektiva, ako bi imeli leče za rentgenske žarke.

Prva prepreka je bila s tem premagana, ne pa druga, kajti pri fotografiranju se faze zgubijo. Te pa so nam nujno potrebne, drugače ne moremo narediti pravilne sinteze. Sekundarna uklonska slika ne bo veran posnetek objekta, ako v primarni uklonski sliki izenačimo ali kakorkoli



Sl. 2. Sinteza uklonske slike po Buergerju. Na mestu primarne uklonske slike je mehanski model. Koherentni šopi svetlobe, ki izhajajo iz njegovih odprtin, dajejo v gorišču leče L_2 sekundarno uklonsko sliko

spremenimo faze. Nismo pa s sredstva, s katerim bi na fotografski plošči poleg intenzitet zabeležili tudi fazne razlike med posameznimi maksimi. Faze moramo na neki način uganiti. J. C. Slater⁴ je v predavanju na lanskem simpoziju »Današnja fizika« navedel tri kriterije, ki naj nam pomagajo pri našem ugibanju, ki pa bo uspešno le pri zelo simetričnih kristalih.

Prvič: Izbira faz mora biti taka, da ne daje v nobeni točki negativne elektronske gostote. Elektronska gostota mora imeti maksime na mestih posameznih atomov, med njimi pa pade skoraj na nič. Drugič: Faze morajo biti tako izbrane, da maksimi, ki predstavljajo atome, ne leže bolj skupaj, kot to predvidevamo iz velikosti atomov ali iz podobnih kristalov, katerih strukturo že poznamo. Tretjič: Posamezne maksime razpoznamo lahko po njihovi gostoti in povemo, katere atome predstavljajo. Njihova razporeditev in število se morata ujemati s kemično formulo tiste snovi.

Najenostavneje je seveda, ako že poznamo lego posameznih atomov v celici kristalne mreže. Tedaj lahko faze izračunamo. Za primer vzemimo zopet enodimenzionalno mrežo. Mreža naj bo samo amplitudna. Oblika rež naj bo simetrična, tako da je $f(-x) = f(x)$. V Fourierovi vrsti nastopajo zdaj samo kosinusi, tako da smo v dvomu le še za predznake koeficientov. Tak primer je najenostavnejši, ker so med posameznimi maksimi primarne uklonske slike možne samo fazne razlike π , kar ustreza spremembi predznaka.

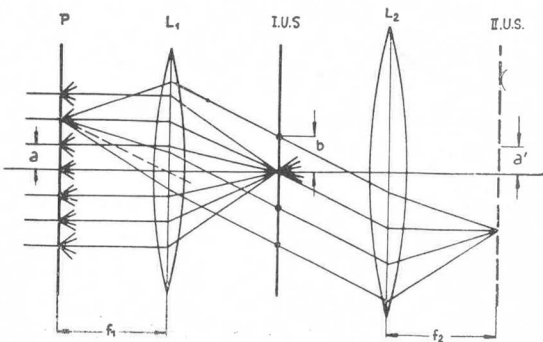
Buerger je izbral železov disulfid FeS_2 , ki ima po dva žveplove atoma simetrično razporejena proti železovim atomom, ki leže v ogliščih kristalne mreže. FeS_2 kristalizira v dveh oblikah: v rombski ga poznamo kot *markazit*, v kubični pa kot *pirit*.

3. W. F. de Jong in J. Bouman, Z. Kristallogr. 98, 456 (1938).

4. J. C. Slater: The solid state. Physics Today 5, No. 1, 4 (1952).

Primarno uklonsko sliko, ki jo je sestavljalo okoli 150 hk0 maksimov, je Buerger dobil s karakteristično rentgensko svetlobo $\text{Mo}_{K\alpha}$. Ker fotografska plošča ni enakomerno debela in zato neuporabna za interferenčne poskuse, je diapozitiv primarne uklonske slike nadomestil z mehanskim modelom, t. j. s kovinsko ploščo ($15 \text{ cm} \times 15 \text{ cm}$), ki je imela na mestih maksimov odprtine, sorazmerne intenzitetam.

Sintezo uklonske slike je Buerger izvršil z enobarvno zeleno svetlobo. Ureditev je shematsko prikazana na sliki 2; ona je v bistvu osvetlitilni sistem in zgornji del mikroskopa. Visokotlačna Hg svetilka AH6 osvetljuje zaslonko s premerom 0,002 mm, ki služi kot točkovno svetilo in leži v gorišču zbiralne leče, tako da pada na mehanski model paralelen snop koherentne svetlobe. Šopi svetlobe, ki izhajajo iz posameznih odprtin modela uklonske slike, interferirajo med seboj in dajejo v zadnjem gorišču leče L_2 sekundarno uklonsko sliko. Ako je pustil faze vseh 150 maksimov enake, so se upodobili samo atomi železa, ki leže v ogliščih kristalne mreže. Fourierova vrsta samih kosinusov s pozitivnimi koeficienti daje vedno maksime v periodnih točkah $0, 2\pi, 4\pi \dots$



Sl. 3. Nastanek primarne in sekundarne uklonske slike periodičnega objekta

Da je pravilno upodobil še atome žvepla, je moral faze primerno »popraviti«. Ker so možne zaradi simetrije le fazne razlike π , je bilo delo še kar enostavno. Enakomeren list sljude je razrezal na zadostno število lističev, katere je vpel v okvire. Z nagibom okvira je spreminjal optično pot, žarka in s tem zakasnil fazo za željeno vrednost. Bloke z okviri, naravnanimi na fazno razliko π , je nameščal na poličke pred odprtinami mehanskega modela. Za pravilno upodobitev markazita je moral spremeniti fazo 32 maksimom od 150 možnih. Sekundarno uklonsko sliko, ki jo daje leča L_2 z goriščno razdaljo $f_2 = 200 \text{ cm}$, je opazoval in fotografiral skozi mikroskop.

Kako velik pa je atom ($\sim 1 \text{ \AA}$) na sliki, ki jo daje leča L_2 ? Ali ga že lahko vidimo v mikroskopu? Odgovor razberemo s slike 3. Ker upoštevamo samo majhne kote, je razmak maksimov primarne uklonske slike $b = f_1(\lambda_1/a)$, kar sledi iz pogoja za interferenčni maksimum enodimenzionalne mreže $a \cdot \sin \alpha_1 = \lambda_1$. Isti pogoj velja tudi za interferenco svetlobe, ki izhaja iz primarne uklonske slike, le da je sedaj valovna dolžina večja, torej a večji. Perioda sekundarne uklonske slike je $a' = f_2(\lambda_2/b) = (f_2\lambda_2/f_1\lambda_1) \cdot a$.

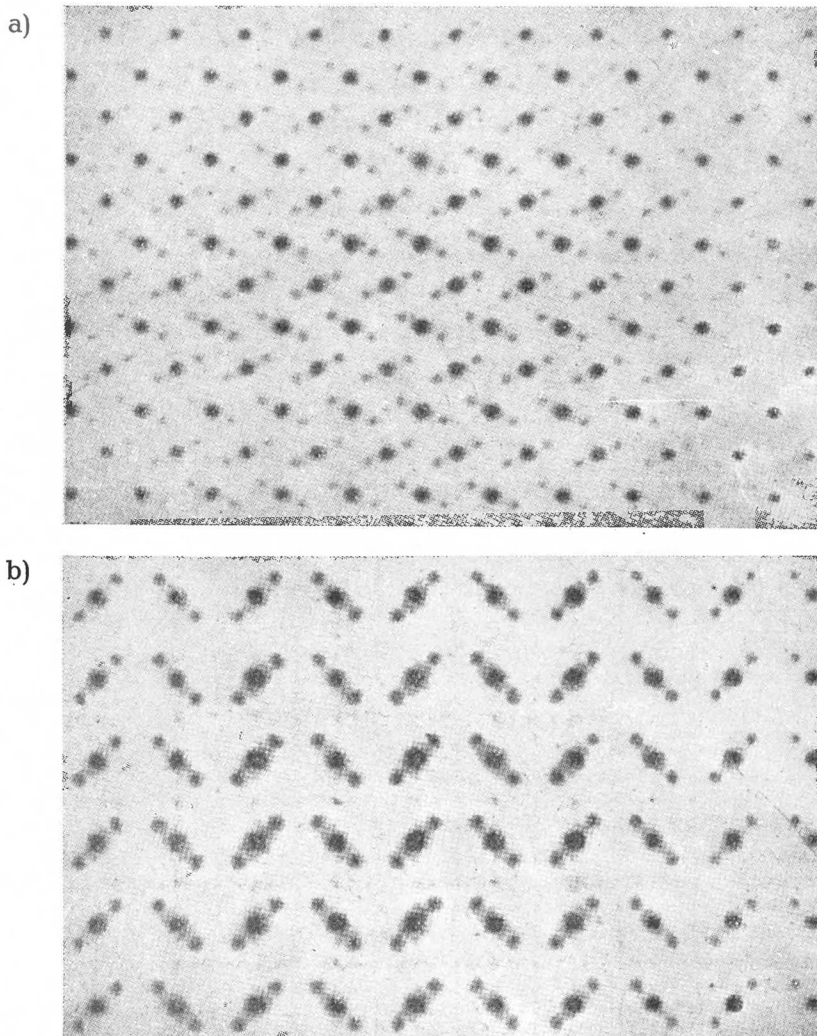
Povečava je torej:

$$N = a'/a = (f_2/f_1) \cdot (\lambda_2/\lambda_1)$$

Pri vseh dosedanjih mikroskopih, svetlobnih in korpuskularnih, je $\lambda_2 = \lambda_1$ in je povečava odvisna samo od razmerja goriščnih razdalj. V našem primeru pa je $\lambda_2 > \lambda_1$. Buerger je imel sledeče vrednosti: $\lambda_1 = 0,7 \text{ \AA}$, $\lambda_2 = 5460 \text{ \AA}$, $f_1 = 5 \text{ cm}$, $f_2 = 200 \text{ cm}$. Pri enakih valovnih dolžinah bi bila

povečava le 40-kratna, zaradi velike razlike valovnih dolžin pa dobimo še faktor 7 800. Skupna povečava je torej $3 \cdot 10^5$. Slika atoma s premerom 1 Å je velika 0,03 mm. Sedaj je razumljivo, zakaj mora biti odprtina v zaslonki tako majhna. Ako hočemo imeti na sliki še podrobnosti v atomu, t. j. porazdelitev elektronske gostote, mora biti slika svetila veliko manjša kot slika atoma.

Sliki, ki jo daje leča L_2 , poveča še mikroskop. Tako sta nastali sliki 4. a) in b) markazita in pirita. Celokupna povečava je milijonkratna. (Pri navadnih mikroskopih ne gre preko preko $2000\times$, pri elektronskih ne mnogo preko $100\,000\times$.) Tako ogromna povečava je mogoča in smiselna zato, ker je ločljivost prve stopnje z rentgensko svetlobo v



Sl. 4. Sliki kristalne mreže železovega disulfida, povečani $2 \cdot 10^7$ krat.
a) markazit, b) pirit. Sliki je napravil M. J. Buerger (1).

našem primeru veliko večja kot pri vseh dosedanjih mikroskopih. Ločljivost mikroskopa, ki določa še smiselno povečavo, je odvisna od valovne dolžine uporabljene svetlobe in od števila uklonskih maksimov, ki jih prva stopnja zbere: čim manjša je valovna dolžina in čim več maksimov zbere, tem boljša je ločljivost mikroskopa. Razdalja med atomoma železa in žvepla je $1,5 \text{ \AA}$; ker sta na sliki popolnoma jasno ločena ter so vidne še podrobnosti posameznih atomov, lahko smatramo, da je ločljivost dvostopenjskega mikroskopa še pod $1 \text{ \AA}$.

Pri vsej lepoti slike in ob zadovoljstvu, da vendar že enkrat »gledamo atome«, ne smemo pozabiti dejstva, da smo morali faze uganiti. Dalje, da slika ni upodobitev v običajnem smislu, temveč le *povprečna slika periodične strukture kristala*. K vsaki posamezni sliki atoma so doprinesli svoje deleže milijoni in bilijoni atomov, ki so enako orientirani v kristalni mreži.

Dvostopenjski mikroskop ni pravi mikroskop: bolje bi ga označili s polavtomatskim računskim strojem, ki mu mora pomagati še človek z vmesnimi podatki, medtem ko deluje navadni mikroskop popolnoma avtomatično. Zaenkrat tudi še ne more upodobiti vsakega kristala. Primarni uklonski maksimi kristalne mreže, v kateri atomi niso simetrično razporejeni, imajo zelo različne faze in uganiti 200 ali 300 faz, od katerih lahko vsaka zavzame poljubno vrednost med 0 in 2π , v resnici ni majhno delo. Zaenkrat še ni metod, s katerimi bi bistveno skrajšali ta postopek.

M. Čopič

Elektromagnetna črpalka

Elektromagnetna črpalka je zanimiva zaradi svoje teoretične preprostosti, saj gre tu za enostavno uporabo enega izmed osnovnih zakonov elektrodinamike. V homogenem magnetnem polju deluje na l metrov dolg vodnik, ki stoji pravokotno na B in skozi katerega teče tok I , sila $F = I \cdot B \cdot l$. Če nadomestimo trdni vodnik s tekočino, ki prevaja tok, nastane v njej zaradi te sile pritisk, ki potiska tekočino v smeri, pravokotni na magnetno polje. To si lahko ogledamo na preprostem poskusu.

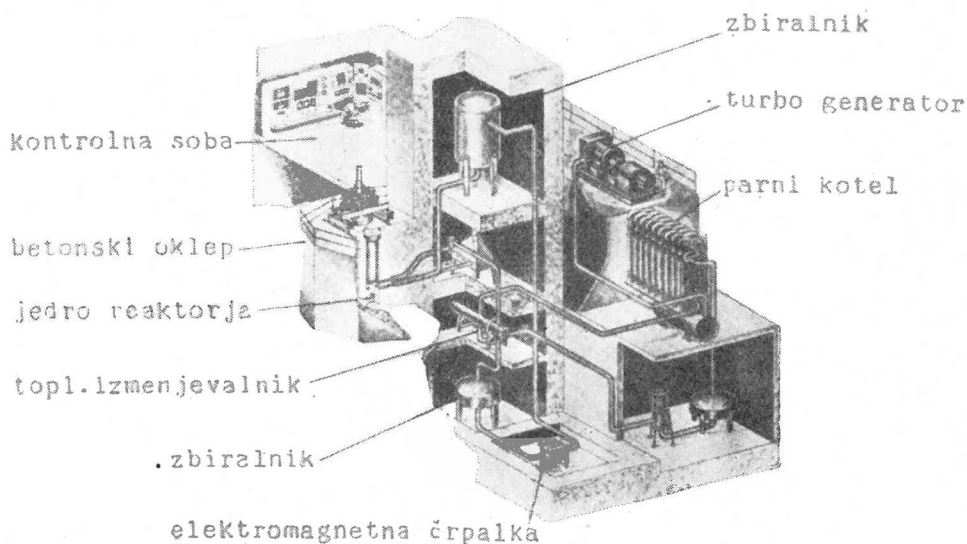
V stekleno cev, ki ima obliko črke U , vtalimo na krivini dve elektrodi in jo napolnimo z živim srebrom. Preko obeh elektrod napeljemo skozi tekočino tok nekaj amperov. Če postavimo močan magnet tako, da pride krivina cevi med pola, začne teči tekočina iz enega kraka v drugega, dokler gladina v drugem kraku toliko ne naraste, da črpalka ne zmore več nastalega pritiska. Razlika gladin da ravno maksimalni ali, kakor tudi pravimo, statični pritisk črpalke. Ta pritisk je približno enak $F/S = I \cdot B \cdot 2r/r^2\pi = 2I \cdot B/r\pi$, če je r radij cevi. Ko prekinemo tok, steče živo srebro nazaj v prvi krak.

Zamiseli elektromagnetne črpalke je že stara preko 50 let. Za praktično uporabo pa so jo prvič konstruirali šele pred nekaj leti. Uporabili so jo pri uranski kopi EBR (Experimental Breeder Reactor), ki je bila dograjena l. 1951 (sl. 1). Postavil jo je Argonne National Laboratory univerze v Chicagu z namenom, da bi proučili, koliko se da ekonomično izrabljati toplotna energija, ki se sprosti pri cepitvi jeder, za proizvodnjo električne energije. Tekočina, ki prenaša toploto od reaktorja k parnemu

kotlu, je talina natrija in kalija. Talino žene po hladilnih ceveh elektromagnetna črpalka. Temperatura v reaktorju je 350°C .

Da so uporabili kot hladilno tekočino talino natrija in kalija, je več razlogov. Ta zlitina je namreč tekoča že pri sobni temperaturi, je dober prevodnik toplote in ima tudi dovolj visoko vrelišče. Poleg tega natrij in kalij ne zavirata znatno nevtronov, kar je zelo važno, ker so hladilne cevi napeljane skozi jedro kope. Tu je elektromagnetna črpalka, ki nima nobenih gibljivih delov, mnogo bolj pripravna kot navadna mehanska črpalka. Z gibljivimi mehanskimi deli so težave, ker moramo črpati tekočino, ki ima precejšnjo temperaturo in je poleg tega še močno radioaktivna, kar rado povzroča korozijo materiala. Elektromagnetna črpalka pa dela brezhibno tudi pri visoki temperaturi.

Skico elektromagnetne črpalke za kopo EBR vidimo na sliki 2, njeno fotografijo pa na sliki 3. Cev, po kateri teče tekočina natrij-kalij, je narejena iz tanke nikelj-kromove pločevine (0,6 mm) in je med poloma magneta pravokotne oblike. Na dve nasprotni stranici cevi je privarjena štirioglata bakrena žica, ki je debela kot cev. Tok, ki teče skozi cev, se razdeli v dva dela. Nekaj ga gre po kovinskem plašču cevi, ostali del pa skozi talino $\text{Na} + \text{K}$. Ker so stene cevi tanke in iz snovi, ki ima velik specifični upor, je delež toka, ki gre po kovinskem plašču, majhen, n. pr.: Upor neke prazne cevi je $660 \cdot 10^{-6} \Omega$, napoljene s talino pa $42 \cdot 10^{-6} \Omega$. Nasproti ostalima stranicama cevi se nahajata pola magneta. Ta dva sta široka 10 cm in dolga 38 cm. Navoji elektromagneta in cev so zaporedno vezani. Skoznje teče tok 10 000 do 20 000 A. Pri elektromagnetu zadoščata dva navoja, ki sta iz štirioglate, 15 cm debele bakrene žice. Napetostni izvor mora poganjati tok po dovodnih žicah in navojih elektromagneta ter poleg tega vzdrževati ravnotežje inducirani protinapetosti v cevi, ki nastane zaradi toka tekočine v močnem magnetnem polju. Vsi dovodi so tako debeli, da je upor malenkosten, saj je upor navojev elektromagneta samo $6 \cdot 10^{-6} \Omega$. Zato zadošča izvor, ki daje napetost 1V



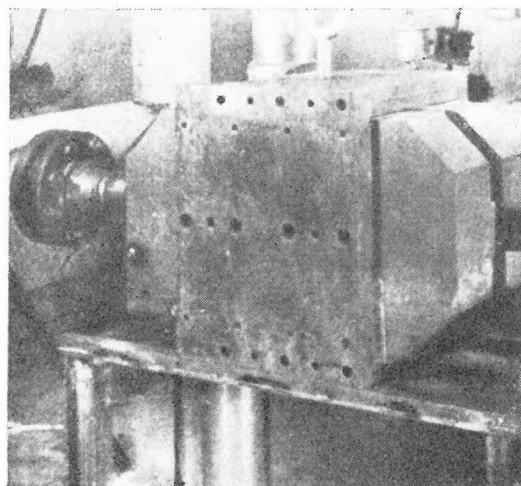
Sl. 1. Shema uranske kope EBR z elektromagnetno črpalko

ali še manj. Izvor napetosti za to elektromagnetno črpalko je z vodo hlajen CuS-Mg usmernik, ki daje pri napetosti 1V tok 20 000 A. Dobro se je obnesla tudi uporaba unipolarnega generatorja kot izvora majhne napetosti in velikih tokov. Pri tem generatorju se inducira istosmerna napetost v krožnem kovinskem traku ali plošči, ki se giblje oziroma vrti pravokotno na

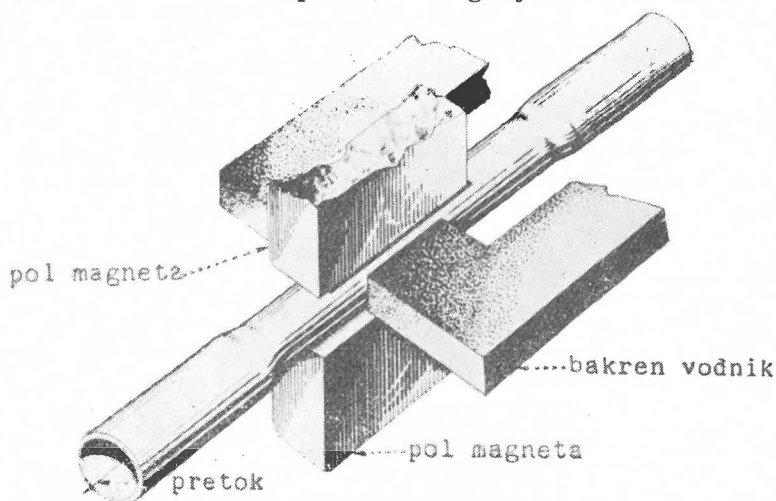
konstantno magnetno polje. Napetost pobirata z robov traku ščetki. Tak generator daje majhno napetost, ima pa malenkosten notranji upor, tako da lahko kljub temu dobimo velike tokove. Unipolarni generator ima mnogo večji izkoristek (okoli 80 %) kot selenski ali CuS-Mg usmernik. S tem je bil unipolarni generator rešen skorajšnje pozabe.

Izolacija dovodov in navojev elektromagneta ne dela nobenih težav, ker imamo opravka s tako majhnimi napetostmi. Za izolacijo zadoščajo lističi sljude.

Tok, ki teče skozi tekočino, se zaradi močnega magnetnega polja precej razleze tudi na področja, kjer magnetno polje ni tako močno.



Sl. 3. Elektromagnetna črpalka uranske kope EBR



Sl. 2. Skica elektromagnetne črpalke

To zmanjša črpalno silo, ker je na mestih šibkega polja tudi elektrodinamična sila manjša. Razlezenje ali cepitev toka povzročajo inducirani Foucaultovi tokovi. Ti tokovi nastanejo na robovih čevljev magneta, kjer je polje zelo nehomogeno. Vrtinčasti tokovi imajo tako smer, da tečejo v notranjosti med poloma magneta v nasprotni smeri, kot je smer toka, ki ga pošiljamo skozi cev, na robovih pa v isto smer. Tako se glavni tok med poloma magneta oslabi, zunaj pa ojači. Efekt je tem večji, čim močnejše je polje B in čim hitreje se giblje tekočina po cevi. Vrtinčasti tokovi so precejšnji, ker je upor tekočine majhen.

Zato ne smemo magnetne poljske jakosti poljubno povečavati, ker se utegne zgoditi, da s tem črpalno hitrost zaradi induciranih tokov še celo zmanjšamo. Z dovolj dolgimi in primerno oblikovanimi čevlji, ki poskrbe, da se magnetno polje le počasi spreminja vzdolž cevi, lahko znatno omilimo cepljenje toka v cevi. Vendar ne smejo čevlji segati mnogo preko dela cevi, skozi katerega teče tok. V tem primeru bi bilo namreč prijemališče potisne sile toka in prijemališče zavorne sile Foucaultovih tokov ločeno in bi lahko povzročilo, da se tekočina pretrga. Potisno silo črpalke zmanjšuje tudi lastno magnetno polje toka, ki teče skozi cev. Prvotno homogeno magnetno polje postane zaradi lastnega magnetnega polja toka nehomogeno. Na tistem delu, kjer tekočina izstopa iz magnetnega polja, se polje oslabi, kjer vstopa, pa ojači. Ker je na mestih močnejšega magnetnega polja inducirana protinapetost večja, se tam tok oslabi, na mestu šibkejšega polja pa ojači. To seveda povzroči, da je v celoti potisna sila manjša. Tu si pomagamo na dva načina. Deloma napravimo polje homogenejše s spreminjanjem velikosti reže med poloma magneta vzdolž cevi, deloma pa dosežemo z enakomernim oženjem cevi v smeri toka tekočine, da ima tekočina na mestih šibkejšega polja večjo hitrost. Zaradi povečane hitrosti tekočine na mestih šibkejšega polja se tam poveča inducirana protinapetost in s tem zmanjša električni tok. Tako teče največ toka tam, kjer je tudi magnetno polje najmočnejše. Pri elektromagnetni črpalci za uransko kopo EBR se cev zoži od $4,6 \text{ cm} \times 7,4 \text{ cm}$ do $3,6 \text{ cm} \times 8,6 \text{ cm}$. Črpalna hitrost te črpalke je pri pritisku 2,1 atm 30 l/s. Ustreden električni tok skozi cev je 17 500 A. Izkoristek ca. 40 %.

P. Gosar

Literatura

A. H. Barnes: Direct-Current Elektromagnetic Pumps, Nucleonics, 9, No. 1., 16/januar 1953.

Apolonijev krug i izodinamički centri kod ravnokrakog trougla

Pojam. — Ako u trouglu ABC povučemo unutrašnju i spoljašnju simetralu ugla B , onda će one seći suprotnu stranu AC trougla u dve tačke (B_1 i B_2). Krug, konstruisan nad razdaljinom ovih dveju tačaka kao nad prečnikom, zove se *apolonijev krug* koji odgovara strani AC .

Sva tri apolonijeva kruga jednog trougla seku se u dve tačke koje se zovu *izodinamički centri* datog trougla.

Apolonijev krug. — Posmatrajmo ravnokrak trougao ABC ($AB = AC = b$, $BC = 2a$)! Uzmimo za apscisnu osu koordinatnog sistema osnovicu ravnokrakog trougla a za ordinatnu osu osnovičinu visinu (sl. 1), tada imamo:

$$\text{jednačina prave } AC \text{ biće: } hx + ay - ah = 0 \quad (1)$$

$$\text{jednačina simetrale } BB_1: hx - (a + b)y + ah = 0 \quad (2)$$

$$\text{jednačina simetrale } BB_2: (a + b)x + hy + a(a + b) = 0 \quad (3)$$

Rešavanjem jednačine (1) sa jednačinama (2) i (3) dobijamo koordinate tačaka B_1 i B_2 :

$$B_1(x_1, y_1) = B_1\left(\frac{ab}{2a + b}, \frac{2ah}{2a + b}\right)$$

$$B_2(x_2, y_2) = B_2\left(\frac{-ab}{2a-b}, \frac{2ah}{2a-b}\right)$$

Koordinate centra ovog apolonijevog kruga biće

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{ab^2}{4a^2 - b^2} = -\frac{a(1 + \operatorname{tg}^2 \beta)}{3 - \operatorname{tg}^2 \beta} \quad (4)$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{4a^2 h}{4a^2 - b^2} = \frac{4a \operatorname{tg} \beta}{3 - \operatorname{tg}^2 \beta}$$

Centar apolonijevog kruga koji odgovara strani AB biće simetričan centru prethodnog kruga, dok se centar apolonijevog kruga koji odgovara strani BC, nalazi u beskrajnosti, a sam krug se poklapa sa pravom na kojoj leži osnovičina visina (h) t. j. sa Y-osom.

Geometrijsko mesto centara. — Pretpostavljajući da je a konstantno, to nam jednačine (4) predstavljaju parametarski oblik geometijskog mesta centara apolonijevih krugova koji odgovaraju strani AC. — Izbacujući β iz ovih jednačina, dobijamo jednačinu

$$(3x - a)^2 - 3y^2 = 4a^2$$

koja predstavlja hiperbolu (sl. 1) čije su poluose: stvarna poluosa $2a/3$, a imaginarna poluosa $2a\sqrt{3}/3$, stvarna osa se poklapa sa X-osom a imaginarna osa je paralelna sa Y-osom. Jednačine asimptota su $\pm\sqrt{3}y = 3x - a$.

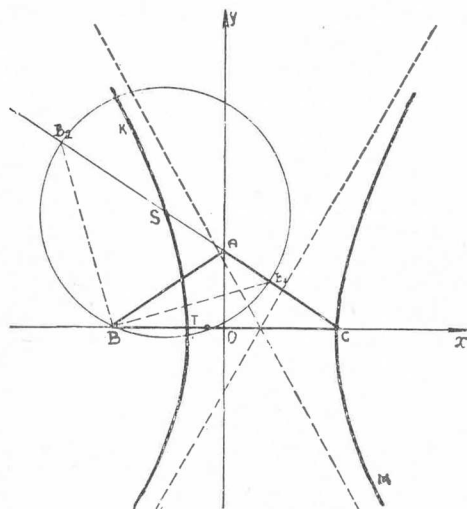
Iz parametarskog oblika zaključujemo da grana TK predstavlja geometrijsko mesto centara kada ugao β raste od 0 do $\pi/3$; grana MC daje mesto centara kada ugao β raste od $\pi/3$ do $\pi/2$. Simetrične grane ovima, u pogledu na X-osu, predstavljaju centre za trouglove kod kojih je $0 > \beta > -\pi/2$ t. j. trouglove obrnute oko osnovice za 180° , tačka T predstavlja centar apolonijevog kruga za trougao kod koga je $\beta = 0$, a tačka C za trougao kod koga je $\beta = \pi/2$.

Centri apolonijevih krugova koji odgovaraju strani AB nalaze se na hiperboli simetričnoj gore posmatranoj hiperboli u pogledu na Y-osu.

Izodinamički centri. — Obzirom da se kod ravnokrakog trougla, apolonijev krug koji odgovara osnovici poklapa sa pravom na kojoj je osnovičina visina, to će se izodinamički centri nalaziti na ovoj pravoj.

Jednačina apolonijevog kruga koji odgovara strani AC, kao geometrijsko mesto tačaka iz kojih se ostojanje $B_1 B_2$ vidi pod pravim uglom, ima za jednačinu

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$$



Sl. 1

gde su x_1 , x_2 , y_1 i y_2 koordinate tačaka B_1 i B_2 . Ordinate izodinamičkih centara dobićemo ako u ovoj jednačini stavimo $x=0$:

$$y^2 - (y_1 + y_2) y + x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$$

Rešavajući ovu jednačinu po y i zamenjujući vrednosti za x_1 , x_2 , y_1 i y_2 dobijamo:

$$y_1 = \frac{a(a + h\sqrt{3})}{a\sqrt{3} - h} = -\frac{a(\operatorname{tg}\beta \cdot \sqrt{3} + 1)}{\operatorname{tg}\beta - \sqrt{3}}$$

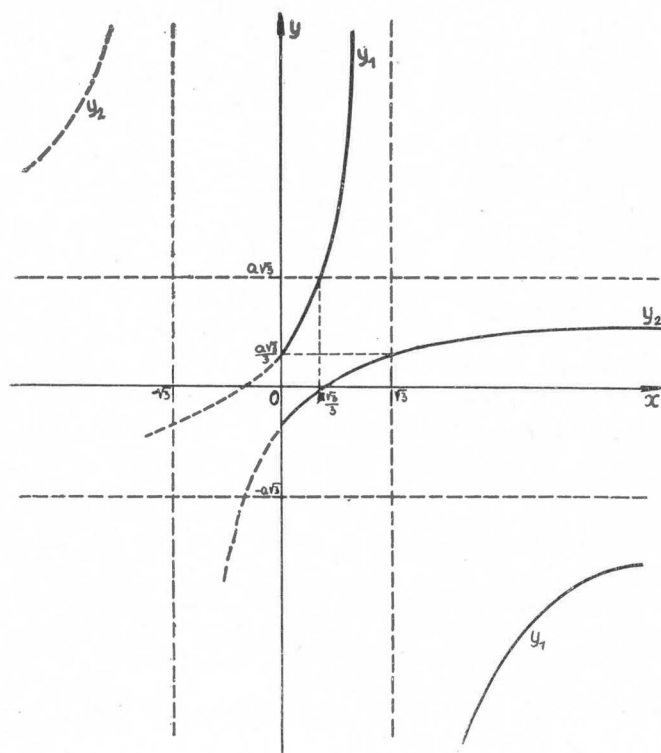
$$y_2 = \frac{a(h\sqrt{3} - a)}{a\sqrt{3} + h} = \frac{a(\operatorname{tg}\beta \cdot \sqrt{3} - 1)}{\operatorname{tg}\beta + \sqrt{3}}$$

Da bi ispitili vrednosti ordinata izodinamičkih centara stavićemo $\operatorname{tg}\beta = x$ i izvršićemo varijaciju funkcija y_1 i y_2 za $0 \leq x < \infty$.

Tako dobijamo:

$$y_1 = -\frac{a(x\sqrt{3} + 1)}{x - \sqrt{3}} \quad y_2 = \frac{a(x\sqrt{3} - 1)}{x + \sqrt{3}}$$

Prva funkcija grafički predstavlja hiperbolu (sl.2) čije asimptote imaju za jednačine $x = \sqrt{3}$ i $y_1 = -a\sqrt{3}$. Druga funkcija predstavlja hiperbolu simetričnu prvoj hiperboli u odnosu na koordinatni početak.



Sl. 2

Iz grafika čitamo:

za $x=0$ (t. j. $\beta=0$) izodinamički centri su simetrični u pogledu na osnovicu a nalaze se na rastojanju $\pm a\sqrt{3}/3$ od nje;

za $0 < \beta < \pi/6$ (t. j. $0 < x < \sqrt{3}/3$) oba su izvan trougla, jedan na strani osnovice a drugi na strani vrha;

za $\beta = \pi/6$ (t. j. $x = \sqrt{3}/3$) jedan je na sredini osnovice a drugi mu je simetričan u pogledu na vrh trougla; za $\pi/6 < \beta < \pi/3$ jedan je u trouglu a drugi izvan njega na strani vrha;

za $\beta = \pi/3$ jedan centar poklapa se sa svim značajnim tačkama trougla, dok se drugi nalazi u beskonačnosti;

za $\pi/3 < \beta < \pi/2$ jedan centar je u trouglu a drugi je izvan njega na strani osnovice;

za $\beta = \pi/2$ izodinamički centri su simetrični u pogledu na osnovicu trougla na rastojanju $\pm a\sqrt{3}$ od nje.

Izodinamički centri i značajne tačke trougla. — Prema uvedenim oznakama lako se nalazi:

$$\text{ordinata ekscentra: } y_e = (h^2 - a^2)/2h = a(x^2 - 1)/2x$$

$$\text{ordinata incentra: } y_i = a \operatorname{tg} \beta / 2 = a(\sqrt{1 + x^2} - 1)/x$$

$$\text{ordinata težišta: } y_t = \frac{1}{3}h = \frac{1}{3}ax$$

$$\text{ordinata ortocentra: } y_o = a^2/h = a/x$$

Pretstavljajući grafike svih ovih funkcija na istom crtežu dobijamo sliku 3. Iz slike se vidi:

1. za $\beta = \pi/3$ to jest za ravnostrane trouglove jedan izodinamički centar se poklapa sa svima ostalim značajnim tačkama trougla, dok je drugi u beskonačnosti;

2. za $\beta = \pi/6$ jedan izodinamički centar se poklapa sa ortocentrom, dok je drugi na sredini osnovice;

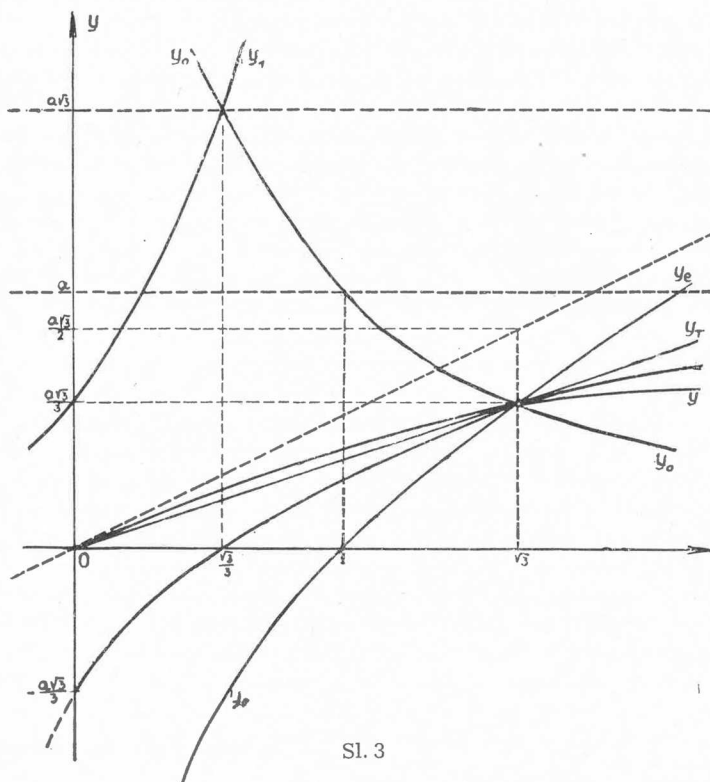
3. ekscentar je uvek izvan izodinamičkih centara;

4. incentar i težište su uvek između izodinamičkih centara;

5. ortocentar je izvan izodinamičkih centara za $\beta < \pi/6$ a između njih za $\beta > \pi/6$, a poklapa se sa jednim ako je $\beta = \pi/6$.

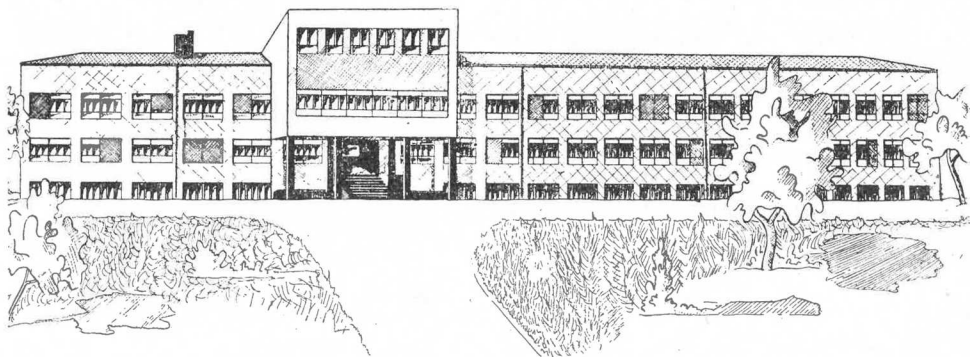
Iz slike se mogu videti i međusobni odnosi ostalih centara.

B. Pešić



Sl. 3

IZ NAŠIH INSTITUTOV



Fizikalni inštitut Jožefa Stefana

Dne 8. februarja je predsednik Slovenske akademije znanosti in umetnosti Josip Vidmar svečano odprl prostore novega akademijskega inštituta za fiziko, ki od srede lanskega leta nosi ime po največjem slovenskem fiziku Jožefu Stefanu. Nove stavbe obsegajo glavno zgradbo z raziskovalnimi laboratoriji in upravnim delom, veliko delavniško zgradbo, majhno hišo za polindustrijske poskuse na elektrolizi in posebno predavalniško zgradbo. V celoti ima inštitut tako velik obseg, kot ga doslej pri takih ustanovah nismo bili vajeni, zlasti pa ne v Ljubljani.

Začetki fizikalnega inštituta pri SAZU segajo že v prve mesece po osvoboditvi, ko je stavil tedanji predsednik vlade LRS, pokojni Boris Kidrič, prva sredstva na razpolago za nakup instrumentarija v Italiji. Nakup se žal ni posrečil. V letu 1947 smo adaptirali skladišče na dvorišču Akademije za potrebe inštituta, ker smo imeli namen ukvarjati se z vele-molekulsko fiziko in poleg tega postaviti majhen nevtronski generator na podlagi reakcije $D(d, n)He$, za katero zadostujejo že zelo majhne napetosti. Še preden pa je bila adaptacija izvršena, je februarja 1949 predlagal Boris Kidrič, tedaj predsednik zveznega gospodarskega sveta, naj bi postavili nov, velik raziskovalni inštitut, ki bi ga predvsem posvetili jedrski fiziki z jedrskim reaktorjem kot velikim ciljem. Ideja je bila zelo smela, tako smela, da sem ostal popolnoma sam pri prvih delih in načrtih. Že v jeseni so se začeli prvi izkopi, spomladi naslednjega leta pa je dobil inštitut svoje prve sodelavce: ing. Mohorčiča, ki je organiziral kemijski laboratorij in vodi sedaj prav njegov organski del, ing. Cilenška, ki je začel delati na konstrukciji elektrostatičnega generatorja po van de Graaffu, in dr. Havlička, ki se je posvetil študijam za preračunavanje reaktorja. Delo v tej začetni fazi je bilo res pionirsko. Bili smo v napol skončani stavbi na dvorišču akademije, kjer je še manjkala voda, plin in elektrika, v roke nismo imeli prijete skoraj ničesar. Treba je bilo veliko optimizma in zaupanja, požrtvovalnosti in iznajdljivosti, da so bile premagane dolgotrajne začetne težave in da je mogel začeti inštitut končno vendar s svojim pravi delom.

Naloga, da se pripravi material za jedrski reaktor, vsebuje večinoma kemijske in tehnološke probleme. Zato je bilo treba postaviti zmogljiv analizni laboratorij, ki ga vodi ing. Kosta, v katerem so se doslej vršile analize uranovih rud — fluorometrijo je izdelal ing. Pirš, na kromatografiji pa dela dipl. kemik Lebez — in začele raziskave motečih sledi v uranu. Določevanje prav malih količin jedrsko nezaželenih elementov je prav naloga spektrografskega laboratorija z ing. Permanom na čelu. Važno surovino za najbolj preprost reaktor predstavlja težka voda. Dobimo jo z elektrolizo in po izmenjalnih reakcijah med navadno vodo in vodikom ob prisotnosti primernih katalizatorjev. Polindustrijsko napravo za preiskus raznih metod postavlja prav sedaj dr. ing. Knop.

Čeprav je reaktor na težko vodo najlažje dosegljiv in ga prav zato nameravamo v Jugoslaviji najprej postaviti, in sicer v Kidričevem jedrskem inštitutu v Vinči, vendar izgleda, da pride za pridobivanje energije v pošteb predvsem reaktor na obogačeni uran, to je na uran, v katerem smo povečali delež U^{235} . Zato smo v dogovoru z Vinčo prevzeli v Ljubljani nalogo, da bomo pregledali možnosti dela te vrste v naših pogojih in, če se le da, postavili napravo za tako obogačenje. V pošteb prihaja elektromagnetna ločitev, difuzija, destilacijska kolona in ultracentrifuga. Ločitveni faktor pa je povsod zelo majhen, tako da so potrebne zelo obsežne naprave, če hočemo z nepretrganim delom dobiti na leto vsaj kilogram na 14 % obogačenega urana. Z nekaj kilogrami pa bi že lahko postavili majhen homogen reaktor v poskusne namene. Poleg ločitvene naprave je seveda treba imeti uran v primerni spojini. Izkaže se, da je edina uporabna spojina UF_6 , čigar izdelava pa je spet zelo neprijeten kemijski problem prav zaradi agresivnosti in strupenosti fluora.

Tehnični problem reaktorja, preračun in konstrukcijo vodi dr. Havliček, ki se je že takoj v začetku navduševal za danes privzeto smer, da naj se pripravijo načrti za reaktor na obogačeno jedrsko gorivo, ker je prav v tej smeri pričakovati tehničnega razvoja in praktične izrabe jedrske energije, medtem ko je delo na vsakem drugem reaktorju le ponavljanje že večkrat preskušanih in na mnogih mestih vsaj delno priobčenih izsledkov. On vodi sedaj raziskave, ki naj bi pokazale možnosti za koncentriranje v laboratorijskem merilu, ki si jih moremo s svojimi silami in sredstvi privoščiti.

Jedrski reaktor je seveda mrtva investicija, če ne predstavlja ključne faze krepko razvite jedrske fizike. Ta je potrebna tako pri pripravi surovin, pri meritvi njihove jedrske čistosti, pri izdelavi vseh najrazličnejših merskih naprav, brez katerih reaktor ne more delati, kot tudi pri izdelavi programa meritev, ki jih dopušča reaktor kot izredno močan vir predvsem termičnih nevtronov, pri njihovi obdelavi ter pri delu z umetno radioaktivnimi elementi, ki jih dobimo v kopi. Zato je danes glavna naloga inštituta, da razvije jedrsko tehniko kot osnovo za vsakršno delo v jedrski fiziki. Docent Moljk pripravlja jedrski praktikum z osnovnimi meritvami različnih vrst žarkovja, aktivnosti in razpadne dobe, pri čemer naj bi se izvežbali tako študenti fizike kot tudi tisti sodelavci v inštitutu, ki naj bi se posvetili jedrski fiziki.

Med pripravami za štetje so doslej prevladovala števne cevi, ki jih vedno bolj izpodrivajo scintilacijski števci, kjer sproži žarek v primernem

fosforju svetlobni blisk, ki ga prestrežemo s fotopomnoževalko. Kot fosfor služi za nevtrone predvsem s Tl aktivirani NaJ, dalje razni organski kristali in tekoče ali trdne raztopine. Ing. Mohorčič je izdelal velike naftalinove kristale in trdno raztopino terfenila v polistirolu. Vendar je preskrba z ustreznimi fosforji še nepopolna.

Dipl. fizičarka Doboviškova meri jedrske plošče, ki so bile eksponirane v veliki višini pri balonskem vzletu v Lundu. Poleg velikega števila zvezd je na teh ploščah tudi nekaj sledov mezonov in neka prav zanimiva sled težkega delca, ki se razleti pri trku v emulziji v večje število delcev. Jedrske plošče bodo prav važno raziskovalno sredstvo pri meritvi jedrskih presekov in energijskih nivojev v jedru. Uporabili jih bomo pri prvih meritvah z betatronom, kjer bomo skušali raziskovati fotoefekt na težkih jedrih, predvsem pa pridobitek protonov in nevtronov. Betatron, ki ga bo letos jeseni montirala v institutu švicarska firma Brown Boveri, bo služil s svojim prodornim žarkovjem maksimalne energije 31 MeV tudi v medicinske namene za obsevanje globlje ležečih tumorjev. Betatron s svojim izredno prodornim žarkovjem zahteva seveda takoj obsežno delo na meritvi žarkovne doze in na varnostnih merah, ki so potrebne za zavarovanje raziskovalcev, zdravnikov in obsevanih bolnikov.

V institutu postavljamo majhen generator z napetostjo 140 kV za pridobivanje nevtronov po reakciji DD in kratkoživih aktivnih izotopov, ki jih ni mogoče dobiti iz že obstoječih reaktorjev, ker zaradi svojega hitrega razpadanja ne prenesejo dolgega potovanja. Meritve na raznih vrstah nevtronov in predvsem preučevanje zaviranja ter absorpcije nevtronov v raznih materialih pa nameravamo delati na majhnem nevtronskem izvoru, ki ga tvori spojina RaBeF_4 iz 60 mC radija, ki ga je izdelal v institutu ing. Kosta. To je prvi izvor take vrste, ki je bil izdelan v naši državi. V kratkem pa bomo dobili iz Vinče v dar mnogo izdatnejši izvor s 500 mC radija, ki so ga izdelali v Harwellu. V tem izvoru je radij le zelo tesno pomešan z berilijem, ni pa z njim kemijsko spojen kot v našem doma izdelanem izvoru. Nadaljnja priprava za jedrske meritve je elektrostatični pospeševalnik po van de Graaffu, ki ga gradita ing. Cilenšek in ing. Pečnikar. Doseči upamo z njim 500 kV v zraku in 2 MV v dušiku pri 10 atm. Če bo šlo vse po sreči, bo do konca leta postavljen ves visokonapetostni del in verjetno tudi že ionski izvor, pri katerem so dali dose-danji poskusi kar zadovoljliv ionski tok 100 μA . V prihodnjem letu bi mogli s to napravo začeti tudi meritve jedrskih nivojev. Na merski tehniki te vrste se sedaj vežba dipl. fizik Zupančič v Kopenhagenu v Bohrovem institutu.

Za meritve izotopske sestave elementov je zgradil ing. Dekleva tri-stopni masni spektrometer na hitrostno zbiranje po Bennettu, ki bo uporaben predvsem pri nizkih masah do nekako 40. Njegova ločivost je približno 35. S spreminjanjem frekvence pospeševalne napetosti na sistemih mrežic v vseh stopnjah se da izbrati iz plinskega merjenca zelena masa in izmeriti njen delež iz ustreznega ionskega toka. Za večje mase pa pripravlja sedaj skupaj z ing. Furmanom magnetni spektrometer po Nieru, ki naj bi imel znatno večjo ločivost, približno 400. Verjetno pa se bo pokazala še potreba postaviti spektrometer za večji tok, s katerim bi mogli dobiti merljive množine čistih izotopov za jedrske meritve.

Še neizpolnjen je načrt za delo z radioaktivnimi izotopi, za katere se zanimajo kemiki, biologi in medicinci. Ko bodo izdelane osnovne

merske priprave, nameravamo dobivati te snovi iz Harwella, ki je glavni dobavitelj zanje za vso Evropo. Institut bi sprejemal pošiljke in jih razdeljeval interesentom, skrbel za izvežbanje porabnikov v merski tehniki in za varnostne mere pri njih. Prav sedaj se pripravljajo v elektronskem laboratoriju načrti za izdelavo cele serije potrebnih merskih instrumentov iz materiala, ki je v Ljubljani dostopen. Gre za delilnike in dozimetre, ki jih morajo imeti vsi tisti, ki hočejo delati z radioaktivno zaznamovanimi elementi.

Že večkrat omenjene varnostne mere pri delu s pospeševalniki in z radioaktivnimi snovmi, posebno pri uporabi za zdravljenje, nujno terjajo tesnejšega sodelovanja instituta z biologi in zdravniki. Docent Moljk je prevzel nalogo, da to sodelovanje izvede in organizira potrebno raziskovalno delo o vplivu žarkovja na organizem, o varnostnih merah, dozimetriji itd. To postaja vsak dan bolj pereče vprašanje, saj ima vedno več ljudi opravlja z žarkovjem, na drugi strani pa se tu odpira zelo obsežno raziskovalno področje, ki more uspevati le ob sodelovanju zelo razgledanih fizikov, biologov in zdravnikov.

Poleg jedrske fizike ima institut še dva laboratorija za makromolekulsko fiziko in za optiko. V prvem je dipl. fizik Čopič postavil aparaturo za meritev strujnega dvojnega loma, na kateri hoče sedaj izmeriti vpliv topila na obliko in optično anizotropnost velemolekul. Obliko meri neposredno s sipanjem svetlobe na aparaturi, ki sta jo sestavila dipl. fizika Jamnik in Gosar. Pripravo velemolekulskih preparatov in posameznih frakcij vodi ing. Mohorčič v organskem kemijskem laboratoriju. Molekulsko maso merimo z osmozo in s sipanjem svetlobe. Za te raziskave ima veliko zanimanje tovarna Jugovinil, ki bi rada vedela, kakšna je molekulska sestava njihovega polivinilovega klorida. Optični laboratorij, ki ga vodi dr. Havliček, se sedaj bavi z izdelovanjem planparalelnih plošč, ki jih potrebujemo za zgraditev interferenčnega refraktometra. Naloga laboratorija je prav izdelovati take specialne optične aparate za institut sam in za druge raziskovalne institute, ki jih zaradi njihove posebne narave ne bo izdelovala domača optična industrija.

Glede na velikansko potrebo po elektronskih instrumentih — praktično vse jedrske meritve potrebujejo takih naprav: števci, delilniki, pogostnostni merilniki, ojačevalniki itd. — je bil ustanovljen poseben elektronski laboratorij, ki ga vodi ing. Bremšak. Njegova naloga je oskrba instituta z vsemi potrebnimi elektronskimi instrumenti, priprava prototipov za elektronsko delavnico, ki jo vodi tov. Vrščaj, umerjanje doma izdelanih instrumentov in preskušanje novih stikov. Prav sedaj se pripravlja diferencialni analizator, s katerim se more meriti energijska porazdelitev žarkovja.

Poleg že omenjene radijske delavnice ima institut tudi veliko mehanično delavnico, ki jo vodi tov. Petkovšek. Čeprav ima za naše dosedanje pojme zelo številno osebje, je vendar ozko grlo za delo v institutu. Potreba po kompliciranih, preciznih aparatih je tako velika, da bo treba delavnico še prav znatno razširiti, da bo mogla vršiti zadovoljivo svoj nalogo. Upamo, da se bo to posrečilo v novih prostorih. Delavnica bo imela posebno brusilnico, lakirnico, kovačnico in oddelek za fino mehaniko. Dalje ima institut svojo lastno mizarsko, elektrotehniško, steklopihaško in fotografsko delavnico.

Zidava institutskih poslopij, ki še vedno ni zaključena, ker so posamezni objekti še v delu ali šele komaj pri pripravi temeljev, zahteva neverjetno veliko truda, potov in skrbi. Ne bi bilo prav, če ne bi omenil tu tov. Polajnarja, ki je v preteklih letih vodil ta nehvaležni posel, in ing. Battestiņa, ki mu zadnje leto jemlje to delo večino njegovega časa, ki bi ga sicer gotovo raje posvetil konstruiranju aparatov, ki se naj v institutu gradijo. Načrte za stavbe je napravil ing. Medvešček, za delavnico in betatronske prizidek ing. Živič, za notranjo opremo ing. Omahen.

Ob tem kratkem, zelo enostranskem opisu dela in organizacije instituta se vendar prav jasno vidi, kako velika tvorba je to in kakšno veliko pridobitev pomeni za znanost v naši republiki in v državi. Nam, ki smo zrasli v tesnih razmerah in v hudem pomanjkanju, je včasih kar težko verjeti, da se moremo ukvarjati z res velikimi problemi in da imamo za to na razpolago tudi ustrezna sredstva. Za vse to se imamo zahvaliti velikopoteznosti in razgledanosti pokojnega Borisa Kidriča, ki je postavil temelje vsemu institutu in skrbel za njegovo opremo. Naj bo naše delo trajen spomenik njegovemu geniju in njegovi trdni veri, da smo zmožni ob primerni materialni podpori doseči evropsko raven tudi v eksaktnih znanostih in prispevati tehten delež k znanstvenemu in materialnemu napredku Jugoslavije.

A. Peterlin

Razstava jedrske fizike v Ljubljani

Fizikalni institut SAZU je priredil ob otvoritvi novega poslopja na Jamovi cesti razstavo jedrske fizike z namenom, da pokaže širši javnosti, s čim se bavi jedrska fizika in kolikšen obseg so zavzele jedrske raziskave v posameznih državah. Razstava je bila odprta od 8. februarja do 1. marca. Obiskalo jo je nad 10.000 ljudi iz Ljubljane in iz drugih krajev.

Razstavo so pripravili sodelavci in asistenti fizikalnega instituta M. Čopič, D. Jamnik, E. Cilenšek in L. Kosta, v sodelovanju s podpisanim. Priprave za poskuse, elektronski instrumenti in fotografije so bile izdelane v institutskih delavnicah. Modele in žive table sta izdelala laboranta L. Gradišar in D. Tomažič. Karikature je napravil B. Kos, študent fizike. Razstavo je moderno opremil in razmestil ing. arch. B. Kocmut ob pomoči študentov arhitekture. Vodstvo skupin po razstavi so prevzeli slušatelji zadnjih letnikov na oddelku za fiziko.

Razstava je bila razdeljena na 8 poglavij. Na lesenih stojalih so bile razmeščene table z besedilom, fotografijami in shemami. Poskuse so kazali demonstratorji, ki so bili na razpolago za strokovno razlago in so vodili skupine. Princip nekaterih pojavov, merilnih priprav in pospeševalnikov je bil ponazorjen na živih tablah. Na teh je bil prikazan potek z raznobarvnimi lučmi, ki so se po vrsti prižigale in ugašale. Nekatere stvari so bile narisane še po domače s karikaturami, ki so zelo poživile razstavo. Ker je dala razstava pregled čez področje, ki je za nas novo, ne bo odveč, če podrobneje naštejemo, kaj so obsegala posamezna poglavja.

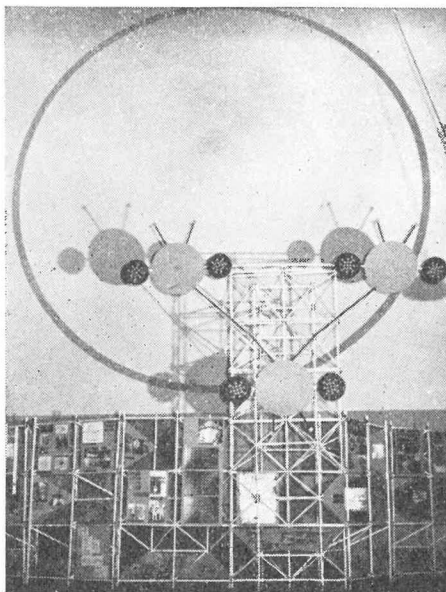
1. Osnove jedrske fizike. Razstavljenih je bilo nekaj modelov molekul in tabla periodnega sistema elementov z vrisanimi krogi, ki so kazali velikosti atomov. Da bi dobili obiskovalci vtis, kako majhno je jedro v primeri z atomom in kako težko ga je zadeti, je bil naslikan na steni dvorane prazen krog s premerom 10 m. Ta naj bi predstavljal 10^{10} krat povečan atom vodika; jedro je še pri tej povečavi veliko le nekaj desetink milimetra. Iz steklenih krogel, ki naj bi predstavljale protone in nevtrone, so bili napravljeni modeli nekaterih jeder. Poznamo 100 elementov, toda okrog 1000 različnih jeder, ki jih je pregledno kazala tabela izotopov. Tri četrtine vseh znanih jeder je radioaktivnih. Dobimo jih z jedrskimi reakcijami, če obsevamo snov s protoni, nevtroni, devteroni, delci α in drugimi delci ali pa tudi s fotoni. Razstavljen je bil radijberilijev izvor nevtronov, ki je bil sestavljen doma. Kazali so, da postane indij blizu izvora radioaktiven.

Cepitev jedra U^{235} je bila predočena na veliki živi tabli. Druga tabla je kazala pomnoževanje nevtronov pri verižnem cepljenju in s tem ponazarjala eksplozijo atomske bombe. Pri vsaki cepitvi odletijo 2 do 3 nevtroni in vsak od njih lahko sproži novo cepitev. Tretja tabla pa je kazala princip uranske kope. V primerno veliki kopi se vzdržuje stalno število cepitev na sekundo, ker se nekaj odvišnih nevtronov absorbira, nekaj jih pa uide. Pri tem se sprošča stalna moč.

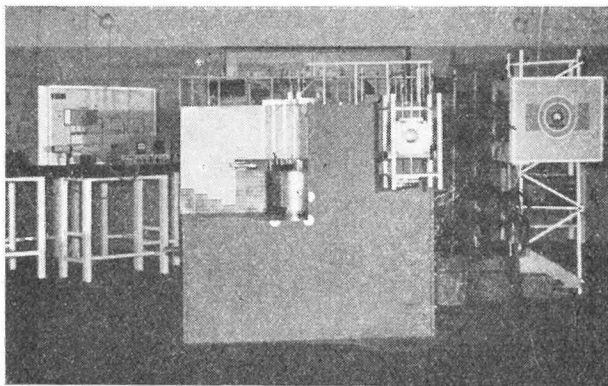
2. Merilne priprave. Hitre delce ugotavljamo na splošno tako, da opazujemo ionizacijo, ki jo delci povzročajo v snoveh. V Wilsonski kameri se kondenzira vodna para na ionih, ki jih je napravil delec. Na fotografski plošči dobimo po razvijanju temno sled tam, kjer je delec letel skozi občutljivo plast. Oba načina sta bila predstavljena s povečavami fotografskih posnetkov.

Posebna živa tabla je kazala delovanje ionizacijske celice in časovni potek napetostnega sunka na zaporedno vezanem upor. Ionizacijska celica je navadno valjni kondenzator, ki je preko velikega upora vezan na stalen izvor. Elektroni in pozitivni ioni, ki jih pušča delec za seboj, gredo na elektrodi. Naboj kondenzatorja se za hip zmanjša, izvor pa takoj nadomesti to izgubo. Tako dobimo na upor napetostni sunek, ki ga je treba še primerno ojačiti. Razstavljen je bil dozimeter na ionizacijsko celico, ki ga rabijo za kontrolo varnosti pri delu z radioaktivnimi snovmi.

Druga tabla je kazala delovanje Geigerske cevi. Vsak delec, ki napravi vsaj en ionski par v tej cevi, sproži plaz elektronov in ionov in s



Sl. 1. Pogled v razstavno dvorano skozi vhodna vrata. Krog na steni predstavlja povečan atom vodika. Jedro je še pri tej povečavi tako majhno, da se ne vidi. Na stolpu iz predalčja je simbolično nakazana cepitev jedra. Spodaj je na stojalih razmeščeno poglavje, ki kaže uporabo reaktorja



Sl. 2. Na levi je živa tabla, ki ponazarja delovanje scintilacijskega števca; v sredi je 4-krat pomanjšan model francoske atomske kope ZOE in model kope LOPO. Na desni je videti na stojalu tablo, ki kaže delovanje betatrona

tem precej velik napetostni sunek. Sunke šteje elektronska števna priprava, ki na ta način pove število delcev. Razstavljena je bila Geiger-ska cev in števna naprava, ki je bila izdelana že l. 1948 doma, in števna naprava ameriške tvrdke Tracerlab, s katerima so se predvajali poskusi. Druga, tudi doma izdelana števna naprava, je zgrajena tako, da kaže kar število sunkov na sekundo.

V nekaterih snoveh (n. pr. naftalin, antracen,

NaI/Tl, ZnS) povzročajo hitri delci zaradi ionizacije drobne bliske (*scintilacije*), ki jih lahko zaznamo z elektronsko pomnoževalko in nato preštejemo z omenjeno števno pripravo. Živa tabla je kazala delovanje scintilacijskega števca, t. j. kristala z elektronsko pomnoževalko. Z doma izdelanim scintilacijskim števcem na naftalinski kristal so kazali, kako se meri absorpcija žarkov γ .

3. **Jedrska elektronika.** Sunke, ki jih dajo števne cevi ali pomnoževalke, je treba ojačiti, ločiti po velikosti, včasih še oblikovati in prešteti. Zato potrebujemo elektronske priprave, kot n. pr. linearni ojačevalnik, diskriminator, univibrator, elektronski delilnik, stabilizirani napetostni izvor, ki so bili vsi prikazani s shemami. Obiskovalec je lahko sam poskusil, kako dela razpolovna enota, ki je osnovni element elektronske števne priprave.

4. **Pospeševalniki.** Za jedrske reakcije potrebujemo delce z veliko energijo, ki jih dobimo lahko s pospeševalniki. Principi posameznih pospeševalnikov so bili prikazani na živih tablah. Pravo predstavo o nekaterih pospeševalnikih pa so dobili obiskovalci iz fotografij in iz podatkov. Pri van de Graaffovem generatorju mažemo elektriko na trak, ki jo prenaša v kroglo na vrhu. Od krogle do zemlje gre pospeševalna cev, ki ima na vrhu ionski izvor. Pri obiskovalcih je vzbudil veliko zanimanje 1,5 m visok van de Graaffov generator, ki je pri 400 kV napetosti dajal močne iskre.

Imamo še drugo vrsto pospeševalnikov, pri katerih delci krožijo in večkrat zapored pretečejo pospeševalno napetost, namesto da bi naenkrat dobili isto energijo. Delovanje ciklotrona je kazala tabla. Delec kroži v evakuirani posodi med poloma elektromagneta. V posodi sta pospeševalni elektrodi z obliko D, na kateri damo izmenično napetost pravilne frekvence.

Elektrone pospešujemo lahko z betatronom, ki je v bistvu transformator z evakuirano cevjo kot sekundarnim navitjem. Dokler narašča B , se inducira napetost in elektron v cevi se pospešuje. Elektron dobi tem večjo energijo, čim več obhodov naredi v tem času. Če udarijo elektroni

na tarčo, nastanejo zelo trdi rentgenski žarki.

5. Uporaba jedrske fizike. Radioaktivne snovi uporabljamo kot izvore žarkov γ . Te rabijo v industriji za presevanje debelih kovinskih kosov, v medicini pa za obsevanje rakastih novotvorb. Mnogo se uporablja kobalt 60, ki ga prodajajo že v izvorih do velikosti več kilocuriejev.

Radioaktivne snovi lahko uporabljamo kot indikatorje, ki nam povedo, kje se nakopiči neka snov in koliko jo je. Model je kazal uporabo radioaktivnega joda 131 za preiskavo delovanja ščitne žleze. Na grlu pacienta, ki je popil raztopino natrijevega jodida z dodatkom nekaj mikrocuriejev J^{131} , je nameščena Geigerska cev. Tako zvemo za množino joda, ki se je nakopil v žlezi. Slike so kazale še druge primere uporabe radioaktivnih indikatorjev: lokacijo tumorjev, merjenje krvnega obtoka, druge fiziološke preiskave, raziskavo učinka umetnih gnojil.

Cepitev urana izrabljajo v uranskih kopah. Seznam reaktorjev je dajal podatke o njihovi zgradbi in moči. V sredi dvorane je bil 4-krat pomanjšan model francoske kope ZOE s težko vodo, ki stoji v Chatillonu pri Parizu. Zraven je bil 4-krat pomanjšan model kope LOPO z vodno raztopino uranilnega sulfata, v katerem je U^{235} obogaten na 15 %.

6. Jedrska fizika v svetu. Za posamezne države je bilo objavljeno, koliko sredstev dajejo za jedrske raziskave, koliko ljudi dela na tem področju, kateri so vodilni delavci in kaj so dosegle.

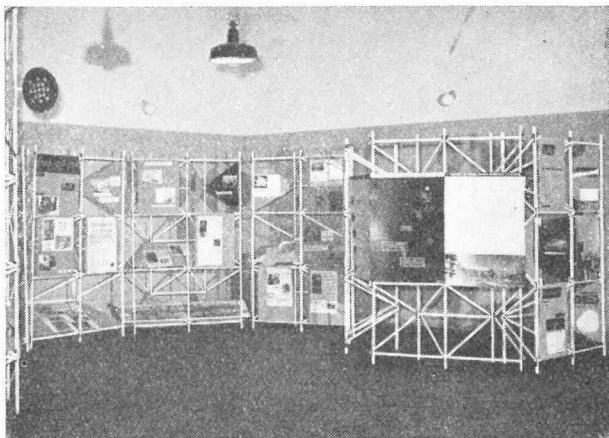
7. Jedrska fizika v Jugoslaviji. V naši državi imamo 3 institute, ki se bavijo z jedrsko fiziko: v Vinči pri Beogradu, v Zagrebu in v Ljubljani. Vsi trije instituti so dali slike poslopij, pregled dosedanjega dela in nadaljnje načrte.

8. Zgodovinski pregled. Našteti so bili važnejši datumi in s fotografijami predstavljeni delavci, ki so v času od leta 1896 dalje pa do danes največ prispevali k razvoju jedrske fizike.

* * *

V razstavo je bilo vloženo mnogo dela in bi bilo škoda, da bi vse skupaj obležalo na kaki podstrehi. Ali ne bi mogla biti ta razstava začetek javne fizikalne zbirke, o kateri se v vrstah naših fizikov razpravlja že od osvoboditve dalje. Taka zbirka nam je danes vsaj tako potrebna kot vsak drug muzej in galerija. Javna fizikalna zbirka naj bi s poskusi kazala osnove fizike, brez zgodovine in brez nepotrebnih podrobnosti. Taka zbirka bi mnogo prispevala k fizikalni izobrazbi našega ljudstva, koristna pa bi bila tudi šolam, ki same ne zmorejo obsežnejših poskusov. Zbirka bi bila tudi tujsko prometna zanimivost in bi po svoje prispevala k našemu ugledu v svetu.

A. Moljk



Sl. 3. Jedrska fizika v Jugoslaviji: V levem delu razstavlja institut v Vinči, v desnem pa institut v Zagrebu

ODGOVORI

5. Nihajoči tok v cevi

(Iz letnika II.)

Po zelo dolgi cevi potiskamo vodo sem in tja. Razlika pritiskov niha harmonično: $dp/dx = -A \exp(-i\omega t)$. Amplitude so tako majhne, da je tok laminaren. Navier-Stokesova enačba je v tem posebnem primeru linearna:

$$\varrho \partial v / \partial t = - dp/dx + \eta \nabla^2 v \quad (1)$$

Tu je η viskoznost in ϱ gostota. Zaradi cilindrične simetrije je $\nabla^2 = \partial^2 / \partial r^2 + \partial / \partial r \partial r$. Ker niha pritisk harmonično, domnevamo, da niha tudi hitrost harmonično in z isto frekvenco: $v(r, t) = u(r) \exp(-i\omega t)$. To vstavimo v gornjo enačbo:

$$\eta (d^2 u / dr^2 + du / r dr) + i\omega \varrho u = -A \quad (2)$$

Eno rešitev te enačbe takoj uganemo: $u = -A / i\omega \varrho$. To pa še ni splošna rešitev, ker ji lahko prištejemo še poljuben mnogokratnik rešitve pripadajoče homogene enačbe (kjer je $A = 0$). Rešitev le-te pa se izrazi z Besselovo funkcijo reda nič: $J_0(\sqrt{i} r/a)$. Rešitev se potem glasi:

$$u = -A / i\omega \varrho + \text{konst. } J_0(\sqrt{i} r/a)$$

Zaradi krajše pisave smo vpeljali $a = (\eta / \varrho \omega)^{1/2}$. Ob steni ($r \rightarrow r_0$) gre hitrost proti nič. Od tod izračunamo konstanto in je končno

$$u = (iA / \omega \varrho) [1 - J_0(\sqrt{i} r/a) / J_0(\sqrt{i} r_0/a)] \quad (3)$$

Funkcija $u(r)$ je kompleksna: $u = |u| \exp(i\delta)$. Njena absolutna vrednost $|u|$ pove amplitudo hitrosti, kot δ pa fazno zakasnitev. Hitrost torej lahko zapišemo takole: $v = |u| \exp[-i(\omega t - \delta)]$. Hitrost ne niha z isto fazo kot pritisk, ampak zaostaja za njim za kot δ . Kot δ pa ni povsod enak, ampak je odvisen od r .

Mimogrede naj bo omenjeno, da velja za izmenični tok v žici podobna enačba kot (2), le da je homogena ($A = 0$). Hitrost u zamenja poljska jakost E , konstanti η in ϱ pa specifična upornost ϱ in induksijska konstanta μ_0 . Za računanje kožnega efekta (skinefekta) torej tudi potrebujemo funkcijo $J_0(\sqrt{i}x)$, ki so jo prav v ta namen tabelirali. Funkcijo $J_0(\sqrt{i}x)$ najdemo tabelirano na dva načina: enkrat sta podani realna in imaginarna vrednost, drugič pa njena absolutna vrednost in kot δ , kar je za množenje in deljenje zelo prikladno.

Poiskati hočemo še, za koliko zaostaja nihanje celotnega toka za nihanjem pritiska. Celotni tok (pretočena prostornina na sekundo) je:

$$\Phi = \int_V dS = \int_0^{r_0} u \exp(-i\omega t) 2\pi r dr$$

Ta integral se da izraziti z Besselovo funkcijo prvega reda, saj je $d[x J_1(x)]/dx = x J_0(x)$ in zato

$$\Phi = i\pi A r_0^2 / \varrho \omega [1 - J_1(\sqrt{i} r_0/a) / (\sqrt{i} r_0/2a) J_0(\sqrt{i} r_0/a)] \exp(-i\omega t) \quad (4)$$

Pišimo zopet $\Phi = |\Phi| \exp(i\delta_0)$, kjer δ_0 pove zakasnitev celotnega toka. Funkciji J_0 in J_1 razvijemo v potenčni vrsti in ju vstavimo v (4), da dobimo vrsto za Φ . Združimo realne in imaginarne člene zase:

$$\Phi = \text{Re } \Phi + \text{Im } \Phi$$

Od tod izračunamo:

$$\text{tg } \delta_0 = \text{Im } \Phi / \text{Re } \Phi = \frac{1}{8} (r_0/a)^2 - (r_0/a)^6/5760 + 17 (r_0/a)^{10}/46448640 - \dots$$

Ta vrsta je konvergentna le v konvergenčnem krogu, ki sega do najbližje singularne točke, to je do najbližje ničle funkcije $\text{Re } \Phi$. Četvorica takih ničel leži, kot pokaže račun, na krogu $|r_0/a| = 4,6$.

Če sta frekvenca in polmer majhna ($r_0/a \ll 1$), se zadovoljimo lahko s prvima členoma vrst za J_0 in J_1 . Tedaj je

$$u = A(r_0^2 - r^2)/4\eta \quad \text{in} \quad \Phi = (\pi A r_0^4/8\eta) \exp(-i\omega t)$$

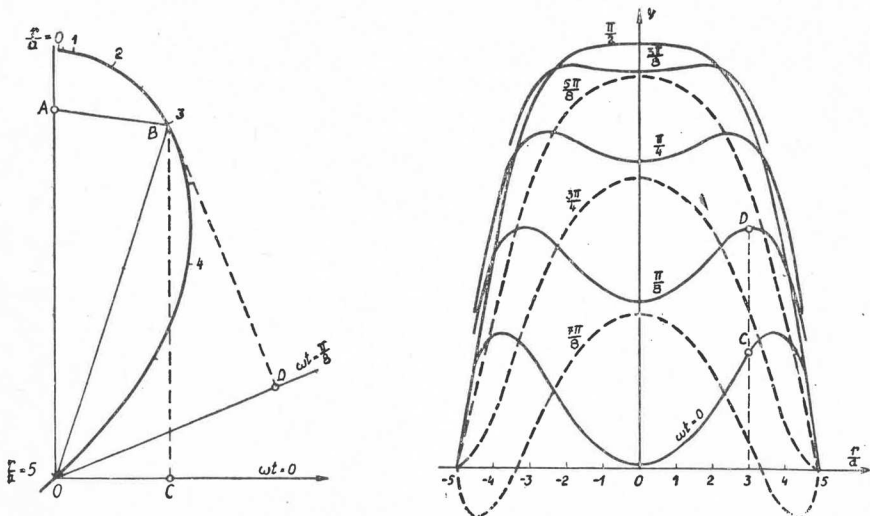
kot δ pa je skoraj nič. To se ujema s Poiseuilleovim zakonom, kar smo smeli pričakovati.

Pri velikih frekvencah in polmerih ($r_0/a \gg 1$) lahko uporabimo asimptotični formuli

$$J_0(x) \approx (\frac{1}{2} \pi x)^{-1/2} \cos(x - \pi/4) \quad \text{in} \quad J_1(x) \approx (\frac{1}{2} \pi x)^{-1/2} \cos(x - 3\pi/4).$$

Nazadnje se izkaže, da gre δ_0 proti $\pi/2$, če r_0/a narašča.

Za ponazoritev si oglejmo še primer iz mehanike: Voz potiskamo s harmonično sem in tja nihajočo silo. Če je voz lahek in trenje veliko, kar ustreza ozki cevi in velikemu notranjemu trenju v tekočini, je potiskajoča sila skoraj enaka sili trenja.



Porazdelitev hitrosti, če je $r_0/a = 5$. leva slika služi za grafično računanje. Daljica OA predstavlja konstantni del funkcije u (gl. enačbo 3). Temu prištejemo spremenljivi del, ki ga dobimo iz tabel. Če je n. pr. $r/a = 4$, dobimo točko B. Ker pa nas zanima samo realna komponenta hitrosti, projiciramo daljico OB na realno os. Tako smo dobili hitrost za $t = 0$ in $r/a = 4$ (projekcija OC). Če pa hočemo dobiti hitrost v poznejšem času t , zasukamo koordinatni sistem, za kot ωt in poiščemo projekcije na novi koordinati (za $r/a = 4$ in $\omega t = \pi/8$ dobimo projekcijo OD).

Na desni sliki so narisane porazdelitve hitrosti v eni polovici periode. V prvi četrtini periode hitrosti v sredini cevi naraščajo (izvlečena krivulja), v drugi četrtini pa se manjšajo (črtkasta krivulja). Iz slike se tudi lepo vidi, da zakasnitev ni po vsej cevi enaka

Sila in hitrost nihata v fazi. Pri težkem vozu z dobro namazanimi ležaji lahko trenje zanemarimo in je sila $F = m \cdot a$ (široka cev, notranje trenje lahko zanemarimo). Sila in pospešek nihata v fazi, hitrost pa zato zaostaja za $\pi/2$. — Podobno je z izmeničnim tokom v tuljavi. V tuljavi z veliko upornostjo in majhno induktivnostjo sta napetost in tok le malo razmaknjena. Če pa je ohmska upornost majhna in induktivnost velika, zaostaja tok za napetostjo skoraj za $\pi/2$. B. Povh

1. A. Sommerfeld: Vorlesungen über theoretische Physik, V. Elektrodynamik. Leipzig 1949.

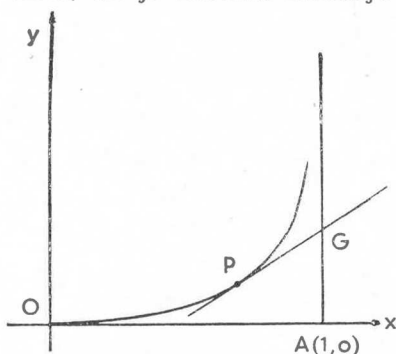
2. Jahnke-Emde: Tafeln höherer Funktionen, Leipzig 1948.

7. Krivulja zasledovanja

(Iz letnika II.)

Kinematično se glasi naloga takole: Točka G (gospodar) se giblje z enakomerno hitrostjo c_g po premici. Kakšno krivuljo opiše točka P (pes), ki se giblje s konstantno hitrostjo c_p , če je hitrost točke P vedno usmerjena proti G ?

Koordinatni sistem postavimo tako, da je izhodišče O v začetni legi točke P , os y pa naj bo vzporedna s premico, po kateri se giblje G . Smemo vzeti, da je začetna razdalja a točk P in G kar dolžinska enota, torej



$a = 1$. Točka G se giblje sedaj po premici $x = 1$, P pa opiše tako krivuljo $y = y(x)$, da je tangenta v vsakem trenutku usmerjena proti G (glej sliko). V času t naj ima P koordinate (x, y) , G pa $(1, y_g)$. Tangenta na krivuljo $y = y(x)$ prebije premico $x = 1$ ravno v točki, kjer je v istem času G . Ker je enačba tangente $\eta - y = y'(\xi - x)$, dobimo od tod $\eta = y_g$ za $\xi = 1$, torej

$$y_g = y + y'(1 - x) = AG \quad (1)$$

Ker se P in G gibljeta s konstantno hitrostjo, je razmerje poti OP in AG isto kakor razmerje hitrosti c^d in c_g , ali $AG = \kappa OP$, če je $\kappa = c_g : c_p$. Z upoštevanjem formule za lok OP in enačbe (1) pa dobimo od tod:

$$\kappa \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx = y + y'(1 - x)$$

Z odvajanjem pridemo na diferencialno enačbo

$$\kappa \sqrt{1 + y'^2} = (1 - x)y''$$

v kateri lahko spremenljivke takoj ločimo:

$$\frac{dy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{\kappa dx}{1 - x}$$

Če integriramo, dobimo najprej enačbo $\text{Log}(y' + \sqrt{1 + y'^2}) = -\kappa \text{Log}(1 - x) + C$. Ker je $y' = 0$ pri $x = 0$ (v začetni točki je namreč abscisna os tangenta), je integracijska konstanta $C = 0$. Od tod je potem

$$\begin{aligned} y' + \sqrt{1 + y'^2} &= (1 - x)^{-\kappa} \\ -y' + \sqrt{1 + y'^2} &= (1 - x)^{\kappa} \end{aligned} \quad (2)$$

Drugo enačbo smo dobili iz prve, če smo vzeli na obeh straneh recipročno vrednost. Od tod je

$$2y' = (1-x)^{-\kappa} - (1-x)^{\kappa} \quad (3)$$

Če integriramo, dobimo v primeru $\kappa \neq 1$

$$2(y - C_1) = \frac{(1-x)^{1+\kappa}}{1+\kappa} - \frac{(1-x)^{1-\kappa}}{1-\kappa} \quad (4)$$

Konstanto C_1 določa zahteva, da je pri $x=0$ ordinata $y=0$. Lahek račun da $C_1 = \kappa/(1-\kappa^2)$.

Enačba (4) je enačba iskane krivulje za $\kappa \neq 1$. Ako je $\kappa < 1$, pes gospodarja dohiti v točki, kjer krivulja (4) pride do premice $x=1$, to je v točki z ordinato $\kappa/(1-\kappa^2)$. Čas, ki je za to pot potreben, pa znaša $C_1/c_g = c_p/(c_p^2 - c_g^2)$, saj je C_1 pot, ki jo je v tem času napravil gospodar. Če bi vzeli splošno a za začetno razdaljo, bi morali oba izraza pomnožiti z a .

Če pa je $\kappa = 1$, dobimo z integracijo enačbe (3)

$$2y = -\text{Log}(1-x) + \frac{1}{2}(1-x)^2 + C$$

Pri istih začetnih pogojih je $C = -\frac{1}{2}$. Enačba iskane poti je potem:

$$2y = -x(1 - \frac{1}{2}x) - \text{Log}(1-x)$$

V tem primeru seveda pes gospodarja ne dohiti.

Enačbo (1) moremo pisati tudi v obliki $y_g - y_p = y_p'(1 - x_p)$, kjer so koordinate točk P in G označene z ustreznimi indeksi. Kvadrat razdalje PG je potem:

$$PG^2 = (y_g - y_p)^2 + (1 - x_p)^2 = (1 + y_p'^2)(1 - x_p)^2 \quad (5)$$

Če pa $1 + y_p'^2$ izračunamo iz (2) in vstavimo dobljeni izraz v (5), dobimo od tod enostavno formulo za razdaljo:

$$PG = \frac{1}{2}[(1 - x_p)^{1+\kappa} + (1 - x_p)^{1-\kappa}]$$

Za $\kappa = 1$ imamo $PG = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - x_p)^2$. Od tod se vidi, da se razdalja vedno manjša in znaša v limiti $\frac{1}{2}$.

F. Avsec

UTRINKI

Nov efekt? — Rakasto tvorbo izpostavijo intenzivnim žarkom, bodi radija, kobalta ali cezija, ki ubijajo rakaste celice na ta način, da presekaajo krvne žilice in tako onemogočijo dovajanje krvi v obolelo tkivo.

Tribuna, 3. II. 1953

Mikrovalovna fizika — »po domače«. — Šele prav pred II. svetovno vojno so iznašli vakuum cev, ki omogoča prehod na krajše valove. — Mikrovalove lahko pokažemo s tako imenovanim »prečiščevalnim kristalom«, ki je pravzaprav samo kos kremenca in tanke žice. Imenujejo ga tudi diodni kristal in spremeni mikrovalove v tok, ...

Življenje in tehnika, 4, 37 (1953)

VPRAŠANJA

5. Numerično odvajanje

Kadar je funkcija dana samo s tabelo, ne moremo pri računanju odvoda iti do limite, ampak se moramo zadovoljiti s končnimi intervali. Pri tem niti ni dobro, da bi jemali najmanjše možne intervale, ker bi bila natančnost pri izračunanem odvodu slaba. Srednje veliki intervali dajo natančnejše vrednosti.

Tako moramo delati pri vseh funkcijah, ki jih dobimo z meritvami. Mnoge fizikalne količine so definirane z odvodi, na primer hitrost, pospešek, razteznostni koeficient, specifična toplota itd. Vedno računamo te odvode kot kvociente končnih diferenc, ne da bi mogli iskati limito. Seveda dobimo zato odvod le z neko omejeno natančnostjo; s tem moramo pač biti zadovoljni, saj ne moremo nobene fizikalne količine izmeriti, kolikor bi hoteli natančno. Oglejmo si dva primera za tak način odvajanja:

1. Izračunaj kubični razteznostni koeficient vode pri 20°C iz spodaj navedene tabele za gostoto vode! — Računaj naprej samo z diferenčnim kvociantom in pokaži, kakšna je natančnost pri različno širokih intervalih! Pri širokih intervalih lahko natančnost izboljšaš z upoštevanjem višjih diferenc (tretje, pete, ...). Izračunaj tudi višje odvode! Koliko odvodov moreš dobiti?

2. Izračunaj odvod eksponentne funkcije pri $x=0$ samo iz podatkov v spodnji tabeli! Kako široki smejo biti razmaki, da vrsta diferenc, s katero se izraža odvod, še konvergira?

Gostota vode:		Eksponentna funkcija:	
T	ρ	x	e^x
0°C	0,999 841 g/cm ³	—4,5	0,011 109
4	0,999 973	—3,5	0,030 197
8	0,999 849	—2,5	0,082 085
10	0,999 700	—2,25	0,105 399
12	0,999 498	—1,75	0,173 774
14	0,999 244	—1,5	0,223 130
16	0,998 943	—1,25	0,286 505
17	0,998 774	—0,75	0,472 367
18	0,998 595	—0,5	0,606 531
19	0,998 405	—0,25	0,778 801
19,5	0,998 305	+0,25	1,284 025
20	0,998 203	0,5	1,648 721
20,5	0,998 099	0,75	2,117 000
21	0,997 992	1,25	3,490 343
22	0,997 770	1,5	4,481 689
23	0,997 538	1,75	5,754 603
24	0,997 296	2,25	9,487 74
26	0,996 783	2,5	12,182 49
28	0,996 232	3,5	33,115 45
30	0,995 646	4,5	90,017 1
32	0,995 025		
36	0,993 683		
40	0,992 21		

I. Kuščer

»Elektrotehna«

TEHNIČNO TRGOVSKO PODJETJE Z ELEKTROTEHNIČNIM
MATERIALOM

Uprava: Ljubljana, Parmova 33

Skladišče in prodajni oddelek: Ljubljana, Kotnikova 12

PÓSTNI PREDAL ŠT. 11

TELEFONI:

UPRAVA 20-092 * PRÓD. ODDELEK 21-706 * SKLADIŠČE 21-350



Nudimo vam razno elektrotehnično blago domače
in inozemske proizvodnje

Generalno zastopstvo tovarne električnih strojev
„Rade Končar“, Zagreb

Konsignacijska skladišča inozemskih tvrdk

Zahtevajte ponudbe!
Izvršujemo naročila v najkrajšem času!

Društvo matematičara i fizičara N. R. Hrvatske poziva sve, koji se zanimaju matematičko-fizičkim naukama, da se pretplate na

Glasnik matematičko-fizički i astronomski

i sarađuju u njemu.

Zaista ne bi smjelo biti ni jednog kulturnog radnika, koji se bavi matematičko-fizičkim naukama, kao ni prosvjetne ustanove, koja nije pretplatnik Glasnika. Pretplatom i suradnjom u svojem naučnom i stručnom časopisu pokazujete u kolikoj mjeri pratite i podupirete razvitak i napredak svoje struke. Širite također Glasnik u svom krugu, jer time podupirete razvitak matematičko-fizičkih nauka u svojoj okolini.

Prijave pretplate slati na administraciju Glasnika: Hrvatsko prirodoslovno društvo, Zagreb, Ilica 16/III. Pretplata za god. 1953. iznosi 300.— din.

Društvo matematikov in fizikov NRH izdaja za vso državo »*Matematičko-fizički list* za učenike srednjih škola«. Letnik ima 5 številk, med počitnicami ne izhaja. Letna naročnina je 150 din, posamezna številka stane 35 din.

Profesorji srednjih šol, priporočajte list dijakom! Naročila in naročnino pošiljajte na naslov:

Matematičko-fizički list, Zagreb, Ilica 16/III, p. p. 165 ali na čekovni račun št. 401-T-1080.

Zveza Društev matematikov in fizikov FLRJ izdaja časopis:

Nastava matematike i fizike

Naročnina je 200 din, posamezna številka 60 din. Naročila in naročnino pošiljajte podjetju »Znanje«, Beograd, Terazije 12 ali na ček. rač. št. 103—901810 z označbo »Za časopis Nastava matematike i fizike«.

Obzornik za matematiko in fiziko izhaja vsak drugi mesec. Izdaja ga Društvo matematikov in fizikov LRS. Urejuje ga uredniški odbor: I. Kuščer, A. Moljk, I. Vidav, A. Žabkar. Odgovorni in tehnični urednik: I. Štalec. Upravo vodi I. Štalec. — Tiska tiskarna »Toneta Tomšiča« v Ljubljani. — Naročnina za letos je 250 din. Posamezna številka 90 din, dvojna številka 120 din. Naročnino nakažite na naš čekovni račun pri Narodni banki, št. 604-T-207. - Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov:

Obzornik za matematiko in fiziko, Ljubljana, poštni predal 253.