Matematična knjižnica - Ljubljana

# OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

1953 LJUBLJANA LETNIK III

## VSEBINA

**Članki**

Reaktor s težko vodo v Kjelleru na Norveškem (O. Dahl, G. Randers) 1
O Eulerjevi funkciji gama (I. Vidav) . . . . . 14

**Novice**

Konveksne krivulje z dvema ekvikordalnima točkama (F. Avsec) 18
Spontana cepitev atomskega jedra (M. O.) . . . . . 22
Določitev Planckove konstante (S. Bratož) . . . . . 24
F. Bloch in E. M. Purcell, Nobelova nagrajenca za fiziko v l. 1952. (R. Korbar) . . . . . 26

**Novi instrumenti**

Polariskop (B. Ravnikar) . . . . . 27
Priprava za določanje starosti s $C^{14}$ (Z. Gabrovšek) . . . . . 28
Scintilacijski merilnik za žarke $\gamma$ (Nk) . . . . . 29

**Šola**

Še nekaj o elektroforezi (S. Kandare) . . . . . 30

**Nove knjige**

Mehanika (A. Kuhelj) . . . . . 31

**Vprašanja** . . . . . 32

## UREDNIŠTVO JE PREJELO V ZAMENO

Elektrotehniški vestnik, Ljubljana 1953, XXI, št. 1—2.
Farmacevtski vestnik, Ljubljana 1952, III, št. 11—12.
Glasnik mat.-fiz. i astr., Zagreb 1952, T. 7, No 4.
Gospodarski vestnik, Ljubljana 1953, II, št. 1—26.
Nauka i tehnika, Beograd 1953, IX, št. 1.
Problem, časopis Savjeta za probl. šah, Zagreb 1952, št. 10—12.
Proteus, Ljubljana 1952/53, XV, št. 7.
Sodobna pedagogika, Ljubljana 1953, IV, št. 1—2.
Varilna tehnika, Ljubljana 1952, I, št. 4.
Zdravstveni vestnik, Ljubljana 1953, XXII, št. 1—2.

## IZ UPRAVE

Letos bo imel Obzornik 6 številk po 32 strani. Naročnina je 250 din. Bralce prosimo, da naročnino čimprej poravnajo, da ne bo na koncu leta neprijetnih stroškov zaradi opominjanja. Kdor želi poravnati naročnino v dveh obrokih, mora plačati 20 din več. — V letu 1951 so izšle 4 številke, v letu 1952 pa 5 številk. Na zalogi imamo 2., 3. in 4. št. I. letnika za 120 din in vse številke II. letnika za 250 din. Naročajte s plačilom po ček. položnici *Društvo matematikov in fizikov LRS, Ljubljana*, ček. rač. št. 604-T-207.

LETO III
1 9 5 3

Obzornik za matematiko in fiziko

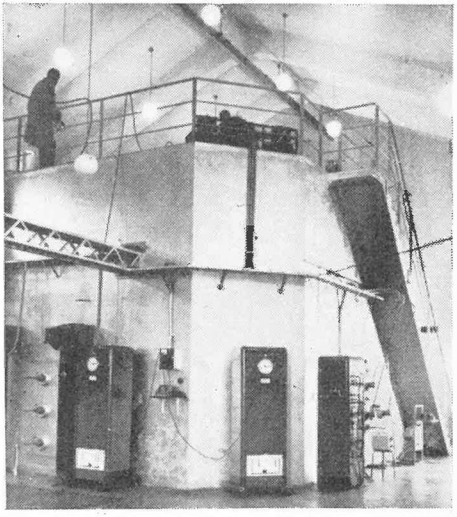
ŠTEV. 1
1. IV. 1953

# REAKTOR S TEŽKO VODO V KJELLERU NA NORVEŠKEM

Odd Dahl, vodja oddelka za uporabno fiziko v Chr. Michelsenovem inštitutu, Bergen, Norveška.
Gunnar Randers, direktor Zvezne ustanove za raziskave jedrske energije, Kjeller, Norveška.

*Zahvaljujemo se g. G. Randersu za izredno naklonjenost, ki jo je izkazal naši reviji s tem, da nam je poslal popravljeno poročilo o norveškem reaktorju, ki je izšlo prvič v Nucleonics, Vol. 9, No. 5 (1951). Prav tako se mu zahvaljujemo za pošiljko originalnih fotografij za klišeje in za dovoljenje, da jih objavimo na tem mestu.*

* * *



V Kjelleru blizu Osla na Norveškem so začeli graditi reaktor s težko vodo v glavnem iz naslednjih razlogov: Skupina fizikov je hotela dobiti primeren izvor za raziskave z nevtroni. Poleg tega so hoteli norveški znanstveniki priti do vseh vrst izotopov, vštevši kratkožive, za raziskave v medicini, v biologiji in v industriji. Razen tega je nekaj ljudi mislilo, da mora Norveška kot ena izmed največjih pomorskih držav, ki pa mora uvažati vse gorivo za ladje, tudi sama zasledovati razvoj uporabnosti jedrske energije. — Tudi norveška proizvodnja težke vode je mnogo pripomogla k odločitvi za gradnjo reaktorja. Poleg tega pa je norveške znanstvenike še mikalo, da bi z gradnjo reaktorja ovrgli splošno prepričanje, da je vse, kar je v zvezi z jedrsko energijo, izredno težko, tako težko, da je za male narode neizvedljivo. Vsi strokovnjaki pa dobro vedo, da niso problemi jedrske energije nič težji kot povprečni tehnični problemi na drugih področjih.

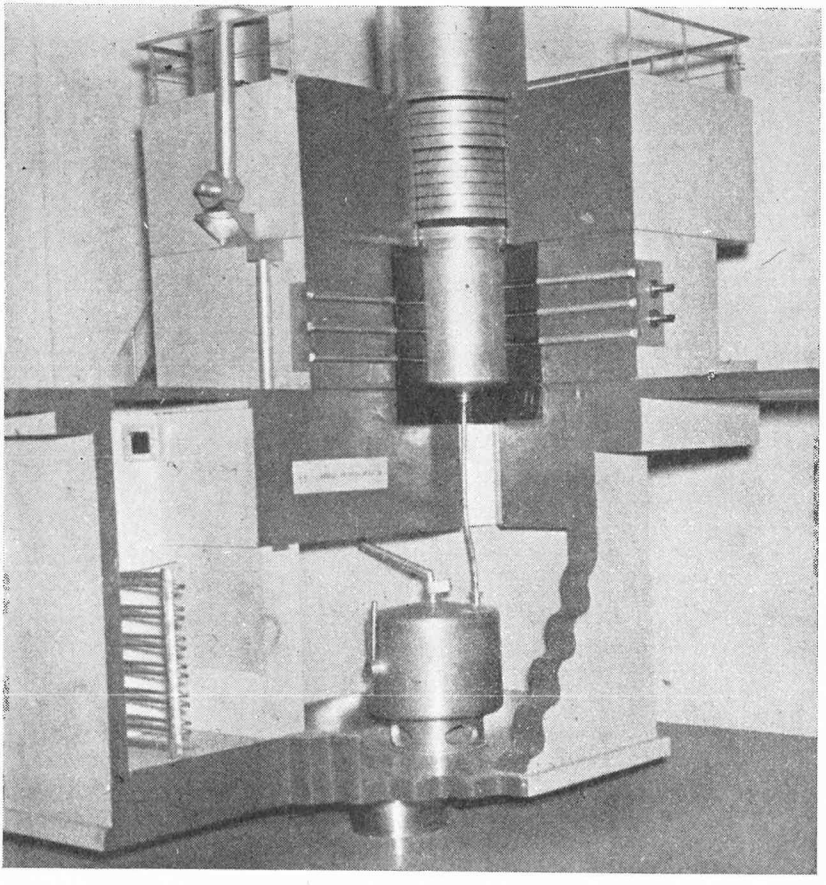
Deloma so se odločili Norvežani za gradnjo reaktorja tudi zaradi tega, ker so jim bili vsi obstoječi reaktorji nedostopni. Norveška vlada je prav gotovo iz tega razloga dala prvo podporo.

V začetku je krila firma Norsk polovico stroškov, drugo polovico pa sta prevzeli vlada in privatna industrija. Kasneje, spomladi 1951, ko je

Ker v »Obzorniku« nismo doslej priobčili še nobenega članka o reaktorjih, smatra uredniški odbor za najbolj primerno, da objavi najprej podroben opis kakega reaktorja, ki bo dal bralcem pravo predstavo o njegovih fizikalnih in tehnoloških podrobnostih. V prihodnji številki pa bomo objavili članek o uporabnosti reaktorja za fizikalne preiskave.

bila sklenjena pogodba s Holandsko, se je pa povečalo število podpornih članov. Celotno gradnjo je odslej vodila mešana norveško-holandska komisija. Holandska je dala potrebno količino urana iz predvojne zaloge.

Reaktor je začel delati z majhno močjo v prvih dneh avgusta 1951. Ko so bili izvršeni na njem vsi poskusi in meritve za pravilno delovanje, so moč postopoma večali. Preskusili so ga do 300 kW.



Sl. 1. Model reaktorja v Kjelleru. V kleti je zbiralna posoda, levo je prva stopnja toplotnega izmenjevalnika, v katerem oddaja težka voda toploto vodovodni vodi. V sredi je reaktorska posoda z oblogo iz grafita, okrog je zaščitni oklep iz betona. Vidita se obe skupini po 3 cevi za obsevanje. Na desni strani sta 2 vodili za kontrolne kamere polnjene z $BF_3$, v vdolbini pa je odprtina za termično kolono. Nad posodo so zaščitne plasti iz ojačenega betona. Levo zgoraj na zaščitnem oklepu je ekspanzijska posoda in ventilator za reaktorsko posodo

Reaktor je zgrajen tako, da dela nepretrgoma z močjo 300 kW ali več in daje v sredini nevtronski fluks, večji od $10^{12}$ n/cm$^2$/s. Njegov osnutek je tak, kot so osnutki za podobne reaktorje v Kanadi, Ameriki in Franciji. V posodi s tankimi stenami je težka voda. Posoda je obdana z grafitom kot reflektorjem. Aluminijaste cevi, v katerih je uran, so obešene v posodi. Okrog grafitne obloge je zaščitni oklep iz betona.

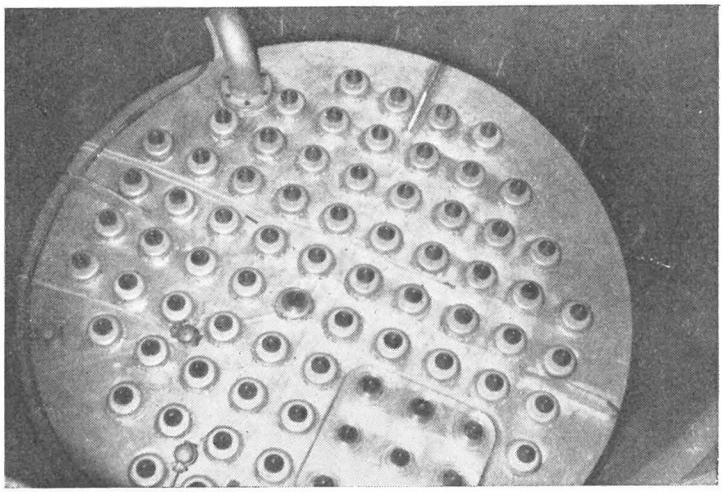
Toplota, ki se razvija v uranu pri cepitvah, se odvzema tako, da kroži težka voda skozi hladilni sistem, ki je izven betonskega zaščitnega oklepa.

Reaktor uravnavajo s ploščami iz kadmija, ki jih lahko spuščajo med reflektorjem in reaktorsko posodo. Poleg tega lahko v primeru nevarnosti odtočijo težko vodo v zbiralno posodo, ki je pod reaktorjem, in ustavijo verižno reakcijo.

V nadaljnjem so navedeni podrobni podatki o posameznih sestavnih delih reaktorja in njih delovanju. Celotni osnutek reaktorja pa je prikazan na sl. 1.

## Reaktorska posoda

Posoda meri v premeru 2 m in drži 7 ton težke vode. Narejena je iz aluminijeve pločevine, čistote 99,5%, ki je točkasto varjena v argonu in kovana, da se zmanjšajo preostale notranje napetosti. Posoda je privarjena na močnejšo zgornjo ploščo, ki nosi uranske palice.

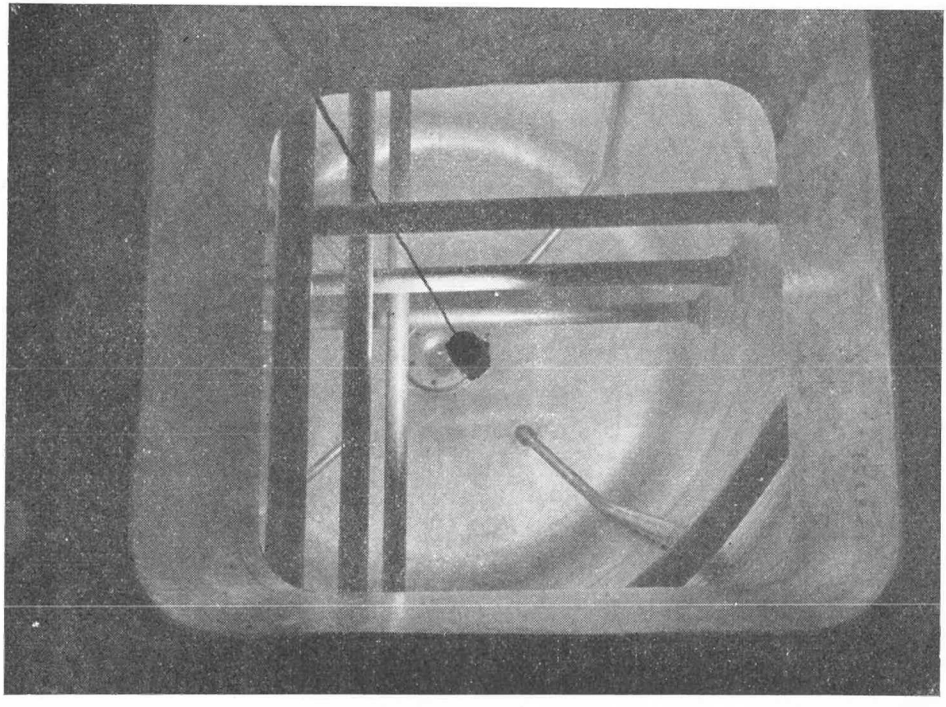


Sl. 2. Vrhnja plošča reaktorja posode, v kateri so nameščene uranske palice

Dno posode od spodaj ni podprto. Celo posodo, ki tehta z vodo vred približno 11.000 kg, nosi zunanji rob zgornje plošče, ki počiva na betonskem zaščitnem oklepu. Računi so pokazali, da bi posoda z ravnim dnom počila, prav tako tudi posoda z dnom v obliki polkrogle. Zato je bila zgrajena tako, da je rob med dnom in stranskim plaščem zaokrožen. Pri preizkusnih meritvah se je pokazalo, da se po prvem polnjenju z vodo posoda raztegne stalno za manj kot za eno tisočinko višine. Premer posode in polmer krivine pa ostaneta skoro nespremenjena.

*Zgornja plošča.* Zgornja plošča je zelo nizek valjast boben, pri katerem sta zgornja in spodnja plošča vezani med seboj s kratkimi aluminijastimi cevmi. Cevi služijo kot vodila in kot podpora za uranske palice. Skozi zgornjo ploščo gre 76 takih cevi. Razporejene so v pravokotni mreži po 180 mm narazen. V plošči je predvidena tudi odprtina za človeka, toda pokrivalo je zgrajeno tako, da odprtina nič ne moti razporeditve palic.

V reaktor ne bi smeli vnašati materiala, ki absorbira nevtrone. Temu pa se ni mogoče popolnoma izogniti. V pokrovu odprtine za človeka je nameščena naprava za kontrolo vodne gladine. Naprava ima aluminijast plavač, ki drsi po steklenih vodilih. Plavač je vezan na en del jeklene cevi, ki se giblje v notranjosti elektromagnetov, ko se gladina vode menja. Signali iz posameznih elektromagnetov uravnavajo avtomatično kontrolo vodne gladine. Temperaturo vode v posodi merijo s tremi uporovnimi termometri, ki so v aluminijastih ceveh in so tudi pritrjeni na zgornji plošči.



Sl. 3. Pogled skozi veliko odprtino, ki je v zgornji plošči reaktorske posode. Cevi za obsevanje se križajo pravokotno. Dotok za težko vodo je sredi dna. Od krožno zavite preluknjane cevi, ki je pritrjena na notranji steni, vodijo štiri odvodne cevi

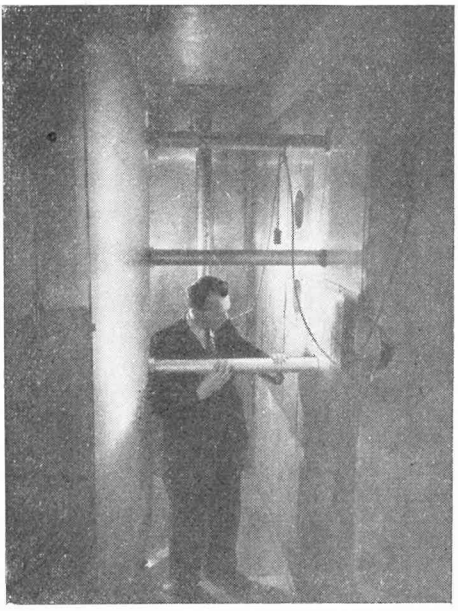
*Cevi za obsevanje.* Material, ki ga hočemo obsevati, lahko spravimo v sredo reaktorja, kjer je močan nevtronski fluks, skozi 6 vodoravnih aluminijastih cevi, ki gredo skozi reaktorsko posodo (sl. 3). Dve skupini po tri cevi, ki so po 250 mm narazen, se križajo v osi kotla. Notranji premer cevi je 63 mm, stena pa je debela 3,5 mm. Cevi so privarjene na posodo. Stena pa je na tistem mestu sploščena, da popustijo napetosti v materialu.

Izven reaktorske posode gredo cevi skozi luknje v betonskem zaščitnem oklepu (sl. 4) in so pritrjene na betonski oklep samo na zunanji strani. Zato se lahko toliko gibljejo, da ne povzročajo nobenih napetosti na mestu, kjer so pritrjene na posodo. Zunanji deli cevi so zaprti s pokrovi iz medenine, ki je prevlečena s kadmijem.

Material, ki naj se obseva v reaktorju, vložijo v aluminijaste cevke. Te dajo v kratke kose grafita, ki imajo približno isti premer kot cev za obsevanje. Te kose lahko potisnejo s palico v sredo reaktorja. Po končanem obsevanju pa jih potisnejo skozi cev in jih dobijo ven na drugi strani zaščitnega oklepa.

*Obtok vode.* Težka voda priteka v sredini dna posode. Poseben zaslon jo odkloni radialno, da se dobro zmeša. Voda odteka skozi preluknjano aluminijasto cev, ki je krožno zavita in pritrjena na notranji steni reaktorske posode (sl. 3). Ta cev je zvezana s 4 odvodnimi cevmi, ki so speljane navzdol ob steni posode. Ob vsaki četrtini posode gre ena cev. Vse štiri odvodne cevi se stekajo pod reaktorsko posodo v eno samo cev.

V normalnem obratu sta odtok in dotok vode zvezana s črpalnim sistemom na hladilnik. V primerih nevarnosti pa lahko izpraznijo težko vodo skozi dotočno cev v spodnjo zbiralno posodo in tako ustavijo verižno reakcijo. Podrobnosti o vsem cevnem sistemu boste našli v poglavju: Hladilni sistem.



Sl. 4. Prostor okrog reaktorske posode, preden je posoda obložena z grafitom. Na levi je stena posode, na desni pa zaščitni oklep. Kadmijeva kontrolna ploščа drsi tik ob posodi. Obsevalne cevi gredo skozi prostor, ki ga bodo kasneje napolnili z grafitnim reflektorjem. Luknje v steni so za kamere, polnjene z $BF_3$

## Uran

V reaktorski posodi je sedaj 2 200 kg kovinskega urana. Ta ima obliko palčic, ki imajo 25,4 mm v premeru in so dolge 300 mm. Palčice so vložene v aluminijaste cevi z 2 mm debelimi stenami. Po dve taki cevi, ki sta 40 mm narazen in sta vezani s togimi prečkami, tvorita eno kurilno palico. Efektivna dolžina palice, to je višina uranskega stebra, je 1,9 m. Ko je vložena v posodo, je vrh uranskega stebra 100 mm pod gladino vode.

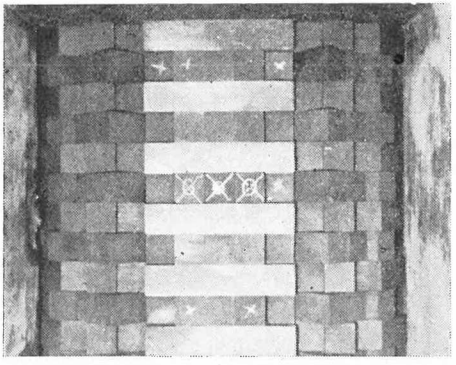
Prostor nad uranskimi palčicami v cevi je napolnjen z grafitom. Spodnji del cevi je zaprt z aluminijasto ploščo, ki je privarjena na licu mesta. Tanka plast grafita med ploščo in spodnjim koncem uranske palice služi za toplotno izolacijo med varjenjem.

Na koncu vsake palice je glava, ki jo lahko zagrabi žerjav, voden iz daljave. Celotna palica ima 35,5 kg urana in tehta 43 kg.

Glava vsake kurilne palice v reaktorju počiva na vrhu vodilne cevi v zgornji plošči. To mesto tesni obročasto tesnilo iz neoprena. Malo niže je na palici še en obroč, ki jo tesni v vodilni cevi, da ne niha.

## Reflektor

Reflektor je narejen iz grafitnih kvadrov. Ti so dolgi 700 mm in imajo za osnovnico kvadrat s stranico 140 mm. Zloženi so v 8 stebrov, od katerih ima vsak 700 mm × 700 mm. Ti stebri obdajajo reaktorsko posodo in segajo od tal do stropa v reaktorskem prostoru. Robovi stebrov se skoraj dotikajo. Osem vmesnih izsekov s kotom 45° med sosednjimi stebri je izpolnjenih z grafitnimi kvadri, ki so izrezani tako, da se prilegajo (sl. 5). Reflektor ima najmanjšo debelino 700 mm in sega 270 mm čez vrh urana v kurilnih palicah.



Sl. 5. Zloženi grafitni kvadri, kakršni so v reflektorju in v termični koloni. Vidijo se kvadri, ki so izrezani tako, da izpolnijo vmesne izseke s kotom 45°

Tudi prostor pod reaktorsko posodo je napolnjen s 400 mm debelo skladovnico grafitnih kvadrov. Za reflektor je porabljeno vsega skupaj 32 800 kg grafita z gostoto 1,68 $gcm^{-3}$.

Ker je površina grafitnih blokov zelo gladka, je treba posamezne vodoravne plasti med seboj natenko zlepiti, sicer bi pri zlaganju zdrsele druga z druge.

## Biološka zaščita

Reaktorska posoda in reflektor sta obdana z ojačenim betonom, v katerem je uporabljen granit kot polnilo. Ta zaščitni oklep meri 7,5 m × 7,5 m, vertikalne robove ima odsekane. Debelina ni nikjer manjša kot 2 m. Oklep je 5 m visok. Kakšen je njegov zunanji izgled, vidite na naslovni sliki.

Skozi veliko valjasto luknjo na sredi ravne vrhnje ploskve zaščitnega oklepa pridemo v reaktorski prostor, ki je visok 2,9 m in ima za osnovno ploskev kvadrat s stranico 3,5 m. Stene reaktorskega prostora so obložene s kadmijem, za dodatno zaščito.

Reaktorsko posodo spustijo v prostor skozi odprtino na vrhu zaščitnega oklepa. Posodo nosi zgornja plošča, ki je toliko večja, da leži na betonskem oklepu, podloženem z azbestom. Prvotno sta prostor nad reaktorsko posodo zapirali dve posodi, napolnjeni z vodo. 4 m visok steber vode je ščitil pred žarkovjem. Posodi pa je bilo treba vedno odmakniti, kadar so se izmenjavale kurilne palice.

Sedaj so zamenjali posodi z vodo s plastjo ojačenega betona. V tej plasti so razporejene luknje tako, da se lahko izmenjajo kurilne palice. Luknje so zaprte z jeklenimi in betonskimi zamaški.

Poleg velike odprtine za reaktorsko posodo vodijo od vrha zaščitnega oklepa v kote reaktorskega prostora še štirje 600 mm × 600 mm veliki vertikalni jaški. Skoznje so lahko prišli v notranjost in zložili grafitne kvadre reflektorja. Potem pa so bili ti jaški zamašeni s posodami, ki so napolnjene s peskom in prodom.

*Poskusne in kontrolne odprtine.* Poleg lukenj, ki so potrebne med gradnjo, je še več drugih odprtin v zaščitnem betonskem oklepu. Skozi

oklep gre v enem izmed odsekanih oglov termična kolona, ki da počasne nevtrone. V koloni je 11 800 kg grafita. Kolona ima presek 1,8 m × 1,8 m in je dolga približno 2 m. Zunanja stran kolone je pokrita s kadmijem in 100 mm debelo svinčeno steno.

V kotu nasproti termične kolone sta dve odprtini, veliki 200 mm × 200 mm, namenjeni za poskuse s hitrimi nevtroni. Sredi betonskega oklepa se luknji razširita na večji presek.

Dve nasprotni strani betonskega oklepa sta prevrtani s tremi luknjami, v katerih so vložene jeklene cevi 200 mm premera. V teh cevih so nevtronski števci, polnjeni z $BF_3$, s katerimi kontrolirajo reaktor. Na podstavku vsakega števca je svinčena plošča, ki je prevlečena s kadmijem. Ta zapira odprtine in zaščiti pred žarkovjem toliko kot 2 m debel beton.

V zaščitnem oklepu so izvrtane luknje za vrvi, ki držijo kadmijeve kontrolne plošče. Plošče se gibljejo med reaktorsko posodo in reflektorjem in so zvezane s protiutežmi, ki vise v cevih na nasprotni strani betonskega oklepa.

12 drugih odprtin, od katerih so po 3 na vsaki strani zaščitnega oklepa, je namenjenih za obsevalne cevi, ki gredo skozi reaktorsko posodo. V te luknje so vložene jeklene cevi, ki imajo 120 mm premera. Prostor med jekleno in obsevalno cevjo je zapolnjen s plastjo svinca, prevlečeno s kadmijem.

*Zračenje.* Vse odprtine skozi betonski oklep so dobro zaprte. Sesalna naprava, ki ima odduh speljan na streho, sesa zunanji zrak skozi reaktorski prostor, odvaja radioaktivni prah in pline ter ustvarja nižji zračni pritisk v reaktorskem prostoru. Zato bi prah in plini ne prišli v stavbo, če bi kje začelo puščati.

Ventilacijski sistem odvzema reaktorju tudi 6 kW toplote. Za toliko se zmanjša obremenitev toplotnega izmenjevalnika.

## Stavba

Betonski oklep je delno pogreznjen v tla 20 m × 16 m velike dvorane. Pod njim je soba, ki je velika 5 m × 4,5 m in visoka 3,8 m. V tej kletni sobi so zbiralna posoda za težko vodo in nekatere pomožne naprave. V klet prideš po jašku, ki leži ob eni strani kletne sobe. Pokrit je na vrhu z lesenim pokrovom, ki se da dvigniti. Skozi ta jašek so spravili reaktorsko posodo za težko vodo. Poleg tega je v jašku prostora za naprave za črpanje in za toplotno izmenjavo.

Odprtina med jaškom in kletjo je zaprta s steno iz betonskih opek. 800 mm debela stena daje primerno zaščito pred žarkovjem. Dostop do kletne sobe je skozi mala zaščitna vrata, ki so v steni.

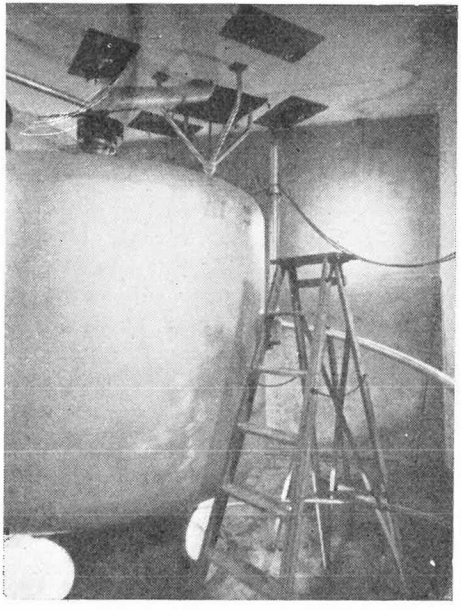
*Žerjav.* Nad zaščitnim oklepom se po vsej dolžini dvorane lahko pomika 1,5-tonski žerjav. Obešen je 9 m visoko in je namenjen za premikanje posode in kurilnih palic.

*Pomožni prostori.* Na vsakem koncu reaktorske dvorane je še nekaj manjših sob. Na enem koncu je vhod s kontrolo za uslužbence in obiskovalce, pisarna in umivalnica. Na drugi strani je kontrolna soba, soba s stikalno ploščo in soba z napravo za toplotno izmenjavo. Skozi veliko stekleno okno se vidi iz kontrolne sobe v reaktorsko dvorano.

## Hladilni sistem

Hladilni sistem odvaja reaktorju toploto, ki nastaja pri cepitvah. Poleg tega lahko v njem pretakamo in zbiramo težko vodo. Zato so v sistemu črpalke, zaklopke, kontrolni instrumenti, zbiralna posoda in notranji prezračevalni in sušilni sistem.

*Zbiralna posoda.* Dno reaktorske posode je zvezano po odvodni cevi, ki ima premer 140 mm, z vrhom zbiralne posode iz aluminija, ki je v kleti (sl. 6). Cev se odpira s pomočjo posebne pipe, ki se da odpirati iz daljave. Kadar je reaktor napolnjen s težko vodo in je v obratu, je ta pipa zadnji varnostni pripomoček. Če prekorači gostota nevtronov neko naprej izbrano vrednost, se pipa avtomatično odpre in voda izteče v zbiralno posodo v 45 sekundah.



Sl. 6. Zbiralna posoda v kleti pod reaktorsko posodo. Vidijo se: dotočna cev, odtočne cevi in pipa. Na ploščah na stropu so pritrjene palice, ob katerih drse kadmijeve plošče

Cev, ki vodi do toplotnega izmenjevalnika in do črpalke, je zvezana z dotočno cevjo nad pipo. Odtočne cevi se združijo pod reaktorsko posodo in so vezane na drug konec sistema.

V kontrolni sobi kaže poseben instrument vodno gladino v zbiralni posodi. Plavač v posodi premika kotvico v sistemu elektromagnetov, ki so vezani v eni veji merilnega mostička.

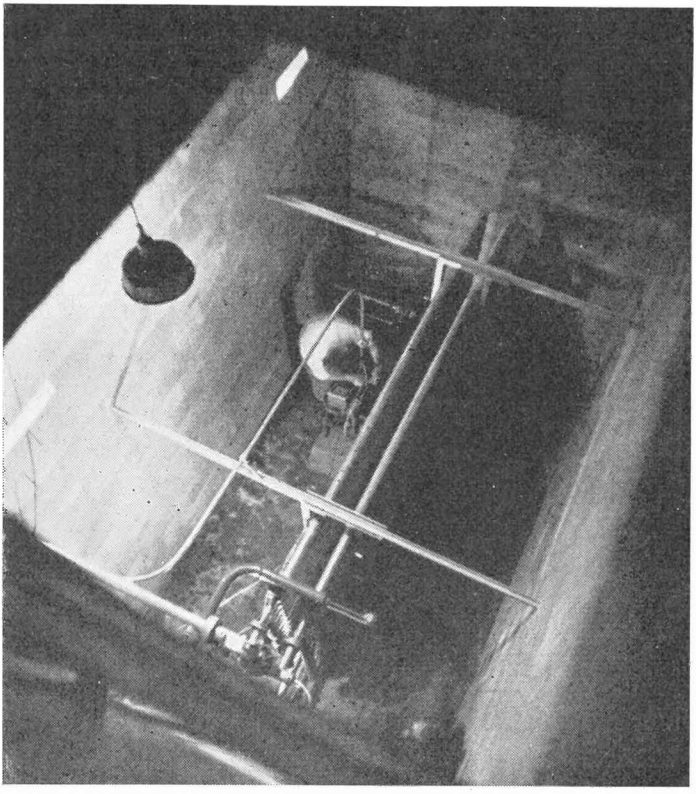
*Prezračevalni in sušilni sistem.* Da se prepreči razredčenje težke vode z vlago, ki je v zraku, je reaktorska posoda zaprta tako, da ne prihaja zunanji zrak vanjo. Da se prepreči izguba vode in nastanek eksplozivnih plinov, se nadomesti tudi disociirana težka voda. — 100 mm debela aluminijasta cev veže vrhnja dela reaktorja in zbiralne posode tako, da pride lahko zrak iz enega prostora v drug prostor, kadar izpraznijo ali napolnijo reaktorsko posodo s težko vodo. Aluminijasta razvodna pipa v cevi veže sistem reaktorske posode z ventilatorjem in filtrom s silikagelom. Na ta način lahko posušijo ves sistem, preden ga napolnijo s težko vodo.

Ker reaktorska posoda, ki ima zelo tanke stene, ne more vzdržati večjega pritiska, je priključena na prezračevalni sistem ekspanzijska posoda. Posoda je aluminijast boben, ki ima 1,5 m v premeru in je nameščena na vrhu zaščitnega oklepa. Pokrov bobna je iz prožnega kavčuka. Poseben manometer kaže pritisk v sistemu.

*Toplotni izmenjevalniki.* Toploto, ki se razvija v reaktorju, odvaja dvostopni toplotni izmenjevalnik. Prva stopnja je postavljena v jašku poleg zaščitnega oklepa. V njem se izmenjava toplota med težko vodo

in navadno vodovodno vodo (sl. 7). V drugi stopnji, ki je nameščena v drugem delu stavbe, je radiator, v katerem odda vodovodna voda toploto zraku, ki ga potiska ventilator v dimnik.

Voda teče med reaktorsko posodo in prvo stopnjo skozi aluminijaste cevi, s premerom 50 mm. Te cevi so med seboj vezane s prirobnicami in tesnjene z obroči iz neoprena. Vodo žene centrifugalna črpalka iz nerjavečega jekla, ki ima gred tesnjeno z ogljem. Obtok vode merijo s posebnim merilnikom, ki ima v cevi aluminijasto turbinico. Hitrost in celotna množina vode se lahko odčitata v kontrolni sobi na elektronskih instrumentih.



Sl. 7. Prva stopnja toplotnega izmenjevalnika je v jašku poleg kleti. Skozi betonsko steno na levi se pride v kletno sobo pod reaktorjem

*Prva stopnja.* Pri tem izmenjevalniku je zaradi varnosti aluminij nadomeščen z nerjavečim jeklom. Da se zmanjša nevarnost korozije, so stiki med jeklom in aluminijem električno izolirani s tesnili iz zmesi neoprena in kavčuka. Izmenjevalnik je narejen iz koncentričnih cevi, ki so v ravnini zavite večkrat sem in tja (sl. 8). Vsa zvarjena mesta lahko stalno nadzirajo. Izmenjevalna površina je 10 $m^2$. Voda kroži največ s hitrostjo 4 l/s. Če dela reaktor z močjo 100 kW in ima hladilna voda temperaturo 20° C, potem povprečna temperatura težke vode pri tej hitrosti ni večja od 40° C. Temperaturo vode, ko priteka in ko odteka, beležijo v kontrolni sobi.

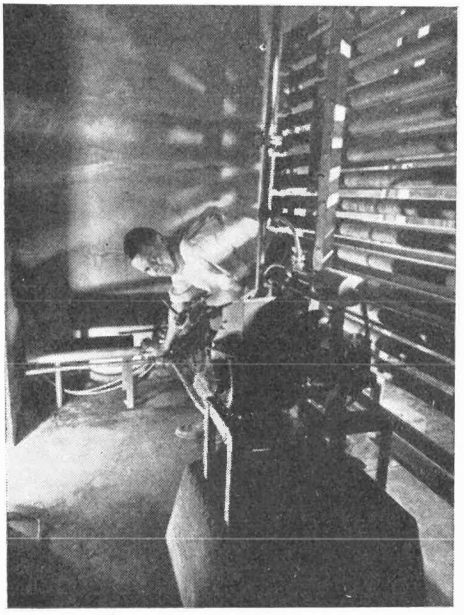
Težka voda teče po notranjih ceveh izmenjevalnika. Navadna voda pa kroži po zunanjih ceveh in nato po radiatorju v sklenjenem obtoku. Tudi ta vodni obtok se meri.

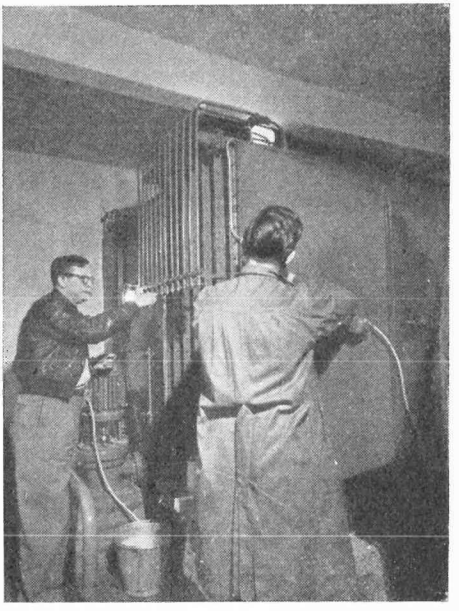
Radiator, ki oddaja toploto vode zraku, je narejen iz bakra, prav tako so bakrene tudi vse cevi. Te imajo premer 55 mm in so na veznih mestih električno izolirane od toplotnega izmenjevalnika. Centrifugalna črpalka, ki žene vodo, je iz brona in je tesnjena z ogljenim obročem. Tudi

merilnik hitrosti je narejen iz brona, sicer pa je ravno tak kot merilnik v aluminijastem sistemu.

*Druga stopnja.* Radiator meri 2 m v kvadratu in 0,9 m v smeri zračnega toka (sl. 9). Ventilator z močjo 15 kW potiska zunanji zrak skozi radiator v dimnik. Temperatura zraka se meri. Podrobnih podatkov o delovanju toplotnega izmenjevalnega sistema še ni.

Temperatura zraka, ki gre skozi radiator, mora biti stalna, da ni sprememb, ki bi vplivale nazaj na reaktor. Stalnost zunanje temperature se doseže s termostatsko kontrolo skupine rež, skozi katere zrak vstopa. Celotni toplotni izmenjevalni sistem je preračunan tako, da odvzame





Sl. 8 (levo). Prva stopnja toplotnega izmenjevalnika, ki je zgrajen iz koncentričnih cevi, zavitih v ravnini sem in tja. Težka voda, ki kroži v notranjih cevih, oddaja toploto vodovodni vodi, ki kroži po zunanjih cevih. — Sl. 9 (desno). Radiator, v katerem oddaja navadna voda toploto zraku. V sredi je črpalka

najmanj 100 kW. Pri tem ima voda v prvi stopnji povprečno temperaturo $40^0$ C, zrak, ki vstopa, pa $20^0$ C. Da izpolnijo ta pogoj, priprejo pozimi z loputami stranski rokav, po katerem kroži zrak in se toliko segreje, da termostatska naprava dela. Pozimi je mogoče odvzeti reaktorju več toplote kot poleti. Poskusi bodo pokazali, kolikšna moč se lahko doseže v obratu pozimi.

*Obtok težke vode.* Delo s težko vodo je zelo raznovrstno. Vodo prevažajo v 50 litrskih aluminijastih sodih. Sode izpraznijo v zbiralno posodo tako, da ne pride težka voda v dotik z zunanjim zrakom. Dana mora biti možnost črpati vodo iz zbiralne posode navzgor v reaktorsko posodo. Pri tem mora ostati gladina vode skoro v isti višini. Če je treba izprazniti reaktorsko posodo in jo odpreti, je treba takoj preprečiti vsak dotik vode z zunanjim zrakom. Možno mora biti pretočiti celotno zalogo vode

v transportne sode za ponovni postopek. Prav tako je tudi pri praznjenju toplotnega izmenjevalnika in vseh cevi.

Vse zaklopke, ki so potrebne za to, da usmerjajo tok vode, so nameščene v tistem delu sistema, ki je iz nerjavečega jekla. Zaklopke so iz nerjavečega jekla, mazane pod pritiskom in z valjastimi čepi.

Črpalka, ki žene obtok težke vode, se uporablja tudi za črpanje vode iz zbiralne v reaktorsko posodo. Višino vode v reaktorski posodi vzdržujeta posebna črpalka z opno iz zmesi kavčuka in neoprena ter magnetno kontrolirana zaklopka. Merilnik vodne gladine v reaktorski posodi kontrolira črpalko in zaklopko. Merilnik obseže samo 250 mm in je sredina tega obsega ravno pri tisti gladini vode, ki je 100 mm nad kurilnimi palicami.

Gladina se navadno uravnava avtomatično, lahko pa jo nastavijo na poljubno višino v tem obsegu s tem, da premaknejo skalo v kontrolni sobi. Regulacijski sistem zazna spremembo vodne gladine za 1 mm.

## Kontrola reaktorja

Kontrola reaktorja je v glavnem v tem, da se ohrani pri izbrani nevtronski aktivnosti ravnovesje med nevtroni, ki nastanejo in nevtroni, ki se ujamejo. Zato je potreben nevtronski detektor, ki meri gostoto nevtronov na nekem mestu in poskrbi, da pride v reaktor primeren material, ki absorbira nevtrone.

Kot pri podobnih reaktorjih se tudi tu uporabljajo za kontrolo tisti nevtroni, ki uhajajo iz notranjosti. Te nevtrone ugotavljamo z ionizacijskimi kamerami, polnjenimi z $BF_3$, ki so nameščene na zunanji strani reflektorja (sl. 4). Ionizacijska kamera da tok, ki je sorazmeren nevtronskemu fluksu. Ta tok krmili vzvode, ki dvigajo in spuščajo v prostor med reaktorsko posodo in reflektorjem kadmijeve plošče, ki absorbirajo nevtrone. Če se nevtronska gostota zmanjša, se plošče potegnejo ven, če pa narašča, se spustijo noter.

Pri kjellerskem reaktorju nadzoruje in uravnava gostoto nevtronov 6 ionizacijskih kamer, polnjenih z $BF_3$ in 4 kadmijeve plošče.

*Kontrolne plošče.* Kadar so vse štiri kadmijeve plošče popolnoma izvlečene, se nahajajo v zarezah v betonu pod reaktorjem. Reaktor je takrat divergenten in ima varen podvojevalni čas. Če pa so plošče pomaknjene v prostor med reflektor in reaktorsko posodo, pridejo v območje močnega nevtronskega fluksa. Reaktor postane subkritičen. Dve od teh plošč se uporabljata za kontrolo reaktorja, drugi dve pa uporabljajo kot zasilne plošče v primeru nevarnosti. Že ena sama plošča, ki je cela v reaktorju, napravi reaktor subkritičen.

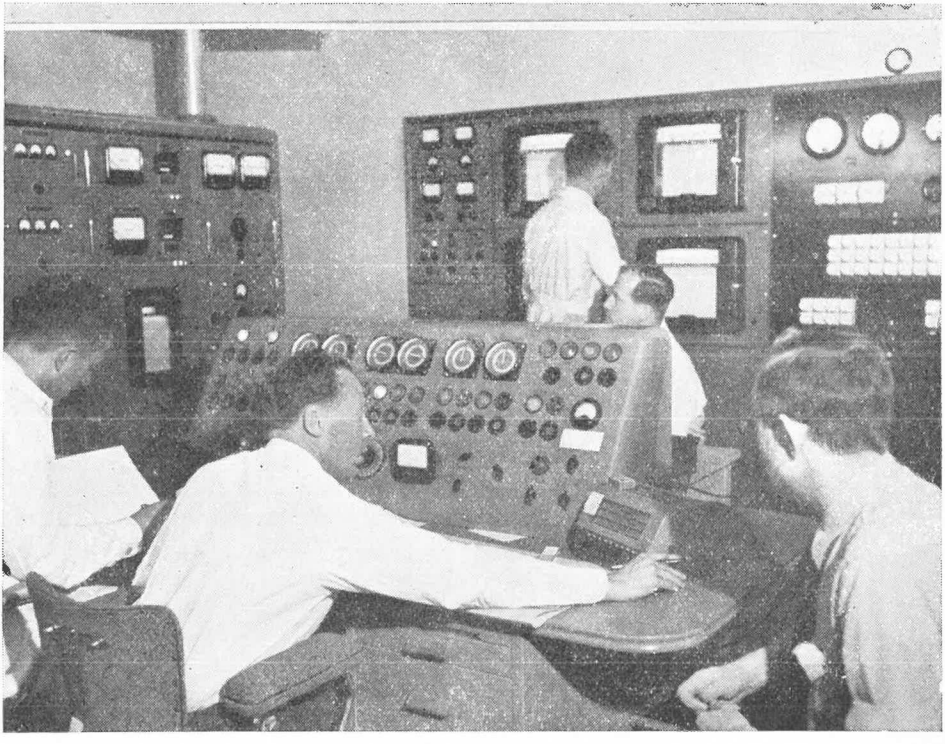
Plošče so dolge 1.300 mm in široke 350 mm. Kadmijeva folija, debela 1,7 mm, je stisnjena med dvema 4 mm debelima aluminijastima ploščama. Kontrolne plošče drse ob 8 mm debelih jeklenih palicah (sl. 4), ki so vpete z vzmetmi zgoraj na podpori, ki nosi reaktorsko posodo. Spodaj pa gredo palice skozi zarezo v betonu in so vpete v stropu kleti, kar vidimo na sliki 6.

Plošče so obešene na jeklenih vrveh, ki gredo preko škripcev skozi vodoravne luknje v zaščitnem oklepu do vzvodov, ki so pritrjeni na zunanji strani betonskega oklepa. Teža plošč je izenačena s protiutežmi. Protiutež zasilnih plošč pa je za 9 kg težja od plošče, ki tehta 17 kg.

Zasilni plošči sta potegnjeni ven iz reaktorja, toda se dvigneta v reaktor v 1,7 s, če spustimo zaporo. Zračne blazine dušijo udarce plošč na konceh.

*Nevtronske kamere.* Vsaka izmed šestih kamer z $BF_3$ ima svojo posebno nalogo. Ena je vezana naravnost na galvanometer in kaže nevtronski fluks tudi takrat, kadar ni napetosti na zunanjem omrežju. Normalno pa beleži ena kamera v kontrolni sobi nevtronski fluks.

Tri kamere kontrolirajo zasilni plošči, ki služita za prekinitev reakcije. Če raste moč prehitro, sproži ena od teh kamer plošči, poleg tega pa odpre tudi pipo, ki spušča težko vodo v zbiralno posodo. Ostali dve



Sl. 10. Kontrolna miza sredi kontrolne sobe. Gornji instrumenti na mizi kažejo lege kadmijevih plošč

kameri lahko izkoristijo za to, da sprožijo plošče pri poljubni naprej izbrani moči, ki je seveda manjša od največje dovoljene. Ti dve kameri pa ne odpreta pipe.

Šesta kamera pa vzdržuje avtomatično kontrolo reaktorja z eno ali drugo kontrolno ploščo. Kontrolni plošči lahko nastavljajo tudi z roko.

*Pomožne svarilne naprave.* Ker je zelo važno, da vedo, kako močno je žarkovje v neposredni bližini reaktorja, je razmeščen sistem svarilnih naprav v reaktorski dvorani. Tri ionizacijske kamere stalno beležijo jakost žarkov ter hitre in počasne nevtrone okrog vsega zaščitnega obroča. Za ugotovitev cepitvenih produktov, ki uhajajo iz urana v kurilnih palicah, je postavljen G-M števec v obtočnem sistemu težke vode. Čistoča težke vode se meri z vgrajeno uporovno celico. Kontrolira se

tudi zrak, ki ga piha ventilator iz reaktorja, in zrak, ki ga piha ventilator skozi radiator.

*Aparati v kontrolni sobi.* Vsi elektronski instrumenti so nameščeni na zaprtih standardnih stojalih v kontrolni sobi. Plošče s pretikali, varovalkami, razdelilniki toka in vsi merilniki temperature so na eni steni. Kontrolna plošča je na veliki pisalni mizi v sredi sobe, kakor kaže slika 10. Z mize so napeljani zvočniki na vsa važnejša mesta v reaktorski zgradbi. Važni posegi v kontrolni sistem so povezani med seboj tako, da mora operater iti po predpisanem vrstnem redu, če hoče vključiti reaktor. Napetosti v vseh važnejših krogih se lahko razberejo na kontrolni mizi. Signalne luči kažejo pravilno delovanje posameznih krogov.

Indikatorji na kontrolni mizi kažejo lege vseh štirih kadmijevih plošč. Stalno se beleži lega plošč, ki služijo za kontrolo moči reaktorja. Prav tako se tudi beleži kolebanje moči reaktorja od naprej izbrane vrednosti. Moč reaktorja kaže velik instrument, ki je nameščen na srednjem zaprtem stojalu. Obseg instrumenta kaže osvetljena številka, ki je dekadni mnogokratnik obsega. Mnogokratnik je odvisen od tega, kako je zaščitena glavna ionizacijska kamera, in od mrežnega upora v predojačevalcu. Te dve stvari se lahko izbereta in s tem se nujno določi mnogokratnik. S posebnim instrumentom na kontrolni mizi pa povečajo občutljivost glavnega instrumenta na deset- ali na stokratno vrednost.

Napetost za vse elektronske instrumente je stabilizirana. 24 V baterija daje tok za elektromagnete in enosmerne releje. Ista baterija se lahko uporablja tudi za zasilno razsvetljavo. Običajno se polni iz omrežja, lahko pa se uporablja tudi poseben generator, ki ga žene bencinski motor.

Stroški za reaktor v Kjelleru

Ker je težko dati pravo ceno za uran, je ta postavka izpuščena.

| | |
|---|---|
| Zgradba za reaktor in zaščitni oklep | $ 72.000 |
| Reaktorska posoda in hladilni sistem | $ 50.000 |
| Elektronski instrumenti in avtomatske naprave | $ 57.000 |
| Težka voda | $ 2,000.000 |
| Uran | ? |
| Skupaj, brez urana | $ 2,179.000 |

Reaktor uporabljajo za pridobivanje radioaktivnih izotopov in za jedrske raziskave. Zato so zgradili še laboratorij za radioaktivne izotope za 143.000 dolarjev in fizikalni laboratorij za 85.700 dolarjev.

# O EULERJEVI FUNKCIJI GAMA

I. VIDAV

Simbol $n!$ je krajša pisava za produkt $1 \cdot 2 \ldots n$. Pomen ima le, če je $n$ naravno število. Ako torej postavimo $f(x) = x!$, določata funkcijo $f(x)$ za vsako naravno število x ta dva predpisa:

$$\text{a) } f(1) = 1, \quad \text{b) } f(x+1) = (x+1)f(x) \tag{1}$$

Enačba (1 b) bo veljala tudi za $x = 0$, če vzamemo $f(0) = 0! = 1$.

Sedaj nastane vprašanje, ali se da razširiti ta funkcija tako, da bo imela pomen za vsak $x > 0$ in bosta pri tem vedno veljali enačbi (1). Iz analize vemo, da Eulerjeva funkcija gama ustreza tej zahtevi. Toda, ali je gama edina funkcija s to lastnostjo in če je, ali ne bi mogli priti do nje neposredno iz (1)?

Ni se težko prepričati, da enačbi (1) sami ne določata natančno funkcije $f(x)$. Smemo namreč vrednosti za $f(x)$ na intervalu med 0 in 1 poljubno predpisati, enačba (1 b) pa potem določa to funkcijo za vsak $x > 0$. Zato moramo poiskati še kako drugo zahtevo, da bo naš problem enolično rešljiv. Pa vzemimo funkcijo $y = \log f(x) = \log x!$ in si oglejmo njen potek v pravokotnem koordinatnem sistemu. Slika te funkcije je neki niz točk $T_n$ s koordinatami $(n, \log n!)$. Če dve sosednji točki tega niza zvežemo z daljico, dobimo neko poligonsko črto. Smerni koeficient stranice $T_{n-1}T_n$ je $\log n$, kar pokaže lahek račun. Ker je smerni koeficient naslednje daljice $\log (n+1) > \log n$, vidimo od tod, da je naša poligonska črta konveksna, če jo gledamo od spodaj navzgor. Skušajno sedaj zvezati točke $T_n$ s tako *konveksno krivuljo* $y = \log f(x)$, da bo funkcija $f(x)$ za vsak x ustrezala enačbi (1).

Spoznali bomo, da ta zahteva točno določa funkcijo $f(x)$. Za nadaljnje preudarjanje pa je bolje, da vzamemo funkcijo $f(x) = (x-1)!$ Potem je $f(1) = 0! = 1$. Smo tedaj pred temle problemom: *Najti je treba tako rešitev enačbe*

$$f(x+1) = xf(x) \tag{2}$$

*ki je za* $x > 0$ *enolična, zvezna in pozitivna, pripadajoča krivulja* $y = \log f(x)$ *pa konveksna in je* $f(1) = 1$.

Torej, če postavimo $g(x) = \log f(x)$, ustreza $g(x)$ enačbi

$$g(x+1) = g(x) + \log x, \quad g(1) = 0 \tag{3}$$

*O konveksnih funkcijah.* Če je krivulja $y = g(x)$ konveksna, gledana od spodaj navzgor, za $a \leqq x \leqq b$, leži vsak lok te krivulje pod pripadajočo tetivo. Posebej velja to za tisto točko na krivulji, ki ima absciso ravno v sredi med obema krajnima abscisama $x_1$ in $x_2$. Torej pri vsaki konveksni krivulji je

$$g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{g(x_1) + g(x_2)}{2}, \quad x_1 \neq x_2 \tag{4}$$

Imenujmo sedaj *funkcijo* $g(x)$ *konveksno* na intervalu $(a, b)$, če velja tam ta neenačba za vsak par $x_1, x_2$.

*Nekaj osnovnih lastnosti konveksnih funkcij:*

1. Če je $g(x)$ konveksna funkcija, velja isto za $g(x) + Ax + B$, kjer sta $A$ in $B$ poljubni konstanti. O tem se takoj prepričamo, če v (4) vstavimo $g(x) + Ax + B$ namesto $g(x)$.

2. Zaporedje konveksnih funkcij $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$, ... naj konvergira proti $G(x)$. Torej velja za vsak $g_n(x)$ neenačba (4). V limiti je potem

$$G\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqq \frac{G(x_1) + G(x_2)}{2} \tag{5}$$

Če ustreza $G(x)$ neenačbi (5) na nekem intervalu, pravimo, da funkcija $G(x)$ tam ni nikjer *konkavna*. Torej limita konvergentnega zaporedja konveksnih funkcij ni nikjer konkavna.

3. Ni zvezne periodične funkcije razen konstante, ki bi povsod ustrezala pogoju (5). Če namreč zvezna periodična funkcija $G(x)$ ni konstanta, ima neko najmanjšo, od nič različno periodo $\omega$ in je $G(x + \omega) = G(x)$. Ako bi veljala neenačba (5), bi imeli $G(x + \frac{1}{2}\omega) \leqq \frac{1}{2}[G(x) + G(x + \omega)] = G(x)$ in prav tako $G(x) \leqq \frac{1}{2}[G(x - \frac{1}{2}\omega) + G(x + \frac{1}{2}\omega)] = G(x + \frac{1}{2}\omega)$. Od tod bi imeli $G(x + \frac{1}{2}\omega) = G(x)$ in bi bila že $\frac{1}{2}\omega$ perioda, kar pa je protislovje. Zato je le konstanta periodična nekonkavna funkcija.

Sedaj pa se vrnimo k našemu problemu! Iščemo tako funkcijo $g(x)$, ki je konveksna in ki za vsak $x$ ustreza enačbi (3). Iz (3) dobimo takoj

$$g(x + n) = \log x + \log(x + 1) + \ldots + \log(x + n - 1) + g(x) \tag{6}$$

Odštejmo od obeh strani te enačbe izraz $x \log n + \log(n - 1)!$ in postavimo $g_n(x) = g(x + n) - x \log n - \log(n - 1)!$ Tako dobimo:

$$g_n(x) - g(x) = \log x + \log(x+1) + \ldots + \log(x+n-1) - x \log n - \log(n-1)! \tag{7}$$

Izraz na desni pa konvergira enakomerno za $n \to \infty$, če je $x > 0$. Po Taylorjevi formuli namreč lahko pišemo

$$\log\left(1 + \frac{x}{m}\right) - \frac{x}{m} = -\frac{\Theta}{2} \cdot \frac{x^2}{m^2}, \quad 0 < \Theta < 1$$

Ker je vrsta iz recipročnih kvadratov naravnih števil konvergentna, vidimo od tod, da je vrsta

$$\log x + \left[\log\left(1 + \frac{x}{1}\right) - \frac{x}{1}\right] + \left[\log\left(1 + \frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2}\right] + \ldots$$

$$\ldots + \left[\log\left(1 + \frac{x}{n-1}\right) - \frac{x}{n-1}\right] + \ldots \tag{8}$$

enakomerno konvergentna za $x > 0$. Vsota prvih $n$ členov le-te pa se razlikuje od izraza na desni v (7) za $C_n x$, če postavimo

$$C_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \log n$$

Ker ima zaporedje $C_n$ za limito Eulerjevo konstanto $C$, izraz na desni v (7) res konvergira. Isto velja potem za funkcijo $g_n(x)$. Če je $g_n(x) \to G(x)$, imamo

$$G(x) - g(x) = \lim_{n \to \infty} [\log x + \log (x+1) + \ldots + \log (x+n-1) - \\ - x \log n - \log (n-1)!] \tag{9}$$

Ker je funkcija $g(x+n)$ konveksna in se $g_n(x)$ razlikuje od nje le za linearni izraz $x \log n + \log (n-1)!$, je tudi $g_n(x)$ konveksna funkcija. Torej po prejšnjem $G(x) = \lim g_n(x)$ ni nikjer konkavna zvezna funkcija. Nadalje dobimo takoj, da je

$$g_n(x+1) = g_n(x) + \log \left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

Za $n \to \infty$ imamo potem $G(x+1) = G(x)$, ker teži drugi člen na desni proti nič. $G(x)$ je periodična in nikjer konkavna zvezna funkcija, torej konstanta: $G(x) = G$. Če upoštevamo, da je $g(1) = 0$, dobimo iz (9) takoj $G = 0$.

Razlika med limito (9) in vrsto (8) je, kakor smo zgoraj videli, ravno $Cx$. Ker je vsota logaritmov logaritem produkta, imamo potem

$$-g(x) = Cx + \log x + \log \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{m}\right) e^{-x/m}$$

Od tod je funkcija $g(x)$ enolično določena za vsak $x > 0$. Da res ustreza funkcionalni enačbi (3), vidimo takoj iz (9). Prvotno funkcijo $f(x)$ pa dobimo iz enačbe

$$\frac{1}{f(x)} = e^{Cx} \cdot x \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{m}\right) e^{-x/m} \tag{10}$$

Produkt na desni je konvergenten za vsak x (realen ali kompleksen) in pomeni analitično funkcijo, ki je regularna na vsej ravnini kompleksnih števil x. Vrednost nič ima za $x = 0, -1, -2, \ldots$ Zato je $f(x)$ enolična analitična funkcija, ki je regularna povsod razen v točkah $x = 0, -1, -2, \ldots$, kjer ima pole prve stopnje. Torej funkcionalna enačba (2) *enolično* določa funkcijo $f(x)$ in celo za vsak kompleksen x, če zahtevamo, da je $f(x)$ logaritmično konveksna funkcija.

Treba bi bilo še ugotoviti, da je ta funkcija identična z Eulerjevo funkcijo gama, ki jo definira integral

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} z^{x-1} e^{-z} \, dz \tag{11}$$

Res se da $\Gamma(x)$ izraziti z istim neskončnim produktom kakor funkcija $f(x)$. (Glej n. pr. I. Vidav, Višja matematika II, str. 217.) To dejstvo pa lahko neposredno dokažemo. Očitno je $\Gamma(x)$ za $x > 0$ zvezna pozitivna funkcija. Lahek račun pove, da je $\Gamma(1) = 1$ in $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. (Zadnje dobimo z integracijo per partes.) Spoznati je le še treba, da je $\log \Gamma(x)$ konveksna funkcija. O tem se prepričamo takole: Integral

$$I = \int_0^{\infty} (uz^{x_1/2} + vz^{x_2/2})^2 e^{-z} \frac{dz}{z}, \quad x_1 \neq x_2$$

kjer sta $u$ in $v$ poljubni števili, je očitno vedno pozitiven. Če ga izračunamo, dobimo

$$I = u^2 \Gamma(x_1) + 2uv\Gamma\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + v^2 \Gamma(x_2) \tag{12}$$

Torej je $I$ pozitivna kvadratna forma $u$-ja in $v$-ja. Vsaka taka forma

$$Au^2 + 2Buv + Cv^2$$

pa je zmožna zavzeti vrednosti s samo enim znakom tedaj in le tedaj, če je diskriminanta $B^2 - AC < 0$. Če to uporabimo na formo (12), dobimo, da je

$$\Gamma^2\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \Gamma(x_1)\ \Gamma(x_2),\ x_1 \neq x_2$$

Ta neenačba pa pove, če jo logaritmiramo, da je log $\Gamma(x)$ konveksna funkcija. S tem je dokazano, da je $\Gamma(x)$ identična s funkcijo $f(x)$, ki jo določa produkt (10).

H. Bohr je v svojem učbeniku iz analize prvi vpeljal funkcijo gama z zahtevo, naj bo logaritmično konveksna.

* * *

## MATEMATIK O SVOJEM DELU

*Nikdar nisem napravil nič ‚koristnega'. Nobeno moje odkritje ni v najmanjši meri spremenilo udobnosti na svetu, ne neposredno in ne posredno, ne v dobrem in ne v slabem smislu. Niti ni verjetno, da bi ga kdaj spremenilo. Pomagal sem vzgajati druge matematike, toda matematike iste vrste kakor sem sam in njihovo delo, kolikor sem jim jaz do njega pomagal, je ravno tako nekoristno kakor moje. S katerega koli praktičnega stališča presojamo, je vrednost mojega matematičnega življenja enaka nič; izven matematike je sploh nepomembna. Edino eno upanje imam, da se bom izognil razsodbi popolne nepomembnosti: da me bodo mogoče sodili kot takega, ki je ustvaril nekaj, kar je vredno ustvarjati. Da sem pa nekaj ustvaril, se ne da zanikati: vprašanje je le o vrednosti.*

*Primer mojega življenja ali primer življenja vsakega drugega, ki je bil matematik v istem smislu kakor jaz, je potem tale: dodal sem nekaj k znanju in pomagal drugim dodati več; ta nekaj pa ima vrednost, ki se razlikuje le v stopnji in ne v bistvu od tistega, kar so ustvarili veliki matematiki ali kateri koli drugi bodisi veliki bodisi mali umetniki, ki so pustili za sabo kak spomin.*

*G. H. Hardy: A Mathematician's Apology.*

# NOVICE

## Konveksne krivulje z dvema ekvikordalnima točkama

Središče kroga ima to lastnost, da so vse tetive, ki skozenj potekajo, enako dolge. Vprašajmo se sedaj, ali eksistirajo razen kroga še druge sklenjene krivulje, ki imajo v svoji notranjosti vsaj eno tako točko, da so vse, skozi njo potekajoče tetive enako dolge. Točko z opisano lastnostjo bomo imenovali *ekvikordalno točko.* Krivulj z eno samo ekvikordalno točko je neskončno mnogo. To uvidimo takole: Vzemimo enačbo krivulje v polarnih koordinatah $r = r(\varphi)$. Izhodišče polarnega koordinatnega sistema naj bo kar ekvikordalna točka naše krivulje. Na splošnosti pa nič ne izgubimo, če vzamemo, da je dolžina tetiv, ki potekajo skozi ekvikordalno točko, enaka dolžinski enoti. Pogoj, ki izraža konstantnost dolžine tetiv skozi izhodišče, se glasi

$$r(\varphi) + r(\varphi + \pi) = 1$$

Če postavimo $r(\varphi) = \frac{1}{2} + \varrho(\varphi)$, dobimo $\varrho(\varphi + \pi) = -\varrho(\varphi)$. Takih funkcij $\varrho(\varphi)$, ki zadoščajo temu pogoju, je nešteto. Sinusi in cosinusi lihih mnogokratnikov kota $\varphi$ so že take funkcije in poljubne vsote teh izrazov tudi.

Krog pa je konveksna krivulja. Kaj lahko je uvideti, da ni edina med krivuljami z eno ekvikordalno točko. Pozitivna ukrivljenost je potreben in zadosten pogoj za to, da je sklenjena krivulja konveksna. Torej moramo $r(\varphi)$ tako izbrati, da je tudi

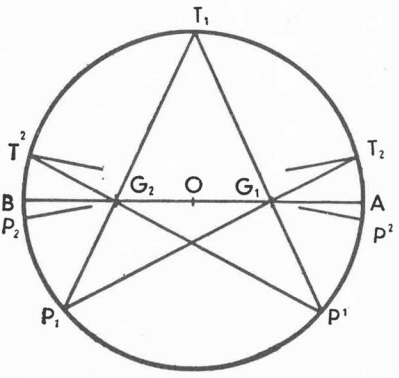
$$r^2 + 2r'^2 - rr'' > 0$$

ker je leva stran izraz v številcu v formuli za ukrivljenost. Preprost zgled za tako krivuljo je: $r = \frac{1}{2} + a \sin \varphi$, kjer je $a$ konstanta. Če je $|a| < \frac{1}{4}$, je pripadajoča krivulja vedno konveksna.

Vprašajmo pa se sedaj po konveksnih krivuljah, ki imajo več kakor eno ekvikordalno točko. Videli bomo, da ni teh krivulj z več kot dvema takima točkama. Ni pa še znano, ali eksistirajo konveksne krivulje z dvema ekvikordalnima točkama. Če so, imajo prav zanimive lastnosti. Te si bomo sedaj ogledali.

Naj bosta $G_1$ in $G_2$ ekvikordalni točki krivulje. Pri tem smemo vzeti, da je dolžina tetiv, ki gredo skozi $G_1$ ali $G_2$, enaka enoti. Daljico $G_1G_2$ zaznamujmo z $a$. Očitno je $a < 1$. Recimo, da je $T_1$ kaka točka te krivulje, ki ne leži na spajnici $G_1G_2$. Z naslednjo konstrukcijo bomo našli, izhajajoč iz te točke, še neskončno mnogo drugih točk, ki leže vse na tej krivulji. Točko $T_1$ zvežimo z $G_2$. Podaljšek $T_1G_2$ naj seče krivuljo v točki $P_1$. Ker je $T_1P_1 = 1$, točko $P_1$ lahko načrtamo. Dobljeno točko $P_1$ zvežimo z $G_1$. Zveznica $P_1G_1$ naj seče krivuljo v točki $T_2$. Sedaj moremo s $T_2$ pričeti kakor prej s $T_1$: zvežemo jo z $G_2$, podaljšek $T_2G_2$ naj seče krivuljo v $P_2$. Točko $P_2$ zvežimo z $G_1$, podaljšek $P_2G_1$ seče krivuljo v točki $T_3$ itd. (glej sl. 1). Tako dobimo dve zaporedji točk: $T_1, T_2, T_3, \ldots$ in $P_1, P_2, P_3, \ldots$, ki leže vse na krivulji, in sicer $T_1, T_2, T_3, \ldots$ na eni strani zveznice $G_1G_2$, $P_1, P_2, P_3, \ldots$ pa na nasprotni strani. Naj oklepa $T_1G_2$ z $G_1G_2$

kot $\varphi_1$, zveznica $T_2G_2$ pa $\varphi_2$ itd. Potem je lahko uvideti, da je zaporedje $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ monotono padajoče in konvergira proti nič: Lim $\varphi_k = 0$. Zaporedji točk $T_1, T_2, T_3, \ldots$ in $P_1, P_2, P_3, \ldots$ sta tudi konvergentni. Vse te točke leže na krivulji, zgoščajo pa se okoli točk, v katerih prebije krivulja zveznico $G_1G_2$. Te dve točki sta kar limitni točki obeh zaporedij. Ena leži na desni od $G_1$, to zaznamujmo z $A$, tisto, ki je na levi od $G_2$, pa z $B$. Seveda je $AB = 1$. Na sliki je $\varphi_1 < \pi$. Zato konvergira zaporedje $T_1, T_2, T_3, \ldots$ proti $A$, zaporedje $P_1, P_2, \ldots$ pa proti $B$.

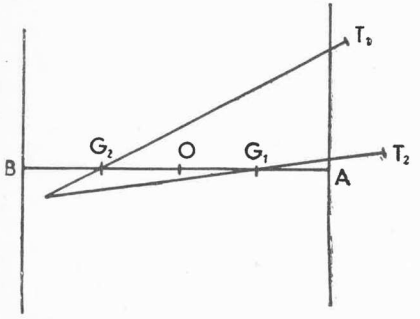


Sl. 1

Tako smo dobili rezultat: *Vse konveksne krivulje z danima ekvikordalnima točkama $G_1$ in $G_2$, ki potekajo skozi točko $T_1$, sečejo zveznico $G_1G_2$ v istih dveh točkah $A$ in $B$.*

Če zaznamujemo projekcije točk $T_1, T_2, \ldots$ in $P_1, P_2, \ldots$ na zveznico $G_1G_2$ s $T'_1, T'_2, \ldots$ in $P'_1, P'_2, \ldots$, središče daljice $G_1G_2$ pa z $O$, potem sta zaporedji daljic $OT'_1, OT'_2, \ldots$ in $OP'_1, OP'_2, \ldots$ očitno monotono rastoči, sicer morda še ne s prvim členom, pač pa prav gotovo od nekega člena naprej.

Izhajajoč iz točke $T_1$ pa lahko dobimo še dve drugi zaporedji točk, ki so tudi vse na krivulji. Treba je ubrati le drugo pot, ne od $T_1$ proti $G_2$, temveč proti $G_1$. Zveznica $T_1G_1$ naj seče krivuljo v $P^1$. Sedaj pa $P^1$ zvežimo z $G_2$ in dobimo $T^2$. Če tako nadaljujemo, dobimo zopet dvoje zaporedij $P^1, P^2, P^3, \ldots$ in $T_1, T^2, T^3, \ldots$ Analogno kot prej lahko ugotovimo, da obe zaporedji konvergirata in da ležita limitni točki na zveznici $G_1G_2$, sta torej kar točki $A$ in $B$.



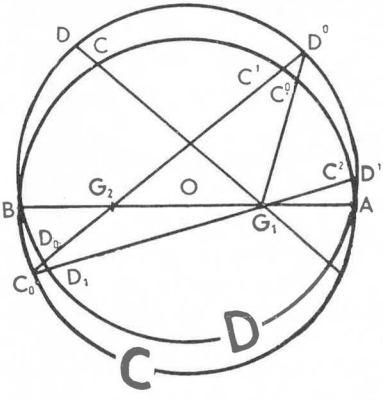
Sl. 2

Vse to velja, če smo začeli pri poljubni točki $T_1$ na krivulji, ki ni niti $A$ niti $B$. Pa vzemimo eno izmed točk, v katerih simetrala daljice $G_1G_2$ prebije to krivuljo. Označimo jo zopet s $T_1$. Kot prej poiščimo zaporedja točk $T_1, T_2, \ldots, P_1, P_2, \ldots$ in $T_1, T^2, \ldots P^1, P^2, \ldots$ Očitno leže sedaj točke zaporedij $T_1, T_2, T_3 \ldots$ in $T_1, T^2, T^3, \ldots$ simetrično glede na simetralo daljice $G_1G_2$. Zato ležita tudi limitni točki $A$ in $B$ simetrično glede na to simetralo. Torej je $OA = OB = \frac{1}{2}$. *Od tod vidimo, da gredo vse konveksne krivulje z ekvikordalnima točkama $G_1$ in $G_2$ skozi isti točki $A$ in $B$.*

Postavimo v $A$ in $B$ pravokotnici na $AB$! Naša krivulja leži vsa v pasu, ki ga oklepata te dve pravokotnici. To vidimo takole: Vzemimo, da bi kaka točka $T_1$ ležala zunaj tega pasu, n. pr. desno od $A$ ali pa na robu skozi $A$. Na zveznici $A$ in $B$ pa $T_1$ ne leži, ker je krivulja konveksna. Po prejšnjem bi iz te točke dobili zaporedje $T_1, T_2, T_3, \ldots$ Ako zaznamujemo projekcijo točke $T_k$ na zveznico $AB$ s $T'_k$, je zaporedje daljic $OT'_1, OT'_2, OT'_3, \ldots$ monotono naraščajoče in konvergira proti $A$. To pa je

nemogoče, ker je že $OT'_1 \geqq OA$. Torej res ne more nobena krivulja potekati izven pasu, ki ga ograjata pravokotnici v $A$ in $B$ na zveznico $AB$.

To dejstvo nam omogoča, da potrdimo interesantni izrek: *Skozi A in B gre kvečjemu ena konveksna krivulja, ki ima dani ekvikordalni točki $G_1$ in $G_2$.* Vzemimo, da bi bili dve taki krivulji. Zaznamujmo ju s **C** in **D**. Na krivulji **C** si izberimo kako točko $C$ in jo zvežimo z $G_1$. Zveznica $G_1C$ naj seče na isti strani kot je $C$ krivuljo **D** v točki $D$. Projekcijo daljice $CD$ na zveznico $G_1G_2$ zaznamujmo z $f(\varphi)$, če je $\varphi = \sphericalangle AG_1C$. Očitno je $f(0) = 0$ in $f(\frac{1}{2}\pi) = 0$. Funkcija $f(\varphi)$ je na intervalu $(0, \frac{1}{2}\pi)$ povsod pozitivna in zvezna. Če ni identično enaka nič, zavzame nekje največjo vrednost. Naj bo to pri $\varphi = \varphi_0$. Če sta $C^0$ in $D^0$ k $\varphi_0$ pripadajoči točki na krivuljah **C** in **D**, zvežimo $D^0$ z $G_2$. Zveznica $D^0G_2$ naj seče krivuljo **C** na isti strani, kot je $D^0$ v $C^1$, na drugi strani pa krivulji **C** in **D** v točkah $C_0$ in $D_0$.* Sedaj zvežimo $C_0$ z $G_1$. Ta zveznica seče krivulji **C** in **D** v točkah $C^2$, $D_1$ in $D^1$. Krivulji **C** in **D** pa ležita v prej omenjenem pasu. Ker je krivulja **C** konveksna, se pri $C^0$ suče na levo in je zato $(C^1D^0)' = (C^1C^0)' + (C^0D^0)'$. Torej je projekcija daljice $C^1D^0$ na $G_1G_2$ večja od projekcije $C^0D^0$. Iz podobnega razloga je tudi projekcija daljice $C_0D_1$ večja od projekcije daljice $C_0D_0$. Ker pa je $C^1D^0 = C_0D_0$ (je namreč $C^1C_0 = D^0D_0 = 1$) in $C_0D_1 = C^2D^1$, vidimo, da je projekcija daljice $C^0D^0$ manjša od projekcije daljice $C^2D^1$. Če zaznamujemo kot $AG_1D^1$ z $\varphi_1$, imamo $f(\varphi_1) > f(\varphi_0)$ in $\varphi_1 < \varphi_0$. To pa je protislovje. Zato je funkcija $f(\varphi)$ na intervalu $(0, \frac{1}{2}\pi)$ identično enaka nič. Prav tako bi dokazali, da je funkcija $f(\varphi)$ tudi na intervalu $(0, -\frac{1}{2}\pi)$ povsod enaka nič. Torej je $f(\varphi) = 0$ za vsak $\varphi$. Vidimo tedaj, da pri danih ekvikordalnih točkah $G_1$ in $G_2$ eksistira kvečjemu ena sama konveksna krivulja.



Sl. 3

Od tod lahko sklepamo, da *je krivulja simetrična glede na zveznico AB in glede na simetralo daljice AB.*

Če n. pr. ne bi bila simetrična na zveznico $AB$, bi se zrcalna slika na $AB$ ne ujemala z njo. Ta pa je tudi konveksna krivulja z istima ekvikordalnima točkama $G_1$ in $G_2$. To pa je v protislovju z gornjim izsledkom, da je ena sama taka krivulja. Ravno tako vidimo, da je krivulja simetrična glede na simetralo daljice $AB$.

Krivulja ima torej dve osi simetrije. Zato je središčno simetrična glede na presečišče teh dveh osi. To pa je točka $O$. Sedaj lahko vidimo, da *ni konveksne krivulje z več kot dvema ekvikordalnima točkama.* Krivulja s tremi takimi točkami bi namreč imela v svoji notranjosti tri središča simetrije. To pa ni mogoče. Naj bosta $O_1$ in $O_2$ dve izmed njih. Zveznica bi sekala krivuljo v dveh točkah $X_1$ in $X_2$, ki bi ležale simetrično glede na $O_1$ in $O_2$. To pa ni mogoče. Zato eksistirajo konveksne krivulje s kvečjemu dvema ekvikordalnima točkama.

*Konveksna krivulja z dvema ekvikordalnima točkama ima v vsaki točki tangento.*

* Tu so indeksi spodaj, če je točka pod $AB$, in analogno za zgoraj.

Vzemimo kako točko $T$ na krivulji. $T'$ naj bo diametralna točka, ki leži na zveznici $TG_1$. Če se $T$ giblje po krivulji, se tudi $T'$ giblje in razdalja $TT'$ ostane ves čas ista. V taki točki, kjer ni tangente, ima konveksna krivulja ogel. Če se $T$ giblje po krivulji preko ogla v točki $X$, se $T'$ tudi premika po oglu v ustrezni točki $X'$. Ogel pri $X$ je obrnjen navzven, pri $X'$ pa navznoter, kar ni mogoče pri konveksni krivulji. Torej je res povsod le ena tangenta. Očitno velja dokaz tudi tedaj, če ima krivulja eno samo ekvikordalno točko.

*O numerični vrednosti a.* Če sta dani ekvikordalni točki $G_1$ in $G_2$, lahko konstruiramo tri pare točk, ki leže na krivulji. Prvi tak par sta $A$ in $B$, ker je $OA = OB = \frac{1}{2}$. Če načrtamo v $G_1$ pravokotnico na zveznico $AB$, prebije ta pravokotnica krivuljo v dveh točkah, ki sta zaradi simetričnosti krivulje enako oddaljeni od točke $G_1$, namreč za $\frac{1}{2}$. Enako dobimo pri $G_2$ še tretji par. Naj bo $T_1$ ena izmed točk, kjer krivulja prebije pravokotnico skozi $G_1$. V pravokotnem trikotniku $T_1G_2G_1$ je $(T_1G_2)^2 = a^2 + \frac{1}{4}$. Ker mora biti $T_1G_2 < 1$, imamo od tod $a < \frac{1}{2}\sqrt{3}$ (gl. sl. 4).

Vzemimo ravnino, v kateri leži krivulja, kot ravnino kompleksnih števil. Izhodišče naj sovpada s točko $G_2$, realna os pa z zveznico $G_1G_2$. K točki $T_1$ na krivulji naj pripada kompleksno število $z_1$. Po zgoraj opisani metodi poiščimo pripadajoči zaporedji $T_1, T_2, T_3, \ldots$ in $P_1, P_2, P_3, \ldots$ Kako bomo dobili k točkam $T_2, T_3, T_4, \ldots$ pripadajoča kompleksna števila $z_2, z_3, z_4, \ldots$? Točko $P_1$ naj predstavlja število $z'$. Potem je $|z' - z_1| = 1$. Ker ima $-z_1$ isti smerni kot kakor $z' - z_1$, $-z_1/|z_1|$ pa tudi isto absolutno vrednost, je

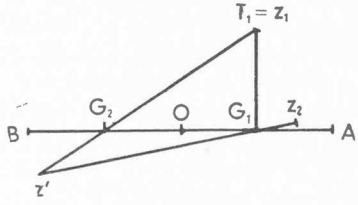
$$z' - z_1 = z_1/|z_1|$$

Enako dobimo, da je

$$z_2 - z' = (a - z')/|a - z'|.$$

Od tod imamo, če upoštevamo prejšnjo enačbo,

$$z_2 = z_1 - \frac{z_1}{|z_1|} + \frac{z_1 + (a - z_1)\,|z_1|}{|z_1 + (a - z_1)\,|z_1||}$$



Sl. 4

$z_{k+1}$ izračunamo iz $z_k$ prav tako, kakor dobimo $z_2$ iz $z_1$. Z gornjo formulo moremo zaporedne $z_k$ sukcesivno izračunati, če poznamo $z_1$. Za začetno točko $z_1$ si izberimo kar $z_1 = a + \frac{1}{2}i$. Zgornje zaporedje je potem konvergentno za $a < \frac{1}{2}\sqrt{3}$. To lahko uvidimo kar geometrično. Če je $z_1 = a + \frac{1}{2}i$, moremo $z_2, z_3, \ldots$ vedno konstruirati. Imaginarne komponente točk $z_k$ gredo proti nič, realne komponente pa so monotono naraščajoče in omejene, ker je $x_k < 1$. Zato imamo res konvergenco. Lim $z_k = z$ (a) je realen in zadošča neenačbi $a < z\,(a) < 1$.

Konveksna krivulja z dvema ekvikordalnima točkama pa more eksistirati samo za take vrednosti $a$, ki zadoščajo enačbi $z\,(a) = \frac{1}{2}(1 + a)$. Ker realne komponente $x_k$ zaporedja $z_k$ monotono naraščajo, prav gotovo krivulja za tak $a$ ne eksistira, če je eden izmed členov $x_k$ večji od $\frac{1}{2}(1 + a)$. Pri nekaj poizkusih je G. A. Dirac [1] ugotovil, da ni krivulje za $a \geqq 0.4$ in za $a = 0.38, 0.25, 0.2$ tudi ne. Verjetno je, da je enačba $z\,(a) = \frac{1}{2}(1 + a)$ izpolnjena le za en $a$ med 0.12 in $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, in sicer za $a \sim 0.3$.

Podobno vprašanje kakor za krivulje bi mogli staviti tudi za ploskve. Videli bi, da je neskončno mnogo takih ploskev, ki imajo eno samo

ekvikordalno točko. Nadalje pa eksistirajo kvečjemu le še konveksne ploskve z dvema ekvikordalnima točkama $G_1$ in $G_2$. S točkama $G_1$ in $G_2$ pa je ploskev že popolnoma določena. Dobimo jo namreč z rotacijo pripadajoče konveksne krivulje okoli zveznice ekvikordalnih točk. O tem se prepričamo, če sečemo ploskev z ravninami, ki potekajo skozi $G_1$ in $G_2$. Preseki so sklenjene krivulje z istima ekvikordalnima točkama $G_1$ in $G_2$. Kakor smo zgoraj dognali, morajo biti vsi ti preseki med seboj skladni. Zato je ploskev res rotacijska z osjo $G_1G_2$.

F. Avsec


Literatura:

[1] G. A. Dirac: Ovals with Equichordal Points. The Journal of the London Math. Soc., Vol. 27, stran 429—437.


## Spontana cepitev atomskega jedra

Jedra nekaterih težkih elementov (n. pr. $U^{235}$, $Pu^{239}$) se razcepijo, kadar trči vanje nevtron. Kratkotrajno prehodno jedro ($U^{236}$ in $Pu^{240}$) je zaradi masnega presežka nevtrona (0,009 ME) vzbujeno za približno 8 MeV in se zato razcepi na dva dela *(razcepka)*, zraven pa odlete še dva do trije nevtroni. Pri tem se sprosti energija, ki pa je mnogo večja od energije, ki jo je prinesel nevtron, namreč okrog 200 MeV. Kakor znano, izkoriščajo jedrsko cepitev v uranski peči in v atomski bombi.

Vendar to ni edina možnost, da pride do cepitve. Na osnovi podobne predstave, kot jo je uporabil Gamow za razlago in teorijo razpada $\alpha$, je možno pričakovati cepljenje jedra tudi brez zunanjega vzroka. Gamow si je predstavljal, da brani delcem $\alpha$ izhod iz jedra potencialni zid. Včasih se kakemu delcu zaradi tako imenovanega tunelskega efekta posreči prodreti skozi ta zid. Nekaj podobnega bi mogli pričakovati pri težkih jedrih glede cepitve. Jedro je nekaka kapljica in ima lastna nihanja. Če močno zaniha, se samo raztrga na dvoje. Toda za to je treba dovesti dovolj energije, n. pr. z nevtronom. Tudi tu imamo opraviti s potencialnim zidom. Jedro pa ga more premagati včasih že s tunelskim efektom, torej ne da bi dobilo energijo od zunaj. Ta pojav, ki ga imenujemo *spontana cepitev*, pa je seveda prav redek, ker je potencialni zid precej visok.

Prvi poskus merjenja tega pojava je napravil leta 1939 Libby, ki pa ni uspel zaradi šibkosti pojava. Leta 1941 je Fermi pri poskusih s podkritično uransko pečjo odkril spontano oddane nevtrone. V notranjosti peči, ki je imela že precejšnjo sposobnost pomnoževanja, je ugotovil znatno gostoto nevtronov, čeprav ni bilo nobenih izvorov, ki bi jih dajali. Nato je dal v peč znani izvor nevtronov in je gostoto spet izmeril. Iz primerjave teh dveh podatkov je dobil število nevtronov, ki jih gram urana oddaja na sekundo zaradi spontanih cepitev. Tudi poznejša merjenja so potrdila pravilnost njegovega rezultata ($1{,}5 \times 10^{-2}$ nevtronov/gr sek).

Sistematične meritve spontane cepitve so pozneje v Los Alamosu izvedli O. Chamberlain, G. Farwell, J. Junerman, E. Segré in C. Wiegand. Ti so merili predvsem število cepitev na gram na sekundo, pa tudi povprečno število oddanih nevtronov na vsako cepitev. Meritve so delali pri spodaj navedenih težkih elementih, ki oddajajo tudi delce $\alpha$.

Princip merjenja je tale: Znano množino snovi so nanesli na platinsko ploščico in jo dali v ionizacijsko celico. Celica je preko linearnega ojačevalca zvezana z registrirnim števcem, ki riše sunke, nastajajoče zaradi žarkov $\alpha$ ali zaradi razcepkov. Sunki, ki jih povzročajo razcepki, so 10 do 20 krat močnejši od sunkov, ki jih povzročijo delci $\alpha$; zato jih lahko razpoznamo na diagramu, ki ga popiše števec. Delci $\alpha$ pa so neprimerno pogostejši. Na več sto tisoč ali milijonov delcev $\alpha$ pride le nekaj cepitev. Prav zaradi tega predstavlja aktivnost $\alpha$ glavno motnjo pri teh merjenjih. Zaradi nje ne smemo jemati preveč snovi. Če je namreč aktivnost $\alpha$ premočna, se lahko sunki $\alpha$ včasih slučajno nakopičijo tako, da jih aparatura časovno več ne loči, ampak jih registrira kot en sam močnejši sunek, tako imenovani *lažni cepitveni sunek*. Pogostost takih fluktuacij je približno sorazmerna kvadratnemu korenu iz števila delcev $\alpha$, oddanih v najkrajšem času, ki ga aparatura še loči.

Ločljivost aparature je odvisna od časa, ki je potreben, da se ioni v celici zberejo na elektrodah, in od časovne konstante ojačevalca. Ionizacijska celica je bila napolnjena z zelo čistim argonom ali dušikom. Ojačevalec mora biti popolnoma brez motenj. Zato so uporabljali baterijski ojačevalec. Poleg tega mora biti faktor ojačenja ojačevalca zelo stalen.

Pri meritvah je bilo treba paziti, da se izločijo vsi zunanji vzroki cepitev, kot n. pr. nevtroni kozmičnih žarkov. Zaradi tega so zaščitili aparaturo s približno 4 cm debelo prevleko $B_2O_3$, ki je zunanje nevtrone dovolj absorbirala. Važno je bilo tudi ugotoviti, kolikšen del vseh cepitev celica sploh zazna. Plast snovi je namreč bila že tako debela, da niso izstopili vsi razcepki, ampak so nekateri obtičali v snovi. Zato so napravili »standardni vzorec«, t. j. posebno tanko odtehtano plast iste snovi, jo izpostavili curku počasnih nevtronov in šteli cepitve. Isto so napravili potem z raziskovanim vzorcem — pri enako močnem curku in isti geometrični razporeditvi. Iz razmerja pogostosti sunkov pri obeh vzorcih in razmerja mas so izračunali, kolikšen del cepitev v raziskovanem vzorcu zaznava celotna priprava.

Posebno zanimivo je bilo merjenje pri izotopih $U^{235}$ in $U^{238}$, ki ju niso ločili. Uporabili so kar naravni uran (ki je zmes izotopov 234, 235, 238) in pa na $U^{235}$ obogatene preparate. Posebna meritev je pokazala, da izotopa $U^{234}$ ni treba upoštevati zaradi majhne koncentracije in zaradi zelo majhnega števila spontanih cepitev na gram na sekundo. Koncentracijo $U^{235}$ so določili z masnim spektrografom, z merjenjem aktivnosti $\alpha$ in s štetjem cepitev v znanem curku počasnih nevtronov. Iz štetja spontanih cepitev pri preparatih je bila nato računsko določena cepitvena razpadna konstanta za vsak izotop zase.

Če število cepitev na gram na sekundo delimo s številom jeder na gram snovi, t. j. $N_L/A$, dobimo *cepitveno razpadno konstanto* $\lambda_c$, ki pove verjetnost, da se jedro razcepi v teku ene sekunde. Cepitveni razpolovni čas pa je $T_0 = \ln 2/\lambda_c$. Ta pove, v kolikem času bi razpadla polovica snovi, če bi razpadala samo zaradi spontanih cepitev. Iz števila cepitev na gram na sekundo in iz števila oddanih nevtronov na gram na sekundo pa dobimo povprečno število oddanih nevtronov na cepitev, ki znaša za $U^{238}$ po zadnjih določitvah: $\nu = 2{,}2 \pm 0{,}3$. To število se v okviru napake ujema s številom $\nu$ pri cepitvah, ki jih povzročijo nevtroni pri $U^{235}$: $\nu = 2{,}5 \pm 0{,}1$.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $Th^{230}$ (Io) | $1.10^{-3}$ | 1326 | 2 | $3{,}8.10^{-4}$ | $1{,}5.10^{17}$ | $8{,}3.10^{4}$ |
| $Th^{232}$ | 0,25 | 6300 | 178 | $4{,}2.10^{-5}$ | $1{,}35.10^{18}$ | $1{,}4.10^{10}$ |
| $Pa^{231}$ | $300.10^{-6}$ | 2200 | 11 | $5.10^{-3}$ | $1{,}15.10^{16}$ | $3.2.10^{4}$ |
| $U^{235}$ | | | | $3.10^{-4}$ | $1{,}85.10^{17}$ | $8{,}8.10^{8}$ |
| $U^{238}$ | | | | $6{,}9.10^{-3}$ | $8{,}0.10^{15}$ | $4{,}5.10^{9}$ |
| nar. U | $38{,}5.10^{-3}$ | 381 | 310 | | | |
| $Pu^{238}$ | $0{,}02.10^{-6}$ | 833 | 144 | $2{,}14.10^{3}$ | $2{,}6.10^{10}$ | 92 |
| $Pu^{239}$ | $30.10^{-6}$ | 10000 | | $1{,}0..10^{-2}$ | $5{,}5.10^{15}$ | $2{,}43.10^{4}$ |

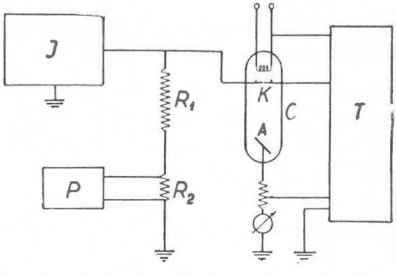
Izvleček iz tabele preiskanih elementov vsebuje v stolpcu: 1 — masa preiskovanega vzorca v gramih, 2 — celotni čas opazovanja v urah, 3 — število opazovanih spontanih cepitev, 4 — število cepitev na gram na sekundo, 5 — cepitveni razpolovni čas v letih, 6 — razpolovni čas za razpadanje $\alpha$ v letih. M. O.

E. Segrè: Spontaneus fission. Physical Review *86*, 21 (1952).

## Določitev Planckove konstante

Planckovo konstanto $h$ je možno določiti na več načinov. Najbolj natančna je določitev iz kratkovalovne meje rentgenskega spektra. Elektron, ki v rentgenski cevi preteče napetost $E$, dobi energijo $eE$. Ta energija preide v idealnem primeru vsa v energijo kvanta $h\nu$. V tem primeru je $eE = h\nu = hc/\lambda$, odtod je možno najti $h$, če poznamo $e$, $c$, $E$ in $\nu$.

Na drug način dobimo $h$, če izmerimo napetost vzbujanja rentgenskih spektralnih črt in lege pripadajočih absorpcijskih robov. Z merjenjem napetosti vzbujanja merimo energijo, ki jo potrebuje elektron, da lahko izbije elektron iz lupine $K$ ali $L$. Pripadajočo valovno dolžino pa najdemo z merjenjem absorpcijskega roba pri prehodu rentgenske svetlobe skozi dano snov. Absorpcija rentgenske svetlobe se namreč ostro poveča, ko postane energija vpadlega kvanta ravno tako velika, da lahko izbije elektron iz lupine $K$ ali $L$. Spet je $eE_{vzb} = h\nu_{roba}$, od koder je mogoče najti $h$.



Sl. 1

Poleg tega je možno določiti $h$ tudi iz merjenja ionizacijskih potencialov in potencialov vzbujanja. Pri tem opazujemo napetost, pri kateri dobijo elektroni dovolj energije, da lahko ionizirajo plin ali vzbudijo njegove spektralne črte. Valovno dolžino pa je možno določiti tudi spektroskopsko.

Končno lahko za meritev $h$ izkoristimo še fotoefekt. Svetloba namreč izbija iz kovin elektrone, katerih energijo je možno meriti. Če upoštevamo še izstopno delo elektronov iz kovine ($E_i$), je energija izbitega elektrona $E = h\nu - E_i$. Tako nam tudi ta meritev daje $h$.

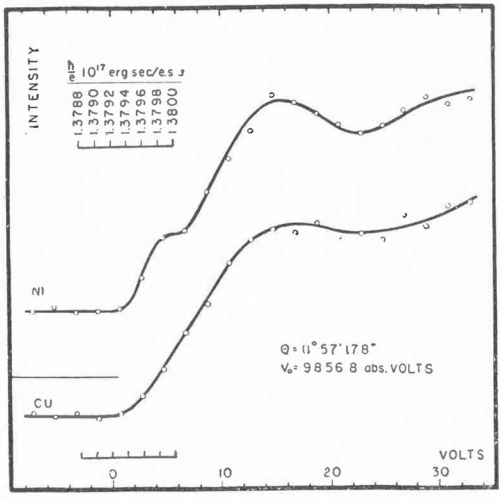
Od vseh teh možnosti se je prva najbolje izkazala. Morda bodo izboljšali tudi drugo tako, da bo prišla v poštev za natančne meritve;

ostale so manj prikladne. Namen našega članka je, da opiše meritev, ki sta jo izvedla Baerden in Schwartz leta 1950 po prvi metodi.

Eksperimentalno ureditev kaže slika 1. Med katodo in anodo rentgenske cevi $C$ je visoka napetost, ki jo daje stabilizirani izvor $I$. Anoda je preko ampermetra spojena z zemljo. Izvor napetosti je posebej spojen z zemljo preko uporov $R_1$ in $R_2$, ki omogočata natančno merjenje napetosti. Regulator toka $T$ pa skrbi za konstantnost toka skozi cev s tem, da regulira gretje katode. Rentgenska cev je kovinska. Anoda je hlajena z vodo. Cev mora biti dobro evakuirana in je zato priključena na črpalni sistem. Pri omenjeni meritvi je bil pritisk v cevi $1 \cdot 10^{-6}$ mm Hg. Katoda je kurjena direktno ali indirektno. Najboljše rezultate je mogoče doseči z indirektno kurjeno katodo z oksidno površino. Napetost med katodo in anodo znaša nekako 10 000 voltov in mora biti zelo točno izmerjena; biti mora seveda stalna. Posrečilo se je stabilizirati napetost tako, da celo 10%-ne izpremembe omrežne napetosti niso povzročile večjih izpremememb visoke napetosti kot za 1 V.

Baerden in Schwartz sta izmerila napetost izvora s potenciometrom na 10 omskem standardnem uporu $R_2$. Ta je v oljni kopeli, ki drži temperaturo konstantno. Odtod je mogoče sklepati na napetost izvora, če je tudi upor $R_1$ (okrog 1 MΩ) dovolj natančno znan. Vzela sta visokovatni uporovni standard.

Za določitev mejne valovne dolžine sta avtorja uporabljala monokromator z dvema kalcitnima kristaloma, da bi dosegla čim večjo ločljivost. Delilni krog, ki kaže lege kristala, dopušča s pomočjo mikroskopa odčitke do 0,3 kotne sekunde. Iz izmerjenega kota pa dobimo $\lambda$ po Braggovi enačbi $2\,d \sin \alpha = n\,\lambda$. Seveda je treba poznati razmak mrežnih ravnin $d$. Ta znaša za kalcit po najnovejših meritvah pri 20° C $3{,}03567 \cdot 10^{-10}$ m (za mrežne ravnine, ki prihajajo v meritvi v poštev). Uklonjeno rentgensko svetlobo registrira Geigerski števec, ki je obdan z debelo plastjo svinca in železa. Števna naprava pa izmeri čas, v katerem je dal števec določeno število sunkov. Recipročna vrednost tega časa je že kar mera za osvetljenost števca.




Sl. 2

Zanimivo je, da je meja natančnosti te meritve v tem, da izstopno delo elektronov iz oksidne površine ni natančno znano, ker je odvisno od najrazličnejših faktorjev, kot na primer od načina obdelave oksidne površine. Pri omenjeni meritvi je bilo to delo ocenjeno na 1,2 elektronskega volta, kar je seveda le približna ocena.

Rezultate meritev kaže slika 2. Za nepričakovani valoviti potek krivulje še niso našli zadovoljive razlage. Vsekakor pa kaže slika lepo definirano mejno valovno dolžino, kar nas edino zanima.

Iz enačbe, ki je bila v začetku navedena, lahko izračunamo razmerje $hc/\lambda$. Baerden in Schwartz sta dobila vrednost $1{,}2397_0$ Vm. Če vzamemo za $e$ vrednost $1{,}6019 \cdot 10^{-19}$ As, za $c$ pa vrednost $2{,}99790 \cdot 10^{8}$ $ms^{-1}$, dobimo od tod za $h$ vrednost $6{,}62425 \cdot 10^{-34}$ $kgm^2 s^{-1}$. Z izravnavo z drugimi določitvami atomskih konstant pa sta DuMond in Cohen dobila:

$$h = 6{,}6238 \cdot 10^{-34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1} \quad \text{ter} \quad hc/e = 1{,}23964 \cdot 10^{-6} \text{ Vm}.$$

S. Bratož

Literatura:

J. A. Baeden and Schwartz: A Precision Evaluation of $h/e$ by X Rays. Phys. Rev. *79*, 674 1950).

J. A. Baerden, F. T. Johnson and H. M. Watts: A New Evaluation of $h/e$ by X-Rays. Phys. Rev. *81*, 70 (1951).

## F. Bloch in E. M. Purcell, Nobelova nagrajenca za fiziko v l. 1952

Lani sta si delila Nobelovo nagrado za fiziko F. Bloch in E. M. Purcell v znesku 33 000 $. Oba sta neodvisno drug od drugega raziskovala jedrsko indukcijo in resonanco. Prvi je vodil skupino na univerzi v Stanfordu, drugi v Harwardu.

Oba načina merjenja magnetnega momenta jedra imata isto skupno osnovo. Nabita atomska jedra imajo spin in se zato obnašajo kot majhni magneti, katerih magnetni moment ima smer spina. Ako postavimo vrteče se jedro v magnetno polje, magnetni moment pleše (precesija) okrog smeri magnetnega polja tako, kot pleše vrtavka okoli navpičnice.

Material, ki ga preiskujemo, damo v magnetno polje. Pravokotno na to stalno polje pa deluje izmenično magnetno polje radijske frekvence. To polje spreminjamo, dokler ni njegova frekvenca enaka frekvenci precesije. Kdaj sta frekvenci enaki, lahko določimo na dva načina. V tem se razlikujeta obe metodi.

V resonančni metodi, ki jo je izdelal Purcell, se obrne smer spina v nekaterih jedrih, ko sta frekvenci enaki. Zato se jemlje energija visoko frekventnemu polju. Frekvenca, pri kateri nastopi absorpcija, je enaka precesijski frekvenci.

V indukcijski metodi, ki jo je izdelal Bloch, je nameščena posebna sprejemna tuljava pravokotno k magnetnemu in visoko frekventnemu polju. V tuljavi se inducira napetost, ako spin in s tem magnetni moment nenadoma spremenita smer. To napetost moremo laže zaznati kot absorbirano energijo v Purcellovi metodi.

Prva preprosta uporaba teh metod je meritev magnetnega polja. Ako damo v polje vodo, lahko določimo jakost magnetnega polja z meritvijo precesijske frekvence, ker poznamo magnetni moment protona iz drugih eksperimentov. Ta metoda merjenja magnetnega polja je v mnogih primerih boljša od starejših metod. Taki instrumenti za meritev magnetnih polj so že v prodaji.

Poleg te praktične uporabe pa so s to metodo pojasnili še nekatere osnovne probleme medsebojnega učinkovanja osnovnih delcev. Ako razširimo metodo na bolj zamotana jedra, dobimo mnoge podatke o njihovi zgradbi.

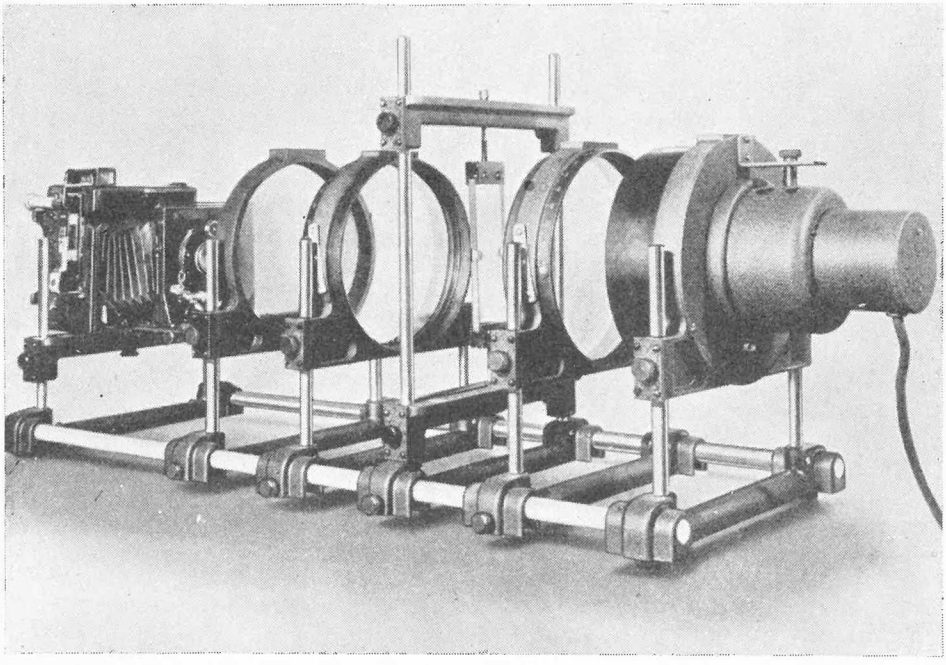
Metode obeh nagrajencev bodo še mnogo koristile pri raziskavanju lastnosti kristalov ter v fizikalni in organski kemiji za kvalitativno analizo.

Povzeto iz: Nucleonics *10*, 84 (dec. 1952). R. Korbar

# NOVI INSTRUMENTI

## Polariskop

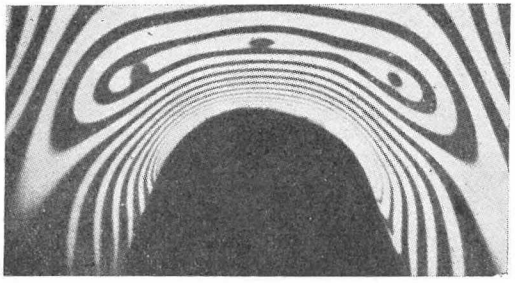
Med dva navzkrižna polarizacijska filtra, ki ne propuščata svetlobe, postavimo celuloidno ploščo. Če ploščo obremenimo, dobimo skozi filtra svetlobo, pri neobremenjeni plošči pa je ne dobimo. Plošča postane pod vplivom mehanskih napetosti dvolomna in se vede kot anizotropen kristal. Pojav je znan pod imenom f o t o e l a s t i č n o s t. Skozi polarizacijska filtra vidimo v celuloidni plošči temne krivulje-izokline. Te vežejo med seboj mesta, kjer redni žarek prehiteva izrednega za T/2. Fazna razlika



Sl. 1. Polariskop tvrdke General Radio Company. Od desne proti levi vidimo: svetlobni izvor in motno ploščo, prvi polarizacijski filter, okvir s poskusnim profilom, drugi polarizacijski filter, barvni filter in fotografsko kamero

je odvisna od dvolomnosti, ta pa od debeline plošče in mehanske napetosti. Tako dobimo sliko o porazdelitvi mehanskih napetosti v tehnično važnih profilih, ki si jih sami poljubno izrežemo iz celuloida. Iz te slike pa lahko izračunamo velikosti mehanskih napetosti na posameznih mestih.

Tvrdka General Radio Company Cambridge 39, Massachusetts izdeluje *Polariscope 1534-A*. Svetlobo daje 100 W žarnica, za katero je nameščena motna plošča iz opalne plastične snovi. Sledita dve polarizacijski plošči premera 20 cm, na kateri lahko namestimo plošči $\lambda/4$. Med obema polarizacijskima ploščama je pritrjen v posebnem okviru poskusni profil tako, da ga s privijanjem vijaka ustrezno obremenjujemo. Na koncu je barvni filter, ki propušča le ozek spektralni pas z valovno dolžino



Sl. 2. Porazdelitev mehanskih napetosti v modelu zgloba

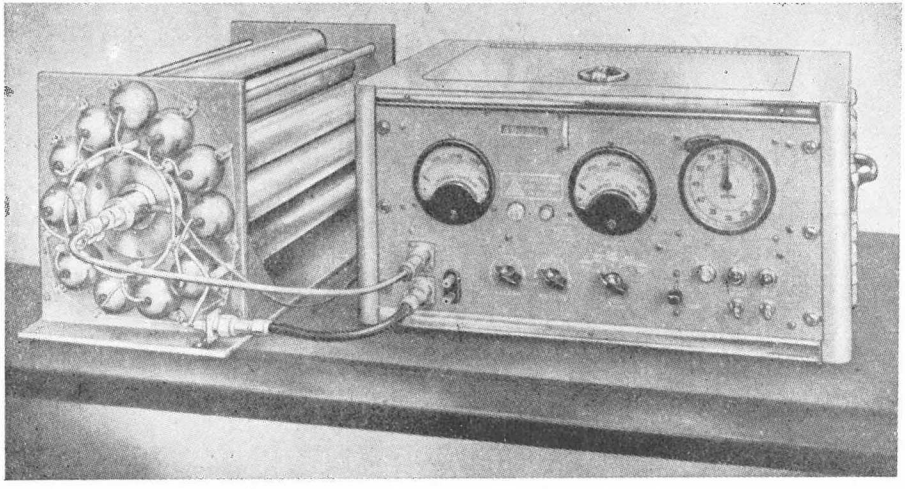
okrog 4800 Å. Izokline fotografiramo s kamero. Kadar raziskujemo napetosti v nihajočih profilih, vzamemo namesto žarnice bliskovno luč *Strobolume 1532-B*, ki ima zelo kratek čas osvetlitve (40 $\mu$s), in z njo izvršimo trenutne posnetke. Ima veliko svetilnost, zato zadostuje odprtina fotoaparata 1 : 4,5. Aparat stane 490 $, bliskovna luč pa 265 $.

B. Ravnikar

## Priprava za določanje starosti s $C^{14}$

Če zadenejo nevtroni, ki jih sproščajo kozmični žarki v atmosferi, jedra dušika $N^{14}$, nastane radioaktivni ogljik: $N^{14}$ (n, p) $C^{14}$, ki se veže v $C^{14}O_2$. Ogljik ima dva stabilna izotopa: $C^{12}$ (98,9%) in $C^{13}$ (1,1%). Radioaktivni ogljik $C^{14}$ pa razpada z razpolovno dobo 5568±30 let in oddaja elektrone z maksimalno energijo 0,145 MeV. Razmerje med $C^{14}$ in $C^{12}$ je v atmosferi približno $1:10^{12}$. V istem izotopskem razmerju je ogljik v rastlinah, ki vsrkavajo $CO_2$. Po smrti organizma pa se količina $C^{14}$ eksponencialno manjša zaradi radioaktivnosti. Eksponencialno pada tudi aktivnost: $A = A_0 e^{-\lambda t}$. Tako je mogoče določiti z meritvijo aktivnosti starost arheoloških primerkov, ki vsebujejo ogljik. Meritve aktivnosti ogljika $C^{14}$ pa niso lahke, kajti oddani elektroni imajo majhne energije in jih z navadno geigersko cevjo ne moremo zaznati. Poleg tega je koncentracija $C^{14}$ zelo majhna in je torej potrebno čim bolj zmanjšati ozadje.

Napravo za merjenje aktivnosti ogljika $C^{14}$ je izdelala tvrdka RCL (Radiation Counter Laboratories, Inc.) 5122 West Grove Street, Skokie, Illinois. Naprava ima posebno merilno cev, okrog katere so razporejene geigerske cevi, vezane v antikoincidenčnem stiku. Na ta način se pri-



bližno stokrat zmanjša ozadje motenj. Sunke štejemo s števcem, ki je vgrajen v merilni napravi. Merilna cev je kovinski valj, v katerem je vložena geigerska cev z mrežasto katodo.

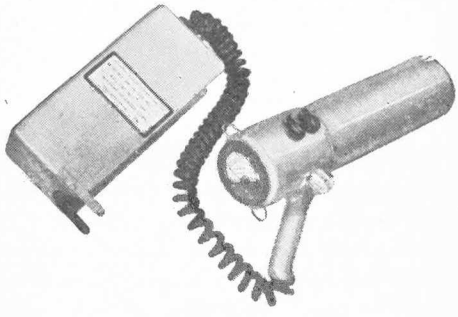
Primerek, ki ga preiskujemo, sežgemo, $CO_2$ reduciramo, ogljik pa nanesemo na notranjo stran kovinskega valja. Nato napolnimo valj z argonom in alkoholovo paro tako, kot so polnjene navadne geigerske cevi. V merilni napravi so stabilizirani za geigerske cevi izvori napetosti, ki jih odčitamo na dveh voltmetrih. V napravi je vgrajena na desni strani električna štoparica. Napravi je priložena tabela, iz katere lahko odčitamo kar starost primerka, čim izmerimo število sunkov v 48 urah. Povprečna napaka pri primerkih med 3000—15 000 let je do 5%.

Celotna naprava stane 1800 $. Z. Gabrovšek

W. F. Libby, Phys. Rev. 69, 671, 1946.

## Scintilacijski merilnik za žarke $\gamma$

Tvrdka Nuclear Research Corporation, 2563 Grays Ferry Avenue, Philadelphia 46, Pa. izdeluje prenosen merilnik SM-3 A za ugotavljanje in merjenje žarkov $\gamma$. V merilniku je uporabljen kot scintilacijski kristal NaJ, z dodatkom talija. Kristal ima obliko 2,5 cm velike kocke. Elektronska pomnoževalka pa je najnovejša RCA 6199. Ojačeni sunki s pomnoževalke polnijo kondenzator. Napetost na kondenzatorju, ki je sorazmerna množini absorbiranega žarkovja, meri cevni voltmeter. Instrument za 50 mikroamperjev, ki je vgrajen v merilnem krogu, je umerjen v milirentgenih na uro (mr/h). Merilnik ima tri obsege: 5,0 mr/h, 0,5 mr/h, 0,05 mr/h in je natančen na 5%. Časovna konstanta merilnega kroga se lahko naravna na 1 s ali na 10 s.



V merilniku so vložene kurilne baterije za 1,5 V in anodna baterija za 67,5 V. Napetost 1 000 V, ki je potrebna za pomnoževalko, pa dobimo z usmerjanjem transformirane visokofrekvenčne napetosti, ki jo da vgrajeni oscilator. Merilna glava s kristalom, pomnoževalko in instrumentom se da pripeti k drugemu delu merilnika tako, da tvori vse skupaj enoto, veliko 8 cm × 15 cm, visoko 29 cm in težko 4 kg. Ohišje je vododržno. Merilnik uporabljajo za iskanje radioaktivnih rud in za delo z radioaktivnimi izotopi. Zlasti pa je uporaben kot svarilni merilnik za varnostno kontrolo doze, ker je največji obseg še vedno manjši, kot je tolerančna doza za človeka. Instrument stane 500 $. Nk

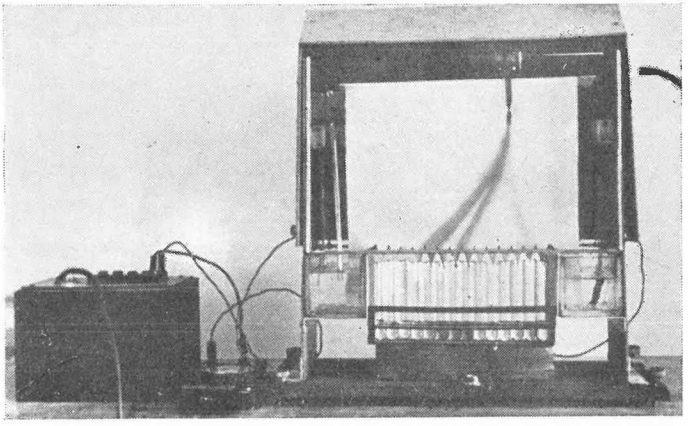
* * *

*Znanost in uporaba znanosti sta enota kakor drevo in sadovi na njem.*

*John Tyndall*

## Še nekaj o elektroforezi

V Obzorniku za matematiko in fiziko (1951, št. 3) je bil objavljen članek o elektroforezi, t. j. o gibanju koloidnih delcev v električnem polju. Na koncu članka je na kratko omenjena nova elektroforezna metoda, elektroforeza na filtrirnem papirju. Leta 1949 sta objavila Svenson in Brattsten duhovito metodo kontinuirne elektroforeze na filtrirnem papirju. Elektrolit teče pravokotno na smer električnega polja po navpično nameščenem listu papirja, položenem med dve stekleni plošči. Preiskovana raztopina doteka na zgornji rob papirja. Posamezne komponente se ločijo v električnem polju po naboju in gibljivosti.



Durrum je ponovil poskus na listu filtrirnega papirja, ki je prosto visel v prostoru, nasičenem s paro topila. Elektroforezni aparat je prikazan na sliki. Filtrirni papir visi preko roba zgornje posodice trikotnega prereza in vodoravnih robov. Na skrajnih spodnjih konceh ima papir dva jezika, ki segata v elektrodni posodici. Rob med obema jezikoma je nazobčan; vsak zobec sega v posebno epruveto. Zgornja posodica in obe elektrodni posodici so napolnjene z osnovnim elektrolitom. V elektrodnih posodicah sta dve platinski elektrodi, na kateri damo napetost od 800 do 2000 V. S čašice, ki stoji nad zgornjo posodico, enakomerno doteka preiskovana tekočina po ozkem traku filtrirnega papirja. Ta se s svojo konico dotika pole papirja, preko katerega teče osnovni elektrolit. V električnem polju se komponente med seboj ločijo in se nabirajo v epruvetah pod zobci filtrirnega papirja. Ker mora biti tok osnovnega elektrolita preko papirja enakomeren, mora biti višina gladine v zgornji posodici stalna.

Teoretična obravnava poskusa je precej zamotana. Električno polje na filtrirnem papirju ni homogeno. V spodnjem delu je močnejše kot zgoraj. Poleg tega narašča zaradi izhlapevanja koncentracija osnovnega elektrolita od zgornjega proti spodnjemu robu. Lega, ki jo ima koloidni delec na filtrirnem papirju, je rezultat gibanja navzdol pod vplivom gravitacije in kapilarnih sil ter prečnega gibanja zaradi električnega polja.

Če hočemo dobiti rezultate, ki se dajo reproducirati, moramo paziti, da sta temperatura in električna napetost stalni ter da izhlapevanje topila ni premočno. Aparat pokrijemo zato s pokrovom, katerega sprednja stena je iz stekla, da lahko opazujemo potek poskusa.

Slika kaže poskus, ki je bil narejen s 4% raztopino fuksinske kisline v 0,25 n ocetni kislini; osnovni elektrolit je ocetna kislina iste koncentracije. Ločitev v posamezne komponente je jasno vidna. Poskus traja približno 20 ur.

Narejeni so bili tudi poskusi z zmesjo aminskih kislin in zmesjo proteinov. V obeh primerih so dosegli zelo dobro ločitev komponent, ki so se nabirale v posameznih posodicah pod zobci filtrirnega papirja. S primernimi fizikalno kemijskimi metodami so ugotovili komponente in določili razmerje koncentracij komponent v zmesi.

S. Kandare

Literatura:

E. L. Durrum, J. Am. Chem. Soc. 73, 4875 (1951).

# NOVE KNJIGE

## Mehanika

Intermediate college mechanics — a vectorial treatement. Kolegijska mehanika za srednjo stopnjo — v vektorskem obravnavanju. Spisal Dan E. Christie. Založba McGraw-Hill Book Comp., New York 1952. 454 strani.

Delo obravnava na zanimiv način vse osnovne probleme splošne in tehnične mehanike in gre zato nekako v sredi med našimi tečaji mehanike na univerzah in tehniških visokih šol. V matematičnem pogledu ne stavlja na čitatelja drugih zahtev, kakor da zna dobro uporabljati najbolj preproste enačbe in pravila infinitezimalnega računa. V prvih dveh poglavjih obravnava knjiga osnove vektorske algebre, v nadaljnjih dveh pa glavna pravila statike, ki jih pojasnjujejo preprosti zgledi iz teorije konstrukcij. V nadaljnjih 7 poglavjih vzame avtor osnovne pojme kinematike in dinamike točke oz. togega telesa, delo, potencialno energijo, virtualno delo in momentni zakon; zgledi in naloge se nanašajo predvsem na preprosta in poučna vprašanja iz vsakdanjega življenja in tehnike. V zadnjih 6 poglavjih poglobi in razširi pisatelj snov v nekaterih smereh, ki naj predvsem omogočijo študentu čim lažji prehod k študiju drugih vprašanj mehanike in fizike. Tako obravnava posebej nihanja z eno prostostno stopnjo, gibanje točke v konservativnem polju z uporabami na osnovna vprašanja astronomije in fizike elementarnih delcev, statiko elastičnih teles in dinamiko idealnih tekočin. V predzadnjem poglavju obravnava avtor enodimenzijonalno valovanje, pri čemer polaga prav tako kakor v ostalem besedilu večjo pažnjo na značilne pojave pri takih gibanjih kakor na matematične metode. Zadnje poglavje knjige predstavlja uvod v kinetično teorijo plinov.

Knjiga je pisana pregledno in jasno in privede čitatelja z zelo skromnimi sredstvi razmeroma daleč do novejših problemov tehnične in teoretične mehanike oz. fizike.

A. Kuhelj

(Inštitut za tehnično mehaniko TVŠ)

# VPRAŠANJA

1

Naj bodo $a$, $b$, $c$ stranice in $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ nasproti ležeči koti v trikotniku. Dokaži, da je vedno

$$\frac{\pi}{3} \leqq \frac{\alpha a + \beta b + \gamma c}{a + b + c} \leqq \frac{\pi}{2}$$

Na levi velja enakost le za enakostranični trikotnik, na desni pa tedaj, če trikotnik degenerira v dvakrat šteto daljico.

2

Gozd ima obliko kroga, drevesa pa rastejo v njem tako, da tvorijo kvadratno mrežo. Kako debela morajo biti debla, da človek, ki stoji v središču, ne vidi več iz gozda? Tu seveda vzamemo, da so drevesa okrogla in enako debela.

Stranica kvadratne mreže, ki jo tvorijo drevesa, naj bo dolžinska enota. Če ima koordinatni sistem izhodišče v središču gozda in sta osi vzporedni z mrežo, potem so koordinate središč posameznih dreves cela števila $p$, $q$, ki ustrezajo neenačbi $1 \leqq p^2 + q^2 \leqq R^2$, če je $R$ polmer gozda. Zaznamujmo z $r$ polmer debel. Če je $r$ dovolj majhen, je gozd gotovo prozoren, torej gredo iz središča žarki, ki nobenega drevesa ne sečejo. Za $r = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ pa se drevesa med seboj dotikajo in je gozd popolnoma neprozoren. Naj bo $\varrho$ meja med tistimi polmeri $r$, pri katerih je gozd iz središča še prozoren, in onimi, za katere ni več prozoren. Očitno je $\varrho < \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Dokaži, da je zmerom

$$\frac{1}{\sqrt{R^2 + 1}} \leqq \varrho < \frac{1}{R}$$

3

Dan je krog $K$ s polmerom $r$. Določi polmer kroga $K_1$, ki ima središče na obodu kroga $K$ in ki razdeli $K$ na dva enaka dela. Tej nalogi lahko damo tudi tole zabavno obliko: Na travniku, ki ima obliko kroga in ki je ograjen s plotom, se pase koza, privezana z vrvico k plotu. Kako dolga mora biti vrvica, da lahko koza popase ravno polovico travnika?

4

Heterogen pesek včasih analizirajo tako, da ga najprej pomešajo z bromoformom ($\varrho = 2{,}89\ \mathrm{g/cm^3}$) in odločijo lahke sestavine (kremen, kalcit itd.), ki plavajo na tej tekočini. Težja zrna, ki ostanejo na dnu in so za mineraloga bolj interesantna, pa potem sortirajo in štejejo pod mikroskopom.

V nekem pesku so bila v težki frakciji števila zrn posameznih mineralov v naslednjem razmerju proti celotnemu številu: 82% granata, 13% turmalina, 3% distena, 2% ostalih. Natančnost te statistike je seveda odvisna od števila preštetih zrn. Kolikšno je moralo biti to število, da pri navedenih vrednostih efektivna (= »standardna«) napaka ni presegla 0,5%?

# Državna založba Slovenije

Naslednje knjige potrebuje marsikdo od vas pri svojem študiju:

*Avčin France:*
**Osnove metrologije** (560,— din)

*Lapajne Svetko:*
**Tabela za dimenzioniranje pravokotnih prerezov iz ojačenega betona** (42,— din)

*Matanović Drago:*
**Splošna elektrotehnika I. del** (202,— din)

*Matanović Drago:*
**Splošna elektrotehnika II. del** (380,— din)

*Rudl Franjo:*
**Tabele za kontrolno računanje koordinatnih razlik z računskim strojem** [za staro razdelbo $360^0$ in novo razdelbo 400 g] (325,— din)

*Sajovic Oton:*
**Opisna geometrija I** (250,— din)

*Šuklje Lujo:*
**Trdnost** (516,— din)

*Vakselj Anton:*
**Osnove matematike I** (400,— din)

*Vidav Ivan:*
**Višja matematika I** (294,— din)

*Vidav Ivan:*
**Višja matematika II** (498,— din)

*Vidmar Milan:*
**Predavanje o znanstvenih osnovah delovne elektrotehnike** (708,— din)

Dobite jih v vseh poslovalnicah DZS in drugih knjigarnah

**Državna založba Slovenije**

Društvo matematičara i fizičara N. R. Hrvatske poziva sve, koji se zanimaju matematičko-fizičkim naukama, da se pretplate na

**Glasnik**
**matematičko-fizički i astronomski**

i sarađuju u njemu.

Zaista ne bi smjelo biti ni jednog kulturnog radnika, koji se bavi matematičko-fizičkim naukama, kao ni prosvjetne ustanove, koja nije pretplatnik Glasnika. Pretplatom i suradnjom u svojem naučnom i stručnom časopisu pokazujete u kolikoj mjeri pratite i podupirete razvitak i napredak svoje struke. Širite također Glasnik u svom krugu, jer time podupirete razvitak matematičko-fizičkih nauka u svojoj okolini.

Prijave pretplate slati na administraciju Glasnika: Hrvatsko prirodoslovno društvo, Zagreb, Ilica 16/III. Pretplata za god. 1953. iznosi 300.— din.

Društvo matematikov in fizikov NRH izdaja za vso državo »*Matematičko-fizički list* za učenike srednjih škola«. Letnik ima 5 številk, med počitnicami ne izhaja. Letna naročnina je 150 din, posamezna številka stane 35 din.

Profesorji srednjih šol, priporočajte list dijakom! Naročila in naročnino pošiljajte na naslov:

*Matematičko-fizički list*, Zagreb, Ilica 16/III, p. p. 165 ali na čekovni račun št. 401-T-1080.

Zveza Društev matematikov in fizikov FLRJ izdaja časopis:

**Nastava matematike i fizike**

Naročnina je 200 din, posamezna številka 60 din. Naročila in naročnino pošiljajte podjetju »Znanje«, Beograd, Terazije 12 ali na ček. rač. št. 103—901810 z označbo »Za časopis Nastava matematike i fizike«.

**Obzornik za matematiko in fiziko** izhaja vsak drugi mesec. Izdaja ga Društvo matematikov in fizikov LRS. Urejuje ga uredniški odbor: I. Kuščer, A. Moljk, I. Vidav, A. Žabkar. Odgovorni in tehnični urednik: I. Štalec. Upravo vodi I. Štalec. — Tiska tiskarna »Toneta Tomšiča« v Ljubljani. — Naročnina za letos je 250 din. Posamezna številka 90 din, dvojna številka 120 din. Naročnino nakažite na naš čekovni račun pri Narodni banki, št. 604-T-207. - Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov:

*Obzornik za matematiko in fiziko, Ljubljana, poštni predal 253.*