OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

1952 LJUBLJANA 4(

VSEBINA

Članki:

Relaksacijske metode pri numeričnem obravnavanju linearnih enačb. Diferencialne enačbe (A. Kuhelj) 145
O praštevilih (I. Vidav) 161
Jedro (E. Fermi, prev. S. Detoni) 168
Magnetni spineli (B. Zega) 173

Novice:

Pravilni sedemnajsterokotnik (N. Prijatelj) 178
Pozitronij (S. Kandare) 181
Negativni pritisk v tekočinah (M. Ribarič) 184

Novi instrumenti:

Pisalni instrument za diagrame X-Y (D. Jamnik) 187

Vprašanja 188

Poskusi:

Termodifuzija (I. Kuščer in D. Leskovšek) 189
Pripomba k članku o modelu katodne cevi (M. Vakselj) . . 192

Iz naših šol:

Nekaj misli o tehniki predavanja (Br.) 196
Influenčni stroj (A. M.) 198
Učni načrt oddelka za fiziko na TVŠ 198
Delo v predmetnem aktivu matematikov in fizikov v Ljubljani v letu 1951-52 (M. Klopčičeva) 200
Ob stoletnici ljubljanske realke (S. Breskvar) 201
Občni zbor Društva matematikov in fizikov (N. Benkovič) . 203

Nove knjige 204

Odgovori 206

Iz uprave

V letu 1953 bo imel Obzornik 6 številk po 32 strani. Naročnina bo 250 din. Bralce prosimo, da nam ostanejo zvesti in da pridobe še kakega novega naročnika. Potrudili se bomo, da bo revija izhajala redneje, naročniki pa naj čimprej poravnajo zaostalo naročnino in naročnino za l. 1953, da ne bo nepotrebnih stroškov zaradi opominjanja. Kdor želi poravnati naročnino v dveh obrokih, mora plačati 20.— din več za bančne stroške. — V l. 1951 so izšle 4 številke, v l. 1952 pa 5 številk. Na zalogi imamo 2., 3., 4. štev. I. letnika za 120 din in vse številke II. letnika za 250 din. Naročajte s plačilom po ček. položnici na *Društvo matematikov in fizikov LRS, Ljubljana*, ček. rač. št. 604-T-207 ali pa na *Društvo matematikov in fizikov LRS, Ljubljana, p. p. 253.*

OBZORNIK

ZA

MATEMATIKO IN FIZIKO

1952 LJUBLJANA LETNIK II

UREDNIŠKI ODBOR

I. KUŠČER, A. MOLJK, I. VIDAV, A. ŽABKAR
I. ŠTALEC (TEHNIČNI IN ODGOVORNI UREDNIK)

IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV IN FIZIKOV LJUDSKE REPUBLIKE SLOVENIJE

NATISNILA TISKARNA »TONETA TOMŠIČA« V LJUBLJANI

LETO II
1 9 5 2

Obzornik za matematiko in fiziko

ŠTEV. 4-5
1. XII. 1952

RELAKSACIJSKE METODE PRI NUMERIČNEM OBRAVNAVANJU LINEARNIH ENAČB. DIFERENCIALNE ENAČBE

A. Kuhelj

1. **Splošno.** Relaksacijske metode, ki so se kot posebno preprosta vrsta iteracijskega postopka najprej uveljavile pri numeričnem obravnavanju linearnih algebraičnih enačb (glej prvi del tega sestavka v Obzorniku za mat. in fiziko I/4, str. 121—132), so razmeroma hitro osvojile tudi nekatera druga področja numeričnega računanja; prav posebno pa so se s primernimi izpopolnitvami obnesle pri robnih problemih navadnih in parcialnih diferencialnih enačb in pri določanju lastnih vrednosti in lastnih funkcij. V naslednjem si hočemo ogledati v glavnih potezah potek nekaj takih računov in jih pojasniti s preprostim primerom, ki je klasičnim metodam le težko dostopen. Pri tem bomo vzeli, da je relaksacijsko obravnavanje algebraičnih enačb v glavnem znano; toda ker gre pri večini diferencialnih enačb samo za najbolj preproste sisteme, ni poznavanje prvega dela tega sestavka niti neobhodno potrebno. Zato bomo tudi oštevilčenje enačb, slik in tabel tega dela izvedli brez ozira na omenjeni članek.

Pri relaksacijskem reševanju diferencialnih enačb nas zanimajo vrednosti funkcije samo v določenih posameznih točkah, ki tvorijo pri eni neodvisni spremenljivki ekvidistantne točke na številski premici, pri dveh neodvisnih spremenljivkah pa pravilno ravninsko mrežo. Pri prehodu k trem neodvisnim spremenljivkam iščemo seveda funkcijske vrednosti v točkah pravilne prostorske mreže, ki pa jih je zelo težko razmestiti v ravnini papirja v tako ugodni obliki, da bi šlo tudi tu računanje tako preprosto od rok kakor v prejšnjih primerih. Zato so se začeli baviti z uporabo relaksacijskih metod pri diferencialnih enačbah s tremi neodvisnimi spremenljivkami razmeroma pozno (lit. 5) in se v našem kratkem članku ne moremo podrobneje ukvarjati z njimi.

2. **Diferenčni izrazi za odvode.** Relaksacijsko obravnavanje diferencialnih enačb spada torej med diferenčne metode, kjer nadomestimo odvode funkcij z diferencami. Pri funkcijah ene neodvisne spremenljivke pridemo do uporabnih izrazov za odvode, n. pr. iz Newton-Stirlingove interpolacijske formule (gl. n. pr. njeno izvajanje v znanem Whittaker-Robinsonovem delu, lit. 9, str. 33—34 in 39).

$$(1)\ \ldots\ f(x) = f(x_0 + ua) = f_0 + u\,\delta f_0 + \frac{u^2}{2!}\,\delta^2 f_0 + \frac{u\,(u^2-1)}{3!}\,\delta^3 f_0 +$$

$$+ \frac{u^2\,(u^2-1)}{4!}\,\delta^4 f_0 + \frac{u\,(u^2-1)(u^2-4)}{5!}\,\delta^5 f_0 +$$

$$+ \frac{u^2\,(u^2-1)(u^2-4)}{6!}\,\delta^6 f_0 + \ldots$$

v kateri so $\delta^{(n)} f_0$ centralne diference n-tega reda pri sodih n, medtem ko pomeni ta znak pri lihih n aritmetično sredino centralnih diferenc nad in pod nič. Najhitreje pregledamo pomen diferenc iz naslednje znane sheme, kjer so v prvem stolpcu vpisane vrednosti neodvisne spremenljivke $x_{-2} = x_0 - 2a$, $x_{-1} = x_0 - a$, x_0, $x_1 = x_0 + a \ldots$, v drugem ustrezne vrednosti funkcije, v tretjem prve centralne diference itd.

$$
\begin{array}{llllll}
x_{-2} & f_{-2} & & & & \\
 & & \delta f_{-\frac{3}{2}} = f_{-1} - f_{-2} & & & \\
x_{-1} & f_{-1} & & \delta^2 f_{-1} = \delta f_{-\frac{1}{2}} - \delta f_{-\frac{3}{2}} & & \\
 & & \delta f_{-\frac{1}{2}} = f_0 - f_{-1} & & \delta^3 f_{-\frac{1}{2}} & \\
x_0 & f_0 & & \delta^2 f_0 = \delta f_{\frac{1}{2}} - \delta f_{-\frac{1}{2}} & & \delta^4 f_0 \ldots \\
 & & \delta f_{\frac{1}{2}} = f_1 - f_0 & & \delta^3 f_{+\frac{1}{2}} & \\
x_1 & f_1 & & \delta^2 f_1 = \delta f_{\frac{3}{2}} - \delta f_{\frac{1}{2}} & & \\
 & & \delta f_{\frac{3}{2}} = f_2 - f_1 & & & \\
x_2 & f_2 & & & &
\end{array}
\qquad (2)
$$

če še dodamo, da je $\delta^{2n-1} f_0 = \frac{1}{2} (\delta^{2n-1} f_{-\frac{1}{2}} + \delta^{2n-1} f_{\frac{1}{2}})$. Pri pozneje navedenih končnih izrazih za odvode (gl. enačbe 3) moramo seveda vse diference nadomestiti z ustreznimi funkcijskimi vrednostmi, ker za te nam navsezadnje gre.

V enačbi (1) smo nadomestili neodvisno spremenljivko x z vsoto $x_0 + ua$, kjer sta x_0 in a konstanti. Odvod funkcije f po x dobimo torej s tem, da pomnožimo odvod f po u še z odvodom u po x, t. j. z $1/a$, ker je

$$u = \frac{x - x_0}{a}$$

Če to napravimo z izrazom (1) in vzamemo nato $u = 0$, dobimo za zaporedne odvode funkcije f po x v točki x_0 naslednje enačbe (gl. Whittaker-Robinson, slovstvo 9, str. 60)

$$
\begin{aligned}
af'(x_0) &= \delta f_0 - \frac{1}{6}\delta^3 f_0 + \frac{1}{30}\delta^5 f_0 - \frac{1}{140}\delta^7 f_0 + \frac{1}{630}\delta^9 f_0 - \ldots \\
a^2 f''(x_0) &= \delta^2 f_0 - \frac{1}{12}\delta^4 f_0 + \frac{1}{90}\delta^6 f_0 - \frac{1}{560}\delta^8 f_0 + \frac{1}{3150}\delta^{10} f_0 - \ldots \\
a^3 f'''(x_0) &= \delta^3 f_0 - \frac{1}{4}\delta^5 f_0 + \frac{7}{120}\delta^7 f_0 - \frac{41}{3024}\delta^9 f_0 + \ldots \\
a^4 f^{IV}(x_0) &= \delta^4 f - \frac{1}{6}\delta^6 f_0 + \frac{7}{240}\delta^8 f_0 - \frac{41}{7560}\delta^{10} f_0 + \ldots \\
a^5 f^{V}(x_0) &= \delta^5 f_0 - \frac{1}{3}\delta^7 f_0 + \frac{13}{144}\delta^9 f_0 - \ldots \\
a^6 f^{VI}(x_0) &= \delta^6 f_0 - \frac{1}{4}\delta^8 f_0 + \frac{13}{240}\delta^{10} f_0 - \ldots \\
a^7 f^{VII}(x_0) &= \delta^7 f_0 - \frac{5}{12}\delta^9 f_0 + \ldots \\
a^8 f^{VIII}(x_0) &= \delta^8 f_0 - \frac{1}{3}\delta^{10} f_0 + \ldots
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

Pri funkcijah dveh spremenljivk si moramo točke mreže, v katerih iščemo funkcijske vrednosti, izbrati tako, da imajo vse enakovredno lego.

Če torej zvežemo vsako točko mreže z najbližnjimi točkami okoli nje in označimo z N število zveznic, ki izhajajo iz ene točke, mora biti kot med dvema sosednjima zveznicama dan z enačbo $\alpha = 2\pi/N$. Če pa na drugi strani označimo s k število stranic pravilnih mnogokotnikov, ki jih tvorijo vse take zveznice, dobimo znano enačbo $k \cdot (\pi - \alpha) = 2\pi$.* Z eliminacijo kota α iz obeh enačb dobimo zvezo med k in N

$$\frac{1}{N} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2}$$

in zato pridejo teoretično v poštev naslednji liki

$N = 3,\ k = 6$ (šesterokotniki)
$N = 4,\ k = 4$ (kvadrati)
$N = 6,\ k = 3$ (trikotniki).

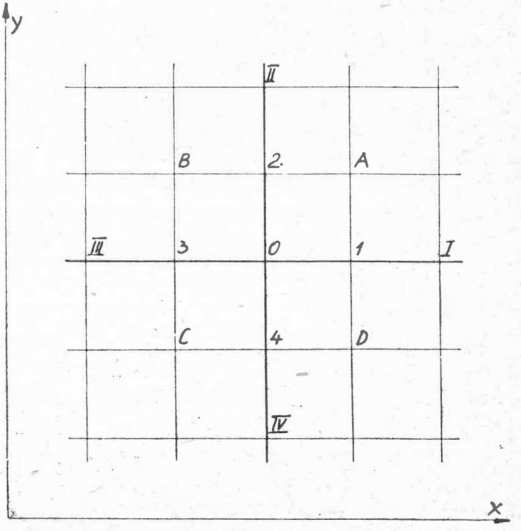
Ker pa moramo navadno začeti pri relaksacijski metodi z zelo grobimi mrežami, naletimo pri prehodu k finejši razdelitvi na težave, če si izberemo za izhodišče šesterokotniško mrežo; zato pride v praksi v poštev samo kvadratna in trikotna mreža, to je: funkcijske vrednosti bomo iskali samo v točkah, ki tvorijo v ravnini kvadrate ali pa enakostranične trikotnike. Katera od obeh variant pride v danem primeru najbolj v poštev, je odvisno v veliki meri od oblike območja. Če so dane vrednosti funkcije, njeni odvodi ali kaj podobnega na obodu takega območja, da pade veliko točk trikotne mreže na obod ali v njegovo bližino, tedaj bomo izbrali trikotno mrežo, v vseh drugih primerih pa delamo raje s kvadratno mrežo, ki je v nekem smislu najbolj preprosta.

a) Nadomestitev Laplaceovega izraza z diferencami. Pri kvadratni mreži dobimo aproksimacije za parcialne odvode in njihove kombinacije na zelo preprost način s tem, da nadomestimo odvode po eni ali drugi neodvisni spremenljivki z diferencami vzdolž ustreznih točk naše mreže. Ker ženemo gostoto mreže vedno tako daleč, da postanejo višje diference zelo majhne, se zadovoljimo pri nadomestitvi odvodov z diferencami vedno kar s prvo aproksimacijo in dobimo n. pr. za drugi odvod $\partial^2 f/\partial x^2$ v točki x_0 (sl. 1)

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{x_0} \approx \delta^2 f_0 = \delta f_{\frac{1}{2}} - \delta f_{-\frac{1}{2}} =$$

$$= f_1 - f_0 - (f_0 - f_3) = f_1 + f_3 - 2f_0$$

[Točke v okolici x_0 smo sedaj zaradi ravninske mreže označili



Sl. 1. Ravninska mreža točk.

* Če bi zveznice ne tvorile pravilnih likov, bi dobili pri poznejši prevedbi diferencialnih enačb v diferenčne za razne točke mreže drugačne algebraične enačbe, kar bi numerično računanje znatno zamotalo.

drugače kakor v tabeli (2); prejšnjo točko —1 smo tu označili s 3 in namesto f_{-1} smo zato zapisali f_3; vse ostale označbe v zadnji enačbi pa ustrezajo popolnoma shemi (2)]. Za Laplaceov izraz v točki x_0 dobimo torej v prvi aproksimaciji diferenco*

$$(4)\ldots \qquad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 = (\Delta f)_0 \approx \frac{1}{a^2}(f_1 + f_2 + f_3 + f_4 - 4 f_0)$$

ali tudi

$$(4')\ldots \qquad (\Delta f)_0 \approx \frac{4}{a^2}\left[\frac{1}{N}\sum_N (f) - f_0\right]$$

če pomeni N število črt, ki izhajajo iz vsake točke mreže (v našem primeru je $N = 4$), in če je

$$(5)\ldots \qquad \sum_N (f) = f_1 + f_2 + f_3 + f_4$$

vsota vseh vrednosti funkcije v tistih točkah mreže, ki so najbliže točki x_0, y_0 (v našem primeru — sl. 1 — so to točke 1, 2, 3 in 4). Enačbi (4) oz. (4') nista seveda popolnoma točni, toda izraz na desni se od pravilne vrednosti Laplaceovega izraza razlikuje le za člene, ki so sorazmerni četrtim in višjim diferencam funkcijskih vrednosti.

Enačbo (4') smemo uporabiti kot aproksimacijo za vrednost Laplaceovega izraza tudi v primeru, da nadomestimo kvadratno mrežo točk s trikotno ali šesterokotno. Če namreč vzamemo neznano funkcijo v obliki polinoma Kartezijevih koordinat, jo smemo po prehodu k ravninskim polarnim koordinatam

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

pisati v obliki

$$(6)\ldots \qquad f = A_0(r) + \sum_{n=1}^{m}[A_n(r)\cos n\varphi + B_n(r)\sin\varphi]$$

kjer so koeficienti $A_0(r)$, $A_n(r)$ in $B_n(r)$ polinomi koordinate r, ki ne vsebujejo nižjih potenc kakor r^n. (Dokaz poteka zelo preprosto: z uvedbo polarnih koordinat preide vsak člen $a_{kl}x^k y^l$ v obliko $a_{kl}r^{k+l}\cdot\cos^k\varphi\cdot\sin^l\varphi$. Potence $\cos\varphi$ in $\sin\varphi$ pa se dajo z obrazci, ki sledijo iz uporabe binomskega izreka na obe znani enačbi $\cos\varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})$ in $\sin\varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})$, izraziti z linearnimi izrazi, v katerih se pojavijo cosinusi in sinusi mnogokratnikov kota φ do $k\varphi$ oz. do $l\varphi$. Na ta način nastanejo iz zgoraj navedenih produktov členi, ki vsebujejo poleg faktorja $a^{kl}\cdot r^{k+l}$ še sinuse in cosinuse mnogokratnikov kota φ do največ $(k+l)\varphi$; če združimo vse člene z istim faktorjem $\cos n\varphi$ oz. $\sin n\varphi$, bomo dobili očitno v njih samo n-to in višje potence od r. Pogled na obliko izrazov za $\cos^k\varphi$ in $\sin^l\varphi$ (gl. n. pr. I. Vidav, Višja matematika I, str. 456) nas dalje pouči, da so eksponenti potenc r v členih $A_n(r)$ in $B_n(r)$ vsi soda ali pa vsi liha števila.)

Za vsoto vrednosti funkcije f v N med seboj enako oddaljenih točkah kroga z radijem a okrog točke $r = 0$ sledi iz (6) najprej izraz

* Indeks 0 za oklepajem pomeni, da moramo vzeti za izraz v oklepaju tisto vrednost, ki jo zavzame v točki $x = x_0$, $y = y_0$.

$$(x)\ldots \qquad \sum_N(f) = N\cdot A_0(a) + \sum_{n=1}^{m}\{[A_n(a)\cos n\alpha + B_n(a)\sin n\alpha]\cdot$$
$$\cdot[1 + \cos n\beta + \cos 2n\beta + \ldots + \cos(N-1)n\beta] +$$
$$+[-A_n(a)\cdot\sin n\alpha + B_n(a)\cos n\alpha]\cdot[\sin n\beta +$$
$$+ \sin 2n\beta + \ldots + \sin(N-1)n\beta]\}$$

kjer pomeni α polarno koordinato prve točke na krogu, $\beta = 2\pi/N$ pa kot med radijema k dvema sosednjima točkama naše mreže. Za vsoti v drugem in četrtem oglatem oklepaju pa veljata znani formuli

$$S_1 = 1 + \cos n\beta + \cos 2n\beta + \ldots + \cos(N-1)n\beta = \frac{\sin\frac{Nn\beta}{2}\cos\frac{(N-1)n\beta}{2}}{\sin\frac{n\beta}{2}}$$

in

$$S_2 = \sin n\beta + \sin 2n\beta + \ldots + \sin(N-1)n\beta = \frac{\sin\frac{Nn\beta}{2}\sin\frac{(N-1)n\beta}{2}}{\sin\frac{n\beta}{2}}$$

ki jih dobimo, če najprej pomnožimo obe strani gornjih enačb s $\sin\frac{n\beta}{2}$ in razvijemo nastale produkte v vsote oz. razlike goniometričnih funkcij mnogokratnikov zgornjih kotov. Toda vsoti S_1 in S_2 sta večinoma nič, ker je $N\beta = N\cdot 2\pi/N = 2\pi$ in je zato en faktor v števcu nič. Samo tedaj, kadar je tudi imenovalec nič, ali kadar je $n\beta/2 = j\pi$ ($j = 1, 2, \ldots$), moramo določiti vrednosti vsot po l'Hospitalovem pravilu in dobimo z okrajšavo $x = n\beta/2$

$$S_1 = \lim_{x\to j\pi}\frac{\sin Nx\cdot\cos(N-1)x}{\sin x} =$$
$$= \lim_{x\to j\pi}\frac{N\cos Nx\cos(N-1)x - (N-1)\sin Nx\cdot\sin(N-1)x}{\cos x}$$
$$= \frac{N\cos Nj\pi\cos(N-1)j\pi}{\cos j\pi} = N$$

medtem ko je S_2 tudi v tem primeru nič, ker dobi števec pri odvajanju v obeh sumandih faktor $\sin Nj\pi$ oz. $(N-1)j\pi$. Če torej našo izhodno enačbo (x) delimo z N, dobimo (prvi primer, da ni S_1 enak nič, je pri $n\beta/2 = \pi$ ali $\beta = 2\pi/n$, t. j. $n = N$; ostali primeri pa se pojavijo pri mnogokratnikih te vrednosti!)

$$\frac{1}{N}\sum_N(f) = A_0(a) + A_N(a)\cos N\alpha + A_{2N}(a)\cos 2N\alpha + \ldots$$
$$+ B_N(a)\sin N\alpha + B_{2N}(a)\sin 2N\alpha + \ldots.$$

Toda v $A_N(a)$ in $B_N(a)$ se ne pojavi a v nižjih potencah kakor v N-ti; pri dovolj majhnem a smemo zato vse člene na desni strani zadnje enačbe zanemariti razen $A_0(a)$ in dobimo

$$(7)\ldots \qquad \frac{1}{N}\sum_N(f) \approx A_0(a)$$

Za Laplaceov izraz v polarnih koordinatah dobimo, kakor znano, iz nastavka (6) najprej obliko

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = A''_0 + \frac{A'_0}{r} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{m} \left[(A''_n + \frac{N'_n}{r} - \frac{n^2}{r^2} A_n) \cos n\varphi + (B''_n + \frac{B'_n}{r} - \frac{n^2}{r^2} B_n) \sin n\varphi \right]$$

Toda ker so A_n in B_n polinomi s potencami, ki rastejo za 2 od n dalje (n je celo pozitivno število), ker je

$$\frac{d^2 r^n}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dr^n}{dr} - \frac{n^2}{r^2} r^n = n(n-1) r^{n-2} + n \cdot r^{n-2} - n^2 r^{n-2} \equiv 0$$

in ker postane tudi

$$\frac{d^2 r^{n+2p}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dr^{n+2p}}{dr} - \frac{n^2}{r^2} r^{n^2+2p} = (n+2p)(n+2p-1) r^{n+2p-2} +$$

$$+ (n+2p) r^{n+2p-2} - n^2 \cdot r^{n+2p-2} =$$

$$= [(n+2p)(n+2p-1+1) - n^2] r^{n+2p-2} = 4p(n+p) r^{n+2p-2}$$

nič za $r \to 0$, nam na desni strani enačbe za Δf ostaneta samo prva dva člena

$$(\Delta f)_0 = \lim_{r \to 0} \Delta f = \lim_{r \to 0} \left(A''_0 + \frac{A'_0}{r} \right)$$

Ker velja za $A_0(r)$ nastavek

(xx) ... $$A_0(r) = c_0 + c_2 r^2 + c_4 r^4 + \ldots$$

sledi $$(\Delta f)_0 = 4 c_2$$

Analogno dobimo

$$(\Delta^2 f)_0 = 2^2 \cdot 4^2 \cdot c_4, \quad (\Delta^3 f)_0 = 2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 c_6, \ldots$$

in za $A_0(r)$ po enačbi (xx) smemo pisati

$$A_0(r) = f_0 + \frac{r^2}{4}(\Delta f)_0 + \frac{r^4}{2^2 \cdot 4^2}(\Delta^2 f)_0 + \frac{r^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}(\Delta^3 f)_0 + \ldots$$

ali zaradi (7) in če vzamemo $r = a$

(8) ... $$\frac{1}{N}\sum_N (f) - f_0 \approx \frac{a^2}{4}(\Delta f)_0 + \frac{a^4}{2^2 \cdot 4^2} \cdot (\Delta^2 f)_0 + \frac{a^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}(\Delta^3 f)_0 + \ldots$$

Če zanemarimo zaradi malega a na desni strani enačbe (8) vse člene razen prvega, dobimo res enačbo (4') neodvisno od tega, ali je mreža točk trikotna, kvadratna ali šesterokotna. Če pa hočemo, smemo pri trikotni mreži, ki je najgostejša, upoštevati na desni strani enačbe (8) prva dva sumanda, od katerih pa izraz $(\Delta^2 f)_0$ lahko izrazimo z nižjimi odvodi, če uporabimo enačbo (8) na funkcijo Δf namesto na f in če upoštevamo

sedaj na desni strani samo en člen. Tako dobimo očitno namesto (8) enačbo

$$\frac{1}{N}\sum_N (\Delta f) - (\Delta f)_0 \approx \frac{a^2}{4}(\Delta^2 f)_0$$

in enačba (8) z dvema členoma na desni se da pisati

$$\frac{1}{N}\sum_N (f) - f_0 = \frac{a^2}{4}\left[(\Delta f)_0 + \frac{a^2}{16}(\Delta^2 f)_0\right] = \frac{a^2}{4}\left\{(\Delta f)_0 + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{N}\sum_N (\Delta f) - (\Delta f)_0\right]\right\}$$

ali tudi končno za $N = 6$

(9) . . .
$$\frac{1}{N}\cdot\sum_N (f) - f_0 = \frac{a^2}{16}\left[3\,(\Delta f)_0 + \frac{1}{N}\sum_N \Delta f\right]$$

β) Diferenčna oblika drugih izrazov. Kakor znano, igra Laplaceov izraz skoraj v vseh diferencialnih enačbah zelo važno vlogo. V teoriji elastičnosti pa je še bolj važen dvakrat uporabljeni Laplaceov operator na funkcijo f

$$\Delta^2 f = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}$$

za katerega dobimo pri kvadratni mreži (za lego točk gl. sl. 1) naslednji približni izraz

$$(\Delta^2 f)_0 \approx \frac{1}{a^4}\left[20\,f_0 - 8\,(f_1 + f_2 + f_3 + f_4) + 2\,(F_A + F_B + F_C + F_D) + \right.$$
$$\left. + F_I + F_{II} + F_{III} + F_{IV}\right]$$

ki sledi iz enačbe (4), če upoštevamo, da je $\Delta^2 f = \Delta\,(\Delta f)$.

3. **Prevedba Poissonove enačbe v sistem algebraičnih enačb.** Prevedba diferencialnih enačb v sisteme algebraičnih, ki omogočajo relaksacijsko obravnavanje, je zelo preprosta. V območju, za katerega iščemo neznano funkcijo f, si izberemo primerno regularno mrežo točk, tako da pade na mejo območja čim več mrežnih točk. Za vse točke mreže, kjer funkcije f ne poznamo, nadomestimo diferencialno enačbo z ustrezno algebraično, v kateri so vsi odvodi nadomeščeni z diferenčnimi izrazi. Tako dobimo za neznane vrednosti funkcije v mrežnih točkah toliko algebraičnih enačb, kolikor imamo neznank, in vse enačbe so linearne, če je tudi prvotna diferencialna enačba linearna. Da nam ni treba pri fizikalnih problemih paziti na dimenzije posameznih členov oz. faktorjev, vpeljemo navadno v diferencialno enačbo s primerno pretvorbo same količine brez dimenzij in nadomestimo šele potem novo enačbo s sistemom algebraičnih enačb.

Če pomeni n. pr. f vzbočitev elastične membrane. ki je podvržena vsestransko delujoči natezni sili T na enoto dolžine in na katere površino vpliva pritisk p, potem velja — kakor znano — Poissonova diferencialna enačba

(9) . . .
$$\Delta f + \frac{p}{T} = 0$$

v kateri imata oba člena na levi strani dimenzijo recipročne dolžine. Z uvedbo čistih števil

$$\bar{x} = \frac{x}{L},\quad \bar{y} = \frac{y}{L},\quad \bar{f} = \frac{f}{L}$$

kjer pomeni L neko določeno dolžino (n. pr. premer membrane), preide enačba (9) v

(9′) ... $$\Delta \bar{f} + Z = 0$$

kjer je tudi količina

(9″) ... $$Z = \frac{L p}{T}$$

čisto število.

Če pišemo sedaj v enačbi (9′) za $\bar{f} = f/L$ radi enostavnosti kar znova zopet f, jo v smislu gornjih izvajanj nadomestimo z diferenčnimi enačbami

$$\sum_N (f) - N \cdot f_0 + \frac{a^2}{4} \cdot N \cdot Z_0 = 0 \quad \text{za } N = 3 \text{ in } 4$$

(10) ... oziroma

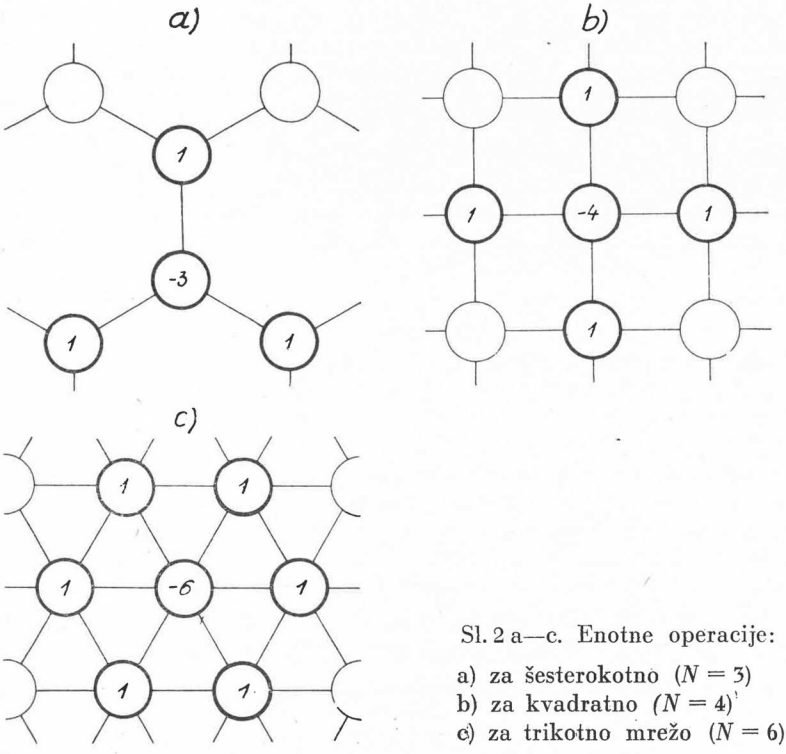
$$\sum_N (f) - 6 \cdot f_0 + 6 \cdot \frac{a^2}{4} \left[Z_0 + \frac{a^4}{64} (\Delta Z)_0 \right] = 0 \quad \text{za } N = 6$$

ki morajo biti izpolnjene v vseh točkah mreže znotraj območja, v katerem iščemo funkcijo f.

4. **Relaksacijsko obravnavanje diferenčnih enačb za prvi robni problem.** Diferenčne enačbe za funkcijske vrednosti [pri Poissonovi enačbi torej enega od sistemov enačb (10)] rešimo nato z relaksacijsko metodo. Pri tem moramo pripomniti, da ne nudi iskanje funkcijskih vrednosti z relaksacijo nobenih posebnih prednosti, če gre za tzv. problem začetnih vrednosti, ki se n. pr. navadno pojavlja pri diferencialnih enačbah 2. reda hiperboličnega tipa. Pri tej vrsti nalog je predpisana vrednost funkcije in njenega prvega odvoda na določenem odseku odprte črte (n. pr. vzdolž odseka abscisne osi) in je treba iz tega pogoja določiti funkcijo v odvisnosti od obeh neodvisnih spremenljivk. Pač pa se je relaksacijsko obravnavanje diferencialnih enačb zelo vpeljalo pri tzv. problemih robnih vrednosti, kjer predpišemo pri enačbah 2. reda vzdolž ene ali več sklenjenih črt, ki tvorijo rob območja, samó funkcijske vrednosti (prvi robni problem), ali samo vrednosti odvoda v smeri normale (drugi robni problem), ali pa kombinacijo funkcije in njenega odvoda (tretji ali mešani robni problem). Taki problemi se pojavijo n. pr. pri diferencialnih enačbah 2. reda eliptičnega tipa; pri njih se najlaže dajo približno določiti funkcijske vrednosti za vse točke v sredi območja z diferenčnimi enačbami oblike (10). Če se omejimo na prvi robni problem (potem so nam torej dane vrednosti funkcije po celem robu območja) in če vzamemo za razdaljo mrežnih točk a polovično dolžino ali širino območja (katera je pač manjša), potem nam dajo enačbe (10) že približne funkcijske vrednosti v eni ali več točk v sredini. S približnimi vrednostmi za točke sredi območja določimo nato približno tudi funkcijo v nadaljnjih točkah, če mrežno dolžino a skrajšamo. Z zmanjšanjem mrežne dolžine in s sprotnim popravljanjem funkcijskih vrednosti v mrežnih točkah se vedno bolj bližamo pravilnemu poteku funkcije. Računanje prekinemo, čim se nam po celem območju menjajo vrednosti funkcije tako malo, da smemo spremembe zanemariti. Kdaj smemo prekiniti nadaljnje računanje, je odvisno seveda od želene natančnosti; pri fizikalnih problemih pa je natančnost rezultatov navadno omejena že z natančnostjo naših meritev.

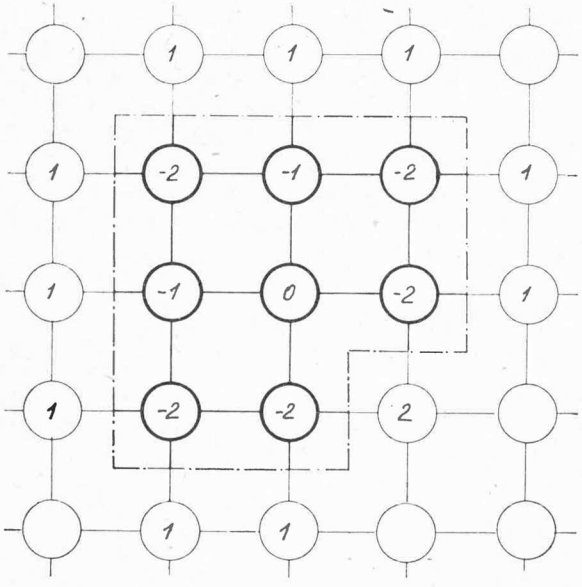
Glede relaksacijskega postopka pri reševanju algebraičnih enačb smo podali najvažnejša navodila že v prvem delu razprave. V primeru relaksacijskega obravnavanja Poissonove enačbe pa so ustrezne diferenčne enačbe tako preproste, da se da ves račun izvesti zelo pregledno. Kakor rečeno, nam enačbe tipa (10) služijo za izračunanje približne vrednosti f_0 v srednji točki, toda zaradi nenatančnih vrednosti funkcije f v okolišnih točkah [ki se pojavijo v izrazu $\sum_N (f)$] in zaradi velikih mrežnih dolžin a nastanejo v srednjih točkah napake. Pri prehodu k finejši mreži niso enačbe tipa (10) tam več za vse točke izpolnjene; namesto nič je leva stran enačbe (10) sedaj enaka neki količini r, ki jo hočemo imenovati ostanek (R. V. Southwell jo imenuje »residual«). Če si predstavljamo napisane enačbe (10) za vse točke mreže, vidimo takoj, kako vpliva sprememba funkcijske vrednosti v neki točki na ostanek v njej in v sosednjih točkah. Ker je sprememba vrednosti v diferenčni enačbi (10) za lastno točko pomnožena z $-N$, se pri spremembi funkcije za enoto spremeni ostanek na tistem mestu za -3, -4 in -6 pri šesterokotni, kvadratni oz. trikotni mreži; v enačbah za najbližje točke pride v poštev sprememba funkcije s faktorjem ena in ostanki se zato tudi spremenijo za enoto. Tabele »enotnih operacij« so torej za vse točke enake in se dajo v nazorni obliki podati tako, kakor kaže sl. 2.

Kakor pri splošnih linearnih algebraičnih enačbah spremenimo tudi tu pri navadni relaksacijski metodi vrednost funkcije samo v tisti točki, ki ima največji ostanek (posamična relaksacija). Nevarnosti, da ta postopek v primeru ostankov z enakim predznakom le počasi konvergira,



Sl. 2 a—c. Enotne operacije:
a) za šesterokotno ($N = 3$)
b) za kvadratno ($N = 4$)
c) za trikotno mrežo ($N = 6$)

se izognemo s hiperkompenzacijo, t. j. popravek v točki z največjim ostankom vzamemo po velikosti tako velik, da ni novi ostanek enak nič, temveč menja svoj predznak. Ostanke z istim predznakom odpravimo hitro tudi z relaksacijo v bloku, kjer korigiramo funkcijske vrednosti v več točkah nekega sklenjenega območja istočasno za enako količino. Kako je treba v tem primeru spremeniti ostanke, če se menjajo funkcijske vrednosti za enoto, se da lahko pregledati in je za primer kvadratne mreže navedeno v sl. 3. Korekturo pri relaksaciji v bloku dobimo na ta način, da delimo vsoto vseh ostankov znotraj določenega območja z vsoto vseh njegovih enotnih operacij. Poleg relaksacije v bloku so znane še druge vrste skupinskih relaksacij, ki pa se rabijo le redko in jih zato ne bomo upoštevali.



Sl. 3. Enotne operacije za relaksacijo v bloku.

Relaksacijo v bloku moremo učinkovito uporabiti, kadar izračunamo z velikimi mrežnimi razdaljami a samo nekaj funkcijskih vrednosti iz vrednosti na robu, medtem ko vrednosti v ostalih točkah goste mreže volimo poljubno. V takem primeru imajo navadno ostanki v vseh točkah nekega določenega območja isti predznak in z bločno relaksacijo dosežemo, da se prvič velikost ostankov znatno zmanjša, in drugič, da se njihovi predznaki spreminjajo od ene točke do druge. Tako spremenjeni ostanki se dajo nato s posamično relaksacijo hitro zmanjšati na neznatne vrednosti. Za izvežbanega računarja je ta pot navadno najhitrejša, medtem ko je za začetnika bolj priporočljivo prehajati postopoma k vedno gostejši mreži in pri vsakem koraku računati vse popravke in ostanke.

Da ne pride pri računanju do grobih napak, moramo dosledno za vsako točko mreže pisati začetne vrednosti funkcij in popravke na eni (navadno na levi), ostanke pa na drugi (desni) strani točke. Pri prehodu k finejši mreži je najbolje izračunati vse ostanke znova, ker se zaradi uporabe funkcijskih razlik (namesto funkcijskih vrednosti) računske napake ne izravnajo same po sebi. Preprost računski stroj za štiri osnovne operacije nam pri takem delu zelo koristi; v splošnem pa je relaksacijska metoda sredstvo za reveže, ker jo morejo za silo uporabljati tudi taki, ki imajo na razpolago samo svinčnik in papir.

5. **Drugi robni pogoji in ostale naloge.** Kadar imamo predpisan pri Poissonovi diferencialni enabi po celem robu odvod neznane funkcije f v smeri normale, ne moremo računati približnih vrednosti funkcije v no-

tranjih točkah na prejšnji način, ker funkcije same na robu ne poznamo. Matematično najbolj elegantna pot za rešitev tega problema je pač ona, ki nadomesti funkcijo f z vsoto $f = g + \Psi$, tako da funkcija g (x, y) zadošča Poissonovi diferencialni enačbi (9′), robnim pogojem pa ne. Tako funkcijo najdemo brez težav za vse praktično važne vrste funkcij Z; če je n. pr. $Z = Z_0 = \text{konst.}$, smemo vzeti

$$g(x, y) = Z_0 (x^2 + y^2)/2$$

Funkcija Ψ mora potem zaradi diferencialne enačbe (9′) zadoščati očitno Laplaceovi enačbi

(11) . . . $$\Delta \Psi = 0$$

in je torej harmonična funkcija; na robu pa ima ta funkcija predpisano vrednost odvoda v smeri normale, ker sledi iz

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{\partial g}{\partial n} + \frac{\partial \Psi}{\partial n}$$

seveda

(11′) . . . $$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial n} - \frac{\partial g}{\partial n}$$

in sta nam oba člena na desni znana.

Kakor znano, eksistira potem k Ψ konjugirana harmonična funkcija φ, ki je zaradi znanih Cauchy-Riemannovih enačb

(12) . . . $$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

do konstante natančno določena s funkcijo Ψ. Na robu območja pa je zaradi razširjene prve Cauchy-Riemannove diferencialne enačbe

(12′) . . . $$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\partial \Psi}{\partial n}$$

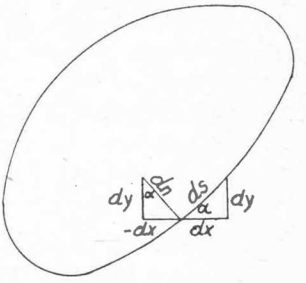
(ta sledi zelo preprosto iz slike 3a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds} =$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \sin \alpha =$$

$$= \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cdot \cos \alpha - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot \sin \alpha =$$

$$= \frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{dy}{dn} + \frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{dx}{dn} = \frac{\partial \Psi}{\partial n}\Big)$$



Sl. 3a. Zveza med odvodi konjugiranih funkcij.

z robnim pogojem (11′) predpisan odvod funkcije φ v smeri robnega loka; če torej fiksiramo v poljubni točki roba vrednost funkcije φ na φ_0, jo določimo za ves obod z integracijo izraza $\frac{\partial \varphi}{\partial s}\, ds$ in vrednosti v notranjosti se dajo računati na prej opisani način.

Čim imamo določene vrednosti funkcije φ po celem območju, nam Cauchy-Riemannovi enačbi (12) omogočata tudi določiti približne vrednosti funkcije Ψ. V ta namen si izberemo vrednost funkcije Ψ v eni točki mreže poljubno (pri drugem robnem problemu je funkcija Ψ določena samo do poljubne aditivne konstante), nadomestimo enačbe (12) za vse točke mreže z ustreznimi diferenčnimi enačbami in določimo iz njih vrednosti funkcije Ψ po celem območju.

Pri računanju funkcije Ψ iz vrednosti za konjugirano funkcijo φ se pojavi zaradi približnega računanja značilna težava: če gremo od točke, kjer smo vrednost funkcije Ψ izbrali, po dveh različnih poteh v neko drugo točko, bomo dobili za Ψ v novi točki dve različni vrednosti. Zato moramo seveda vzeti za funkcijsko vrednost v ostalih točkah povprečje vrednosti, ki smo jih dobili po dveh približno enakopravnih najbližjih poteh; po potrebi pa moremo tudi vzeti prve vrednosti v okolici točke z dano vrednostjo funkcije Ψ samo kot približke in jih popraviti v skladu z enačbo (10). Ko opravimo to nalogo za vso okolico prve točke, gremo postopoma naprej. Kot končno kontrolo imamo še možnost, določiti na robu odvod izračunane funkcije v smeri notranje normale in ga primerjati s predpisanimi vrednostmi.

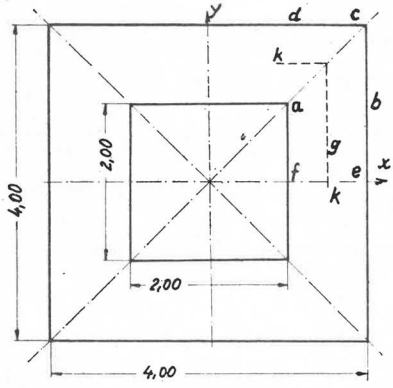
Z uvedbo konjugirane funkcije se da obravnavati tudi poseben primer tretjega robnega pogoja, da so namreč na enem delu oboda predpisane vrednosti funkcije, na drugem delu pa vrednosti normalnega odvoda. Z relaksacijsko metodo moremo nadalje obravnavati problem refrakcije, kjer je na črti pri prehodu iz enega območja v drugo dana linearna relacija med normalnima odvodoma na eni in drugi strani črte (magnetna polja, pretakanja vode skozi porozne plasti itd.). Dalje se da na ta način obravnavati konformno preslikavanje zunanjosti ali notranjosti enkrat sklenjene krivulje (n. pr. krilnega profila, raznih nosilcev in pod.) na zunanjost ali notranjščino kroga. Tudi problemi, kjer oblika roba ni neposredno podana (iztok tekočin), se dajo brez posebnih težav rešiti z relaksacijsko metodo. Dalje so obravnavali R. V. Southwell in njegovi sodelavci tudi že integracijo bolj splošnih enačb eliptičnega ali eliptičnim podobnega tipa, kakor n. pr. biharmonično diferencialno enačbo, dalje probleme lastnih vrednosti in lastnih funkcij za diferencialne enačbe z eno in dvema neodvisnima spremenljivkama in v najnovejšem času so se lotili tudi enačb paraboličnega tipa (slovstvo 6).

Za zaključek naj omenimo, da se da drugi robni problem pri Poissonovi enačbi rešiti z veliko natančnostjo neposredno; zaradi pomanjkanja prostora pa se ne moremo zadržati pri tem vprašanju, ki je dokaj obširno opisano v drugi knjigi R. V. Southwella (slovstvo 2).

6. **Zgled.** Kot zgled hočemo obravnavati nalogo, ki je drugim metodam skoraj nedostopna, medtem ko se da z relaksacijsko metodo razmeroma hitro rešiti. Seveda moramo pri tem dostaviti, da je oblika območja posebno pripravna za relaksacijo in da bi pri drugih oblikah ne prišli tako hitro do cilja. Gre za numerično določitev kapacitivnosti na enoto dolžine za kondenzator, ki ga sestavljata dve dolgi koncentrični prizmi kvadratnega preseka s stranicama 2 in 4. Kakor znano, gre pri tem za določitev potenciala v območju med obema oblogama, če damo n. pr. notranji oblogi potencial 1, zunanji pa nič. Naloga je vzeta iz znanega dela: H. Jeffreys-B. S. Jeffreys: Methods of Mathematical Physics, Cam-

bridge 1946, str. 281, kjer jo obravnavajo tudi na podoben način z relaksacijsko metodo.

Ker ima kondenzator v preseku 4 simetrale, zadošča, da poiščemo vrednosti potenciala samo v osminki celega preseka. Mrežo točk bomo vzeli kvadratno po sliki 4. V prvi enačbi (10) je $Z_0 = 0$. Vrednost poten-



Sl. 4. Porazdelitev potenciala v kondenzatorju.

ciala φ_0 v srednji točki dobimo zato iz vrednosti v štirih najbližnjih točkah preprosto z enačbo (označbe po sliki 2)

$$(13)\ldots \quad \varphi_0 = \frac{1}{4}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4)$$

Prve približne vrednosti izračunamo v točkah, ki so označene s črnimi krožci, in jih vpišemo na levi strani točke. Prvi približek za potencial v najvišji točki dobimo n. pr. kot četrtino vsote potencialov v točkah *a*, *b*, *c* in *d*, prvi približek v naslednji nižji točki kot četrtino vsote potencialov v točkah *a*, *b*, *e* in *f* itd. Nato izračunamo vrednost potenciala v točki, ki je označena s krogom; v simetrično ležečih točkah pa pripišemo seveda vedno takoj enake vrednosti. Ko popravimo najprej še vrednost potenciala v točki *g*, preidemo na finejšo mrežo s tem, da določimo vrednosti funkcije φ v vmesnih točkah iz vrednosti sosednih točk, ki leže zopet diagonalno. S tem smo dobili približne vrednosti na mreži, ki je še enkrat redkejša, kakor je potrebno, če želimo imeti rezultat, določen na dve decimalki natančno. Z vrednostmi potenciala v novih točkah se seveda v prejšnjih

točkah zopet pojavijo ostanki, ki pa dosežejo znatne vrednosti samo v okolici diagonalne simetrale profila. Tu relaksiramo vrednosti s tem, da delimo največji ostanek s 4, pripišemo rezultat kot korekturo na levi strani točke, odštejemo od prejšnjega ostanka s 4 pomnoženo korekturo in vpišemo rezultat na desno stran točke kot nov ostanek; na koncu moramo v vseh diagonalno najbližjih točkah prišteti korekturo k staremu ostanku, da dobimo pravilni novi ostanek. V nekaj potezah so vse korekture izvedene, da ne ostane nikjer ostanek, ki bi bil po vrednosti večji od 0,03. Končne funkcijske vrednosti v posameznih točkah dobimo s seštevanjem prvotne vrednosti iz vseh korektur. V sliki 4b so podčrtane. Kontrola nam da končno za ostanke v posameznih točkah podčrtane vrednosti.

Ko smo tako dovolj natančno določili funkcijske vrednosti v grobi mreži, preidemo h končni, še enkrat bolj gosti razporeditvi točk. Zato izračunamo iz danih vrednosti funkcije še funkcijo v vseh ostalih prostih točkah goste mreže in popravljamo nato funkcijske vrednosti na podoben način kakor prej, samo da ležijo sedaj najbližje točke na premicah, ki so vzporedne stranicam kvadrata, ne pa na diagonalah. Izkaže se, da so skoraj povsod korekture proti prejšnji mreži zelo majhne in da je zato nova mreža dovolj gosta, če želimo imeti rezultat le na dve decimalki natančno. Podrobno opisovanje zelo lahkih računov ni več potrebno in zato navedemo v sliki 4b v oklepajih samo še dokončne funkcijske vrednosti v vseh točkah.

S temi računi smo določili porazdelitev potenciala v območju med obema kvadratoma. Da določimo kapaciteto kondenzatorja, moramo na prizmatični kontrolni ploskvi k, ki teče v sredi med obema oblogama, določiti normalno komponento jakosti električnega polja. Na vertikalnem delu kontrolne ploskve, ki predstavlja osminko celega oboda, gre torej za odvod potenciala po x, katerega določimo po prvi enačbi (3). Za točko $y = 0$ je prva diferenca $\delta f_0 = 0{,}25$, vse višje diference pa so nič; toda tudi za ostale točke so tretje diference v splošnem zelo majhne. Za osrednje diference potenciala φ dobimo na znani način (glej že navedeno knjigo Whittaker-Robinsona) v naslednji razpredelnici podane vrednosti. Odvod sledi potem iz prve enačbe (3), če vzamemo $a = 0{,}25$.

Osrednje diference potenciala φ na premici $x = 1{,}5$

y	δ	δ^3	$E = \partial\varphi/\partial x$	δE	$\delta^2 E$
0	—0,25	0	—1		
				0	
0,25	—0,25	0	—1		0,02
				+0,02	
0,50	—0,245	—0,01	—0,98		—0,02
				0	
0,75	—0,245	—0,01	—0,98		+0,09
				+0,09	
1,00	—0,23	—0,04	—0,89		+0,14
				+0,23	
1,25	—0,165	0	—0,66		+0,01
				+0,24	
1,50	—0,105	0	—0,42		

Iz jakosti normalne komponente električnega polja E sledi gostota dielektričnega premika

$$D = \varepsilon_0 \cdot E$$

kjer pomeni ε_0 influenčno konstanto, ki je

$$\varepsilon_0 = 1/4\,\pi$$

če vzamemo za enoto dolžine cm in elektrostatične enote za vse električne količine. Množina elektrenine, ki se pri premiku pojavi na celi ploskvi, je

$$Q = \int D \cdot dS$$

če pomeni dS element površine ploskve k. Pri omejitvi na en centimeter dolg odsek kondenzatorja dobimo

$$Q = \varepsilon_0 \int E \cdot ds$$

kjer pomeni ds element dolžine kontrolne črte k. Za naš primer izračunamo po Simpsonovem pravilu integral čez osmi del kontrolne ploskve. Za množino elektrenine najdemo vrednost

$$Q = -\varepsilon_0 \cdot 8 \cdot \frac{0{,}25}{3}\,(1 + 4\cdot 1 + 2\cdot 0{,}98 + 4\cdot 0{,}98 + 2\cdot 0{,}89 + 4\cdot 0{,}66 + 0{,}42)$$

ali

$$Q = -\varepsilon_0 \cdot \frac{2}{3} \cdot 15{,}52 = -10{,}34 \cdot \varepsilon_0 = -0{,}825 \text{ cgs enot.}$$

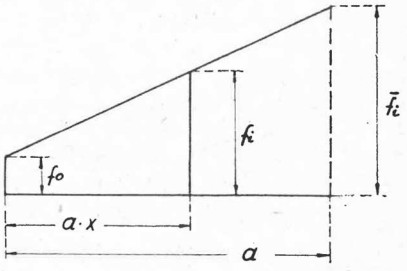
Ker vlada med obema oblogama kondenzatorja napetost enote cgs sistema, ki ima v našem področju negativno smer osi x, sledi iz znane enačbe za kapacitivnost $C = Q/\Delta\varphi$, da je kapacitivnost 1 cm dolgega odseka kondenzatorja, ki ga sestavljata dve koncentrični kvadratni prizmi z robovoma 2 in 4 cm, dana z naslednjo enačbo

$$C = 10{,}34 \cdot \varepsilon_0 = 0{,}825 \text{ cm} = 0{,}917 \cdot 10^{-6}\ \mu\text{F}$$

Za primerjavo naj navedemo, da je kapacitivnost dveh koncentričnih valjev z radijema enega in dveh cm

$$C' = \frac{2}{1} \log 2 = 0{,}721 \text{ cm} = 0{,}801 \cdot 10^{-6}\ \mu\text{F}$$

V obravnavanem primeru so bile razmere za hitro določanje porazdelitve potenciala posebno ugodne, ker so vse zunanje točke mreže padle na rob območja. Če točke ne padejo točno na rob, se diferenčne enačbe na takih mestih nekoliko zamotajo. Mrežne razdalje posameznih točk znotraj območja do točk na obodu niso potem več enake a, temveč so $x \cdot a$, kjer pomeni x pravi ulomek. Potem sledi iz preprostih predstav o premočrtnem naraščanju neznane funkcije med posameznimi točkami mreže (ki je pri dovolj majhni razdalji a brez dvoma zadosti natančno izpolnjeno),



Sl. 5. K ekstrapolaciji na robu.

da moramo n. pr. enačbo (4′) za točke blizu roba nadomestiti z

$$(14)\ldots \qquad (\Delta f)_0 = \frac{4}{a^2 N}\left[\sum_N \left(\frac{f}{x}\right) - f_0 \sum \left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

Iz slike 5 dobimo namreč za razliko $f_i - f_0$, ki se pojavi v izrazu na desni strani enačbe (4′) skupaj z analognimi izrazi v ostalih smereh mreže

$$\frac{f_i - f_0}{\overline{f_i} - f_0} = \frac{xa}{a} = x$$

in

$$\overline{f_i} - f_0 = \frac{f_i - f_0}{x} = \frac{f_i}{x} - \frac{f_0}{x}$$

Iz tega pa neposredno sledi, da smemo izraz na desni strani enačbe (4′) res nadomestiti z izrazom na desni strani enačbe (14).

V ostalem ostanejo seveda vsi računi nespremenjeni in upoštevanje tudi razmeroma zelo nepravilnih mej polja ne predstavlja zato posebnih težav.

Literatura:

Predvsem pridejo tu v poštev že v prvem delu razprave navedene knjige:

1. R. V. Southwell: *Relaxation Methods in Engineering Science.* Oxford 1940. (Knjigo ima Fizikalni inštitut v Ljubljani.)

2. R. V. Southwell: *Relaxation Methods in Theoretical Physics.* Oxford 1946. (Fizikalni inštitut v Ljubljani.)

3. *Comité National de la recherche scientifique, Colloques internationaux 14: Méthodes de calcul dans la mécanique.* Paris 1948. (Francoski oddelek Nar. in univerzitetne knjižnice v Ljubljani.)

4. Številni članki R. V. Southwella in njegovih sodelavcev (Allen, Bradfield, Cristopherson, Fox, Pellew, Vaisey itd.) v: *Proceedings of the Roy. Society,* Ser. A in v: *Philosophical Transactions of the Roy. Society,* Ser. A, od leta 1937 dalje. (Deloma v Fizik. inštitutu v Ljubljani.)

Novejši članki:

5. D. N. de G. Allen, S. C. R. Dennis: *The Application of Relaxation Methods to the Solution of Differential Equations in three Dimensions I.* Quart. Journal of Mech. and Appl. Mathematics. Oxford IV/2, junija 1951, str. 199—208. (Inštitut za mehaniko na TVŠ.)

6. D. N. de G. Allen, R. T. Severn: *The Application of Relaxation Methods to the Solution of Nonelliptic Partial Differential Equations I:* The Heat-conduction Equation. Quart. Journ. of Mech. and Appl. Math. (Oxford) IV/2, junija 1951, str. 209-222.

7. L. Fox: *Some Improvements in the Use of Relaxation Methods for the Solution of Ordinary and Partial Differential Equations.* Proc. of the Royal Soc. A, 190/1020, 17. VI. 1947, str. 31—59. (Inštitut za upor. matematiko na TVŠ.)

8. Prvi del te razprave je izšel v »Obzorniku za matematiko in fiziko« I/4, str. 121—132.

Pregledno delo o numeričnem računanju je

9. E. Whittaker-G. Robinson: *The Calculus of Observations.* Srbski prevod pod naslovom »Tečaj numeričke matematike« izdelala Vojna Radojčić. Beograd 1951.

O PRAŠTEVILIH

I. Vidav

Praštevilo imenujemo tako naravno število, ki je deljivo le z 1 in s samim seboj. Vsako drugo naravno število se da razcepiti v produkt samih praštevil. Če se ne oziramo na vrstni red faktorjev, je mogoča ena sama razcepitev. Seveda pa lahko v taki razcepitvi nastopa kako praštevilo večkrat kot faktor.

Najmanjša praštevila so tale: 2, 3, 5, 7, 11, 13, . . . Tu se nam takoj vsiljuje vprašanje, ali je praštevil le končno mnogo ali pa jih je neskončno. Samo iz dejstva, da je naravnih števil neskončno mnogo, namreč ne moremo še sklepati isto za praštevila, ker lahko iz končnega števila praštevil dobimo v obliki produktov neskočno mnogo naravnih števil, če dopuščamo, da isto praštevilo nastopa tudi večkrat kot faktor. Na gornje vprašanje je odgovoril že Evklid v starem veku, in sicer v temle smislu:

Praštevil je neskončno mnogo.

To je dokazal v bistvu takole: Če bi bilo le končno mnogo praštevil $p_1, p_2, \ldots p_n$, bi bilo vsako drugo naravno število deljivo z enim izmed njih. To pa ni res. Kar vzemimo število $N = p_1 p_2 \ldots p_n + 1$, ki ga dobimo tako, da zmnožimo vsa gornja praštevila in produktu prištejemo 1! To število ni deljivo z nobenim izmed zgoraj navedenih praštevil, ker da pri delitvi vsakokrat ostanek 1. Torej je število N bodisi samo praštevilo, bodisi je deljivo s praštevilom, ki ga zgoraj ni. Od tod sklepamo, da je praštevil res neskončno mnogo. S podobnim dokazovanjem lahko spoznamo, da leži med n in $n! + 1$ vsaj eno praštevilo za vsak n.

Prav zanimiv dokaz za gornjo trditev pa je dal L. Euler in sicer takole: Harmonična vrsta

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \tag{1}$$

ki ima za člene recipročna naravna števila, je divergentna. Njene zaporedne delne vsote rasejo preko vsake meje. Vzemimo sedaj kako praštevilo p. Potem je

$$\frac{1}{1 - p^{-1}} = 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \ldots \tag{2}$$

saj je na desni konvergentna geometrična vrsta s kvocientom $1/p$. Postavimo se zopet na stališče, da bi bilo le končno mnogo praštevil p. Za vsako praštevilo tvorimo vrsto (2) in nato vse dobljene vrste zmnožimo. Produkt teh vrst ima neko končno vrednost, namreč

$$\prod \frac{1}{1 - p^{-1}} \tag{3}$$

kjer pomeni znak $\prod$, da moramo vstaviti v izraz $1/(1 - p^{-1})$ za p po vrsti vsa praštevila in nato dobljene vrednosti zmnožiti. Opravka imamo s konvergentnimi vrstami s samo pozitivnimi členi. Take vrste smemo množiti kakor polinome: tvorimo namreč vsoto iz vseh mogočih produktov po enega člena iz vsake vrste (2). Vsak tak produkt ima števec 1, imenovalec pa ima obliko $p_1^{\alpha} p_2^{\beta} \ldots p_n^{\nu}$, kjer so eksponenti $\alpha, \beta, \ldots \nu$ naravna števila ali nič. Če bi bila $p_1, p_2, \ldots p_n$ vsa praštevila, bi dobili tako v imenovalcu vsako naravno število in to samo enkrat. Ker smemo vrstni red

členov v absolutno konvergentni vrsti zamenjati, vidimo tedaj, da je produkt vrst (2) ravno harmonična vrsta (1), ki je divergentna. To pa je protislovje, ker ima gotovo produkt (3) končno vrednost, če je samo končno mnogo faktorjev. Zato je res neskončno mnogo praštevil.

Iz Eulerjevega dokaza pa lahko sklepamo še na nekaj več, namreč na to, da je vrsta

$$\sum \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots \tag{4}$$

ki ima za člene recipročna praštevila, divergentna. Kajti zgoraj smo spoznali, da je produkt (3), če se razteza na vsa praštevila, divergenten, kar pa je le tedaj, če je tudi vrsta (4) divergentna.

* * *

Zaznamujmo s $\pi(x)$ število praštevil do x. $\pi(x)$ imamo lahko za funkcijo, ki je definirana za vsak $x > 0$. Vrednosti, ki jih zavzame, so le cela števila. Nadalje je ta funkcija konstantna, če se x giblje med dvema praštevilomi. Ker je do sto 25 praštevil, do tisoč pa jih je 168, imamo $\pi(100) = 25$, $\pi(1000) = 168$. Zgoraj smo spoznali, da je praštevil neskončno. Zato je $\pi(x) \to \infty$ za $x \to \infty$.

Funkcija $\pi(x)$ poteka zelo nepravilno, ker so pač praštevila zelo nepravilno posejana. Zato ni pričakovati, da bi našli kako tako funkcijo $f(x)$, ki bi vsebovala samo elementarne funkcije, povezane z navadnimi računskimi operacijami v le končni množini in ki bi se za vsak celi x ujemala s $\pi(x)$. Pač pa so skušali matematiki najti kako tako funkcijo $f(x)$, ki bi imela pri velikem x približno isto vrednost kakor $\pi(x)$. Želeno lastnost funkcije $f(x)$ moramo nekoliko pojasniti: $\pi(x)$ rase hkrati z x preko vsake meje. Zato ne smemo pričakovati, da bi razlika $\pi(x) - f(x)$ postala zelo majhna pri velikem x, temveč le, da sta $\pi(x)$ in $f(x)$ asimptotično enaki, torej da gre kvocient $\pi(x)/f(x) \to 1$ za $x \to \infty$. Veliki matematik Gauss je že kot deček prišel na domnevo, da je $f(x) = x/\log x$ taka funkcija. Podoben izraz je dobil tudi Legendre. Nobeden izmed njiju pa ni mogel te domneve dokazati, namreč, da je res

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} = 1 \tag{5}$$

Dolgo časa so si razni matematiki zaman belili glave s tem problemom. Lastnost praštevil, ki jo izraža limita (5), leži namreč zelo globoko. Šele l. 1896, skoraj sto let pozneje, se je posrečilo dokazati enačbo (5), in sicer istočasno, dvema matematikoma: J. Hadamardu in de la Vallée Poussinu, toda s sredstvi iz analitične teorije števil, ki se nikakor ne morejo šteti za elementarna.

Prvi korak naprej od same domneve pa je napravil že mnogo prej ruski matematik Čebišev. Dokazal je namreč l. 1852 z elementarnimi pripomočki, ne sicer tega, da eksistira limita (5), temveč da ima $\pi(x)$ isti red velikosti kakor funkcija $x/\log x$, da je torej za vsak x (ali vsaj za vsak zadosti velik x)

$$\alpha \frac{x}{\log x} < \pi(x) < \beta \frac{x}{\log x} \tag{6}$$

kjer sta α in β dve pozitivni konstanti in je seveda $\alpha < \beta$. Dokazal je tudi, da ima kvocient $[\pi(x) \log x]/x$ limito 1, če sploh konvergira.

Oglejmo si sedaj pot, po kateri je našel Čebišev oceno (6) za $\pi(x)$. Vzemimo binomski koeficient $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\,n!}$. (Vsi binomski koeficienti, tedaj tudi le-ta, so cela števila. Za gornjega pa bo to dejstvo tudi iz nadaljnjega dokaza razvidno.) Ta koeficient lahko pišemo v obliki

$$\binom{2n}{n} = \frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{1\cdot 2\cdot \ldots n} = \prod_{p<2n} p^r \tag{7}$$

Produkt na desni se nanaša na vsa praštevila $p < 2n$. Eksponent r ni nikdar negativen, torej $r \geqq 0$. Zato je koeficient celo število. Spoznali pa bomo še, da je zmerom $p^r \leqq 2n$.

Dokaz. Števec in imenovalec v ulomku (7) imata enako mnogo faktorjev, ki so zaporedna naravna števila. Vprašajmo se sedaj, koliko faktorjev v števcu in koliko v imenovalcu je deljivih s poljubnim številom m. Odgovor je lahek: Ker je v imenovalcu šele m-to število deljivo z m, v števcu pa je tako število lahko že prej, imata števec in imenovalec ali enako mnogo faktorjev deljivih z m ali pa je v števcu eden več. To dejstvo uporabimo sedaj za kako praštevilo $p < 2n$. Paroma krajšajmo s p faktorje v števcu in imenovalcu, ki so deljivi s p, n. pr. prvega v števcu in prvega v imenovalcu, nato drugega v števcu in drugega v imenovalcu itd. V števcu lahko ostane še eno število deljivo s p, ki nima para v imenovalcu. Tudi iz tega izpostavimo faktor p. Po tem krajšanju so lahko v števcu in imenovalcu še faktorji, ki so deljivi s p, namreč vsi tisti, ki so bili prvotno deljivi s p^2. Sedaj ponovimo isti korak kakor prej, da namreč paroma krajšamo s p. Pri tem nam lahko ostane v števcu še en faktor p. To nadaljujemo, dokler gre. Koliko korakov je za to potrebnih? Toliko, kolikor je potenc praštevila p, ki ne presegajo $2n$. Pri vsakem koraku nam preostane v števcu kvečjemu en faktor p, skupaj r faktorjev: tako je res $p^r \leqq 2n$. S tem je dokazana enačba (7).

V produktu na desni strani te enačbe je vseh faktorjev p^r kvečjemu $\pi(2n)$ in nobeden ni večji od $2n$. Zato je gotovo

$$(2n)^{\pi(2n)} > \frac{1+n}{1}\cdot\frac{2+n}{2}\cdots\frac{2n}{n} > 2^n$$

Od tod dobimo z logaritmiranjem

$$\pi = (2n)\log 2n > n\log 2$$

Postavimo $2n = x$, potem je

$$\pi(x) > \frac{\log 2}{2}\cdot\frac{x}{\log x}$$

Tako smo našli levo stran ocene (6) z $\alpha = \frac{1}{2}\log 2$.*

Iz (7) pa lahko dobimo tudi drugi del ocene. Kajti za vsa praštevila p, ki leže med n in $2n$, je na desni $r = 1$. Takih praštevil je ravno $\pi(2n) - \pi(n)$. Zato je, če uporabimo binomsko formulo,

$$n^{\pi(2n)-\pi(n)} < \binom{2n}{n} < \sum_{\nu=0}^{\nu=2n}\binom{2n}{\nu} = (1+1)^{2n} = 2^{2n}$$

* Dokazali smo pravzaprav, da velja ta ocena le, če je x sodo število. Kljub temu pa je popolnoma splošna, saj so vse ocene v dokazovanju zelo grobe.

Od tod imamo

$$\pi(2n) - \pi(n) < \frac{2n \log 2}{\log n}$$

Torej je

$$\pi(2n) \log 2n - \pi(n) \log n < \pi(2n) \log 2 + 2n \log 2 < 4n \log 2$$

če uporabimo elementarno oceno $\pi(2n) < 2n$. Postavimo v to neenačbo po vrsti $n = 2^{m-1}$, $= 2^{m-2}$, $= \ldots$, $= 1$ in vse tako dobljene neenačbe zapišimo drugo pod drugo. Tako dobimo

$$\pi(2^m) \log 2^m - \pi(2^{m-1}) \log 2^{m-1} < 2 \cdot 2^m \log 2$$

$$\pi(2^{m-1}) \log 2^{m-1} - \pi(2^{m-2}) \log 2^{m-2} < 2 \cdot 2^{m-1} \log 2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\pi(2) \log 2 - \pi(1) \log 1 < 2 \cdot 2 \log 2$$

Če vse leve strani seštejemo in upoštevamo, da je $\log 1 = 0$, dobimo

$$\pi(2^m) \log 2^m < 4 \cdot 2^m \log 2$$

in od tod $\pi(x) < 4 \log 2 \cdot (x/\log x)$, če ima x obliko 2^m. Za vsak drug x pa lahko določimo tako celo število m, da je $2^{m-1} < x < 2^m$. Potem je

$$\pi(x) \leqq \pi(2^m) < 4 \log 2 \frac{2^m}{\log 2^m} < 4 \log 2 \frac{2x}{\log x} = 8 \log 2 \frac{x}{\log x}$$

To je drugi del ocene (6) z $\beta = 8 \log 2$.

Čebišev je še precej zožil meji, med katerima leži kvocient $[\pi(x) \log x]/x$ pri dovolj velikem x. Dokazal je tudi, da spodnja meja α ni večja od 1, zgornja β pa ne manjša od 1. Ti stavki so mu omogočili potrditi veljavnost *Bertrandovega lema*, ki pravi, da leži med x in $2x - 2$ za vsak x vsaj eno praštevilo, če je $x > 3$. Te dve meji, med katerima gotovo najdemo praštevilo, sta mnogo ožji kakor tisti, ki smo ju dobili pri Evklidovem dokazu za neomejenost števila praštevil (namreč n in $n! + 1$).

Vendar pa se niti Čebiševu niti drugim, ki so uporabljali ista elementarna sredstva, ni posrečilo dokazati eksistenco limite (5). Izrek o praštevilih sta dokazala Hadamard in de la Vallée Poussin s pomočjo funkcije $\zeta(s)$ in to šele tedaj, ko sta zadosti raziskala njene lastnosti in ugotovila zvezo s tem problemom. Oglejmo si sedaj, kaj je ta funkcija in kakšne so njene lastnosti.

Funkcija $\zeta(s)$ je definirana z vrsto

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots \qquad (8)$$

Njene najvažnejše lastnosti je odkril (pa ne tudi vselej dokazal) matematik B. Riemann (1826—1866) in se zato po njem imenuje. Vrsta, ki definira $\zeta(s)$, je konvergentna za $s > 1$, kar je prav lahko dokazati z elementarnimi kriteriji. Argument s pa sme biti tudi kompleksno število: $s = \sigma + it$ in je vrsta absolutno konvergentna, če je le realna komponenta $\sigma > 1$. Zato je $\zeta(s)$, ker so posamezni členi v vrsti analitične funkcije, regularna analitična funkcija na desni polovici ravnine s, ki jo meji premica $\sigma = 1$. Že

Euler je ugotovil, in sicer po isti poti kakor smo zgoraj dokazali zvezo med vrsto (1) in produktom (3), da lahko zapišemo funkcijo $\zeta(s)$ v obliki neskončnega produkta

$$\zeta(s) = \prod \frac{1}{1 - p^{-s}}, \qquad s = \sigma + it \tag{9}$$

Produkt se razteza na vsa praštevila $p = 2, 3, 5, 7, \ldots$ Konvergenten je prav tako kakor vrsta (8), za $\sigma > 1$. Iz te izražave se vidi pomen funkcije $\zeta(s)$ za teorijo praštevil. Pa še nekaj nam pove enačba (9). Noben faktor v produktu na desni ni enak nič, zato je tudi produkt sam $\neq 0$. Vidimo tedaj, da funkcija $\zeta(s)$ nima ničel na tisti polovici ravnine, kjer je $\sigma > 1$.

Riemannu se je posrečilo izraziti vrsto (8) z integralom, ki ima pomen za vsak s, razen za $s = 1$. Od tod je spoznal, da se da $\zeta(s)$ analitično nadaljevati na levo stran premice $\sigma = 1$ in sicer je $\zeta(s)$ enolična regularna analitična funkcija na vsej ravnini kompleksnih števil s z edino izjemo točke $s = 1$, kjer ima pol prve stopnje in gre $(s - 1)\,\zeta(s) \to 1$ za $s \to 1$. Nadaljnje pomembno Riemannovo odkritje je tako imenovana funkcionalna enačba za $\zeta(s)$, ki se glasi:

$$\zeta(1 - s) = \frac{2}{(2\pi)^s} \cos \frac{\pi s}{2}\, \Gamma(s)\, \zeta(s) \tag{10}$$

$\Gamma(s)$ je znana Eulerjeva funkcija gama. Ta zveza omogoča izračunati vrednost za $\zeta(1 - s)$, če poznamo $\zeta(s)$. Funkciji $\zeta(s)$ in $\Gamma(s)$ nimata nobene ničle za $\sigma = 1$. Torej velja isto za $\zeta(1 - s)$, če ni s liho število $s = 2n + 1$, ker je v tem primeru faktor kosinus na desni enak nič. Zato je $\zeta(-2n) = 0$ za vsako naravno število n in $s = -2, -4, -6, \ldots$ so ničle funkcije $\zeta(s)$, tako imenovane *trivialne ničle*. Če te izvzamemo, je $\zeta(s) \neq 0$ za $\sigma > 1$ in $\sigma < 0$. Torej leže *netrivialne ničle* funkcije $\zeta(s)$, če jih je kaj, vse v pasu $0 \leqq \sigma \leqq 1$. Riemann je postavil domnevo, ki pa je ni mogel dokazati, da imajo namreč vse netrivialne ničle realno komponento $\sigma = \frac{1}{2}$, da torej leže vse na premici $\sigma = \frac{1}{2}$. Ta domneva se še vedno trdovratno upira vsem naporom raznih matematikov, da bi jo bodisi potrdili bodisi ovrgli. Vendar pa je bil tudi v tej smeri dosežen določen napredek. Najprej sta H. Bohr in E. Landau dognala, da leže skoraj vse ničle ali na tej premici sami ali pa v njeni neposredni bližini. Natančnejšega pomena tega izreka tu ne bom pojasnjeval. Nekoliko pozneje je G. H. Hardy dokazal, da ima $\zeta(s)$ res neskončno mnogo ničel z realno komponento $\sigma = \frac{1}{2}$. Šele pred nekaj leti pa je A. Selberg dokazal, da ima število ničel $s = \frac{1}{2} + it$ na premici $\sigma = \frac{1}{2}$ z ordinato t, ki je absolutno manjša od T, pri velikem T isti red velikosti kakor število vseh netrivialnih ničel z ordinato pod T. Vsa znamenja torej kažejo, da Riemannova domneva res drži.

Riemann je postavil še druge domneve o lastnostih funkcije $\zeta(s)$, ki pa so jih pozneje matematiki vse dokazali.

Povrnimo se zopet na izrek o praštevilih, namreč na enačbo (5). Prvi dokazi tega izreka, ki sta jih našla J. Hadamard in de la Vallée Poussin, so zahtevali poznanje zelo mnogih in globokih lastnosti funkcije $\zeta(s)$. Pozneje se je posrečilo dokaze precej poenostaviti. Toda kljub temu do sedaj ni znan noben tako preprost dokaz, da bi ga lahko prinesel v takem kratkem članku. V bistvu potrebujemo za izrek o praštevilih le eno lastnost funkcije $\zeta(s)$, da je namreč $\zeta(1 + it) \neq 0$ za vsak t, da torej $\zeta(s)$ nima ničel na premici $\sigma = 1$. Od tod je mogoče sklepati, da je izrek o praštevilih v nekem smislu ekvivalenten s to lastnostjo funkcije $\zeta(s)$.

V kakšni zvezi s problemom praštevil pa je Riemannova domneva o ničlah funkcije $\zeta(s)$? To vprašanje je sedaj popolnoma razjasnjeno. Lega ničel funkcije $\zeta(s)$ je namreč v tesni zvezi z napako, ki jo napravimo pri aproksimaciji števila praštevil, toda ne z izrazom x/log x. Kajti že dolgo je znano dejstvo, da je boljši približek za $\pi(x)$ integral

$$\varphi(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u} \tag{11}$$

kakor pa funkcija x/log x. Ta integral je taka funkcija gornje meje, ki je za velik x asimptotično enaka izrazu x/log x, torej $[\varphi(x) \log x]/x \to 1$ za $x \to \infty$. Če smo torej dokazali izrek o praštevilih, smo tudi dokazali, da je $\pi(x)/\varphi(x) \to 1$ za $x \to \infty$ in narobe. Sedaj pa nastane vprašanje, kolikšno napako napravimo, če $\pi(x)$ nadomestimo s $\varphi(x)$. Zaznamujmo napako s $P(x)$, torej

$$P(x) = \pi(x) - \int_2^x \frac{du}{\log u} \tag{12}$$

Gre nam sedaj za to, da najdemo red velikosti za $P(x)$ pri velikem x. Popolnoma dognano, namreč brez privzetja Riemannove domneve, je doslej tole: Napaka $P(x)$ nima večjega reda velikosti, kakor ga izraža funkcija

$$x \exp[-\alpha (\log x)^c] \tag{13}$$

pri velikem x. Tu je α neka pozitivna konstanta, eksponent c pa poljuben, samo da je manjši od 0·6. To dejstvo zapišemo danes na kratko takole:

$$P(x) = O(x \exp[-\alpha(\log x)^c]) \tag{14}$$

in pomeni znak O na desni, da ostane kvocient med $P(x)$ in izrazom (13) absolutno omejen za vsak velik x. $P(x)$ ima seveda lahko manjši red velikosti. V tem primeru limitira ta kvocient proti nič za $x \to \infty$. Toliko o oceni navzgor. Našli pa so tudi spodnjo oceno: Napaka $P(x)$ ima gotovo večji red velikosti, kakor je x^α, za vsak eksponent $\alpha < \frac{1}{2}$. Natančneje povedano: Za vsak $\alpha < \frac{1}{2}$ lahko najdemo tak x, da je kvocient $P(x)/x^\alpha$ poljubno velik pozitiven, in tak x, da je poljubno velik negativen. Vse to je dokazano ne glede na to, ali Riemannova domneva drži ali ne. Če pa je ta domneva pravilna, potem velja ocena

$$P(x) = O(\sqrt{x} \log x) \tag{15}$$

kjer zopet O na desni pomeni, da ostane kvocient $P(x)/\sqrt{x} \log x$ absolutno omejen. Torej ima napaka kvečjemu red velikosti $\sqrt{x} \log x$. Pa tudi narobe velja: Če ima napaka ta red velikosti, potem je Riemannova domneva pravilna. Ako pa bi se posrečilo dokazati, da funkcija $\zeta(s)$ nima ničel z realno komponento večjo od β, kjer je $\frac{1}{2} < \beta < 1$, da je torej $\zeta(s) \neq 0$ za $\sigma > \beta$, potem bi bilo

$$P(x) = O(x^\alpha)$$

za vsak $\alpha > \beta$. V taki zvezi je torej lega netrivialnih ničel funkcije $\zeta(s)$ s problemom praštevil.

Sedaj si še oglejmo, kako praštevila naraščajo in kakšen je razmak med njimi. Zaznamujmo n-to praštevilo s p_n, torej $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$,

... Kolikšno ima približno velikost p_n? To izračunamo takole: Ker je $\pi(p_n) = n$, pove limita (5), če postavimo

$$\frac{n \log p_n}{p_n} = \alpha_n$$

da gre $\alpha_n \to 1$ za $n \to \infty$. Logaritmirajmo to enačbo in jo delimo še z $\log p_n$! Tako dobimo

$$\frac{\log n}{\log p_n} + \frac{\log \log p_n}{\log p_n} - 1 = \frac{\log \alpha_n}{\log p_n}$$

Ker $\log \log p_n / \log p_n \to 0$ in $\log \alpha_n / \log n \to 0$ za $n \to \infty$, imamo od tod

$$\operatorname{Lim}_{n \to \infty} \frac{\log n}{\log p_n} = 1$$

Če torej postavimo $\log n / \log p_n = \beta_n$, gre β_n proti 1. Ker je $\alpha_n \beta_n = n \log n / p_n$ in limitira $\alpha_n \beta_n$ proti 1, če rase n preko vsake meje, sklepamo, da je

$$\operatorname{Lim}_{n \to \infty} \frac{p_n}{n \log n} = 1 \qquad (16)$$

Torej je n-to praštevilo p_n asimptotično enako $n \log n$.

Limita (16) nam takoj pove, da je $p_{n+1}/p_n \to 1$, ali kar je isto, $(p_{n+1} - p_n)/p_n \to 0$ za $n \to \infty$. Torej postane razdalja med dvema zaporednima praštevilom v primeri z velikostjo praštevila poljubno majhna. Od tod lahko sklepamo, da leži med x in $(1 + \varepsilon)\, x$ za vsak pozitiven ε vsaj eno praštevilo, če je le x zadosti velik. Posebej za $\varepsilon = 1$ dobimo od tod v bistvu Bertrandov lema, ki smo ga že zgoraj omenili.

Dolgo časa so matematiki bili mnenja, da je nemogoče dokazati izrek o praštevilih z elementarnimi sredstvi, torej brez uporabe pripomočkov iz analize. Saj smo zgoraj omenili, da je ta izrek v nekem smislu ekvivalenten s trditvijo, da je $\zeta(1 + it) \neq 0$ za vsak t. Zato mora vsak dokaz, bodisi očitno bodisi prikrito, vsebovati tudi to lastnost funkcije $\zeta(s)$. Vendar pa se je pred nekaj leti posrečilo že zgoraj imenovanemu norveškemu matematiku A. Selbergu popolnoma elementarno dokazati izrek. Kot priznanje za ta uspeh je dobil na zadnjem mednarodnem kongresu matematikov, ki je bil v jeseni l. 1950 v Cambridgeu (USA), nagrado in sicer zlato kolajno in 1500 dolarjev. Njegov dokaz je elementaren v tem smislu, da ne uporablja metod iz analize, je pa kljub temu zelo kompliciran. Zato tudi tega ne moremo prinesti v tem kratkem članku. Za osnovo pri dokazu služi A. Selbergu neka asimptotična formula, ki jo je sam našel in ki se glasi

$$\sum_{p \leqq x} \log^2 p + \sum_{pq \leqq x} \log p \log q = 2\, x \log x + O(x) \qquad (17)$$

Zadnji člen na desni ni natančneje znan. Pri velikem x pa gotovo nima večjega reda velikosti kakor x. Prva vsota na desni se razteza na vsa praštevila $p \leqq x$, druga pa na vse dvojice praštevil p, q, katerih produkt $p\, q \leqq x$. To formulo je Selberg izpeljal popolnoma elementarno. Laže pa jo dobimo, kakor je pokazal H. Šapiro, če zopet pokličemo na pomoč funkcijo $\zeta(s)$. Pot od formule (17) do izreka o praštevilih pa še vedno ni niti lahka niti kratka.

JEDRO

E. Fermi* — Prevedla S. Detoni

Članek je bil objavljen v Physics Today Vol. 5, No 3, p. 6—9 (1952) in vsebuje govor, ki ga je imel E. Fermi pred 3000 poslušalci v Operi v Chicagu ob priliki dvajsete obletnice Fizikalnega inštituta oktobra 1951. Profesorju E. Fermiju in uredništvu revije Physics Today se najlepše zahvaljujemo za dovoljenje za prevod.

V zadnjih dvajsetih letih je malokatero področje znanosti doživelo tak razvoj kot jedrska fizika. Pred dvajsetimi leti še niso poznali nevtrona in je še splošno veljala hipoteza, da je atomsko jedro sestavljeno iz protonov in elektronov. Lahko pa omenimo še to, da je ravno štirideset let, odkar je Rutherford objavil odkritje jedra.

V jedrski fiziki se je v teh štirih desetletjih odkrilo mnogo novega in tudi merilna tehnika se je zelo razvila. V tem času smo dobivali postopoma pospeševalnike za vedno večje napetosti in tako delce vedno večjih energij od 10^6 eV do 10^8 eV in dočakali smo že 10^9 eV. S temi stroji pa še nismo dosegli prirode, ki še vedno izziva konstruktorje velikih pospeševalnikov.

Tudi jakost nevtronskih izvorov se je postopoma večala od prvega izvora z radijem in berilijem do ciklotronov in do atomskih reaktorjev, vsakokrat za približno milijonkratno vrednost. Seveda pa so v istem razmerju rastle tudi denarne potrebe za znanstvene raziskave in število fizikov.

Ves napredek merilne tehnike, ki nas mogoče ne preseneti tako kot zgoraj omenjeni uspehi, se mi ne zdi nič manj pomemben. Naj omenim števce, ionizacijske kamere in v zadnjem času silno važne scintilacijske števce. Rutherford in njegovi učenci so z velikim trudom opazovali šibko pobliskavanje v kristalu, če zadene vanj delec α; sedaj pa štejejo to scintilacijske števne naprave avtomatično. Elektronska tehnika se je toliko razvila, da je možno šteti sunke s scintilacijskim števcem, ki so 10^{-9} s narazen. Danes lahko merimo hitrost delca, ki se giblje skoraj s svetlobno hitrostjo, na ta način, da merimo čas, v katerem preleti delec pot nekaj centimetrov.

Iz wilsonske kamere se je razvila difuzijska kamera, ki bo postala najbrž eden izmed osnovnih pripomočkov za raziskavanje reakcij med osnovnimi delci. Fotografske plošče, s katerimi ugotavljamo sledi delcev, so tudi že zelo izpopolnjene.

Zaradi tolikšnega razvoja merilne tehnike pa se je močno povečalo naše znanje o jedru in njegovih sestavnih delih. Sedaj morda dokončno poznamo nekaj splošnih zakonov o zgradbi jedra, sestavljenega iz nevtronov in protonov, in približno poznamo razlago za spekter β. Odkrili smo na stotine jedrskih reakcij in na stotine novih radioaktivnih izotopov. Razvilo se je novo področje jedrske fizike, ki obsega radiokemijo in vse zamotane merske metode za uporabo radioaktivnih izotopov v kemiji in biologiji.

* *Enrico Fermi* je Nobelov nagrajenec in je profesor za fiziko na univerzi v Chicagu. V Združene države je prišel leta 1938 iz Italije. Profesor Fermi je mnogo prispeval k razvoju jedrske fizike. Igral je važno vlogo pri raziskavah atomske energije v Združenih državah. Njemu je bila poverjena naloga, da zgradi prvi reaktor, kar mu je uspelo v Chicagu leta 1942. Kasneje je bil vodilni član laboratorija v Los Alamosu v New Mexico. Profesor Fermi je viceprezident Ameriške fizikalne družbe.

Z odkritjem cepitve se je pojavila možnost verižne reakcije, ki je bila kmalu izkoriščena v jedrskih reaktorjih. S tem se je začela nova panoga — jedrska tehnika. Spektroskopija jedra postaja zamotana kot spektroskopija atoma, toda še zdaleka je ne razumemo toliko kot spektroskopije atoma. Tabele jedrskih nivojev z ustreznimi žarki γ in drugimi prehodi med njimi postajajo čedalje bolj zamotane in nas spominjajo na začetne tabele atomskih nivojev, ki so bile narejene v prvih dvajsetih letih tega stoletja. Merjenje jedrskih mas in momentov z različnimi metodami masne spektroskopije in z resonancami v radijskem območju je postalo izredno natančno. Zvedeli smo marsikaj o osnovnih delcih in s pomočjo kozmičnih žarkov smo odkrili mnogo novih. Velik napredek je bil dosežen pri določanju spektrov β in podrobno je bil raziskan razpad β pri nevtronu.

Številne podatke, ki so bili dobljeni pri teh odkritjih, pa je treba še razložiti. Na žalost razlage še nimamo v rokah, kakor bi si želeli. Sedanje stanje lahko nakažemo s tem, da si iz celote iztrgamo za naš razgovor dve vprašanji, ki sta danes v jedrski fiziki v ospredju zanimanja.

* * *

Ko so razmotavali problem atoma, je bil napravljen velik korak naprej s spoznanjem, da je koristno govoriti o poedinih tirih elektronov v atomu. To je gotovo samo približek in sicer zelo grob približek, toda vendar je dobra izhodiščna točka za proučevanje atomov tudi z velikim številom elektronov.

Ko so fiziki z gotovostjo lahko trdili, da je jedro sestavljeno iz protonov in nevtronov, so se pojavila vprašanja, kako je s tiri teh delcev. Ali si lahko razložimo zgradbo jedra tako kot zgradbo atoma s tem, da različnim nevtronom in protonom v jedru pripišemo posamezne tire in posamezna stanja. Če je tako, bi lahko razumeli jedrske nivoje in zgradbo jedra s preprostim modelom posameznih stanj.

Nobenega določenega odgovora ni bilo na to vprašanje, čeprav je jedrska znanost že dolgo časa uradno z nezaupanjem gledala na te poskuse. Zbrani so bili krepki dokazi za trditev, da so sestavni deli jedra tako popolnoma pomešani in tako hitro vplivajo drug na drugega, da je malo upanja, da bi s poedinimi tiri lahko razložili zgradbo jedra.

Opazujmo nukleon v jedru, ki se giblje po svojem tiru med drugimi nukleoni! Naj bo povprečna prosta pot med dvema trkoma λ. Nukleon bi zadeval ob druge nevtrone ali protone v jedru. Pri tem bi izgubil svoj tir, ko bi pretekel dolžino proste poti. Ali ima kaj smisla govoriti o poedinih tirih, lahko odločimo, če primerjamo povprečno prosto pot z dolžino tira, ki ga pričakujemo. Če je povprečna prosta pot dolga, tedaj lahko resno govorimo o tirih. Če pa je povprečna prosta pot veliko krajša od dolžine tira, pa lahko pričakujemo, da je ideja o tirih precej brez koristi. Določiti povprečno prosto pot je pa zelo težak problem. Če vzamemo nekoliko dobesedno jakost medsebojnih vplivov med nevtronom in drugimi sestavnimi deli jedra, pridemo do vrednosti, ki je tako majhna, da nam vzame pogum.

Toda kljub temu je v zadnjih letih postajalo vedno bolj očitno mnenje v Nemčiji in tudi pri nas, da tiri obstajajo. Najbolj očiten dokaz za to mnenje so tako imenovana »magična števila«. To so števila 2, 8, 20, 50, 82, 126. Če je v jedru število nevtronov ali število protonov enako enemu

izmed magičnih števil, je jedro posebno stabilno, tako kot da bi bila lupina nevtronov ali protonov zaključena.

Ta dokaz in še drugi, o katerih bomo govorili pozneje, kažejo, da je aproksimacija s tiri mnogo boljša, kot bi si človek predstavljal na podlagi tega, kar je bilo povedano. Pokaže se, da mora biti iz kakega razloga povprečna prosta pot daljša, kot jo da zgornja nekoliko groba ocena. En možen razlog za to bi bil Paulijev princip, po katerem so med dvema delcema prepovedani tisti trki, pri katerih bi po trku eden od obeh delcev prišel v kako že zasedeno stanje.

Druga možna razlaga za dolgo povprečno prosto pot bi bila v nasičenosti jedrskih sil. Predlagano je bilo na primer, da ima mezonsko polje, ki povzroča te sile, nelinearen karakter in doseže nek nivo nasičenja v jedrski materiji zaradi velike gostote prisotnih nukleonov. Kljub temu, da ni bila nobena od gornjih možnih razlag toliko daleč obdelana, da bi jo lahko smatrali za zadovoljivo, se danes splošno upa, da se bo ta model za poedini delec končno izkazal kot pravilen.

Za ta model je še eno dobro potrdilo podrobna razlaga magičnih števil, če privzamemo, da so tiri med sabo močno sklopljeni zaradi spinov. Maria Mayer v Chicagu in raziskovalci v Nemčiji, ki so neodvisno drug od drugega razvili podobne domneve, so lahko pokazali mnogo značilnosti izomernih jedrskih nivojev, ki zelo podpirajo te trditve.

Trenutno ne vemo, kje bi bil vzrok za močno spinsko sklopitev tirov, ki je predlagana na podlagi empiričnih očitnosti. Razlaga za to se bo našla najbrž šele takrat, ko bo izdelana zadovoljiva teorija o jedrskih silah. Danes moramo privzeti eksistenco te sklopitve kot empirično dejstvo.

Toda kljub našemu le delnemu znanju imamo v teoriji o tirih v jedru model, ki mnogo obeta vsaj za kvalitativno razlago zgradbe jedra. Bilo je že mogoče s to predstavo razložiti veliko število podrobnosti.

* * *

Seveda pa je popolnoma nemogoče računati, da bi lahko razumeli zgradbo jedra, ne da bi precej vedeli o silah, ki vladajo med osnovnimi sestavnimi delci jedra, med nevtronom in protonom, protonom in protonom in nevtronom in nevtronom.

Klasična eksperimentalna pot k preiskavam jedrskih sil je bila raziskovanje stresanja delcev. Nevtron pošljemo proti protonu in opazujemo, kako se oba odklonita. Upamo, da bomo iz značilnih podatkov, kot so kotna porazdelitev stresanja, energijska odvisnost itd., dobili sile, ki povzročajo odklanjanje. Prvi eksperimenti, ki so jih naredili Tuve, Herb in drugi in jih je razložil Breit, so pokazali, da vplivajo jedrski nukleoni drug na drugega le v zelo majhni razdalji in se zato lahko drže delci v jedru skupaj. Kasneje je prišla Yukavova teorija, ki je dala prvič primeren model in je mnogo pomagala našemu današnjemu razumevanju tega problema. Model je v mnogih pogledih zelo podoben modelu za tolmačenje elektromagnetnih sil: delec ustvarja polje in to polje deluje na drugi delec. Pri tem pa je imel Yukava še dodaten problem: izdelati teorijo, ki bi sama po sebi razložila kratek doseg jedrskih sil. Yukava je spoznal, da ima tisto polje, katerega kvanti imajo maso 0 (na primer fotoni), velik doseg, tisto polje, katerega kvanti imajo končno in relativno veliko maso, pa majhen doseg. Po Yukavovi teoriji se lahko nevtron prevrže v proton in pri tem odda mezon π, ki ga potem zopet absorbira, zopet odda, zopet

absorbira itd. Jedrsko polje, ki je udeleženo pri tem osciliranju, se bo raztezalo tako daleč od prvotnega nevtrona, kolikor daleč lahko pridejo emitirani mezoni π. In kako daleč lahko pridejo? Dokaz gre nekako takole:

Mezon ima precejšnjo maso. Da se ustvari mezon, s katerim se vrši to žoganje, je potrebno μc^2 energije, pri čemer je μ masa mezona, c pa hitrost svetlobe. Kdo plača to energijo? Nihče. Dobro, če nihče ne plača, si jo je treba izposoditi. V banki za energijo je čisto posebno pravilo, katero bi lahko včasih privzele tudi trgovske banke, namreč: čim večje je posojilo, tem krajši je rok. To bančno prakso izraža kvantitativno že kar ena od oblik Heisenbergovega nedoločnostnega principa. Izposodiš si lahko energijo W za čas, katerega velikostni red je podan s Planckovo konstanto h deljeno z W; zato bo rok posojila $h/\mu c^2$. Mezon se bo lahko gibal proč od svojega izvora za razdaljo, ki je kvečjemu enaka času t, pomnoženem s hitrostjo svetlobe c, torej je doseg jedrskih sil po tem mehanizmu v bistvu enak $h/\mu c$ in je obratno sorazmeren masi. Za kratke dosege mora imeti kvant polja, ki posreduje jedrske sile, zelo veliko maso. Prve ocene Yukave so res pokazale, da mora biti masa približno 300-krat večja od mase elektrona.

Skoro takoj po objavi Yukavove teorije so odkrili mezon v kozmičnih žarkih, kar je dalo teoriji izreden sloves. Delec, ki so ga prvič odkrili v kozmičnih žarkih, ni bil Yukavov mezon, ampak je bil sin Yukavovega mezona, kot to danes dobro vemo, takrat pa še nismo vedeli. Yukavov mezon je bil odkrit šele pred kratkim, ko je Powel našel sledi v fotografskih ploščah, ki so bile eksponirane v velikih višinah in so pokazale eksistenco dveh različnih mezonov. Eden od teh, tako imenovani mezon π, je tisti, ki povzroča jedrske sile; drugi mezon μ je samo precej nezanimiv potomec prvega; vsaj za enkrat se zdi še nezanimiv.

Nato je prišel še drugi osnovni eksperimentalni rezultat, ki ga je vsaj deloma predvidevala Yukavova teorija: če trčita z zadostno energijo dva nukleona, od katerih je vsak obdan z mezonskim poljem, se lahko nekateri mezoni sprostijo. Pri raziskavanju kozmičnih žarkov so opazili, da dejansko obstaja ta proces, toda najbolj presenetljivi eksperimentalni rezultati v tej smeri so bili doseženi v Berkeleyu, kjer sta Lattes in Gardner odkrila, da mezoni resnično nastanejo pri trkih delcev z veliko energijo v synhrociklotronu. Z odkritjem umetnega načina proizvajanja mezonov π so dobili fiziki na razpolago mezonski izvor, ki ga je možno kontrolirati in ki je neprimerno bolj močan, kot so izvori v kozmičnih žarkih. Umetni mezonski izvor nam da idealno možnost za raziskavanje lastnosti teh novih delcev. V mnogih laboratorijih že živahno raziskujejo v tej smeri.

* * *

Morda bi pri očrtanju Yukavove teorije (ki je po mojem mnenju kvalitativno precej pravilna) dodal opozorilo, da ni samo ena teorija, ampak da jih je več in da nobena ni popolnoma pravilna. Včasih je težko reči, kaj je napačnega v neki posebni teoriji, ker so matematična sredstva, ki so uporabljena, tako komplicirana, da to človeka močno ovira. Le redko je možno napraviti popolnoma pravilen račun, ker je teorija tako komplicirana in ker večinoma naletimo na divergentne neskončne člene. Te poskušamo po navadi odpraviti z nepopolnoma pravilnimi postopki. Teorija pač poskuša in zaradi tega preveč poenostavi položaj, ki pa je lahko v resnici zelo kompliciran. Ko je bila Yukavova teorija prvič pred-

lagana, je bilo upravičeno upanje, da bomo lahko praviloma smatrali delce, ki jih vsebuje teorija, to je protone, nevtrone in mezone π, za osnovne delce. To upanje pa čedalje bolj izgublja svojo podlago, ko odkrivajo vedno nove osnovne delce.

Mogoče lahko primerjamo sedanji položaj s položajem, ki je bil v začetku kvantne teorije (čeprav so primerjave vedno nevarne). Kvantna teorija je dala precej kvalitativnih vpogledov v zgradbo atoma, pri vsem tem pa ni uspela s kvantitativnega stališča. Mogoče je situacija tu podobna; mogoče so blesteče rešitve iste vrste že pripravljene.

Težko je reči, kakšna bo bodoča pot. Lahko pogledamo nazaj v knjige, ki obravnavajo delovne metode (dvomim, če mnogo fizikov to v resnici dela). Tam je rečeno, da je treba dobiti eksperimentalne podatke, da jih je treba izbirati in urejevati, nato pa začeti delati delovne hipoteze in jih skušati vskladiti in tako dalje, dokler morda celoten model ne zaživi in se rezultati ponudijo kar sami od sebe. Mogoče je tradicionalna znanstvena metoda učnih knjig najboljše vodilo, kadar nimamo nič boljšega.

V tem času so se silno hitro nabirali podatki o jedrskih silah, bodisi direktno z raziskavanjem stresanja delcev kot indirektno z raziskavanjem mezonov. Rezultati se zelo hitro kopičijo in čeprav še ne dajo zadovoljive slike, mogoče ta ni več daleč.

Nekatere od mnogih Yukavovih teorij so ti eksperimenti izključili. Sedaj je najbolj v milosti psevdoskalarna teorija s psevdovektorsko vezavo, kar precej po domače povedano pomeni, da ima mezon vrednost spina 0 in da se vêde kot psevdoskalar, torej ima lastnost simetrije, ki jo gotovo pozna večina fizikov.

Seveda se lahko zgodi, da se kmalu kdo pojavi z rešitvijo problema mezonov in da bodo eksperimentalni rezultati potrdili toliko podrobnosti teorije, da bo vsakemu jasno, da je teorija pravilna. Taki primeri so se že včasih zgodili. Lahko se zopet zgode. Vendar ne verjamem, da lahko računamo na to. Mislim, da moramo biti pripravljeni na dolgo in težavno puljenje, če si hočemo zagotoviti, da bomo ob prihodnji proslavi obletnice Ameriškega fizikalnega instituta že vedeli za rešitev problema.

* * *

Jasno je, da se je začela za znanost nova doba. Od individualnega znanstvenika smo prišli do znanstvenih kolektivov, od Henryja Cavendisha, ki je delal sam, do velikih raziskovalnih skupin, v katerih delajo ljudje skupaj na enem samem problemu ali na vrsti problemov. To niti ne velja več samo za jedrsko fiziko, tudi na drugih področjih se že tako dela. Uporaba teorije v jedrskih eksperimentih daje novo povezavo s tehniko. Odpira se široka uporaba jedrske fizike pri reševanju kemičnih, medicinskih in fizikalnih problemov. Seveda je treba pri taki splošni trditvi, kot je zgornja, upoštevati tudi izjeme. Ne smemo reči, da so minuli časi individualnega znanstvenika, ki dela sam. Vedno bo v znanosti še prostora za individualno slavo samotnega genija.

A. K. Solomon v knjigi »Why smash atoms« (1945).

MAGNETNI SPINELI

B. Zega

Kadar govorimo o feromagnetizmu, se spomnimo navadno le na železo in njemu sorodne kovine ali razne zlitine. Redko pa pomislimo, da prvi znani magnet — magnetit — ni kovina, temveč železova spojina (Fe_3O_4). Poleg tega poznamo še celo vrsto spojin, ki so feromagnetične, večina izmed njih pa je brez praktičnega pomena. Vendar je v zadnjih desetletjih ena skupina takih spojin prodrla v ospredje zanimanja: to so magnetni spineli-feriti.

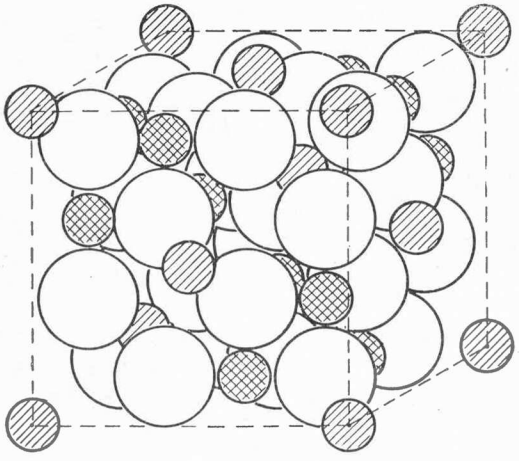
Da nam bodo laže razumljive posebnosti magnetizma feritov, si na kratko oglejmo, kje feromagnetizem sploh nastopa. Osnovni predpogoj je, da je snov sestavljena iz paramagnetnih atomov oziroma ionov, torej takih, ki nosijo svoj magnetni moment. Medtem ko so v paramagnetni snovi magnetni momenti posameznih atomov (ionov) neurejeni in jih postopoma ureja šele zunanje magnetno polje, se ti momenti v feromagnetnih snoveh sami uredijo. V feromagnetni snovi imamo torej *spontano magnetizacijo.* Ureditev pa ne obseže večjih kosov snovi, ampak je ta razdeljena na mikroskopsko majhne *Weissove obsege,* ki so magnetizirani vsak po svoje. Zunanje magnetno polje le spreminja in urejuje smeri spontane magnetizacije v teh obsegih, za kar je potrebna razmeroma majhna poljska jakost; snov ima zato veliko permeabilnost. Pri paramagnetikih dosežemo nasičenje (t. j. popolno urejenost magnetnih momentov) šele pri zelo velikih poljskih jakostih, pri feromagnetikih pa že pri prav majhnih. Mehanizem feromagnetizma je danes komaj kvalitativno razjasnjen. Dejstvo je, da nastopa pri nekaterih elementih, ki imajo poleg valenčnih elektronov tudi še nepopolno predzadnjo elektronsko lupino. To so n. pr. v 4. periodi elementi od Sc do Cu, ki imajo poleg dveh valenčnih elektronov 4 s še 1 do 9 elektronov 3 d. Med temi pa so feromagnetni le elementi Fe, Co in Ni, kar kaže, da so potrebni še neki dodatni pogoji. Vredno je omeniti, da se je s primerno kombinacijo posrečilo sestaviti feromagnetne zlitine (oziroma kovinske spojine) iz sicer paramagnetnih kovin (n. pr. *Heuslerjeva zlitina,* 61% Cu, 26% Mn in 13% Al).

Pri nekaterih, navidez paramagnetnih snoveh so odkrili, da v njih obstaja spontana ureditev magnetnih momentov, da pa snov na zunaj ni feromagnetna. Pojav imenujemo *antiferomagnetizem.* Nastopa v kristalih, katerih mreža je sestavljena iz dveh enakih mrež, ki sta druga proti drugi premaknjeni (taka je n. pr. prostorsko centrirana kubična mreža). Medtem ko so magnetni momenti ionov v eni mreži med seboj paralelni, jim stoje momenti v drugi mreži antiparalelno. V opisanem primeru je obojnih mest enako mnogo in zato je rezultirajoča magnetizacija nič. Lahko pa je kristalna mreža taka, da je enih mest več kot drugih ali da so zasedena z različnimi ioni; tedaj preostane še neka magnetizacija in snov je na zunaj feromagnetna, čeprav slabše kot pri paralelni ureditvi. Da bi jih razlikovali od pravih feromagnetnih snovi, so jih v zadnjem času začeli imenovati *ferimagnetne.*

Ferimagnetizem so odkrili in proučevali na kubičnih feritih. Kristalografsko so to spineli s splošno formulo $Me^{II}Fe_2O_4$, kjer pomeni Me^{II} dvovalentno kovino: Mn, Fe, Co, Ni, Cu, Mg, Zn ali Cd. Vsi feriti, razen cinkovega in kadmijevega, so feromagnetni. Na enostavnih, pa tudi na

mešanih feritih so prvič mogli uspešno kvantitativno izračunati magnetne količine in razviti pri tem teorijo ferimagnetizma, ki je važen prispevek k poznavanju strukture snovi. Ker pa so se feriti izkazali kot neprekosljiv material za visokofrekvenčna magnetna jedra, zaslužijo tudi s strani praktika vso pozornost.

Kristal spinela ima v elementarni celici 8 dvovalentnih in 16 trovalentnih ionov ter 32 kisikovih ionov (sl. 1). Pri tem je med kisikovimi ioni dvoje vrst mest za kovinske ione: mesta, obdana s 4 kisikovimi ioni (tetraedrska mesta, kratko označena kot mesta A) in mesta, obdana s 6 kisikovimi ioni (oktaedrska mesta, mesta B). Prvih je spet 8, drugih pa 16 v vsaki elementarni celici. Pri tem pa je razporeditev dvo- in trovalentnih ionov na ta mesta lahko različna. Kadar zasedejo vsa mesta A izključno dvovalentni, mesta B pa trovalentni ioni (ioni feri), je struktura *normalna*. Tak primer imamo edinole pri cinkovem in kadmijevem feritu, oba pa sta paramagnetna. Vsi ferimagnetni feriti imajo *invertno* strukturo: dvovalentni ioni zasedajo polovico mest B, preostala mesta B in vsa mesta A pa zasedajo ioni feri. Najraje zasedajo mesta B lažji ioni (n. pr. $Mn^{\cdot\cdot}$), z rastočo atomsko številko pa ta lastnost izginja preko $Fe^{\cdot\cdot}$, $Co^{\cdot\cdot}$ in $Ni^{\cdot\cdot}$; pri $Cu^{\cdot\cdot}$ je verjetnost nahajanja na A ali B že skoraj enaka, pri $Zn^{\cdot\cdot}$ pa je mogoča edinole lega A.



Sl. 1. Elementarna celica spinela. Veliki krogi predstavljajo kisikove ione, mali šrafirani kovinske ione na mestih *A*, križno šrafirani pa kovinske ione na mestih *B*.

Nosilci magnetnih momentov v atomih oziroma ionih so elektroni. Pri fero-, feri- in antiferomagnetizmu pride v poštev skoraj le lastni magnetni moment elektrona. Vsak elektron, ki je brez para, prispeva cel Bohrov magneton.* Spini elektronov 3 d pri elementih od Sc do Mn se razvrščajo paralelno; magnetni moment raste od 1 do 5 μ_B. Ker pa dovoljuje Paulijev princip na tej lupini največ 5 paralelnih elektronskih spinov, se nadaljnji elektroni (t j. pri elementih od Fe do Zn) orientirajo nasprotno k prejšnjim in kompenzirajo njihov magnetni moment. Magnetni moment zopet pojema od 5 μ_B (pri Mn) do 0 (pri Zn). Cink je že diamagneten. Iz tabele I so razvidne orientacije elektronov in magnetni momenti naštetih elementov. Trovalentnim ionom manjka po en elektron 3 d; zato je pri njih magnetni moment za 1 μ_B spremenjen.

Kot rečeno je za ferimagnetizem značilno, da so magnetni momenti ionov na mestih A medsebojno paralelni, toda antiparalelni napram

* Elektron se vede kot vrtavka in ima vrtilno količino $\frac{1}{2}\, h/2\pi$. Pravimo, da ima spin $\frac{1}{2}$. V zvezi s tem je tudi pojav, da se elektron vede tudi kot magnet, in sicer je njegov magnetni moment enak Bohrovemu magnetonu $\mu_B = \mu_0\, eh/4\pi m = 1{,}165 \cdot 10^{-29}$ Vsm. Dva bližnja elektrona lahko stojita paralelno, tako da je skupni magnetni moment enak 2 μ_B, ali pa antiparalelno, tako da je celotni magnetni moment nič.

Tabela I.

ELEKTRONSKA KONFIGURACIJA LUPINE 3 d				
Število elektronov 3 d	Element	Orientacija spinov	Število magnetov na ion	
			v dvovalent. stanju	v trovalent. stanju
1	Sc	↑	(1)	0
2	Ti	↑ ↑	2	1
3	V	↑ ↑ ↑	3	2
4	Cr	↑ ↑ ↑ ↑	4	3
5	Mn	↑ ↑ ↑ ↑ ↑	5	4
6	Fe	↑↓ ↑ ↑ ↑ ↑	4	5
7	Co	↑↓ ↑↓ ↑ ↑ ↑	3	4
8	Ni	↑↓ ↑↓ ↑↓ ↑ ↑	2	3
9	Cu*	↑↓ ↑↓ ↑↓ ↑↓ ↑	1	(2)
10	Zn	↑↓ ↑↓ ↑↓ ↑↓ ↑↓	0	—

* Cu ima v kovinskem stanju konfiguracijo $3\,d_{10}\,4\,s_1$; kot enovalenten ion zato $3\,d_{10}$; ta ion je torej diamagneten.

magnetnim momentom ionov na mestih B. Rezultirajoči magnetni moment bo torej razlika vsot magnetnih momentov na mestih A in B. V tabeli II so ti računi narejeni za nekatere enostavne ferite. Rezultati se razen v zadnjem primeru precej dobro ujemajo z merjenimi vrednostmi. Magnetni moment na molekulo ferita dobimo tako, da izmerimo nasičeno magnetizacijo pri temperaturi tekočega zraka. To magnetizacijo (t. j. $B = \mu_0 H$) samo še delimo s številom molekul* na prostorninsko enoto.

Tabela II.

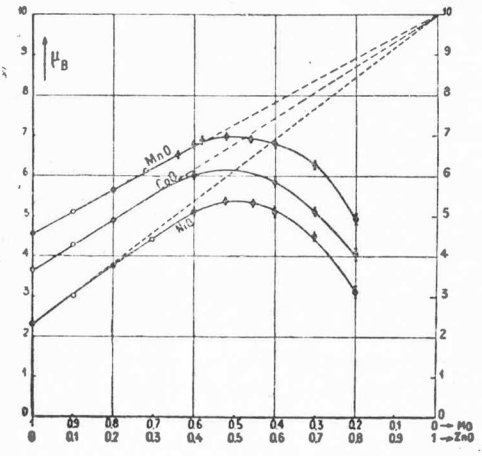
RAZPOREDITEV IONOV V NEKATERIH ENOSTAVNIH FERITIH						
Ferit	Ioni na mestih A	Ioni na mestih B	Vsota mag. momentov			Merjeni moment na molekulo (μ_B)
			mesta B	A	diferenca	
Feroferit (magnetit)	$Fe^{\cdot\cdot\cdot}$	$Fe^{\cdot\cdot\cdot} + Fe^{\cdot\cdot}$	5 + 4	5	4	4,2
Manganov ferit	$Fe^{\cdot\cdot\cdot}$	$Fe^{\cdot\cdot\cdot} + Mn^{\cdot\cdot}$	5 + 5	5	5	5,0
Niklov ferit	$Fe^{\cdot\cdot\cdot}$	$Fe^{\cdot\cdot\cdot} + Ni^{\cdot\cdot}$	5 + 2	5	2	2,3
Cinkov ferit	$Zn^{\cdot\cdot}$	$2\,Fe^{\cdot\cdot\cdot}$	10	0	10	0

Po podanem računu bi cinkov ferit imel magnetni moment 10 Bohrovih magnetonov. Rekli smo pa, da dejansko ni magneticen. Predpogoj za ureditev magnetnih momentov je namreč izmenjava med elektroni 3 d na mestih A in B. Ker pa so na mestih A izključno ioni $Zn^{\cdot\cdot}$, ki nimajo lastnega magnetnega momenta (zaradi nasičene lupine 3 d), preostane le še izmenjava med ioni feri na mestih B, ki pa je prešibka, da bi mogla urediti momente. Cinkov ferit je zato samo paramagneten kot še marsikatera druga železova spojina.

Kubični feriti so med seboj strogo izomorfni, zato lahko tvorijo zmesne kristale v vseh razmerjih. Zanimiv je predvsem primer, kadar

* Pod *molekulo* razumemo tu najmanjšo enoto, ki ustreza zgoraj navedeni formuli ferita, n. pr. $MnFe_2O_4$.

primešamo kateremu izmed magnetnih feritov cinkovega ferita. Namesto pričakovane slabitve magnetičnosti nastopi obratno še povečanje momenta (sl. 2). Ion $Zn^{\cdot\cdot}$ namreč stopi na mesto A in izpodrine en ion feri iz A na B. S tem se je število momentov na A zmanjšalo za 5, na B pa povečalo za isto vrednost. Od celotnega povečanja za 10 μ_B moramo le še odšteti moment dvovalentnega iona, ki smo ga nadomestili z Zn. Iz slike 2 je razvidno, kako naraščajo magnetni momenti mešanih feritov z Zn proti hipotetični vrednosti 10 μ_B, ki bi jo imel Zn-ferit, če bi ostali momenti ionov na mestih B paralelni. Ker pa to ni mogoče, dosežemo maksimum že pri ca. 50 mol. % Zn-ferita, nato pa magnetičnost hitro upada. Z rastočim dodatkom Zn-ferita se spreminjajo tudi druge magnetne lastnosti. Tako n. pr. Curiejeva temperatura pada skoraj linearno z mol. % Zn-ferita. Pri feritih, ki so bogati s cinkom, pade tudi pod sobno temperaturo.



Sl. 2. Magnetni momenti nekaterih mešanih feritov s cinkom, v odvisnosti od mol. % Zn-ferita. Ch. Guillaud, J. de Recherche C. N. R. S., *12*, 119 (1950).

Največ uporabljamo sledeče sestave: ferit Mn in Zn s 50 molarnimi % ferita Zn in ferit Ni in Zn s 70 mol. % ferita Zn.

Namesto dveh dvovalentnih ionov lahko ugradimo v elementarno celico spinela tudi en eno- in en trovalenten ion, n. pr. $Li^{\cdot} + Fe^{\cdot\cdot\cdot}$. Ker je radius iona litija ravno primeren, dobimo ferit z odličnimi lastnostmi, ki je uporaben posebno v območju kratkih valov.

Kristali železovih spinelov so izotropni kristalografsko, toda ne magnetno; v enih smereh poteka magnetizacija laže, v drugih teže. Pojav imenujemo *magnetno anizotropijo,* ki je eden izmed glavnih vzrokov za nastop *histereze.* Kristali z zelo majhno anizotropijo imajo seveda ozko histerezno zanko in zato majhno koercitivnost. Feriti se dajo najlaže magnetizirati v smereh diagonale kocke (111) in najteže v smereh robov kocke (100). Izotropija je največja tik pred Curiejevo temperaturo, ki pri feromagnetnih kovinah leži okrog 500—700° C. Pri feritih jo pa lahko znižamo z dodatkom ferita cinka do poljubne temperature, s čimer dosežemo prav majhno anizotropijo. Anizotropijo povzroča tudi *magnetostrikcija,* t. j. deformacija feromagnetnega kristala v smeri magnetizacije. Lahko je pozitivna ali negativna (raztezanje ali krčenje). Pri večini feritov je negativna, le pri magnetitu je pozitivna. S tem, da dodamo kateremukoli

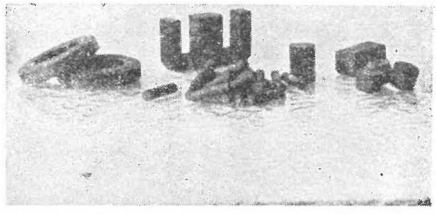
Tabela III.

NEKAJ VREDNOSTI MEŠANIH FERITOV

Začetna permeabilnost	do 1000	Curiejeva temperatura	100—200° C
Maksimalna permeabilnost	do 4000	Spec. upornost	do 10^5 Ohm. m
Koercitivnost	20 do 300 A/m	Gostota	4,8—5
Nasičena magnetizacija	do 0,4 Vs/m²		

feritu nekaj odstotkov magnetita, zmanjšamo še magnetostrikcijo ter na ta način dobimo idealen magneten material za uporabo v visokih frekvencah.

Iz tabele III. so razvidni podatki za ferite, kakršne uporabljajo za visokofrekvenčna jedra. Posebno važna je visoka specifična upornost, ki onemogoča Foucoltove tokove in kožne efekte celo pri ultravisokih frekvencah. Kljub temu pa je zgornja meja uporabnosti feritnih jeder pri frekvenci 10^7—10^8 Hz. Pri tej frekvenci nastopa v feritih značilna magnetna absorpcija, ki se kaže v hitrem porastu izgub in padcu permeabilnosti. Po dosedanjih hipotezah so temu vzrok rotacije Blochovih sten*, ki pridejo pri tej frekvenci v resonanco z zunanjim poljem. Pri še višjih frekvencah se permeabilnost zopet opomore, a ima ponoven minimum pri približno 10^{10} Hz ($\lambda = 3$ cm), kjer nastopi resonanca elektronskih spinov. Magnetni moment elektrona opravlja zaradi zunanjega magnetnega polja precesijsko gibanje, katerega frekvenca leži prav v tem pasu. Frekvenca 10^{11} Hz pa predstavlja zgornjo mejo vseh feromagnetskih pojavov.



Sl. 3. Nekaj primerkov feritnih jeder.

Po zunanjem videzu in načinu izdelave so feriti podobni keramiki. Navadno jih dobe tako, da drobno meljejo zmes kovinskih oksidov, jo stiskajo v zaželene oblike in sintrajo pri temperaturah 1300 do 1400° C, večinoma v natančno kontrolirani atmosferi. Sestav atmosfere je odvisen od vrste ferita: feriti mangana n. pr. zahtevajo nevtralno atmosfero, sicer se Mn oksidira iz dvo- v trovalentno stopnjo, zaradi česar ne dobimo več kubični spinel, temveč nehomogeno snov s slabimi magnetnimi svojstvi. Pri feritih niklja pa nastopa pri temperaturi nad 1200° C disociacija železovega oksida: $3\,Fe_2O_3 \rightarrow 2\,Fe_3O_4 + O$, ki je sicer v mali meri zaželena, saj s tem dobimo potrebni odstotek magnetita, ki, kot smo zgoraj omenili, zniža magnetostriktivnost. Ker pa magnetit obenem zviša električno provodnost, njegov nastanek zaviramo z rahlo oksidativno atmosfero. Važna je seveda tudi čistoča, saj vsaka tuja primes, ki vstopa v spinelsko magnetno fazo, povzroča narastek koercitivnosti in padec permeabilnosti ter s tem seveda tudi narastek izgub v VF-polju. Izdelki so črni, zelo trdi in se dajo dobro brusiti (sl. 3). V prodaji se pojavljajo pod imeni »Ferroxcube«, »Ferramic«, »Ferrocarit« itd. v obliki palčk in cevk za MF-transformatorje, kot lončasta in toroidalna jedra za VF-telefonijo, kot E-jedra za izhodne transformatorje pri radijskih in televizijskih sprejemnikih itd. Njihova permeabilnost je v primeri z dosedanjimi jedri iz železnega prahu zelo visoka, izgube pa nizke, kar omogoča izdelavo posebno majhnih tuljav z odlično kvaliteto.

Slovstvo:

L. Néel: Magnetische Eigenschaften der Ferrite und Ferrimagnetismus, Z. f. Anorg. Chemie, *262*, 175, 1950.

Ch. Guillaud: Propriétés magnétiques des ferrites. J. de Recherche C. N. R. S., *12*, 113, 1950.

* Meje med območji spontane magnetizacije.

NOVICE

Pravilni sedemnajsterokotnik

Bolyai, Gaussov sošolec v Göttingenu in njegov iskreni prijatelj, je po njegovi smrti omenil v pismu Sartoriusu von Waltershausenu med drugim tudi tole: »Po neprenehnem, tihem delu je Gauss navadno počival pri meni. Nikoli ni govoril o bodočem delu, saj je molčal celo o dovršenem. Le enkrat sem opazil, da je bil zmerno vesel, takrat, ko mi je dal v spomin malo ploščo, na kateri je izračunal sedemnajsterokotnik.« Gauss je uvidel možnost konstrukcije sedemnajsterokotnika že leta 1796, ko je bil star šele 19 let.

Vso, naravnost neverjetno skromnost njegovega značaja, ki se je odražala v »zmernem veselju« ob tem dogodku, moremo preceniti le, če pomislimo, da se vprašanje o konstrukciji pravilnih mnogokotnikov vse od Evklida ni premaknilo dalje, torej dobrih 2000 let. Kakor vemo, so grški geometri uspeli le v konstrukciji mnogokotnikov, katerih število stranic lahko izrazimo v eni izmed oblik:

$$3.2^k,\ 4.2^k,\ 5.2^k \text{ in } 3.5.2^k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

To so primeri, ki jih obvlada danes vsak boljši petošolec. Preko tega Grki niso prišli kakor tudi ne vsi kasnejši geometri. Še več. Po mnogih brezuspešnih poskusih razširiti družino mnogokotnikov, ki se dajo načrtati z ravnilom in šestilom, se je celo ustalilo prepričanje, da to ni mogoče. Tako je trdil še leta 1798, torej 2 leti po Gaussovem spoznanju, nemški matematik Klügel, ko je pokazal konstrukcije 6-, 4- in 5-kotnika: »Razen teh mnogokotnikov ne moremo nobenega načrtati geometrično, ampak samo mehanično« (kotomer). S tem je izrazil le splošno mnenje, ki se je zrcalilo v vseh učbenikih 18. stoletja.

Izhod iz te slepe ulice je našel Gauss, ki je, kakor je splošno znano, docela planimetrično nalogo konstrukcije regularnega n-terokotnika s pomočjo analitične geometrije reduciral na algebraično vprašanje: v katerih primerih je binomska enačba $Z^n - 1 = 0$ rešljiva le z uporabo kvadratnih korenov? Algebraična teorija krožne delitve nam da, kakor vemo, precizen odgovor: Pravilni n-terokotnik moremo načrtati z ravnilom in šestilom tedaj in le tedaj, kadar ne vsebuje n nobenega lihega praštevila ali pa le taka, ki imajo obliko $2^{2^k} + 1$, toda vsako od teh sme nastopiti največ v prvi potenci. Torej mora imeti n obliko:

$$n = 2^k\,(2^{2^{k_1}} + 1)\,(2^{2^{k_2}} + 1) \ldots (2^{2^{k_s}} + 1)$$

pri tem so $k_1, k_2, \ldots k_s$ med seboj različni in faktorji oblike $2^{2^k} + 1$ morajo biti praštevila.

Edina praktično šibka stran tega kriterija je skrita v zadnji zahtevi. Izraz $2^{2^k} + 1$ nam da za $k = 0, 1, 2, 3, 4$ res praštevila 3, 5, 17, 257 in 65537. Za $k = 5, 6, 7, 9, 11, 12, 18, 23, 36$ pa so ugotovili, da dobimo sestavljena števila. Tako je vprašanje, ali je možno konstruirati neskončno mnogo regularnih poligonov z lihim številom stranic, še vedno odprto.

Čim je bila tako ugotovljena možnost konstrukcije nadaljnjih mnogokotnikov, so se geometri lotili svojega dela. Predvsem velja to za $n = 17$.

Za vse geometrične konstrukcije sedemnajsterokotnika, med katerimi so najbolj znane Serretova z ravnilom in šestilom, v. Staudtova z ravnilom in fiksnim krogom ter Gérardova samo s šestilom, pa je značilno, da se omejujejo le na načrtovanje korenov kvadratnih enačb, ki rešijo vprašanje algebraično. Konstrukcija, ki bi zrasla iz čisto geometričnih premislekov, se do sedaj še ni posrečila. Pač pa so naknadno uspeli poskusi, določiti stranico sedemnajsterokotnika z elementarnimi algebraičnimi sredstvi, neodvisno od splošne teorije krožne delitve, izhajajoč le iz geometričnih predpostavk. Kar mi je bilo teh izpeljav na dosegu, se mi zdi zdaleč najlepša Lohnsteinova (Zeitschrift für math. und naturw. Unterricht 49, 1918), ki je nakazana v dodatku nemške izdaje Federiga Enriquesa: Fragen der Elementargeometrie, II. del.

* * *

Izhodišče Lohnsteinovega računa je zelo preprosta ugotovitev: če včrtamo v krog z radijem $r = 1$ poljuben enakokrat trikotnik z osnovnico a, krakoma b in višino v, je $4v^2 = 4b^2 - a^2$. Po Evklidovem izreku dobimo takoj $b^2 = 2rv = 2v$, oziroma, če kvadriramo in uredimo,

$$a^2 = 4b^2 - b^4 \tag{1}$$

Sedaj pa si mislimo v enotni krog včrtan pravilen sedemnajsterokotnik z oglišči $A_0, A_1, A_2, \ldots A_{16}$ in si oglejmo trikotnike $A_0A_1A_2$, $A_0A_2A_4$, $A_0A_4A_8$ in $A_0A_8A_9$, ki so očitno enakokraki. Ker so tetive $A_0A_1 < A_0A_2 < A_0A_4$ manjše od stranice včrtanega kvadrata, tetiva A_0A_8 pa večja od nje, toda manjša od premera kroga, dobimo, če pišemo krajše

$$(A_0A_1)^2 = (A_8A_9)^2 = x_1,\ (A_0A_2)^2 = x_2,\ (A_0A_4)^2 = x_3,\ (A_0A_8)^2 = x_4$$

naslednjo ureditev po velikosti

$$x_1 < x_2 < x_3 < 2 < x_4 < 4 \tag{2}$$

Ako uporabimo sedaj obrazec (1) zapored na naše štiri trikotnike, dobimo sistem enačb

$$x_2 = 4x_1 - x_1^2,\ x_3 = 4x_2 - x_2^2,\ x_4 = 4x_3 - x_3^2,\ x_1 = 4x_4 - x_4^2 \tag{3}$$

Od tod dobimo, če enačbe seštejemo:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \tag{4}$$

če jih zmnožimo pa:

$$(4 - x_1)(4 - x_2)(4 - x_3)(4 - x_4) = 1 \tag{5}$$

Nadalje je iz (3)

$$4 - x_2 = (2 - x_1)^2,\ 4 - x_3 = (2 - x_2)^2$$
$$4 - x_4 = (2 - x_3)^2,\ 4 - x_1 = (2 - x_4)^2$$

Z množenjem teh enačb in upoštevanjem (5) dobimo:

$$(2 - x_1)^2(2 - x_2)^2(2 - x_3)^2(2 - x_4)^2 = 1$$

oziroma skladno z (2):

$$(2 - x_1)(2 - x_2)(2 - x_3)(2 - x_4) = -1 \tag{5a}$$

Zopet je iz (3)

$$3 - x_2 = (3 - x_1)(1 - x_1),\ 3 - x_3 = (3 - x_2)(1 - x_2)$$
$$3 - x_4 = (3 - x_3)(1 - x_3),\ 3 - x_1 = (3 - x_4)(1 - x_4)$$

Z množenjem dobimo:

$$(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)(1 - x_4) = 1 \tag{5b}$$

Če leve strani v enačbah (5), (5a), (5b) zmnožimo, dobimo:

$$\begin{aligned} 4^4 - 4^3 a_1 + 4^2 a_2 - 4 a_3 + a_4 &= 1 \\ 2^4 - 2^3 a_1 + 2^2 a_2 - 2 a_3 + a_4 &= -1 \\ 1 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 &= 1 \end{aligned} \tag{6}$$

pri čemer so a_1, a_2, a_3, a_4 osnovne simetrične funkcije x-ov:

$$a_1 = \Sigma x_i,\ a_2 = \Sigma x_i x_k,\ a_3 = \Sigma x_i x_k x_l,\ a_4 = x_1 x_2 x_3 x_4$$

Iz teh enačb in pa iz (4) lahko a-je izračunamo. Ako prištejemo k prvi enačbi (6) z —3 množeno drugo in z 2 množeno tretjo, nam a_3 in a_4 odpadeta in dobimo:

$$a_2 = 7 a_1 - 34 \tag{7}$$

Ker moremo pisati enačbo (4) tudi v obliki $a_1^2 - 2 a_2 = 3 a_1$, nam dasta (4) in (7) skupaj:

$$a_1^2 - 17 a_1 + 68 = 0 \tag{8}$$

Od tod dobimo za a_1, če upoštevamo, da mora biti zaradi (2) $a_1 < 10$, tole vrednost:

$$a_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \tfrac{1}{2}(17 - \sqrt{17}) \tag{9}$$

Nadalje nam dajo enačbe (3)

$$x_1 - x_3 = (x_4 - x_2)[4 - (x_2 + x_4)],\ x_2 - x_4 = (x_1 - x_3)[4 - (x_1 + x_3)]$$

Z množenjem le-teh imamo

$$[4 - (x_2 + x_4)][4 - (x_1 + x_3)] = -1 \tag{10}$$

Od tod je

$$(x_2 + x_4)(x_1 + x_3) = 4 a_1 - 17 \tag{11}$$

Enačbi (11) in (9) nam dasta z upoštevanjem (8) končno

$$x_1 + x_3 = \tfrac{1}{2}(a_1 - \sqrt{a_1}),\ x_2 + x_4 = \tfrac{1}{2}(a_1 + \sqrt{a_1}) \tag{12}$$

Iz prve in tretje enačbe sistema (3) dobimo še

$$x_1^2 + x_3^2 = 4(x_1 + x_3) - (x_2 + x_4) \tag{13}$$

Prva enačba (12) in enačba (13), ki jo lahko pišemo na osnovi (12)

$$x_1^2 + x_3^2 = \tfrac{1}{2}(3 a_1 - 5\sqrt{a_1})$$

nam enolično določata x_1 in x_3, če upoštevamo, da je $x_1 < x_3$. Malo dolg, toda enostaven račun nam da:

$$x_1 = \tfrac{1}{4}\left[a_1 - \sqrt{a_1} - \sqrt{(11 - a_1)a_1 - 2(10 - a_1)\sqrt{a_1}}\right]$$

Če pišemo še za a_1 njegovo numerično vrednost (9) in potegnemo kvadratni koren iz izraza x_1, dobimo po kratkem računu

$$A_0A_1 = s_{17} = \tfrac{1}{4}\sqrt{34 - 2\sqrt{17} - 2\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 4B}$$

pri čemer je

$$B = \sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{170 + 38\sqrt{17}}}$$

N. Prijatelj

Pozitronij

Pozitron je elementarni delec, ki ima enako maso $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg kot elektron in nasprotno enak električni naboj: $e = +1{,}60 \cdot 10^{-19}$ As. Pozitrone dobimo najlaže pri razpadu nekaterih umetno radioaktivnih elementov. Taka jedra, ki imajo presežek protonov, torej za svojo maso prevelik naboj, pogosto prehajajo v stabilna, s tem da oddajajo pozitrone; tako n. pr. $C^{11} \rightarrow B^{11} + \beta^+$, $Na^{22} \rightarrow Ne^{22} + \beta^+$. Zlasti Na^{22}, ki ga dobimo z obsevanjem magnezija z devteroni, je zelo močan in lahko dostopen vir pozitronov. Ni težko dobiti preparate, ki dajejo na gram 10^6 pozitronov na sekundo.

Življenjska doba pozitrona je ob prisotnosti katerekoli snovi zelo kratka, ker se o prvi priliki združi z elektronom, povprečno navadno okrog 10^{-9} sek. To je tudi vzrok, da pozitrona kljub temu, da je bil teoretsko že prej napovedan, zelo dolgo niso odkrili. Pri združitvi z elektronom ali tako imenovani *anihilaciji* nastaneta normalno dva kvanta γ z energijo $h\nu = m_e c^2 \doteq 0{,}511$ MeV, torej z valovno dolžino 0,0243 Å.

Že več let pa so domnevali, da se oba delca ne združita vedno takoj, ampak da prej nastane atom *pozitronij*, ki naj bi bil sestavljen iz pozitrona in elektrona, podobno kot je vodik narejen iz protona in elektrona. Pozitronij bi bil tako rekoč vodikov izotop z masno številko 0. V zadnjem času je bilo narejenih nekaj prav zanimivih poskusov, ki dokazujejo, da tak atom res obstoji, čeprav je zelo kratkoživ.

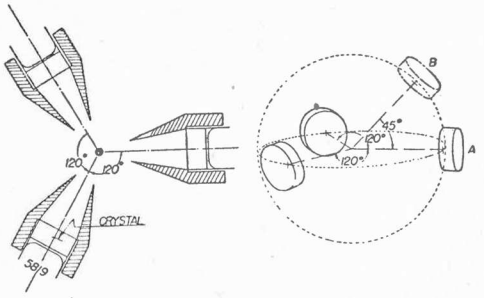
Leta 1949[1] so poročali, da so opazovali zakasnelo emisijo anihilacijskega sevanja, če so zavrli pozitrone iz Na^{22} v raznih plinih. Istočasno s pozitronom odda Na^{22} tudi žarek γ z energijo 1,3 MeV, ki nam lahko služi za registracijo trenutka, ko je nastal pozitron. Anihilacijsko sevanje je nastopilo z zakasnitvijo od $1{,}8 \cdot 10^{-7}$ do $6 \cdot 10^{-7}$ sek.

Teoretsko so mogli napovedati, da nastopa pozitronij v dveh osnovnih stanjih: V singuletnem stanju sta spina elektrona in pozitrona antiparalelna (*para-pozitronij*), v tripletnem pa sta oba spina paralelna (*orto-pozitronij*). Energijska razlika med orto- in para-pozitronijem je zelo majhna, komaj 0,013 eV. Prehodi iz enega stanja v drugo normalno niso možni. Obe obliki se vedeta kot nekak radioaktiven atom, ker se pozitron in elektron nazadnje vendarle združita. Para-pozitronij ima razpolovno dobo samo 10^{-10} sek in pri njegovem uničenju nastaneta dva kvanta γ; pri orto-pozitroniju z razpolovno dobo 10^{-7} sek pa nastanejo pri anihilaciji 3 kvanti. Energijski spekter pri trikvantni anihilaciji je zvezen; maksimum ima pri $h\nu = 2 m_e c^2/3 = 340$ keV, kar pomeni, da nastanejo pri anihilaciji orto-pozitronija trije kvanti, ki imajo po navadi približno enako energijo.* Opazovane zakasnele anihilacije gredo le na račun orto-pozitronija. Pri para-pozitroniju je čas prekratek, da bi ga mogli s sedanjimi metodami izmeriti.

M. Deutsch[2] je izmeril zakasnitev anihilacije pozitronija, ki je nastala pri emisiji pozitronov iz Na^{22}. Pri meritvah, ki jih je izvršil v čistem

* Hitrost razpada orto-pozitronija s trikvantno anihilacijo je bila dobljena teoretično: $\lambda_0 = 7{,}2 \cdot 10^6$ sek^{-1}. Eksperimentalno merjena hitrost $\lambda_0 = (6{,}8 \pm 0{,}7) \cdot 10^6$ sek^{-1} se odlično ujema z izračunano vrednostjo. To je bil prvi primer, pri katerem je bila možna eksperimentalna potrditev teoretičnih rezultatov za sevalni proces 3. reda.

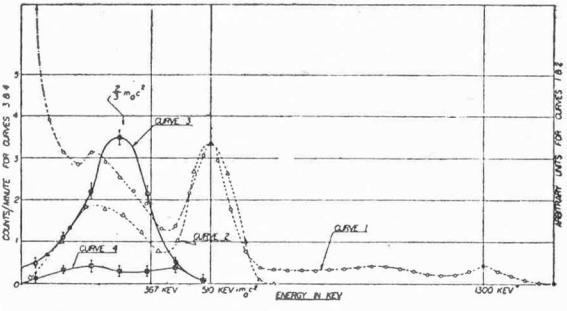
dušiku, je dobil trikrat več zakasnelih anihilacij kot pri poskusih, pri katerih je bilo primešanega dušiku 3% NO. Pojav je razlagal na naslednji način: Dušikov monoksid ima liho število elektronov, zato lahko pride do izmenjave elektrona med orto-pozitronijem in NO, pri čemer nastane para-pozitronij, ki hitro razpade. V freonu (CCl_2F_2) je efekt po dodatku NO še večji kot v dušiku, medtem ko je orto-pozitronij v samem freonu stabilnejši kot v dušiku.



Sl. 1 Koincidenčna naprava za opazovanje trikvantne anihilacije pozitronija (shematično). V eni ravnini so okoli izvora (Na^{22}) nameščeni trije scintilacijski števci (elektronske pomnoževalke 5819 s kristali NaJ [+Tl J]), četrti števec (B) pa je postavljen za 45° ven iz te ravnine. Zaščitni svinčeni tulci so narisani šrafirano. S. De Benedetti and R. Siegel, Phys. Rev. *85*, 371, 1952.

Potrdilo za zgornjo razlago je našel Deutsch v opazovanju scintilacijskega spektra, ki ga je dobil pri anihilaciji v čistem dušiku in v dušiku, ki vsebuje 3% NO. Pri čistem dušiku je spektrum premaknjen proti manjšim energijam, ker je tu nekaj trikvantne anihilacije, medtem ko imamo po dodatku NO skoraj samo še dvokvantno anihilacijo.

De Benedetti in Siegel[3] sta direktno opazovala trikvantno anihilacijo s pomočjo treh koincidenčnih števcev. Aparat je prikazan na sliki 1. Vir pozitronov je spet Na^{22}. Vsi trije števci so nameščeni v isti ravnini in oklepajo kote po 120°. Pod kotom 45° proti tej ravnini rotira četrti števec, ki je priključen na ostale tri v četvorno koincidenčno vezavo; ta sistem števcev meri tzv. *ozadje* (»slepe« sunke). Števci so priključeni na selektor za velikost sunkov, s čimer se približno ugotovi energija žarkov. Pri poskusu so šteli pri raznih velikostih sunkov koincidence pri treh števcih, ki leže v isti ravnini, posebej pa koincidence pri sistemu štirih števcev. Diferenca da število sunkov zaradi trikvantne anihilacije. Če so zavrli pozitrone v trdni snovi, so dobili na koplanarnih števcih skoraj še enkrat toliko udarcev kot na štirih koincidenčnih števcih. Ko so pa namestili Na^{22} pod aluminijast zvon, napolnjen s freonom pod pritiskom 6 at, je bilo sunkov na koplanarne števce desetkrat več. Ta poskus ponovno dokazuje veliko obstojnost orto-pozitronija v freonu.



Sl. 2. Scintilacijska spektra, ki so jih dobili z napravo na sl. 1. Krivuljo 1 je dalo štetje z enim samim števcem, krivulje 2, 3, 4 pa kažejo energijsko porazdelitev dvojnih, trojnih in četvernih koincidenc. Na krivulji 1 in 2 vidimo maksimum pri 0,51 MeV, ki ga da dvokvantna anihilacija. Na krivulji 3 dobimo samo še maksimum pri 0,34 MeV, ki ga da trikvantna anihilacija, medtem ko kaže krivulja 4 ozadje. S. De Benedetti and R. Siegel, Phys. Rev. *85*, 371, 1952.

Podobne meritve so izvršili tudi z dvema koincidenčnima števcema. Rezultati meritev so na sliki 2, ki kaže porazdelitev velikosti sunkov pri raznih merjenjih. Krivuljo 1 so dobili pri štetju z enim samim števcem. Krivulja ima dva izrazita maksima, ki so ju naredili kvanti γ iz jedra Na^{22} (1,3 MeV) in kvanti z energijo 0,51 MeV, ki so nastali pri dvokvantni anihilaciji. Ta krivulja je služila za umeritev energijske skale v scintilacijskem spektru. Krivulja 2, ki so jo dale meritve z dvema koincidenčnima števcema, ima izrazit maksimum pri energiji $h\nu = m_e c^2 = 0{,}51$ MeV. Krivulja 3 je rezultat merjenj s tremi koincidenčnimi števci; njen maksimum je pri $2\,m_e c^2/3 = 0{,}34$ MeV, kar je jasen dokaz za trikvantno anihilacijo. Krivulja 4 pa prikazuje ozadje, merjeno s četvorno koincidenčno napravo.

Podobne poskuse so naredili v nehomogenem polju elektromagneta; magnetno polje je zadržalo pozitrone, da se niso preveč oddaljili od izvora. Merili so z dvema koincidenčnima števcema, nameščenima pod kotom 180^0, število anihilacij v argonu, kateremu so dodali 3% NO, nato pa še v argonu pri dodatku 3% dušika. Razlika med obema vrednostima, deljena s prvo vrednostjo, je enaka delu pozitronija, ki razpade po trikvantni anihilaciji.

De Benedetti in Riching[4] sta pri svojih meritvah ugotovila, da življenjska doba pozitronija ni odvisna od gostote in atomskega števila snovi, v kateri se anihilacija vrši. Presenetljiva pa je ugotovitev, da je razpolovna doba orto-pozitronija v vseh kovinah ista. To je v nasprotju s predstavo, da izginjajo pozitroni pri trkih z valenčnimi elektroni, katerih število je odvisno od atomske gostote. Pri izolatorjih so našli zvezo med razpolovno dobo pozitronija in kemijskimi lastnostmi izolatorja. V snoveh s stabilnimi molekulami, kot n. pr. kremen, parafin, je življenjska doba daljša kot v snoveh, ki so močno reaktivne.

R. A. Ferrell[5] je preiskoval finostrukturno razcepitev med osnovnima stanjema pozitronija ^1S in ^3S. Prav v zadnjem času so bile objavljene tudi preiskave Zeemannovega efekta, t. j. razcepitve energijskih nivojev v magnetnem polju.

S. Kandare

Literatura:

1. J. W. Shearer, M. Deutsch: The Lifetime of Positrons in Matter. Phys. Rev. *76*, 462 (1949).

2. M. Deutsch: Evidence for the Formation of Positronium in Gases. Phys. Rev. *82*, 455 (1951).

3. S. De Benedetti, R. Siegel: Three-Quantum Annihilation of Positronium. Phys. Rev. *85*, 371 (1952).

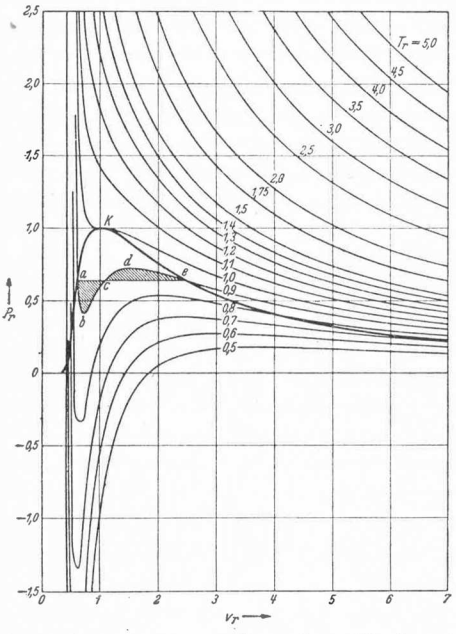
4. S. De Benedetti, H. J. Riching: Half-Life of Positronium in Condensed Matter. Phys. Rev. *85*, 377 (1952).

5. R. A. Ferrel: The Positronium Fine Structure. Phys. Rev. *84*. 858 (1951).

Negativni pritisk v tekočinah

Medtem ko je pritisk v trdni snovi lahko pozitiven ali negativen (pritisk, nateg), imamo pri tekočinah navadno opraviti le s pozitivnimi pritiski. Da pa je tudi v tekočinah mogoč negativni pritisk, nam pokažejo naslednji poskusi:[1]

1. Zavito natego, po kateri se pretaka tekočina iz više stoječe posode v niže stoječo, namestimo pod poveznik, iz katerega izsesavamo zrak. Proti pričakovanju deluje natega tudi še v vakuumu, če ni v njej nobenega mehurčka. Najmanjši mehurček pa povzroči, da se tekočina v nategi pretrga. Pri običajnem pritisku mehurčki ne škodijo, ker drži zunanji pritisk tekočino v nategi skupaj.



Sl. 1. Izoterme po Van der Waalsovi enačbi. Na abscisi je naneseno razmerje volumna s kritičnim volumnom, na ordinati pa razmerje pritiska s kritičnim pritiskom. Številke izoterm nam kažejo razmerje med temperaturo in kritično temperaturo. Vzeto iz knjige E. Schmidt: Thermodynamik, str. 207, sl. 127.

2. V nekaj metrov dolgo, dobro očiščeno barometrsko cev natočimo vode, iz katere smo s prekuhavanjem izgnali zrak. Iz nje izsesamo zrak in jo zatalimo. Nato jo nagnemo tako, da napolni voda ves zgornji del cevke, nakar jo previdno postavimo pokonci. Voda obvisi na vrhu cevi, kot da se je prilepila. Šele po močnem trkanju nam uspe spraviti vodo iz zgornjega dela. Zanimivo je, da se vodni stolpec p r e t r g a , ne odtrga se pa od stene; nekaj vode še obvisi na vrhu cevke.

3. Tenka plast vode zlepi dve dobro očiščeni stekleni plošči. Zelo veliki sili sta potrebni, da ju spravimo narazen. Plošči s površino 10 cm^2 sta vzdržali skupaj še pri sili 160 kp. V vodi med ploščama je torej vladal pritisk minus 16 atm.

Iz teh poskusov pa tudi iz drugih meritev, ki so bile narejene do l. 1949, ni bilo mogoče sklepati o tem, kolikšen je maksimalen negativni pritisk, ki ga tekočina še prenese. Dosežene vrednosti so bile bolj značilne za metodo kakor pa za snov samo. Do leta 1949 je bila maksimalna dosežena vrednost negativnega pritiska v vodi okoli 40 atm.[2]

Kako je z negativnim pritiskom v tekočinah, nam pokaže že Van der Waalsova enačba $(p + a/V^2)(V - b) = R\,T$; konstanti a in b sta za vsako snov karakteristični in se takole izražata s kritičnimi vrednostmi: $b = \frac{1}{3} V_k$ in $a = 3\,p_k\,V^2_k$. Ta enačba nam kvalitativno dobro opisuje realni plin in tekočino ter prehod med njima. Njen pV diagram nam kaže slika 1.

Pri temperaturah pod kritično temperaturo imajo izoterme kolenasto obliko. Toda tu se snov ne obnaša tako, kot kaže Van der Waalsova enačba, temveč imamo pri konstantnem pritisku (parnem pritisku) nezvezan prehod iz tekočine v paro. Ta prehod prikažemo na diagramu z vodoravnimi daljicami, katerih krajišča leže na debelo izvlečeni krivulji

(slika 1, n. pr. daljica od *a* do *e* na izotermi 0,9). V področju pod to debelo izvlečeno krivuljo imamo skupaj tekočino z nasičeno paro. Kolenasti deli izoterm v tem področju pa predstavljajo stanja, ki niso stabilna. Blizu krajišč pa so ti deli izoterm vendarle dosegljivi z eksperimentom, ker imamo tu metastabilna stanja: na levi je preugreta tekočina, na desni pa podhlajena para. Prav daleč po izotermi ni mogoče priti, na noben način pa ne preko obeh ekstremov. Stanja, ki ležijo med obema ekstremoma (n. pr.: sl. 1, med *b* in *d*, na izotermi 0,9), so labilna in zato eksperimentom nedosegljiva; v njih bi imela snov negativno stisljivost, kar pa termodinamično ni mogoče.

Diagram pokaže tudi to, da segajo že kmalu pod kritično temperaturo izračunane izoterme pod abscisno os. To kaže, da more obstajati preugreta tekočina tudi še pri negativnem pritisku.

Ekstrem pritiska pri dani temperaturi dobimo iz enačbe $(\partial p/\partial V)_T = 0$. Za temperaturo, ki je enaka polovici kritične, dobimo, da je maksimalni negativni pritisk enak štirikratnemu, kritičnemu pritisku. Kritični podatki za vodo so $T_k = 647^0$ K ter $p_k = 225$ atm, torej bi pri temperaturi 324^0 K, to je 51^0 C, znašal maksimalni negativni pritisk 1000 atm. Maksimalni negativni pritisk pa se tu s temperaturo močno spreminja, namreč za 5,5 atmosfer na stopinjo.

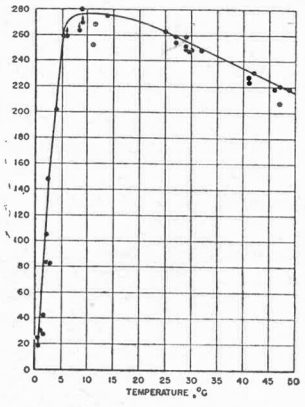
Eksperimentalno doseženi rezultati so do pred kratkim močno zaostajali za zgoraj izračunano vrednostjo za vodo. Šele leta 1949 je uspelo L. J. Briggsu v National Bureau of Standards v Washingtonu[3] z novo, silno preprosto, a duhovito metodo doseči precej večje negativne pritiske od prejšnjih. Tako je dosegel pri vodi maksimalni negativni pritisk minus 270 atm pri temperaturi okrog 10^0 C, kar že presega natezno trdnost svinca (125 kp/cm^2) ter stekla (250 kp/cm^2).

Preiskovana tekočina se je nahajala v stekleni kapilari s premerom 0,6 do 0,8 mm. Kapilara je bila približno 1 cm pred obema koncema zavita nazaj pod kotom 140^0 v obliki črke Z in odprta na obeh krajeh. Na svoji sredi je bila kapilara pritrjena na gornji konec navpično stoječe gredi elektromotorja in sicer tako, da je bila ravnina kapilare vodoravna. Motor, katerega hitrost vrtenja so lahko spreminjali, je bil opremljen z električnim tahometrom. Kapilara in motor sta se nahajala pod poveznikom (premer 25 cm), v katerem so zmanjšali zračni pritisk na 30 do 40 torov, zato da bi preprečili gretje zaradi zračnega upora.

Tekočina je izpolnjevala srednji del v kapilari in je segala še nekoliko čez zapognjeni mesti. Pri vrtenju silita obe polovici tekočinskega stolpca narazen. Na tekočinski stolpec višine dr, ki je za r oddaljen od rotacijske osi, deluje sila $dF = S\varrho\omega^2 r\, dr$, pri čemer je S prerez cevke, ϱ gostota, ω pa kotna hitrost. Z integracijo dobimo pritisk v sredini kapilare: $p = -\frac{1}{2}\varrho\omega^2 r^2_0$, pri čemer je r_0 razdalja obeh gladin od rotacijske osi.

Z obliko cevke je bilo rešeno vprašanje stabilnosti tekočinskega stolpca med vrtenjem. Ravna cevka ne bi ustrezala; simetrična lega vode bi bila sicer ravnovesna, toda labilna. Voda bi namreč že po majhnem tresljaju iztekla iz cevke. Pri omenjeni zaviti cevki pa je stvar drugačna: če namreč med vrtenjem sega tekočina na eni strani dalj čez zavito mesto kot na drugi, je tu gladina bliže osi kot tam. Tekočina vleče zato s te strani z manjšo silo kot z nasprotne, zato voda sama leze nazaj, dokler ne stoji simetrično glede na rotacijsko os. Čim pa se tekočina nekje v sredi pretrga, brizgne na obeh straneh iz cevke.

Lega tekočine v kapilari je vidna med vrtenjem tudi pri zelo veliki hitrosti. Raztrganje stolpca opaziš po spremenjenem odsevu na kapilari. Če je tekočina elektrolit, je mogoče ugotoviti pretrganje tekočine v kapilari še na drug način: Obroč filtrirnega papirja je pritrjen na steno pločevinskega poveznika v višini kapilare, preko njega pa je položen ožji obroč iz kovinske mreže. Ko brizgne elektrolit iz kapilare, omoči filtrirni papir in tako vzpostavi kontakt med kovinsko mrežo in steno poveznika, s tem pa vklopi tudi tok skozi kontrolni galvanometer. Pri meritvah z vodo je potrebno filtrirni papir predhodno namočiti v raztopini kuhinjske soli in ga nato posušiti.



Sl. 2. Doseženi negativni pritisk v vodi, v odvisnosti od temperature. Pritisk je nanesen v barih (1 bar = $= 10^5$ N/m^2 = 0,987 Atm). L. J. Briggs, J. Appl. Phys., *21*, 721, 1950.

Rezultate meritev maksimalnega negativnega pritiska v vodi, v odvisnosti od temperature kaže slika 2. Točke s strelico pomenijo, da se pri tem pritisku vodni stolpec še ni pretrgal. Posamezne meritve so bile natančne na $\pm 1{,}5\%$. Da vrednosti niso slučajne, spoznamo iz tega, da so dale ponovitve pri isti temperaturi za maksimalni negativni pritisk iste vrednosti. Maksimalni negativni pritisk pada med 25^0 C in 50^0 C za okoli 2 atmosferi na stopinjo, kar ni daleč od vrednosti, ki smo jo izračunali iz Van der Waalsove enačbe. Pri okroglo 10^0 C doseže maksimalni negativni pritisk svojo največjo vrednost (— 270 atm.), nato pa proti pričakovanju močno pade in doseže pri 0^0 C desetinko svoje največje vrednosti. Razlage za to posebnost zaenkrat še nimamo.

M. Ribarič

Literatura:

1. R. W. Pohl: Mechanik, Akustik und Wärmelehre. Berlin 1947.
2. E. Schmidt: Einführung in die technische Thermodynamik. Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1950.
3. L. J. Briggs: Limiting Negative Pressure of Water. J. Appl. Phys.,*21*, 721, 1950.

* * *

Elektronski instrumenti so ključ za meritve in kontrole pri raziskavah v jedrski fiziki in v jedrski tehnologiji, ki se je razvila za praktične potrebe.

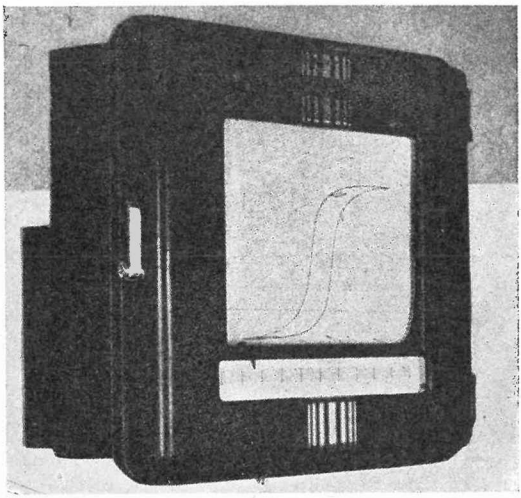
Število kilovatnih ur električne energije na delavca se je uveljavilo v industriji kot ena od mer za zmogljivost. Podobno lahko ocenimo zmogljivost pri uporabi in pri raziskavah jedrske fizike po številu elektronk, ki pridejo na raziskovalca. Danes so potrebni za napredek pri raziskovanju poleg ustvarjalnega duha in eksperimentalne spretnosti tudi še primerni instrumenti s čedalje večjo zmogljivostjo. Dobro bi bilo, če bi instrumentom samim lahko zaupali fizikalna merjenja in še druge ponavljajoče se operacije, raziskovalcu pa bi pustili njegovo glavno nalogo, da misli in presoja.

N. F. Moody, W. D. Howell, W. J. Battell, R. H. Taplin, Rev. Sc. Instr. 22, 439, 1951.

NOVI INSTRUMENTI

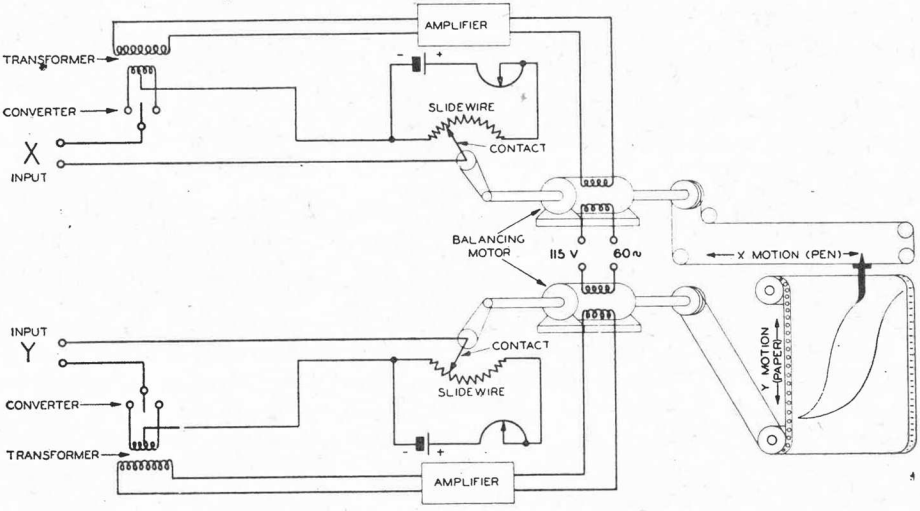
Pisalni instrument za diagrame X—Y

Instrument Speedomax X—Y Recorder, izdelek tvrdke Leeds & Northrup Co., 4907 Stenton Ave., Phila., Pa., je namenjen za zvezno risanje funkcijske odvisnosti dveh napetosti in s tem poljubnih dveh količin, ki jih moremo preko raznih pretvornikov spremeniti v ustrezne električne napetosti (sl. 1). Diagram dobimo v pravokotnem koordinatnem sistemu: eno količino pomeni abscisa, drugo pa ordinata. Pri dovolj počasnih pojavih tekmuje ta instrument uspešno s katodnim oscilografom, ker riše diagram na papir in ni treba fotografirati. Uporabljamo ga lahko za snemanje karakteristik elektronk, histereznih krivulj, odvisnosti med napetostjo ali temperaturo in raztezkom itd.



Sl. 1.

Naprava ima dva neodvisna sistema: eden premika papir, ki je namenjen za diagram, v navpični smeri, drugi pa premika pero, ki riše krivuljo, v vodoravni smeri. Oba sistema delata enako (sl. 2). Istosmerni vhodni signal gre preko vibratorja, ki



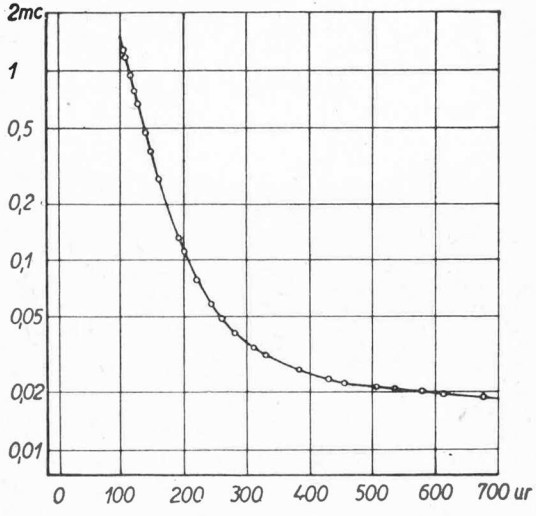
Sl. 2.

ga pretvori v izmeničnega, v transformator. Transformirani signal pa še toliko ojačimo, da sproži motorček za premikanje peresa ali papirja. Istočasno pa premika motorček tudi drsnik na potenciometru in spreminja pomožno napetost, ki je vhodni napetosti zaporedna in jo kompenzira. V primarni strani transformatorja teče tok le toliko časa, dokler ni pomožna napetost enaka vhodni. Samo toliko časa se vrti tudi motorček. Vse premikanje gre tako skozi skoraj ravnovesna stanja med vhodno in pomožno napetostjo in je sinhrono z vhodnim signalom. Seveda ne smejo biti signali prehitri. Posebni stiki v ojačevalniku dušijo vrtenje motorčka in preprečijo nihanje okrog ravnovesnega stanja.

Velikost papirja za diagram je približno 25 × 25 cm. Najmanjši obseg za vodoravni vhodni signal je 2,5 mV, za vertikalni 10 mV. Najmanjši čas, ki je potreben za hitrostno enakomeren cel odklon, je 3 ali 4 sekunde. Cena instrumenta je 1400 dolarjev.

D. Jamnik.

VPRAŠANJA



6. Radioaktivna zmes

S števcem so opazovali aktivnost nekega umetno radioaktivnega preparata. Aktivnost je pojemala, kot kaže diagram na levi. V diagramu je na absciso nanesen čas v urah, na ordinato pa logaritem števila sunkov na minuto. Že diagram sam nam pokaže, da je preparat mešanica dveh izotopov, katerih eden ima krajši, drugi pa daljši razpolovni čas. Kolikšna sta oba razpolovna časa? V kakšnem razmerju sta obe aktivnosti ob začetku merjenja? Kdaj sta aktivnosti enaki?

7. Krivulja zasledovanja

Gospodar pelje svojega psa na sprehod. Spotoma se zaradi nekega opravka na cesti ustavi in med tem časom se pes oddalji na sosednjem travniku v smeri pravokotno na cesto. Po končanem opravku pokliče gospodar psa in se nato odpravi po cesti naprej, pes pa steče za njim. Kdaj in kje bo pes dohitel gospodarja, če teče po travniku zmerom naravnost proti njemu in če vzamemo pri tem, da je cesta ravna in se gibljeta gospodar in pes s konstantnima hitrostima c_g in c_p ($c_g < c_p$), začetna oddaljenost psa od ceste pa je a. Kakšno obliko ima pot, ki jo preteče pes?

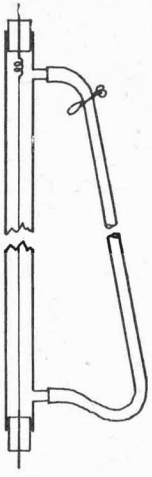
Termodifuzija

Koncentracijske razlike v raztopinah ali zmeseh plinov se izravnavajo z *difuzijo;* zaradi gibanja molekul namreč pronica vsaka sestavina tja, kjer je njena koncentracija manjša. Gostota snovnega toka je sorazmerna gradientu koncentracije: $q = -D \text{ grad } c$. V zmesi pa tudi temperaturne razlike povzročijo difuzijo. Ta efekt se imenuje *termodifuzija,* da ga razlikujemo od prej omenjene navadne difuzije. Termodifuzijski prispevek k snovnemu toku je sorazmeren temperaturnemu gradientu. Oboje skupaj torej lahko podamo z enačbo: $q = -D \text{ grad } c + K \text{ grad } T$. Če vzdržujemo neki stalni temperaturni gradient (n. pr. tako, da zmes držimo med ploščama z različnima temperaturama), bomo čez nekaj časa dosegli stacionarno stanje, v katerem se pa koncentracijske razlike niso popolnoma izravnale. Zdaj je $q = 0$, toda iz enačbe sledi: $\text{grad } c = (K/D) \text{ grad } T$. Za majhne razlike velja torej $dc = (K/D)dT$; razlika koncentracij na dveh mestih je sorazmerna razliki temperatur. Tudi če smo v začetku imeli homogeno zmes, so zaradi temperaturnih razlik nastale razlike v koncentracijah.

Pri večjih razlikah je še treba upoštevati, da sta omenjena koeficienta (D in K) odvisna od koncentracij in od temperature. Pri binarni plinski zmesi je: $K = \alpha c (1 - c) TD$, kjer sta c in $(1 - c)$ obe koncentraciji. Navadno povemo koncentracijo z *molskim ulomkom,* t. j. s številom molov prizadete komponente na celotno število molov. Koeficient α je neimenovano število, ki je odvisno samo še od tega, kakšne so molekule. Navadno je približno enake velikosti kot kvocient $\frac{1}{2}(m_2 - m_1)/(m_2 + m_1)$, kjer je m_1 molekulska masa tiste sestavine, katere koncentracijo smo zaznamovali s c, gostoto toka pa s q. Skoraj vedno ima α isti predznak kot omenjeni kvocient; to pomeni, da se lažja snov kopiči tam, kjer je temperatura višja.

Z upoštevanjem zgornjega izraza za K dobimo iz prejšnje enačbe po kratkem računu, da v stacionarnem stanju po vsej posodi velja: $c/(1 - c) = \text{konst.} \, T^{\alpha}$. Od tod že lahko izračunamo razmerje koncentracij, če je dano razmerje temperatur. Vzemimo najprej plina z zelo različnima molekulskima masama (n. pr. $CO_2 + H_2$), tako da je α blizu $\frac{1}{2}$. Temperaturi naj bosta 300^0 K in 600^0 K. Če je na hladni strani koncentracija vodika 50%, ga je na vroči strani blizu 59%. Pri manjši razliki molekulskih mas je seveda razlika koncentracij mnogo manjša. Če se razlikujeta masi za 10% (kot n. pr. Ne^{22} in Ne^{20}), znaša α samo okrog 1/40; če je zdaj zopet na eni strani $c = \frac{1}{2} = 50\%$ ter $T_1 = 300^0$ in $T_2 = 600^0$ K, je na drugi strani $c = 50{,}4\%$.

Čeprav dosežemo s termodifuzijo v eni stopnji razmeroma slabo ločitev, jo je vendarle mogoče izkoristiti za izločitev sestavin iz plinskih zmesi, zlasti še za ločitev izotopov. Treba je pač zaporedoma povezati več stopenj. Clusiusu in Dickelu je uspela zelo preprosta in duhovita iznajdba, ki je omogočila praktično izvedbo te zamisli. To je *ločitvena cev,* ki deluje kot mnogostopenjska termodifuzijska naprava; konvekcija v cevi



Ločitvena cev.

pa skrbi za protitočno izmenjavo. Z ločitveno cevjo pridemo na razmeroma lahek način skoraj do čistih izotopov. Priprava je tako preprosta, da z njo celo v šoli lahko pokažemo termodifuzijo. Ta poskus si bomo spodaj ogledali.

Poprej bo bralca morda zanimal kratek historiat. Termodifuzije niso odkrili fiziki, ampak matematika Enskog (1911, 1917) in Chapman (1917). Pri izdelavi eksaktne teorije transportnih pojavov (toplotne prevodnosti, viskoznosti, difuzije) v plinih je tako rekoč mimogrede prišel na dan novi efekt. Čudno se zdi, da je Maxwell, ki je že pol stoletja prej prišel s to teorijo zelo daleč, termodifuzijo prezrl. Računal je namreč s takimi molekulami, pri katerih so odbojne sile obratno sorazmerne peti potenci medsebojne razdalje; računi so v tem primeru precej bolj preprosti kot sicer. Toda ravno pri takih molekulah — kot se je kasneje izkazalo — ni nobene termodifuzije (iz predznaka koeficienta α so mogli tudi sklepati, da pri večini molekul pojemajo sile hitreje kot z recipročno peto potenco razdalje).

Dootsonu (1917) se je prvemu posrečilo, da je z eksperimentom potrdil eksistenco termodifuzije. Vendar je bil pojav še dolgo zanimiv le za teoretika, posebno zato, ker je teorija precej težka; za širši krog praktikov je ostal neopažen. Preobrat je prinesla šele iznajdba ločitvene cevi (1939), s katero je termodifuzija postala čez noč tehnično pomembna. Danes pa že obstajajo na pol tovarniške termodifuzijske naprave, ki služijo za ločenje izotopov.

* * *

Ločitveno cev si napravimo iz 1 m dolge ravne steklene cevi premera 1 cm, na katero pritalimo nekaj centimetrov od obeh koncev dva tanjša stranska dovoda. Po sredi cevi napnemo 0,1 mm debelo žico iz cekasa, kanthala ali volframa tako, da jo z zadosti močno spiralno vzmetjo pritrdimo na debeli bakreni žici, ki gresta skozi oba zamaška cevi. Žico segrejemo z električnim tokom do rahlega rdečega žara. Mora pa biti koncentrična s cevjo, cev sama pa strogo navpična, če hočemo dobiti močen efekt.

Cev napolnimo s primerno plinsko zmesjo. Ker ima žica za nekaj sto stopinj višjo temperaturo od stene cevi, nastane termodifuzija. Lažjih delcev je več okoli vroče žice, težjih pa ob hladnejši steni. Poleg tega pride do konvekcije: topel in lahek plin ob žici se dviga, hladni in težji ob steni pa pada. Nastane tok, ki jemlje lažje molekule po sredi navzgor, težje pa nosi ob steni navzdol. Tako pride do prav izdatnega ločenja, ki ga lahko preprosto in nazorno opazujemo.

Zelo pripravna zmes za demonstracijo termodifuzije je svetilni plin. Ljubljanski plin je še posebno dober (namreč dober za ta namen), ker ima mnogo CO_2. Zgornji dovod cevi priključimo z gumijasto cevjo na plinsko pipo in s plinom popolnoma izpodrinemo zrak iz priprave. Nato nataknemo drugi konec gumijaste cevi na spodnji dovod in jo zgoraj zapremo s stiščkom. Žico zopet segrejemo s tokom do komaj opaznega rdečega žara; najbolje je, da opazujemo v temi. Tok mora biti tu nekoliko večji kot pri zraku, ker ima svetilni plin zaradi vodika večjo toplotno prevodnost. Že po nekaj minutah vidimo, da žari žica spodaj vedno bolj svetlo, zgoraj

pa ugaša. Spodaj se namreč nabira težji CO_2, ki ima manjšo toplotno prevodnost kot vodik, ki se zbere zgoraj in žico močneje hladi. Tako smo dosegli prav očitno in izredno hitro ločenje plinske zmesi, kljub težnji difuzije po izenačenju koncentracij.

Da izenačenje po difuziji niti pri plinih ne gre prav hitro, ugotovimo tako, da pustimo cev pri miru in brez toka. Ko čez četrt ure tok zopet sklenemo, vidimo, da je zmes še vedno ločena. Še en poskus nas prepriča o tem. Po prvotni ločitvi tok izključimo, cev pa hitro obrnemo za 180^0. Če po nekaj minutah žico zopet segrejemo, vidimo, da je CO_2 še vedno zgoraj in da »sedi« na lažjem plinu. Mimogrede si oglejmo še naslednji poskus! Če stiščck na zvezni cevi odpremo, dobimo krožni tok po obeh ceveh. Zdi se, da se žareči del žice počasi premika navzgor po žici; na vrhu izgine in se potem pojavi zopet na spodnjem koncu. To se še večkrat ponovi, preden se plina popolnoma premešata.

Termodifuzija nam omogoča ločenje plinskih, pa tudi tekočih zmesi. V poštev prihaja predvsem pri zmeseh izotopov in sploh pri zmeseh kemično podobnih snovi, ki se ločijo po molekulski masi. Še več: ker je efekt odvisen tudi od medmolekularnih sil, lahko pričakujemo celo ločenje komponent z enako maso, n. pr. ločenje izomerov. Nadalje nam olajša termodifuzija laboratorijsko čiščenje plinov od sledov težje ali lažje primesi, ki se v kratkem času kvantitativno izloči. Tudi odstranjevanje megle in prahu je možno (termoprecipitacija).

S termodifuzijo si lahko razložimo nabiranje prahu nad pečmi in radiatorji, od koder se dviga topel zrak, iz katerega se izloča prah na hladnejši steni. Čudni pojav, da se včasih vidi jeklena konstrukcija stavbe skozi omet, si tudi lahko razložimo s termodifuzijo. Jeklo in tanki omet nad njim imata namreč zaradi boljše toplotne prevodnosti lahko drugo temperaturo kot okolica. Kadar je ta omet hladen, pobira iz zraka prah, ki ostaja na njem in kaže »senco« jeklenega ogrodja.

I. Kuščer in D. Leskovšek

S. Chapman, T. G. Cowling: *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases.* Cambridge 1939.

K. Clusis, C. Dickel: *Das Trennrohr,* Z. phys. Chem. B, *44,* 397, 1939.

R. C. Joncs, W. H. Furry: *The Separation of Isotopes by Thermal Diffusion,* Rev. Modern Physics, *18,* 151, 1946.

New Way to Separate Liquids Chemical Engineering, *59,* 222, 1952.

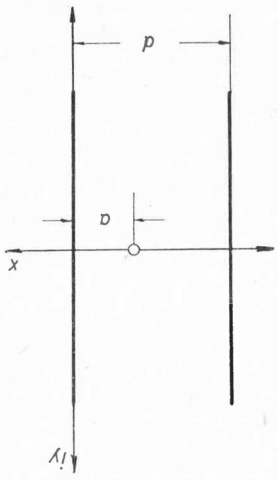
* * *

Fizike ne smemo začeti učiti drugače kot z nazornimi in zanimivimi poskusi. Mikaven poskus je pogosto že sam po sebi več vreden kot dvajset obrazcev, ki si jih skuhal v miselni retorti. Poleg tega je treba mladi glavi, ki se mora šele znajti v svetu raznolikih pojavov, popolnoma prizanesti z obrazci. Zanjo so obrazci v fiziki ravno tako neprijetna strašila kot datumi v zgodovini. V nižji šoli lahko začne učiti fiziko le spreten in živahen eksperimentator, ki lahko pričakuje, da ga bodo učenci razumeli in da bodo fizike bolj veseli kot katerekoli vaje iz latinske slovnice.

Albert Einstein. Moszkowski; Einstein, Einblicke ins seine Gedankenwelt, 1921, str. 77.

Pripomba k članku o modelu katodne cevi

V drugi številki letošnjega »Obzornika« je J. Lep opisal poskus, ki naj ponazori delovanje katodne cevi. Med navpičnima ploščama kondenzatorja pada vodni curek, ki je električno zvezan z eno ploščo. Zaradi influence se na površini curka nabere naboj, na katerega deluje polje s silo $F = eE$. Zato se curek odkloni. Za razliko proti katodni cevi pa odklon ni sorazmeren napetosti, ampak, kot pravi omenjeni članek, približno sorazmeren njenemu kvadratu. Nadalje je eksperiment pokazal odvisnost od oddaljenosti curka od plošče. S tem v zvezi pa članek ne daje nobene kvantitativne razlage. To vrzel naj dopolnijo spodnje vrstice.

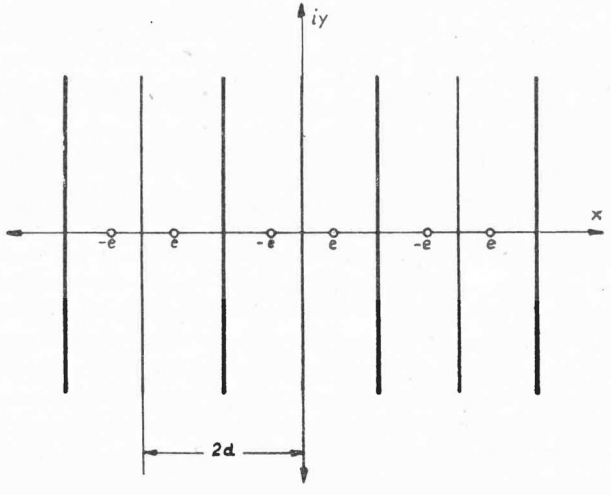


Sl. 1.

Na isti problem naletimo pri enonitnem elektrometru, če žico zvežemo z eno ploščo. Da bomo mogli povedati, kolikšen je odklon žice, bo treba izračunati silo, ki nanjo deluje. Izkaže se, da je račun bolj zapleten kot pri katodni cevi, je pa rešljiv s funkcijsko-teoretičnimi metodami.

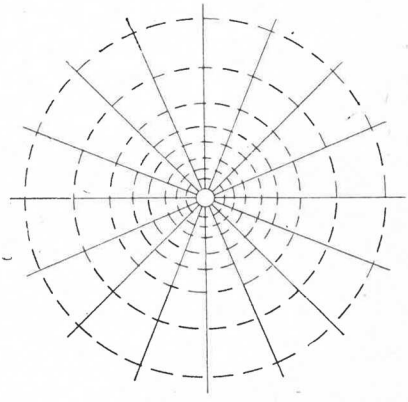
Seveda bomo napravili iste poenostavitve kakor pri katodni cevi. Plošči naj bosta vzporedni in naj se raztezata v neskončnost, žica pa prav tako. Žica naj bo ravna in vzporedna s ploščama, tako da je problem dvodimenzionalen. Premer žice naj bo majhen v primeri z razmakom plošč d in oddaljenostjo žice od plošče a. Sedaj postavimo koordinatni sistem tako, da je ravnina (xy) pravokotna na žico, ena izmed plošč naj prereže ravnino (xy) vzdolž osi y, žica pa prebije to ravnino v točki a na osi x (glej sl. 1).

Sila na žico je $F = eE$, kjer je e naboj na dolžinsko enoto, E pa električna poljska jakost na tistem mestu, kjer je žica, če bi žice tam ne bilo. Žica povzroči, da se naboji na ploščah premaknejo, E v enačbi pa mora biti tista jakost, ki jo povzroče premaknjeni naboji. Če torej hočemo poznati silo, moramo poznati polje, ki vlada med ploščama, in naboj, ki se nabere na žici. Vzemimo najprej, da naboj e že poznamo. Poljska jakost je $E = -\text{grad}\,\varphi$, kjer je φ potencial. Ker je problem ravninski, zadošča potencial Laplaceovi enačbi $\Delta\varphi\,(x, y) = 0$ v ravnini. Vsak tak potencial pa je realna komponenta neke analitične funkcije. To funkcijo bomo mogli najti, če bomo poznali njene

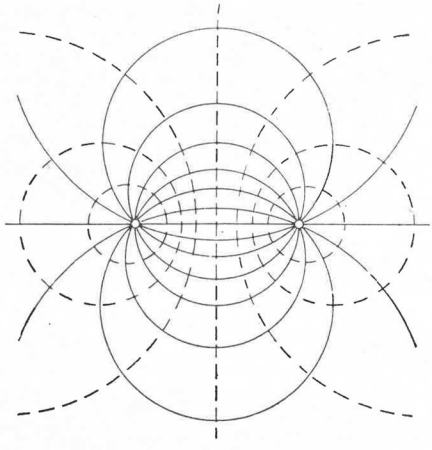


Sl. 2.

singularnosti na vsej ravnini. Potencial ene same žice je $(e/2\pi\varepsilon_0)\ln r$, kjer pomeni r razdaljo od žice. Zato je potencial, ki ga iščemo, v točki a singularen kot $(e/2\pi\varepsilon_0)\ln r$. Smo torej pred temle problemom: Najti je treba logaritmični potencial φ, ki je v pasu $0 \leqq x \leqq d$ povsod regularen z izjemo točke a, kjer je singularen kot $(e/2\pi\varepsilon_0)\ln r$, na vzporednih premicah $x = 0$ in $x = d$ pa zavzame konstantni vrednosti $\varphi = 0$ na prvi in $\varphi = U_0$ na drugi premici. Če odštejemo od potenciala, ki ga iščemo, izraz $U_0 x/d$, dobimo potencial, ki ima na obeh vzporednih premicah vrednost nič. Ta potencial je realna komponenta neke analitične funkcije $f(z)$. Le-ta je za $z = a$ singularna kot $(e/2\pi\varepsilon_0)\ln(z-a)$, na premicah $x = 0$ in $x = d$ pa ima realno komponento nič. Če pa ima analitična funkcija na kaki premici realno komponento nič, se da preko te premice analitično nadaljevati in ima v simetrično ležečih točkah vrednosti, ki se razlikujejo le v znaku realne komponente. Torej je funkcija $f(z)$ v točki $z = -a$, ki je zrcalna k točki $z = a$ na os y, singularna kot $-(e/2\pi\varepsilon_0)\ln(z+a)$. Pas $0 \leqq x \leqq d$ lahko zrcalimo na premici $x = 0$ ter $x = d$ in nato še na vse premice, ki jih dobimo pri zrcaljenju iz teh dveh.



Sl. 3a. Polje nabite žice.



Sl. 3b. Polje dveh nasprotno nabitih žic.

Začetni pas se tako preslika v neskončno mnogo vzporednih pasov, ki prekrivajo vso ravnino ravno enkrat (sl. 2). Točka a je pri teh zrcaljenjih prešla v točke $a + 2nd$ in $-a + 2nd$, $n = 0, \pm 1, +2, \ldots$ Za prve je potrebno sodo število zrcaljenj, za druge pa liho število. Zato je v prvih funkcija $f(x)$ singularna kot $(e/2\pi\varepsilon_0)\ln(z-a-2nd)$, v drugih pa kot $-(e/2\pi\varepsilon_0)\ln(z+a+2nd)$. Povsod drugod na ravnini (z) pa je funkcija regularna. Kvocient naslednjih dveh neskončnih produktov

$$(z-a)\prod_{n=1}^{n=\infty}\left[1-\left(\frac{z-a}{2nd}\right)^2\right]$$

in

$$(z+a)\prod_{n=1}^{n=\infty}\left[1-\left(\frac{z+a}{2nd}\right)^2\right]$$

je očitno taka funkcija, katere logaritem ima vse gori naštete singularnosti in le te. Ta dva produkta pa se dasta enostavno izraziti s funkcijo sinus, saj velja formula

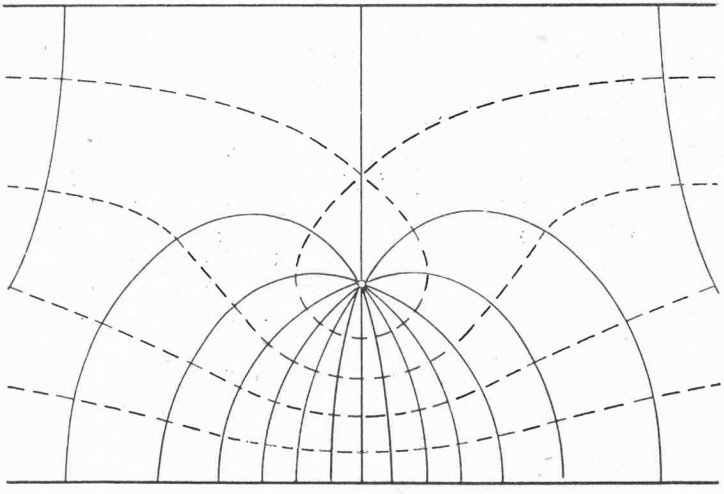
$$\sin\pi z = \pi z\prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$$

Torej je

$$f(z) = \frac{e}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{\sin \frac{\pi}{2d}(z-a)}{\sin \frac{\pi}{2d}(z+a)}$$

Res je ta funkcija taka, da je v $z = a$ singularna kot $\log(z-a)$, za $x = 0$ in $x = d$ pa ima realna komponenta vrednost nič. Med ploščama pa vlada še homogeno polje, ki ga povzroča napetost na ploščah, tako da moramo tej funkciji prišteti še $U_0 z/d$. Torej je iskani potencial φ realna komponenta funkcije

$$\frac{e}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{\sin \frac{\pi}{2d}(z-a)}{\sin \frac{\pi}{2d}(z+a)} + E_0 \cdot z, \quad E_0 = \frac{U_0}{d}$$



Sl. 4. Polje v kondenzatorju.

Električno poljsko jakost E, ki jo povzroče premaknjeni naboji na ploščah kondenzatorja brez nabojev na žici, dobimo, če odštejemo od dobljenega potenciala potencial žice $e/2\pi\varepsilon_0 \ln r$ in nato odvajamo na x, ker je sila v smeri osi y očitno enaka nič. Ker je izvajanje malo predolgo, napišem samo rezultat

$$E = -\frac{e}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\pi}{2d} \operatorname{ctg} \frac{\pi a}{d} + E_0$$

Tako smo rešili prvo nalogo.

Naboj e na površini dobimo s pogojem, da je potencial na površini žice enak nič. Sedaj vzamemo, da ima žica končno velik polmer r. Površina žice je potem podana z enačbo $z = a + r e^{i\Psi}$. Realna komponenta se glasi

$$\varphi = \frac{e}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{\pi r}{2d} - \frac{e}{2\pi\varepsilon_0} \ln \sin \frac{\pi a}{d} + E_0 (a + r \cos \Psi) = 0$$

Če upoštevamo, da je r majhen v primeri z a in d in pišemo, da je sinus kar enak argument $r \cdot \cos \Psi$, pa lahko tudi spričo večjega a zanemarimo. Tako dobimo, da je naboj, ki se influencira na žici, približno enak

$$e = \frac{2\pi\varepsilon_0 E_0 a}{\ln\left(\frac{2d}{\pi r}\sin\frac{\pi a}{d}\right)}$$

Če sedaj oba izraza, ki smo ju dobili za e in E, vstavimo v enačbo za silo, dobimo

$$F = eE = \frac{2\pi\varepsilon_0 E_0^2 a}{\ln\left(\frac{2d}{\pi r}\sin\frac{\pi a}{d}\right)} - \frac{\pi^2 \varepsilon_0 E_0^2 a^2 \operatorname{ctg}\frac{\pi a}{d}}{d \cdot \ln^2\left(\frac{2d}{\pi r}\sin\frac{\pi a}{d}\right)}$$

Kako se sila spreminja z napetostjo in razmakom med ploščama, je takoj razvidno. Kako pa se spreminja z a in r, bomo lepše videli, če v izraz za silo vpeljemo $\alpha = \pi a/d$ in $\varrho = \pi r/d$. U_0 in d nas tudi ne zanimata, zato izraz tako uredimo, da nam na desni strani enačbe ostanejo samo funkcije, odvisne od α in ϱ:

$$\frac{F d}{U_0 \varepsilon_0} = \frac{\alpha}{\ln 2\varrho \sin\alpha} - \frac{\alpha^2 \operatorname{ctg}\alpha}{\ln^2 2\varrho \sin\alpha}$$

Vrednosti te funkcije so za različne vrednosti α in ϱ v spodnji tabeli.

α/π \ ϱ/π	0,0025	0,0050	0,0075	0,0100
0,00	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,10	0,0882	0,1085	0,1199	0,1405
0,20	0,4176	0,1754	0,1902	0,2158
0,30	0,2002	0,2341	0,2518	0,2817
0,40	0,2466	0,2851	0,3049	0,3379
0,50	0,2842	0,3250	0,3455	0,3794
0,60	0,3057	0,3436	0,3621	0,3918
0,70	0,2894	0,3113	0,3203	0,3321
0,80	0,1547	0,1145	0,0866	0,0289
0,90	—0,6492	—1,0648	—1,3258	—1,8434
1,00	— ∞	— ∞	— ∞	— ∞

M. Vakselj

IZ NAŠIH ŠOL

Nekaj misli o tehniki predavanja

Kako naj predavam? Kdo ni o tem že razmišljal, kadar mu je bilo treba govoriti v tem ali onem društvu, na Ljudski univerzi in ob sličnih prilikah! Brez dvoma je govor najučinkovitejši način občevanja med ljudmi. Pisana beseda mu še daleč ni dorasla. Predavatelj ima več sredstev na izbiro, s katerimi more vplivati na poslušalce, kakor pa pisatelj na svoje bralce. Višina glasu, poudarek, odmori, kretnje in podobno, vse to mu omogoča dati temu ali onemu delu govora večjo ali manjšo pomembnost. Kajpada, tudi nevšečnosti prežijo nanj, zato mora paziti, da se jim izogne. Pretiran zanos, teatraličnost, preživahne kretnje in še kaj, morejo napraviti na poslušalce ravno obratni učinek od tega, kar je nameraval vzbuditi predavatelj. Na žalost se pri nas umetnost govora goji veliko premalo, če izvzamemo tiste kroge, ki jim je govorništvo življenjski poklic. Pouk slovenščine na naših šolah bi moral negovati tudi pravilen in lep govor in ne samo mehanično učenje pesmic na izust!

V tem kratkem sestavku ne moremo zajeti in obravnavati vseh vprašanj, ki se tičejo predavanja. To niti ni naš namen. Ogledati si hočemo le tiste nasvete, ki jih podaja znani fizik K. Darrow v februarski številki lanskega letnika revije »Physics Today«. Kot dolgoletni tajnik ameriške fizikalne družbe ima Darrow precejšnje izkušnje glede na poročila in predavanja, ki se vršijo na sestankih te družbe. Zato nam bo v korist, če se seznanimo z njegovimi nasveti, jih premislimo in skušamo uporabiti v naših razmerah.

Govori tako glasno, da te slišijo in razumejo tudi najbolj oddaljeni poslušalci! Pretiho in nerazločno govorjenje je običajna napaka naših predavateljev. Res je, da se katerikrat — posebno pri pouku — poslužujemo zvijače in govorimo tiše z namenom, da prisilimo poslušalce k redu in pozornosti. Ampak tak način podajanja za celo predavanje nikakor ni umesten. Potrebna jakost glasu večinoma nikomur ne manjka, svoj glas more za daljšo ali krajšo dobo pojačiti nad povprečno mero. Prostori pa tudi niso tako veliki, da bi zahtevali od govornika pretirano naprezanje njegovega glasilnega organa. Z močnejšim glasom preženeš tudi govorniško mrzlico, če bi se slučajno pojavila. Če drugače ne gre, se ravnaj po temle nasvetu: Glej in govori zadnji vrsti poslušalcev, čeprav sedijo v prvi sami odličniki!

Napiši predavanje in si ga vtisni v spomin! Le če si ne moreš govora zapomniti, ga beri! Ta ali oni bi menil, da je napisan govor dolgočasen in pust in da so le pri prostem govoru možne iskreče domislice. To je popolnoma res, če ima »govornik« oči kar pribite na besedilo, če brunda zase in komaj na koncu kakega odstavka ali celo poglavja ošine svoje žrtve z bežnim pogledom. Brani govor se kaj lahko izmaliči v nekaj, kar je naravnost zoprno. Predavatelj pač ne sme smatrati besedila kot duševne bergle, s katerimi caplja v svojem govoru. Nasprotno, doživljati ga mora, ko ga podaja, tako kot takrat, ko ga je sestavljal. Napisano predavanje govornika ne sme ovirati, da bi v besedilo ne vtaknil kako lepo misel, ki mu pride na um.

V začetku govora nakaži kratko vsebino predavanja in poveži snov, o kateri boš govoril, s sosednjimi poglavji svoje stroke! To ti bo prišlo prav posebno takrat, kadar boš govoril o kaki posebni, poslušalcem manj znani snovi. V mnogih primerih je priporočljivo, da podaš na koncu v kratkih potezah jedro svojega predavanja.

Pazi na čas in na hitrost govorjenja! V tem primeru ti rokopis prav dobro pomaga; znaki, ki si jih napraviš na njem, so merilo za hitrost, s katero govoriš. Kar zadosti hiter je tvoj govor, pravi Darrow, če poveš kakih 130 besed na minuto. Bolje je, govoriti počasi kakor pa hitro. Pri težjih mestih govori počasneje in delaj daljše odmore, da morejo poslušalci podano snov premisliti. Dolgega predavanja se boj, če pa nimaš izhoda iz zagate, povzemi na primernih mestih na kratko vsebino prejšnjega poglavja, da na koncu predavanja — ali pa še prej — poslušalci ne pozabijo tega, kar si v začetku povedal. Ne boj se ponavljati bistvenih stvari!

Stopnjo strokovnosti svojega predavanja določi v skladu z razgledanostjo povprečnega poslušalca! Menda ni v sramoto ali v škodo znanstvenemu ugledu predavatelja, če napravi poslušalcem svoj predmet dostopnejši in razumljivejši. Resnično znanje in popolno obvladanje snovi je tudi v tem, da znaš voditi poslušalce po takih potih, ki jih privedejo do razumevanja bistva in do najvišjega vrha tvojega predavanja. Če pa pripoveduješ stvari, o katerih si prepričan, da jih večina ne razume, potem se — bahaš.

Raba table. Če uporabljaš tablo, piši in riši tako veliko, da bodo tudi zadnje vrste imele toliko od tega kakor prve! Mučno je, če gledajo poslušalci ves čas samo v tvoj hrbet. Pri pisanju in risanju govori glasneje! Ne uporabljaj table kar na slepo; piši lepo po vrsti, kakor ustreza poteku tvojega predavanja! Znaki, ki se jih poslužuješ naj ne bodo taki, da jih umeš brati le sam!

Slike. Kadar kažeš slike ali diapozitive, ne uporabljaj jih prehitro in ne preveč v enem predavanju. Poslušalcem moraš dati dovolj časa in potrebnega pojasnila, da bodo imeli od gledanja kako korist. Dolžino predavanja in hitrost, s katero govoriš, uravnavaj s številom slik, ki jih nameravaš pokazati. Na to ravnotežje moraš paziti posebno takrat, kadar razpolagaš s točno odmerjenim časom.

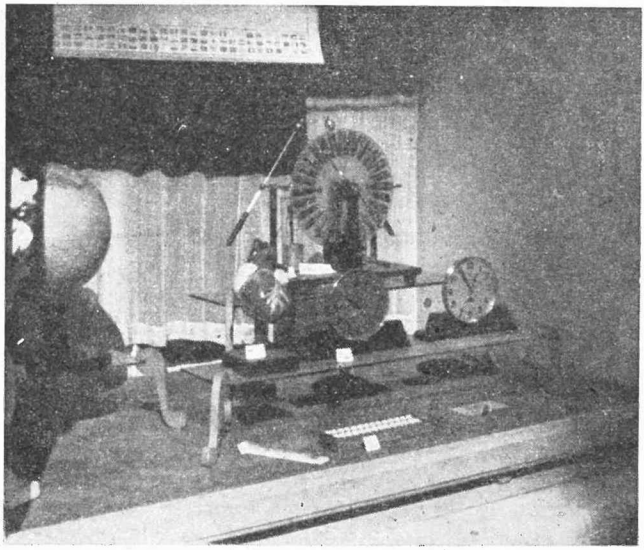
Uporaba strokovnih izrazov. Večina strokovnih izrazov ima strogo določen pomen, zato jih ne smemo nadomestiti s kakim znanim ali domačim izrazom. Predavatelja pa seveda ne bo oviralo, če bo kak pojem pojasnil ali navedel njegovo definicijo. Poslušalec je morda pomen te ali one besede že pozabil, s kratko opazko mu ga boš poklical v spomin. Če tega ne storiš in hitiš naprej, se poslušalcu pretrga predavanje, ko razmišlja — morda nehote —, kaj neki se skriva za tvojim izrazom.

Slog. Uporabljaj tudi v predavanju po možnosti običajno govorico in ne odlikuj se s tujimi besedami, če imamo zanje poštene domače izraze! Izogibaj se dolgih stavčnih period, kajti poslušalec nima časa, da bi jih analiziral! Kar si more privoščiti pisatelj, ni vselej priporočljivo za predavatelja. Sicer pa je dolžnost javnega delavca, da neguje in spopolnjuje svoj slog in da se ga uči — ne iz dnevnega časopisja, temveč pri naših klasikih.

Br.

Influenčni stroj

V izložbi Državne založbe Slovenije na Mestnem trgu v Ljubljani je razstavljenih nekaj učil, ki jih izdelujejo domača podjetja in ki so naprodaj. Med njimi je tudi influenčni stroj, ki ga je izdelalo Podjetje za učila v Ljubljani. Aranžerju izložbe se je zdel instrument tako imeniten, da mu je dal med drugimi učili najodličnejše mesto in je postavil celo odlitek lepe Apolonove glave ob stran. Sicer pa, po ceni sodeč, zasluži to mesto. Saj stane 15 000 dinarjev.



Kakšna je pa sicer njegova vrednost za pouk? Influenčni stroj spada med tista učila, ki imajo svoje muhe in za katera človek nikoli ne ve, ali bodo delovala takrat, ko bo treba. Mehanizem tega stroja je precej občutljiv. Kar jih je po šolah, so večinoma pokvarjeni. Težko je tudi pregledno razložiti njegovo delovanje. Zato malokdo ve, kako pravzaprav dela. Na splošno velja danes influenčni stroj za zastarelo pripravo, ki ni več v modi. Pohl meni, da je to igrača za otroke. Influenčne stroje je izpodrinil danes mali van de Graaffov generator, ki je enostavnejši, cenejši in preglednejši, tako da je lahko razumeti, kako dela. Tovarne za učila imajo zadnja leta velike zaslužke s takimi malimi van de Graaffi.

Zato se človek čudi, da je Podjetje za učila sedaj začelo izdelovati zastareli influenčni stroj. Saj ne more pričakovati trgovskega uspeha. Katera šola bo dala 15 000 dinarjev za to staromodno šaro? Po Giorgijevem merskem sistemu elektrostatika ni več osnovno poglavje v elektriki. Tudi za vsakdanje življenje so druga poglavja bolj važna. Zato hoče vsak profesor naučiti učence predvsem zakone o električnem toku, o magnetnem polju in o indukciji. Naše šole bodo prav gotovo raje za ta denar kupile potrebne električne instrumente. A. M.

Učni načrt oddelka za fiziko na Tehniški visoki šoli

V Obzorniku *1*, 37 (1951) je bilo javljeno, da je bil ustanovljen na naši Tehniški visoki šoli oddelek za fiziko z namenom kot ga imajo podobni oddelki drugod, da vzgaja fizike za industrijske laboratorije in za raziskovalne inštitute. V naslednjem objavljamo učni načrt oddelka, ki bo gotovo zanimal širši krog naših čitateljev.

Glavna predavanja iz eksperimentalne fizike, iz teoretične fizike in iz matematične fizike so ciklična na dve leti in jih poslušajo slušatelji 3. in

4. letnika skupaj. Ostala predavanja pa so vsako leto. Zaradi take ekonomične ureditve zmore oddelek vse delo s 3 predavatelji za posamezne cikluse predavanj. Vsa ostala predavanja pa obiskujejo slušatelji fizike na drugih fakultetah, kjer imajo že taka predavanja urejena. Saj je koristno, da sliši slušatelj dober in dovolj širok kurz predavanj tudi iz osnovnih predmetov.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Fizika I, II	4/3	4/2	2/1	2/1					
Mehanika		3/2	3/2	3/1					
Toplota			2/1	2/1					
Teoretična fizika					4/2	4/2	4/2	4/2	
Fizikalne meritve					3/1	3/1	3/1	3/1	
Matematična fizika I, II				3/1			2/1		
Fizikalni praktikum I, II, III		—/4	—/4	—/4	—/4	—/4	—/8	—/8	
Vaje v delavnici			—/4	—/8					
Referati iz literature							—/2	—/2	
Specialno labor. delo									—/24
Predavanje po izberi									6/—
Diplomsko delo									
Matematika I, II	6/2	4/2	3/3	3/3					
Diferenc. enačbe					5/3	5/3			
Tehnično risanje	—/4								
Strojni elementi in strojeslovje		3/—	3/—						
Mehanska tehnologija			2/—						
Metalografija							3/2	3/2	
Elektrotehnika	2/2								
Splošna električna merjenja					2/4	2/4			
Elektronika							4/2	4/2	
Kemija	3/2	3/5							
Kristalografija	2/1								
Fizikalna kemija					4/—	—/4			

Predavanja po izberi naj si slušatelji izberejo iz naslednjih predmetov:

Funkcijska teorija
Fizikalna kemija II
Meritve v kemijski tehniki
Geofizika
Mehanika tal
Trdnostni preizkusi
Preiskava gradb, materialov in konstrukcij
Hidravlika
Meritve v telekomunikacijah
Elektrotehnologija
Elementi fine mehanike
Mikrovalovna tehnika
Ojačevalci

Fizika I obsega klasično eksperimentalno fiziko z uporabo infinitezimalnega računa. Predavanja so skupna za vse ostale fakultete tehniške visoke šole in za matematično prirodoslovno fakulteto.

Fizika II obsega eksperimentalno fiziko delcev: atom, elektron, foton, jedro.

Teoretična fizika obsega 4 predavanja po en semester: Elektromagnetno polje, Optika, Kvantna mehanika, Jedrska fizika.

Fizikalne meritve se obravnavajo v 2-letnem ciklusu, ki obseže 4 predavanja po en semester: Električni instrumenti in meritve, Optični instrumenti in meritve, Rentgenske preiskave, Instrumenti in meritve v jedrski fiziki.

Matematična fizika I obravnava osnovna matematična sredstva v fiziki, predvsem uporabo infinitezimalnega računa, vektorski račun, verjetnostni račun in numerično računanje.

Matematična fizika II se predava vsako drugo leto in obravnava uporabo diferencialnih in integralnih enačb v fiziki.

Fizikalni praktikum I, II obsega glavne meritve fizikalnih količin in materialnih konstant iz vseh področij fizike.

Fizikalni praktikum III vsebuje standardne preiskave iz posameznih področij fizike, ki so važne za praktično uporabo kot na primer specialne meritve lastnosti materialov (mehanskih, akustičnih, optičnih, električnih, toplotnih itd.): spektrografijo, rentgenske preiskave, vakuumske meritve, obsežnejše jedrske meritve.

Vaje v delavnici so za to, da dobi slušatelj potrebno ročno spretnost. Pri teh vajah dela slušatelj po 7 tednov v naslednjih delavnicah: v mehanski delavnici, v steklopihaški delavnici, v elektronski delavnici, v fotografski delavnici; 7 tednov pa se uči osnovnih laboratorijskih spretnosti.

Referati iz literature: Vsak slušatelj 4. letnika ima enkrat na semester referat o kakem posebnem problemu. Pri tem se nauči iskanja po literaturi, samostojnega dela, strokovnega izražanja ter javnega nastopanja.

* * *

Na oddelku za fiziko so naslednji študijski pogoji.

Pred vpisom v II. letnik mora slušatelj opraviti izpit iz fizike I in matematike I. Nadaljnjih omejitev za vpis ni.

Pred pričetkom diplomskega dela mora imeti kandidat opravljene vse izpite iz posameznih predmetov ter opraviti krajše laboratorijsko delo. Poleg tega mora imeti 2 meseca industrijske prakse.

Branitev diplomskega dela se obenem smatra kot komisijski diplomski izpit. Pri tem mora kandidat pokazati, da ima pregledno znanje iz vse fizike.

Delo v predmetnem aktivu matematikov in fizikov v Ljubljani v šol. letu 1951/52

Delo v predmetnem aktivu matematikov in fizikov v Ljubljani je koordinirano z delom »sekcije za predavanja« v okviru Društva matematikov in fizikov LRS, kar vpliva ugodno na delo aktiva. Prebrodili smo začetne težave in naša predavanja imajo že kar lepo tradicijo. V šolskem letu 1951/52 smo imeli 20 predavanj:

F. Ahlin: Metode dela pri reševanju trigonometričnih enačb;

F. Avčin: a) Sistem novih enot; b) Vpeljava Giorgijevega sistema novih enot v fiziko in matematiko;

F. Dominko: Sončni mrki, njih pogoji in zaporedja s posebnim poudarkom na sončni mrk 25. II. 1952;

L. Gabrovšek: a) O zanemarjenih vprašanjih v zvezi z enačbami; b) Šibka mesta v srednješolski matematiki s posebnim pogledom na ekvivalenco enačb;

M. Gabrovšek: Preiskava kovin z ultrazvokom (teoretična in eksperimentalna osvetlitev);

A. Kuhelj: Relaksacijske metode pri diferencialnih enačbah;
I. Kuščer: Nevtronske interference;
A. Moljk: Geigerska števna naprava; (eksperimentalna dopolnitev k predavanju: »O merski tehniki v jedrski fiziki«;
A. Peterlin: Rentgenske in elektronske interference;
A. Vadnal: Topološka klasifikacija zaprtih ploskev;
Septembra 1951 smo organizirali dva debatna večera z naslednjimi poročili:
A. Peterlin: Organizacija znanstvenega dela pri nas;
O. Sajovic: Vprašanje matematike na visokih šolah;
I. Kuščer: Vprašanje fizike na visokih šolah.

Na drugem debatnem večeru so dali referenti F. Ahlin, L. Gabrovšek, I. Molinaro, M. Potisek in I. Štalec pripombe k poročilu zvezne komisije o pouku matematike in fizike na srednjih šolah.

Na posebnem sestanku je predaval član Francoske akademije, profesor Denjoy: »Integral od Leibniza do Lebesguea«.

20. IX. 1951 smo priredili skupaj s Prirodoslovnim društvom proslavo petdesetletnice smrti slovenskega fizika Ignacija Klemenčiča.

Sekcija je priredila ogled Titovih zavodov Litostroja in ogled tovarne električnih strojev Rade Končar v Zagrebu. Prosvetni oddelek MLO Ljubljana je podprl naše ekskurzije z denarno dotacijo 12 000 din.

Z uvedbo predavanj, ki so dostopna tudi širši javnosti, je sekcija dobila novo obliko društvenega življenja. Krog predavateljev se širi. Predavanja so bila vsa dobro obiskana. Izredno sta uspela debatna večera, ki sta pokazala, da razpravljamo o visokošolskih in srednješolskih problemih pogumno in odgovorno. Na sestanke vabimo vse profesorje in predmetne učitelje, ki predavajo na srednjih in strokovnih šolah fiziko in matematiko, študente Prirodoslovno-matematične fakultete, slušatelje tehniške visoke šole in slušatelje VPŠ. Predavanja, ki so namenjena širši javnosti, objavljamo tudi v časopisih. Obisk je dober in delo sekcije v okviru Društva matematikov in fizikov poteka zadovoljivo.

Za sekcijo za predavanja: Marta Klopčičeva.

Ob stoletnici ljubljanske realke

Od prejšnjih tipov srednje šole je imela realka nalogo, da posreduje svojim učencem v čim večji meri matematično in naravoslovno znanje. Ker praznuje letos nekdanja ljubljanska realka stoletnico ustanovitve, je prav, da se tega dogodka spomnimo tudi v našem listu.

Ljubljanska realka je bila ena najstarejših realk v stari Avstriji. Ustanovljena je bila z odlokom takratnega naučnega ministrstva dne 12. julija 1852 kot nižja realka s samo tremi razredi. Učni jezik na njej je bil seveda nemški. Vedno pa je bila slovenščina za slovenske dijake obvezen predmet. Njen prvi ravnatelj je bil Mihael Peternel, mož, ki ga poznamo še vse premalo. Peternel je bil samouk, pa neverjetno podkovan in razgledan na vseh področjih človeškega znanja, bil je slovenski polihistor. Njegovi veliki delavnosti in odločnosti gre zahvala, da je mladi zavod premagal začetne težave, ki jih ni bilo malo.

V začetku je realka gostovala v liceju na Vodnikom trgu in v sosedni Mahrovi trgovski šoli. Leta 1863 je bila razširjena na šest razredov, v šol-

skem letu 1868-69 pa se je vršila na njej prva matura. Popolna, sedemletna realka je postala 1871.

Lastno hišo ji je zgradila bivša Kranjska hranilnica v počastitev svoje petdesetletnice. Bila je ena največjih takratnih srednješolskih zgradb ne samo v Ljubljani, temveč tudi v Avstriji. Z notranjo opremo vred je stala nad milijon kron.

Ob prevratu 1918 je bila realka poslovenjena. Za ravnatelja je bil imenovan Josip Mazi, njen absolvent in profesor. S šolskim letom 1928-29 se je pretvarjala v osemrazrednico, hkrati pa so se odprle realnogimnazijske vzporednice. Realka je dokončavala svoj življenjski tek. V letu 1930-31 sta bili vlogi obeh šolskih tipov že zamenjani: zavod se je preimenoval v I. drž. realno gimnazijo, realčne razrede pa je imel kot dodatek v višji gimnaziji. Realka je prenehala po osvoboditvi s šolskim letom 1945-46, ker je bil poleg klasične gimnazije vpeljan samo realnogimnazijski tip.

Za nazorni in eksperimentalni pouk je imel zavod vzorno urejene, bogate zbirke, ki jih je stalno izpopolnjeval. Fizikalni kabinet je imel lastno predavalnico, svojo delavnico in zbirko aparatov, s katerimi je mogel demonstrator predočiti učencem sleherni poskus iz vseh področij fizike. Navada je bila, da so učenci darovali kabinetu razne predmete za dopolnitev zbirke in vsakovrsten material. Lahko si mislimo, koliko se je nabralo tega blaga v teku dolgih desetletij! Kabinet je vseboval tudi številni instrumentarij za opazovanje zvezdnatega neba in za ponazoritev nebesnih pojavov. Imel je poleg vsega tega še veliko zbirko aparatov za dijaške fizikalne vaje.

Po prostoru in tudi po opremi bogatejši je bil kemični laboratorij. V zadnjih desetletjih prejšnjega stoletja — do ustanovitve kemične poskusne postaje pri Kmetijski družbi — je bil edina avtoriteta v kemičnotehnoloških vprašanjih na bivšem Kranjskem in Primorskem. Imel je posebno sobo, kjer so dijaki sami vršili kemične poskuse. V šolskem letu 1905-06 se je obogatil z zapuščino A. E. Haswella, kemika škotskega porekla, ki je vsebovala cel kemični laboratorij in knjižnico z nad 700 zvezki! V prostorih laboratorija in deloma v kleti je bila potresna opazovalnica, prva pri nas, ki jo je pričel ustvarjati kmalu po velikem ljubljanskem potresu (1895) profesor Albin Belar. Njegovo delo na tem področju je bilo tako uspešno, da je postala opazovalnica znana po vsem svetu. Na stolpu realke je bila vremenska postaja, kjer so do prve svetovne vojne dajali znak za točen poldan s padajočo kroglo in s strelom.

Pravi muzej pa je bila krasno urejena in zelo popolna naravoslovna zbirka. Poleg drugih zanimivosti je vsebovala bogato zapuščino žuželk in knjig Ferdinanda Schmidta — Erjavčevega Schnackschnepperleina in obširni Herbarium Plemelianum, delo našega botanika Valentina Plemlja.

Tudi ostale zbirke: zemljepisno-zgodovinska, matematična. risarska, telovadna in pevska so bile dobro založene. Razen matematične, risarske in telovadne zbirke so imele vse druge lastne priročne knjižnice. Zavod pa je imel tudi veliko profesorsko in dijaško knjižnico.

Prvo svetovno vojno je zavod kar srečno preživel, usodna pa je bila zanj druga. Dne 23. februarja 1942, ko se je pričela blokada Ljubljane, so zaprli šolo. V učilnice so se vselili Sardinski grenadirji. Ko so zjutraj 1. aprila odšli v Ribnico, so pustili za seboj razvaline nekdaj tako bogatega zavoda. Opustošenje po kabinetih — ki so bili seveda zaklenjeni

— so morali Italijani vršiti v noči njihovega odhoda, od 31. marca na 1. april. Zelo verjetno je, da je bil ta vandalizem storjen namenoma, morda celo na višje povelje.

Nasledniki grenadirjev so z demoliranjem nadaljevali. Pričela se je tudi kraja na veliko. Vlamljali so v zaklenjena in z žeblji zabita vrata kabinetov, iz katerih so izginili najlepši in najboljši kosi. Po Ljubljani in okolici so italijanski vojaki prodajali realsko lastnino za smešno nizke cene. Posrečilo se je nekaj ukradenih knjig odkupiti in vrniti zavodu.

Italijanom se je realka tako priljubila, da so hoteli imeti vse šolske prostore. Zbirke je bilo treba seliti. Pri tem je zopet kaj izginilo ali pa se pokvarilo. V avgustu 1942 so profesorsko in dijaško knjižnico prenesli v pritlične prostore NUK, kjer so našle zatočišče tudi nekatere druge zbirke.

Med zasedbo poslopja so učenci in profesorji gostovali najprej na bežigrajski gimnaziji, potem na Rakovniku in na gimnaziji v Šubičevi ulici. V svoje poslopje so se vrnili šele po osvoboditvi.

Na realko so prihajali učenci od blizu in daleč. V Avstriji so jo posečali tudi iz Primorske, Koroške, slovenske Štajerske in Hrvatske. Nemški in nemčurski dijaki so bili močnejši od Slovencev nekako v letih od 1879 do 1897. V prvem desetletju obstoja realke in v zadnjih letih pred prvo svetovno vojno pa je slovenski dijak daleč nadkriljeval vse druge.

Leta okupacije so živo posegla v življenje gimnazije. Večina dijakov in učiteljev se je od vsega začetka odločno opredelila proti okupatorju in njegovim pomagačem. Šolska in učiteljska organizacija OF sta bili organizirani že v juliju leta 1941. Takoj po prvih manifestativnih nastopih po razredih je začel sovražnik z aretacijami in internacijami. Kljub silnemu pritisku je pa našel le borno peščico takih, ki so bili pripravljeni izdati svoj narod, saj je spravil v Gill vsega 26 dijakov. Najjasneje dokazujejo veliko politično zavednost dijaštva na zavodu njegovi dijaki partizani. Saj je dalo svoje življenje za svobodo nad pet odstotkov vsega dijaštva. Koliko jih je pa bilo odpeljanih v zapore in internacije, ne vemo več. Med učitelji jih je bilo zaprtih in interniranih nad petnajst odstotkov. Toda vsi napori okupatorja in njegovih pomagačev niso mogli ustaviti dela OF na zavodu, delo izpadlih so prevzemali novi in novi kadri, dokler ni prišel dan osvobojenja.

Realka je dajala solidno podlago v matematiki, opisni geometriji in v naravoslovju; tudi v drugih vedah je posredovala znanje, ki je bilo precej prosto balasta. Gojila pa je tudi spretnost v risanju. Za narodno zavest so skrbeli slovenski profesorji, ki so bili na zavodu vedno dobro zastopani.

S. Breskvar

Občni zbor Društva matematikov in fizikov

14. decembra 1952 se je vršil redni letni občni zbor Društva matematikov in fizikov LR Slovenije. Iz poročil upravnega odbora je bilo razvidno, da je bilo delo društva v pretekli poslovni dobi v celoti uspešno. Posebno delavnost sta pokazali sekcija za tisk pod vodstvom A. Moljka ter sekcija za predavanja in dvig pouka pod vodstvom M. Klopčičeve. S subvencijo Sveta za prosveto in kulturo vlade LRS je uspelo premostiti finančne težave pri izdajanju »Obzornika za matematiko in fiziko«. Ker

ima revija že širok krog sodelavcev in naročnikov, gre z zaupanjem v uspeh v tretje leto svojega obstoja.

Sekcija za predavanja je v Ljubljani priredila 6 predavanj za širšo javnost, 7 predavanj pa za člane. Priredila je tudi 3 ekskurzije in družabni večer.

Aktivni sta bili tudi podružnici v Mariboru pod vodstvom F. Bezjaka in v Celju pod vodstvom F. Jakhla. V Mariboru so imeli 9 predavanj in eno ekskurzijo, v Celju pa 8 predavanj.

Sekcija za terminologijo pod vodstvom A. Vadnala je pripravila za tisk terminologijo elementarne matematike, ki bo v kratkem dotiskana.

Na iniciativo L. Gabrovška je društvo organiziralo v Ljubljani tečaje iz posameznih področij srednješolske matematike in fizike. Pričeli so se tečaji iz algebre, trigonometrije in elektrike. Udeleženci tečajev so v glavnem iz vrst tistih, ki sta jim matematika in fizika potrebni v njihovi službi.

Občni zbor je potrdil dosedanje delo in naložil novemu odboru, da ga nadaljuje. Na pobudo F. Dominka je sklenil, da je treba širokim slojem posredovati tudi splošni kulturni pomen matematike in fizike in razvoja obeh ved.

V novem upravnem odboru so: predsednik I. Vidav, podpredsednik L. Gabrovšek, tajnik N. Benkovič, blagajnik F. Kvaternik, odborniki A. Moljk, I. Štalec, L. Jenček, M. Klopčičeva, A. Vadnal, J. Povšič, M. Vakselj, F. Dominko, M. Blejec. V nadzornem odboru so: A. Vakselj, M. Potisek, F. Jeran. Člani častnega razsodišča: A. Peterlin, I. Molinaro, S. Dolar.

N. Benkovič.

NOVE KNJIGE

Teorija elastičnosti

J. P. Den Hartog: Advanced Strength of Materials. McGraw-Hill Book Company, Inc. New York, 1952. Strani 379. Cena $ 8,50.

Zahteve pri konstrukciji tehničnih naprav, prav posebno pa raznih vozil, letal itd. so tako narasle, da rezultati samega klasičnega nauka o trdnosti za večino tehnikov ne zadošča več. Njegove obrazce za napetosti in deformacije, ki sledijo iz včasih zelo preprostih predstav in ki morejo zato večkrat služiti samo v primerjalne namene, je treba po možnosti izpopolniti z eksaktnimi izsledki teorije elastičnosti; kjer pa nam teorija elastičnosti ne more podati strogih rešitev osnovnih enačb, je treba poiskati čim bolj natančne približke ali pa se zateči k poskusom. Knjiga je namenjena predvsem tehnikom, ki poznajo osnovni del nauka o trdnosti, in je tudi nastala iz dveh, po en semester trajajočih predavanjih za slušatelje tehnike na Massachussets Institute of Technology. Glavni smoter predavanj in knjige je bil, podati tehnikom vpogled v praktično najbolj važna poglavja teorije elastičnosti in višjih delov nauka o trdnosti in jim na ta način olajšati razumevanje bolj popolnih del iz prvega področja. Iz območja nauka o trdnosti vsebuje knjiga poglavja o membranski teoriji lupin, o upogibu tankih plošč in o upogibu nosilcev na elastični podlagi; v teorijo elastičnosti pa spadajo poglavja o torziji prizem, ki niso okrogle, o napetostih v vrtečih se ploščah in o dvodimenzionalni teoriji elastičnosti. V vseh teh poglavjih podaja pisec seveda tudi

približne rešitve in razne analogije, ki omogočajo uspešno eksperimentalno določanje napetosti; posebno tesno pa so povezane eksaktne in približne metode v obeh poglavjih o energijskih teoremih in o uklonu. Zadnje poglavje v knjigi obravnava Mohrove kroge za prostorsko stanje napetosti, torzijo predhodno zasukanih profilov s tankimi stenami in dva nova izreka, ki se dasta sicer izvesti iz znanega Castiglianovega zakona o odvodu elastične energije po silah, ki pa omogočata v svoji končni obliki zelo hitro določanje napetosti v obročih oz. ceveh.

Pisec je že v svojih prejšnjih delih, predvsem pa v knjigi o mehaničnih nihanjih pokazal, kako najti s skromnimi matematičnimi sredstvi čim več praktično važnih zaključkov. Tudi novo delo, ki je zelo lepo opremljeno, priča o velikih pedagoških sposobnostih avtorja.

A. Kuhelj
(Inštitut za mehaniko TVŠ)

Elektrokemijski podatki

B. E. Conway, Electrochemical Data (Elsevier Publishing Company, Amsterdam, Houston, London, New York, 1952), 374 str.

Knjiga predstavlja zbirko okoli 270 tabel iz področja teoretske in eksperimentalne elektrokemije. Po avtorjevi izjavi v predgovoru so zbrani samo eksaktni podatki z znano natančnostjo, predvsem taki, ki niso splošno dostopni.

Tabele so razdeljene na deset poglavij. Prvi dve obsegata v 34 tabelah običajne univerzalne konstante, njih razmerja in pretvorne faktorje ter splošne podatke o fizikalnih lastnostih. Naslednja tri poglavja, ki so obenem najobširnejša (117 tabel), vsebujejo podatke o medsebojnem delovanju molekul in ionov v tekoči fazi, o aktivnostnih koeficientih, osmotskih koeficientih, hidrataciji ter izsolenju in vsolenju; nato transport v raztopinah jakih elektrolitov, elektrolitsko potovanje in difuzijo ter končno konstante disociacije, podatke o topnosti in puferskih raztopinah. V šestem in sedmem poglavju (40 tabel) slede lastnosti električne dvoplasti in mejnih ploskev ter transport in splošne lastnosti koloidnih in makromolekularnih elektrolitov z biološko važnostjo. Osmo poglavje daje v 22 tabelah podatke o talinah pri visoki temperaturi, poslednji dve pa zbereta v 55 tabelah številke o reversiblih elektrodnih procesih ter »parametre elektrodne kinetike«, kakor to naziva avtor in kjer so zbrani podatki o kinetiki elektrolitskega izločanja plinov in kovin.

Vsako poglavje ima kratek uvod z navedbo splošnih virov za obravnavane podatke, posameznim tabelam pa slede literaturni citati za vsak podatek posebej. Po potrebi je dodano tabelam tudi tolmačenje o načinu merjenja in računanju.

V knjigi je zbranih mnogo uporabnih podatkov na pregleden, ponekod celo prerazsipen način. Zelo prav pridejo podatki, ki jih je sicer težko dobiti, n. pr. o raztaljenih silikatih ter o biološko važnem materialu. Čudno pa je, da so za univerzalne konstante vzeti podatki iz leta 1941 in pa to, da je večina podatkov še v cgs enotah. Sicer pa ima knjiga običajni »Elsevierski« izgled in bo prišla prav tako znanstveno raziskovalnim delavcem v kemiji, fiziki in biologiji kakor tudi inženirjem in tehnikom v industriji.

D. Leskovšek
(Inštitut za fizikalno kemijo)

ODGOVORI

3. Spodnja meja maksimalne hitrosti pri pospešenem gibanju

Vlak napravi v času t_0 premočrtno pot s_0. Začetna hitrost je nič in za pospešek a je predpisana zgornja meja A ($a \leqq A$). Pri različnih gibanjih, ki zadoščajo zgornjim pogojem, pa more doseči vlak različne maksimalne hitrosti. Dokazati je treba, da imajo te maksimalne hitrosti neko spodnjo mejo, ki pa je večja od povprečne hitrosti s_0/t_0.

V času $t < t_0$ naj preteče vlak pot $s < s_0$. Povprečna hitrost v na intervalu (t, t_0) je $v = (s_0 - s)/(t_0 - t)$ in ta gotovo ni večja od maksimalne hitrosti v_{max} na celem intervalu $(0, t_0)$. Zato imamo tole neenačbo

$$v_{max} \geqq \frac{s_0 - s}{t_0 - t} \tag{1}$$

ki velja za vsak t. Za pospešek pa je predpisana zgornja meja A. Ker je začetna hitrost enaka nič, je gotovo $s \leqq \frac{1}{2} At^2$. Od tod in pa iz neenačbe (1) sledi, da je

$$v_{max} \geqq \frac{s_0 - \frac{1}{2} At^2}{t_0 - t} = V(t) \tag{2}$$

kar tudi velja za vsak $t < t_0$. Lahek račun pokaže, da zavzame funkcija $V(t)$ na intervalu $(0, t_0)$ največjo vrednost za

$$\tau = t_0 - \sqrt{t_0^2 - 2\, s_0/A}$$

Maksimalna vrednost $V(\tau)$ pa je enaka

$$V(\tau) = A\,(t_0 - \sqrt{t_0^2 - 2\, s_0/A})$$

[Izraz pod korenom ni negativen, ker mora biti $s_0 \leqq \frac{1}{2} At_0^2$. Zato leži τ vedno na intervalu $(0, t_0)$.]

Neenačba (2) pa velja pri poljubnem t iz intervala $(0, t_0)$, tedaj tudi za $t = \tau$. Maksimalna hitrost ni manjša od $V(\tau)$, torej je $V(\tau)$ spodnja meja: $v_{max} \geqq V(\tau)$. Ta spodnja meja $V(\tau)$ je večja od povprečne hitrosti s_0/t_0. Enakost je tu izključena. To izpričamo, če pokažemo, da neenačba

$$A(t_0 - \sqrt{t_0^2 - 2\, s_0/A}) \leqq s_0/t_0$$

ni mogoča. S kvadriranjem in majhnim premeščanjem dobimo vedno nemožno neenačbo $s_0^2/t_0^2 \leqq 0$.

Maksimalna hitrost pa je res lahko $V(\tau)$. Velja namreč $V(\tau) = A\tau$. Ako se giblje vlak enakomerno pospešeno s pospeškom A v času $0 < t < \tau$, doseže hitrost $V(\tau)$. Od tega trenutka dalje pa se mora gibati enakomerno z doseženo hitrostjo. Potem res preteče vlak v času t_0 pot s_0. Pot, ki jo pri zgoraj opisanem gibanju vlak napravi, je namreč enaka

$$\tfrac{1}{2} A\tau^2 + A\tau\,(t_0 - \tau)$$

To pa je ravno s_0, ker zadošča τ enačbi $\frac{1}{2} A\tau^2 - At_0\tau + s_0 = 0$, ki jo dobimo, če iščemo ekstrem funkcije $V(t)$. Ker je v tem primeru maksimalna hitrost $V(\tau)$, je torej $V(\tau)$ res natančna spodnja meja maksimalnih hitrosti.

F. Avsec

4. Merjenje difuzijskega koeficienta

1. Poiskati je treba rešitev diferencialne enačbe

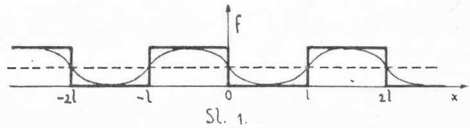
$$D\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial f}{\partial t} \tag{1}$$

v obliki Fourierove vrste.

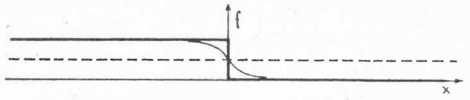
Višini topila in raztopine naj skupaj merita 1 cm in ravnina $x=0$ naj bo meja med topilom in raztopino. Ker je snovni tok skozi stene vedno enak nič, mora rešitev diferencialne enačbe (1) ustrezati naslednjemu pogoju:

$$\text{grad } f=0 \quad \text{za } x=\pm 1/2 \text{ za poljuben čas } t. \tag{2}$$

Tej zahtevi bo zadoščala na naslednji način tvorjena periodna funkcija. Vzemimo neskončno mnogo valjev (z raztopino in topilom) dolžine 1 in jih položimo enega poleg drugega tako, da se stikata ali plasti z raztopino ali s topilom. Koncentracija okoli stičnih ploskev je simetrično porazdeljena in če odstranimo stene med valji, ne bo prehajala snov iz valja v valj (sl. 1).



Sl. 1.



Sl. 2.

Začetni pogoji se sedaj glase:

$$\varphi(x)=c_0 \text{ za } -l<x<0,\ \varphi(x)=0$$
$$0<x<l,\ \varphi(x+2l)=\varphi(x),$$
$$\varphi(x)=f(x,0). \tag{3}$$

Če vnesemo vrsto

$$f(x,t)=\tfrac{1}{2}A_0(t)+\sum_0^\infty [A_n(t)\cos(n\pi x/l)+B_n(t)\sin(n\pi x/l)]$$

v diferencialno enačbo (1), dobimo

$$-D n^2\pi^2 B_n/l=B'_n,\ B_n=b_n\exp(-n^2\pi^2 Dt/l^2)$$

in prav tako $A_n=a_n\exp(-n^2\pi^2 Dt/l^2)$. Integracijske konstante a_n in b_n dobimo z upoštevanjem začetnih pogojev (3). Razvijmo funkcijo $\varphi(x)$ v Fourierovo vrsto:

$$\varphi(x)=\tfrac{1}{2}c_0\{1-(4/\pi)\sum_0^\infty [1/(2n+s)]\sin[(2n+1)\pi x/l]\}$$

In ker je $f(x,0)=\varphi(x)$, dobimo od tod:

$$f(x,t)=\tfrac{1}{2}c_0$$
$$\{1-(4/\pi)\sum_0^\infty [1/(2n+1)^2]\exp[-(2n+1)^2\pi^2 Dt/l^2]\sin[(2n+1)\pi x/l]\} \tag{4}$$

2. Množina sladkorja, ki se nabere v zgornji plasti, je samo funkcija časa:

$$m(t)=S\int_0^{l/2} f\,dx=\tfrac{1}{4}c_0 Sl\{1-(8/\pi)\sum_0^\infty [1/(2n+1)^2]\exp[-(2n+1)^2\pi^2 Dt/l^2]\} \tag{5}$$

Tu je S ploščina pravokotnega prereza valja.

3. Ta vrsta je pri majhnih t slabo konvergentna. Zato bomo D raje izračunali iz druge vrste.

4. Masa $m(t)$ je odvisna tudi od konstante D, torej $m(t, D)$. Pri enaki spremembi (napaki) mase Δm bo sprememba (napaka) ΔD tem manjša, čim večji je odvod m_D. Torej je najugodnejši čas za ločitev, ko ima gornji odvod maksimum: $\frac{\partial}{\partial t} m_D = 0$.

Od tod dobimo enačbo: $e^{-u} + e^{-9u} + \ldots = u[e^{-u} + 9\, e^{-9u} + \ldots]$, kjer pomeni $u = \pi^2 Dt/l^2$. Koren te enačbe je $u_0 \approx 1$ in od tod $t_0 = l^2/\pi^2 D$. V našem primeru je $t_0 = 30$ ur.

5. Splošna rešitev diferencialne enačbe (1), če je valj neskončno dolg, se glasi tudi:

$$f(x, t) = (4 \pi Dt)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda) \exp\left[-(x-\lambda)^2/4 Dt\right] d\lambda \qquad (6)$$

če pomeni $\varphi(\lambda)$ začetno porazdelitev.

Če vzamemo $\varphi(\lambda) = c_0$ za $\lambda < 0$ in $\varphi(\lambda) = 0$ za $\lambda > 0$ (sl. 2), dobimo Gaussov integral

$$f(x, t) = c_0 (4 \pi Dt)^{-\frac{1}{2}} \int_{0}^{\infty} \exp\left[-(x+\lambda)^2/4 Dt\right] d\lambda$$

Množina sladkorja v zgornji plasti je:

$$m(t) = c_0 S (4 \pi Dt)^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} \exp[-(x+\lambda)^2/4 Dt]\, d\lambda$$

Z vpeljavo novih spremenljivk u, v $[\lambda = u v,\ x = u(1-v)]$ dobimo

$$m(t) = c_0 S (4 \pi Dt)^{-\frac{1}{2}} \int_0^1 dv \int_0^{\infty} \exp(-u^2/4 Dt)\, u\, du = c_0 S (Dt/\pi)^{\frac{1}{2}}$$

in od tod v našem primeru $D = 0{,}0133\ \mathrm{cm^2\, h^{-1}}$. To seveda ni natančna rešitev, kajti upoštevati moramo začetne pogoje (3). Sedaj dobimo

$$f(x, t) = c_0 (4 \pi Dt)^{-\frac{1}{2}} \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{(2n-1)l}^{2nl} \exp[-(x-\lambda)^2/4 Dt]\, d\lambda$$

in

$$m(t) = c_0 S (4 \pi Dt)^{-\frac{1}{2}} \sum_{-\infty}^{\infty} \int_0^{l/2} dx \int_{(2n-1)l}^{2nl} \exp\left[-(x-\lambda)^2/4 Dt\right] d\lambda \qquad (7)$$

Ta vrsta za $m(t)$ je zelo konvergentna pri majhnih t. Seveda nam da iste vrednosti kot vrsta (5).

Iz vrste (7) dobimo naslednjo enačbo:

$$D = \pi (m + \Delta m)^2 / c_0^2 S^2 t$$

kjer pomeni Δm za majhne t zelo konvergentno vrsto. Če v to vrsto vstavimo vrednost za D, ki smo jo dobili iz Gaussovega integrala, bo novi D že boljši približek prave vrednosti. V našem primeru je $\Delta m/m$ velikostnega reda 10^{-9}. To pa je mnogo manj kot znaša mehanska napaka pri ločitvi. Pri tako majhnih časih je umestno računati z Gaussovim integralom.

B. Povh

KAZALO

Članki:

Moderne vakuumske črpalke (P. G. in I. K.) 1
Manometri za vakuum (A. Belič) 10
Prof. dr. Josipu Plemlju ob petdesetletnici akademskega dela 49
O vpeljavi Giorgijevega merskega sistema (F. Avčin) 50
Uporaba vakuuma v industriji
1. Konstruiranje industrijskih vakuumskih sistemov (B. Kozina) 59
2. Iskanje lukenj v visokovakuumskih napravah (E. Kansky) 62
3. Uporaba vakuumske tehnike pri izdelavi elektronskih cevi (J. Dekleva) 65
4. Naparevanje tankih plasti v vakuumu (B. Zega) . . . 67
5. Taljenje in sintranje kovin v vakuumu (B. Kozina) . . 70
Kvadratura kroga (F. Križanič) 97
Oblikovanje togih krivuljnikov (O. Sajovic) 107
Uporaba interference na tankih plasteh (P. Gosar) 116
Infrardeči spektrofotometri (D. Hadži) 125
Relaksacijske metode pri numeričnem obravnavanju linearnih enačb. Diferencialne enačbe. (A. Kuhelj) 145
O praštevilih (I. Vidav) 161
Jedro (E. Fermi, prev. S. Detoni) 168
Magnetni spineli (B. Zega) 173

Novice:

Nove metode za merjenje svetlobne hitrosti (B. Kvaternik) . 20
Drobne vesti 24
O številu π (I. Vidav) 73
Radioaktivnost nevtrona (M. Švikaršič) 74
Eksperimentalna potrditev Fresnelove uklonske teorije (S. Poberaj) 75
CISE — italijanski inštitut za proučevanje atomske energije (Č. Z.) 77
Ustanovitev evropskega sveta za jedrske raziskave v Ženevi (A. Peterlin) 78
Uporabna matematika v Italiji (A. Kuhelj) 79
Jedro Galaksije (F. Dominko) 81
Eksperimentalne potrditve enačbe $U = mc^2$ (B. Ravnikar) . . 132
Pospešek 4.10^8 g (J. Kalan) 133
49. razstava fizikalnih instrumentov v Parizu (A. Moljk) . . 135
Pravilni sedemnajsterokotnik (N. Prijatelj) 178
Pozitronij (S. Kandare) 181
Negativni pritisk v tekočinah (M. Ribarič) 184

Novi instrumenti:

Nov aparat za elektroforezo (P. Dolar) 25
Fotometer z elektronsko pomnoževalko (S. Kandare) . . . 27
Ultracentrifuga Spinco (P. Dolar) 84
Instrument za merjenje koncentracije kisika v plinih (M. Kac) 139
Pisalni instrument za diagrame X-Y (D. Jamnik) 187

Pouk:

Pravila za določanje smeri pri elektromagnetnih pojavih (S. Breskvar) 28
Kdo naj študira fiziko (W. H. Westphal) 88

Poskusi:

Model katodne cevi z vodnim curkom (J. Lep) 87
Termodifuzija (I. Kuščer in D. Leskovšek) 189
Pripomba k članku o modelu katodne cevi (M. Vakselj) . . 192

Iz naših šol:

Katere tuje revije za matematiko in fiziko imamo v Ljubljani (B. Dobovišek) 30
O pouku teoretične fizike (I. C. Slater, N. H. Frank) . . . 36
Razgovor o matematiki in fiziki v naših šolah 37
1. O pouku matematike na visokih šolah (O. Sajovic) . . 37
2. O pouku fizike na visokih šolah (I. Kuščer) . . . 38
3. Pouk matematike v srednji šoli (I. M., L. G., F. A.) . . 39
4. Pouk fizike v srednji šoli (I. Štalec) 41
Prof. Leopold Andrée (F. A., Br.) 89
Pomoč matematikov ustanovam in podjetjem (A. Kuhelj) . . 90
Nekaj misli o tehniki predavanja (Br.) 196
Influenčni stroj (A. M.) 198
Učni načrt oddelka za fiziko na TVŠ 198
Delo v predmetnem aktivu matematikov in fizikov v Ljubljani v l. 1952-53 (M. Klopčičeva) 200
Ob stoletnici ljubljanske realke (S. Breskvar) 201
Občni zbor Društva matematikov in fizikov (N. Benkovič) . 203

Dopisi 42, 137

Utrinki 43, 86, 140

Nove knjige 44, 91, 141, 204

Odgovori 46, 143, 206

Vprašanja 48, 96, 142, 188

Uredništvo je prejelo v zameno

Elektrotehniški vestnik, Ljubljana 1952, XX, št. 9—10, 11—12.
Farmacevtski vestnik, Ljubljana 1952, III, št. 9—10.
Glasnik mat.-fiz. i astr., Zagreb 1952, T. 7, No 3.
Gospodarski vestnik, Ljubljana 1952, I, 59—77.
Nauka i tehnika, Beograd 1952, VIII, št. 7.
Proteus, Ljubljana 1952/53, XV, št. 2, 3, 4—5, 6.
Sodobna pedagogika, Ljubljana 1952, III, št. 7—8, 9—10.
Varilna tehnika, Ljubljana 1952, I, št. 3.
Zdravstveni vestnik, Ljubljana 1952, XXI, št. 9—10, 11—12.
Zobozdravstveni vestnik, Ljubljana 1952, VII, št. 4—5, 6.

Zveza Društev matematikov in fizikov FLRJ izdaja časopis:

Nastava matematike i fizike

Naročnina je 200 din, posamezna številka 60 din. Naročila in naročnino pošiljajte podjetju »Znanje«, Beograd, Terazije 12 ali na ček. rač. št. 103—901810 z označbo »Za časopis Nastava matematike i fizike«.

FIZIKALNI INŠTITUT JOŽEFA STEFANA

vas vabi na ogled razstave jedrske fizike, ki bo odprta od 8. do vključno 22. februarja vsak dan od 10. do 12. in od 15. do 18. ure v novem inštitutskem poslopju v Jamovi ul. 55. Razstava obsega naslednja poglavja:

Osnove jedrske fizike
Merilne priprave
Osnove jedrske elektronike
Pospeševalniki
Uporaba jedrske fizike
Jedrska fizika po svetu
Jedrska fizika v Jugoslaviji
Zgodovinski pregled

Večje skupine lahko dobijo brezplačno vodstvo po razstavi in si jo lahko ogledajo izven navedenega časa, če se najavijo vsaj en dan prej pismeno ali telefonsko na številko 22-023.

Društvo matematičara i fizičara N. R. Hrvatske poziva sve, koji se zanimaju matematičko-fizičkim naukama, da se pretplate na

Glasnik
matematičko-fizički i astronomski

i sarađuju u njemu.

Zaista ne bi smjelo biti ni jednog kulturnog radnika, koji se bavi matematičko-fizičkim naukama, kao ni prosvjetne ustanove, koja nije pretplatnik Glasnika. Pretplatom i suradnjom u svojem naučnom i stručnom časopisu pokazujete u kolikoj mjeri pratite i podupirete razvitak i napredak svoje struke. Širite također Glasnik u svom krugu, jer time podupirete razvitak matematičko-fizičkih nauka u svojoj okolini.

Prijave pretplate slati na administraciju Glasnika: Hrvatsko prirodoslovno društvo, Zagreb, Ilica 16/III. Pretplata za god. 1952. iznosi din 240.—.

Društvo matematikov in fizikov NRH izdaja za vso državo »*Matematičko-fizički list* za učenike srednjih škola«. Letnik ima 5 številk, med počitnicami ne izhaja. Letna naročnina je 150 din, posamezna številka stane 35 din.

Profesorji srednjih šol, priporočajte list dijakom! Naročila in naročnino pošiljajte na naslov:

Matematičko-fizički list, Zagreb, Ilica 16/III ali na čekovni račun št. 401-9033132.

Obzornik za matematiko in fiziko izhaja vsak drugi mesec. Izdaja ga Društvo matematikov in fizikov LRS. Urejuje ga uredniški odbor: I. Kuščer, A. Moljk, I. Vidav, A. Žabkar. Odgovorni in tehnični urednik: I. Štalec. Upravo vodi I. Štalec. — Tiska tiskarna »Toneta Tomšiča« v Ljubljani. — Naročnina za letos je 250 din. Posamezna številka 90 din, dvojna številka 120 din. Naročnino nakažite na naš čekovni račun pri Narodni banki, št. 604-T-207. - Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov:

Obzornik za matematiko in fiziko, Ljubljana, poštni predal 253.