OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

1952 LJUBLJANA 3

VSEBINA

Članki

Kvadratura kroga (F. Križanič) 97
Oblikovanje togih krivuljnikov (O. Sajovic) 107
Uporaba interference na tankih plasteh (P. Gosar) 116
Infrardeči spektrofotometri (D. Hadži) 125

Novice

Eksperimentalne potrditve enačbe $U = mc^2$ (B. Ravnikar) . . 132
Pospešek $4 \cdot 10^8\ g$ (J. Kalan) 133
49. razstava fizikalnih instrumentov v Parizu (A. Moljk) . . 135

Dopisi

Nesporazum v pojmih (M. Brezinščak) 137

Novi instrumenti

Instrument za merjenje koncentracije kisika v plinih (M. Kac) 139

Utrinki 140
Nove knjige 141
Vprašanja 142
Odgovori 143

Uredništvo je prejelo v zameno

Bilten na Društvoto na matematičarite i fizičarite od NRM, Skopje 1951, k. II, No 2.
Elektrotehniški vestnik, Ljubljana 1952, XX, št. 5—6, 7—8.
Farmacevtski vestnik, Ljubljana 1952, III, št. 7—8.
Glasnik matematičko-fizički i astronomski, Zagreb 1952, T. 7 No 1, 2.
Gospodarski vestnik, Ljubljana 1952, I, št. 37—58.
Nauka i tehnika, Beograd 1952, VIII, št. 4, 5, 6.
Proteus, Ljubljana 1952/53, XV, št. 1.
Vesnik Društva matematičara i fizičara NRS, Beograd 1952, IV, št. 1-2.
Varilna tehnika, Ljubljana 1952, I, št. 1, 2.
Zdravstveni vestnik, Ljubljana 1952, XXI, št. 7—8.
Život, Sarajevo 1952, I, zv. 1.
Philips' Technische Rundschau, XIII, 8, 9, 10, 11, 12.

Obzornik za matematiko in fiziko izhaja vsak drugi mesec. Izdaja ga Društvo matematikov in fizikov LRS. Urejuje ga uredniški odbor: I. Kuščer, A. Moljk, I. Vidav, A. Žabkar. Odgovorni in tehnični urednik: I. Štalec. Upravo vodi I. Štalec. — Tiska tiskarna »Toneta Tomšiča« v Ljubljani. — Naročnina za letos je 250 din. Posamezna številka 90 din. Naročnino nakažite na naš čekovni račun pri Narodni banki, št. 604-95331-4. — Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov:

Obzornik za matematiko in fiziko, Ljubljana, poštni predal 253.

LETO II
1 9 5 2

Obzornik za matematiko in fiziko

ŠTEV. 3
1. X. 1952

KVADRATURA KROGA

F. Križanič

Frustra laborant, quotquot se calculationibus fatigant pro inventione quadraturae circuli.

M. Stifel 1544

Večji del današnje matematike živi v svetu realnih števil. Naš članek namerava pokazati, kako sta geometrija in algebra kazali aritmetiki pot skozi ta svet. Pri merjenju daljic in pri reševanju enačb so matematiki nemalokrat naleteli na nova, dotlej neznana števila. Aritmetika je morala nato ta števila vdelati v svojo stavbo.

Prvi tak dogodek se je odigral v pitagorejski šoli (šesto stoletje pr. n. š.). Pitagorejci so spoznali, da ni vselej mogoče izmeriti dve daljici z isto mero. Razmerje dveh takih daljic je neizrazljivo z razmerjem dveh celih števil. Govoreč z jezikom današnje matematike, moremo reči: po izbiri daljice enote ne moremo najti vsaki daljici pripadajoče število med ulomki. Geometrija je zahtevala poleg racionalnih števil še nova števila, aritmetika pa je — z majhno zamudo — vpeljala iracionalna števila.

Pitagorejci so odkrili, da sta nesoizmerljivi stranica in diagonala kvadrata. Če je stranica daljica enote, predstavlja diagonala kvadrata aritmetiki iracionalno število. Za geometrijo sámo pa je to kaj preprosta daljica. Čim si izbere daljico enote, more diagonalo kvadrata načrtati le z uporabo ravnila in šestila. Dobro dolgo je vladalo prepričanje, da se dado vse iracionalne daljice tako načrtati.

Pitagorov izrek nam omogoča, da izrazimo zvezo med števili, ki ju predstavljata stranica in diagonala kvadrata, v jeziku algebre. Če je stranica daljica enote, je mersko število diagonale rešitev enačbe $x^2 = 2$. Tako se pojavi nov dobavitelj iracionalnih števil: algebra. Mnoge rešitve algebrajskih enačb so iracionalne. Odslej nas bo zanimalo tekmovanje med algebro in geometrijo: katera da več iracionalnih števil? Spoznali bomo, da zajemajo rešitve algebrajskih enačb mnogo več iracionalnih števil kot konstrukcije s šestilom in ravnilom. Nato pa bomo videli — in to bo glavni namen našega kramljanja — da je geometrija mnogo bogatejši rudnik iracionalnih števil kakor algebra, če se le odpovemo izključni uporabi ravnila in šestila.

Koreni algebrajskih enačb ne izčrpajo vseh iracionalnih števil. Zato je umestna razdelitev števil na algebrajska in transcendentna števila. Algebrajsko število je tako število, ki je koren kake algebrajske enačbe s celimi števili kot koeficienti, transcendentna števila pa te lepe lastnosti ne premorejo. To razdelitev sta uvedla Descartes (1637) in Leibniz (1686). Svoj pomen pa ima ta razdelitev, odkar sta J. Liouville (1844) in G. Cantor (1874) vsak po svoje dokazala, da res obstoje števila, ki ne rešijo nobene algebrajske enačbe.

Trije stari orehi so ozko povezani z obravnavano snovjo. To so trije znameniti problemi antične matematike: *podvojitev kocke, raztretjinjenje kota* in *kvadratura kroga.*

Prvi problem omenja Euripides (485—406 pr. n. š.) v svoji — danes žal izgubljeni — drami Poleidos: Krečanski kralj Minos gradi grobnico svojemu sinu Glauku. Stavbenik mu prinese načrte, po katerih bi naj bil grob kocka določene velikosti. Minos mu de:

Premajhen zasnoval si mi kraljevski grob.
Podvoji ga, lik kocke pa ohrani!

Nalogo: načrtati z ravnilom in šestilom rob kocke, ki ima dvakratno prostornino kocke z znanim robom, so si dolga stoletja zastavljali véliki in mali matematiki. Nikomur ni uspelo rešiti to nalogo le z ravnilom in šestilom. Matematika danes ve, da je to nemogoče. Problemu moremo dati zelo preprosto algebrajsko obliko. Če je rob kocke daljica enote, zadošča neznani rob x enačbi tretje stopnje:

$$x^3 = 2$$

Tudi drugi problem: razdelitev kota na tri enake dele, se upira rešitvi z ravnilom in šestilom prav tako kakor prvi. Preoblecimo ga v algebrajski kroj! Imenujmo iskani kot φ! Znani kot je tedaj $3\,\varphi$. Trigonometrija nam pove zvezo med obema kotoma:

$$4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi = \cos 3\varphi$$

Pomnožimo to enačbo z 2 in vpeljimo novo neznanko $x = 2\cos\varphi$! število $a = 2\cos 3\varphi$ pa je znano. Raztretjinjenje kota je torej povezano z rešitvijo kubične enačbe:

$$x^3 - 3x - a = 0$$

Oba problema se upirata rešitvi z ravnilom in šestilom, mogoče pa ju je ugnati z drugimi sredstvi. Pri delu z ravnilom in šestilom iščemo preseke krogov in premic. Pokličimo na pomoč druge krivulje, pa bomo kos obema nalogama. Zgodovina nam o tem priča z obilnim gradivom. Navedimo le nekaj rešitev drugega problema: Arhimedes Sirakužan (287 do 212 pr. n. š.) je raztretjinil kot s pomočjo krožne konhoide, Nikomedes (okoli 180 pr. n. š.) pa je iskal pomoči pri krivulji, ki ji danes pravimo Nikomedova konhoida, Apolonij Pergejec (265—170 pr. n. š.) je pri reševanju s pridom uporabil stožnice.

Tretji problem starega veka, znan pod imenom *kvadratura kroga,* zahteva: Pretvori dan krog v ploščinsko enak kvadrat! Nalogo moremo hitro prevesti v analitično obliko. Polmer znanega kroga bodi r, stranica iskanega kvadrata pa x. Med obema velja zveza:

$$x^2 = \pi r^2$$

in za rešitev problema je odgovoren značaj sorazmernostnega faktorja π.

Plutarh (46—125 n. e.) nam priča, da se je s to nalogo prvi ubadal Anaksagoras Klazomenaičan (499—428 pr. n. š.). Nikakor ne utegnemo pregledati uspehe in neuspehe njegovih naslednikov*. Omenimo le, da se je izjalovil vsak trud, ki je meril na rešitev z ravnilom

* Vedoželjni bralec bo našel izčrpnejši zgodovinski pregled v članku A. Peterlina: *Kvadratura kroga* (Proteus IX, str. 39) in v knjižici Stjepana Škarice: *Kvadratura kruga* (Mala biblioteka za matematiku, fiziku i kemiju, Zagreb 1951).

in šestilom. Svojo pomoč so odpovedale tudi algebrajske krivulje, rešitev je uspela le s pomočjo transcendentnih krivulj*.

Za primer naj nam služi Deinostratos (okoli 335 pr. n. š.), ki je zmogel to nalogo s pomočjo kvadratrikse. To krivuljo je uporabljal že Hippias Eližan (okoli 420 pr. n. š.) za raztretjinjenje kota. Enačba kvadratrikse je $x = y \cdot \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\pi y$. Krivulja je očitno sestavljena iz več vej. Nas zanima le glavna veja, ki gre skozi točki (0,1) in $(2/\pi,0)$. Za naše potrebe moramo torej najti presek krivulje z osjo x. Tej nalogi pa nismo kos z uporabo samega ravnila in šestila. Odtod naprej pa nas bi obe pripravi lepo vedli do cilja. Presečišče, ki predstavlja število $2/\pi$, bi zrcalili okoli kroga enote in tako dobili $\pi/2$; to bi podvojili in nato poiskali koren dobljenega števila π, saj vemo, da je koren srednja geometrijska sorazmernica števil π in 1. Uporabimo Euklidov izrek ali višinski izrek. Ko imamo $\sqrt{\pi}$, povečamo polmer kroga v razmerju $1 : \sqrt{\pi}$, pa smo na cilju: dobljena daljica je stranica ploščinsko enakega kvadrata.

Konstrukcije z ravnilom in šestilom. Že Platon (428—348 pr. n. š.) je priznaval geometrijsko točnost zgolj tistim konstrukcijam, ki so izvršljive v končno mnogo korakih le z ravnilom in šestilom. Tako sodi tudi današnja matematika in zato ne šteje za geometrijsko stroge tiste rešitve, ki so sicer pravilne, pa so dosežene z drugimi sredstvi.

Svoje naloge smo preoblekli v analitični kroj in sedaj bi radi iz njega spoznali, ali je naloga geometrijsko strogo rešljiva ali ne. Znana števila, ki nastopajo v analitičnih zvezah, predstavimo kot točke na ravnini kompleksnih števil. Tudi rešitve svojih enačb bomo našli kot točke te ravnine. In na vprašanje, kdaj moremo iz znanih točk priti do iskanih le z uporabo ravnila in šestila, nam odgovarja tole sodilo (kriterij):

Naloga je geometrijsko strogo rešljiva, če je enačba, ki jo analitično predstavlja, rešljiva le s kvadratnimi koreni.

Pogoj je potreben: točke, ki jih iz znanih dosežemo le z uporabo ravnila in šestila, so presečišča krogov in premic. Vsak korak konstrukcije se analitično zrcali kot sočasna rešitev dveh enačb:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$
$$Ax + By + C = 0,$$

ki pa se očitno izraža s kvadratnimi koreni.

Pogoj pa je tudi zadosten. Vse racionalne računske operacije in iskanje kvadratnega korena moremo na kompleksni ravnini predstaviti s takimi transformacijami, ki jih geometrijsko dosežemo le z ravnilom in s šestilom. Vsoto in razliko dveh kompleksnih števil dosežemo s paralelnim premikom, množenje in deljenje pa zahtevata vrtež za dani kot in povečanje daljice v danem razmerju. Prav tako pa lahko načrtamo kvadratni koren. Koren kompleksnega števila $z = r \cdot e^{i\varphi}$ je število $z^{1/2} = r^{1/2} \cdot e^{i\varphi/2}$. Koren najdemo torej, če razpolovimo kot in poiščemo srednjo geometrijsko sorazmernico $r^{1/2}$ števil 1 in r: $1 : r^{1/2} = r^{1/2} : r$. Vse te operacije pa res lahko izvedemo le s šestilom in ravnilom.

To sodilo nam pove, da sta podvojitev kocke in raztretjinjenje kota geometrijsko točno nerešljivi nalogi. Oba problema smo izrazili z enačbami tretje stopnje. Nobena izmed teh enačb ni rešljiva s kvadratnimi koreni.

* Krivulja je algebrajska, če je zveza med koordinatami njenih točk algebrajska, sicer pa je krivulja transcendentna.

(Za nekatere vrednosti parametra a, n. pr. za $a=0$ in $a=2$, je enačba za raztretjinjenje kota rešljiva s kvadratnimi koreni, v splošnem pa ni.)

Ostane nam še tretja naloga: kvadratura kroga. Videli smo že, da je za njeno rešljivost odgovorna narava števila π. Naloga je rešljiva, če se da število π izraziti s samimi kvadratnimi koreni. Vprašanje, ali je število π izrazljivo s samimi kvadratnimi koreni, bomo podredili splošnejšemu vprašanju: ali je število π sploh algebrajsko število. Saj je vsako s kvadratnimi koreni izrazljivo število rešitev neke algebrajske enačbe.

Algebrajska števila smo imenovali rešitve enačbe s celimi koeficienti:

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0 \qquad 1$$

Stopnja te enačbe je n, če je $a_0 \neq 0$. Ta enačba ima n korenov: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, ki morejo biti med seboj enaki. Levo stran enačbe moremo zapisati tudi s koreni:

$$f(z) = a_0 (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \ldots (z - \alpha_n) \qquad 1'$$

Če je vodilni koeficient enačbe enak 1, imenujemo rešitve enačbe cela algebrajska števila. Pomnožimo enačbo (1) oz. (1') z a_0^{n-1}, tako dobimo enačbo:

$$(a_0 z)^n + a_1 (a_0 z)^{n-1} + \ldots + a_0^{n-2} \cdot a_{n-1} (a_0 z) + a_0^{n-1} a_n = 0$$

ali:

$$(a_0 z - a_0 \alpha_1)(a_0 z - a_0 \alpha_2) \ldots (a_0 z - a_0 \alpha_n) = 0$$

V zadnji enačbi smo a_0^n porazdelili po vseh linearnih faktorjih, vsak je privzel faktor a_0. Upeljimo novo neznanko $z' = a_0 z$! Tako dobimo enačbo z vodilnim koeficientom 1 in celimi koeficienti:

$$A_1 = a_1, \; A_2 = a_0 a_2, \ldots A_n = a_0^{n-1} a_n$$

$$z'^n + A_1 z'^{n-1} + \ldots + A_{n-1} z' + A_n = 0 \qquad 1^*$$

$$(z' - \alpha_1')(z' - \alpha_2') \ldots (z' - \alpha_n') = 0 \qquad 1^{*'}$$

Rešitve te enačbe so cela algebrajska števila:

$$\alpha' = a_0 \alpha_1, \; \alpha'_2 = a_0 \alpha_2, \ldots, \; \alpha'_n = a_0 \alpha_n.$$

Koeficienti enačbe (1*) se prav preprosto izražajo z njenimi koreni. Zmnožimo linearne faktorje v enačbi (1*'), pa uvidimo, da je:

$$-A_1 = \alpha_1' + \alpha'_2 + \ldots + \alpha'_n$$

$$A_2 = \alpha_1' \alpha_2' + \alpha_1' \alpha_3' + \ldots + \alpha'_{n-1} \alpha'_n$$

$$\vdots$$

$$(-1)^n A_n = \alpha_1' \cdot \alpha'_2 \ldots \alpha'_n$$

Izrazi na desnih straneh so simetrične funkcije korenov. Kakor koli že premešamo korene med seboj, vedno se ti izrazi ohranjajo, neobčutljivi so za permutacije korenov.

Simetrične funkcije, ki smo jih spoznali, so najpreprostejše. Pravimo jim elementarne simetrične funkcije. Pozneje bomo srečali še druge simetrične funkcije, v katerih bodo spremenljivke (koreni) povezane na bolj zamotan način. Funkcije pa bodo še vedno zadosti pohlevne. Spremenljivke bodo v njih povezane le z racionalnimi operacijami: s seštevanjem, z odštevanjem, z množenjem in z deljenjem. Take funkcije imenujemo racionalne

funkcije; če pa je pri tem izvzeto še deljenje, imenujemo funkcijo celo racionalno funkcijo. Funkcije korenov, ki jih bomo srečali, bodo imele torej kar tri oznake. To bodo cele racionalne simetrične funkcije. Kjer bomo v nadaljnjem rekli simetrična funkcija, bomo seveda mislili: cela racionalna simetrična funkcija.

Vsaka racionalna simetrična funkcija se da z elementarnimi simetričnimi funkcijami izraziti na racionalen način. Ker pa so elementarne simetrične funkcije korenov enačbe (1*) do predznaka enake njenim koeficientom, velja:

Vsaka racionalna simetrična funkcija korenov enačbe (1) se da racionalno izraziti s koeficienti te enačbe.*

Ker v celi racionalni simetrični funkciji nikdar ne nastopi deljenje in ker so koeficienti enačbe cela števila, moremo reči:

Vsaka cela racionalna simetrična funkcija korenov enačbe (1) je celo racionalno število.*

Za primer navedimo vsoto kvadratov vseh korenov enačbe, ki je očitno cela racionalna simetrična funkcija. Ta je enaka $A_1^2 - 2A_2$, kakor nam pokaže lahek račun. Primer naj nam nadomesti dokaz, ki je sicer preprost, a za nas preobsežen.

K celim algebrajskim korenom enačbe (1): $\alpha'_1, \alpha'_2 \ldots \alpha'_n$ privzemimo še vse mogoče vsote po dva korena: $\alpha'_1 + \alpha'_2$, $\alpha'_1 + \alpha'_3, \ldots, \alpha'_{n-1} + \alpha'_n$, nato vse mogoče vsote po tri korene: $\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3$, $\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_4, \ldots$, $\alpha'_{n-2} + \alpha'_{n-1} + \alpha'_n$, potem dodajmo še vse mogoče vsote po štiri korene in tako nadaljujmo, dokler ne pridemo do vsote vseh korenov: $\alpha'_1 + \alpha'_2 + \ldots + \alpha'_n$. Vse dobljene izraze zaznamujmo na kratko z $\beta'_1, \beta'_2, \ldots \beta'_N$, kjer je N njihovo število. Tvorimo enačbo, ki ji ti izrazi zadoščajo:

$$(z' - \beta'_1)(z' - \beta'_2)\ldots(z' - \beta'_N) = 0,$$

in si oglejmo koeficiente te enačbe! Ti so simetrične funkcije β'-ov. Izrazimo vse β' z α', pa dobimo koeficiente kot simetrične funkcije α'-ov. Res! Če zamenjamo α'-e med seboj, se tudi β' le premešajo, pri tem pa se koeficienti ohranjajo. Ker so koeficienti naše enačbe simetrične funkcije korenov enačbe (1*), so po izreku, ki smo ga omenili, cela števila.

Podobno moremo sklepati tudi za enačbo (1). Tvorimo vse možne vsote α_1, $\alpha_2 \ldots$, $\alpha_1 + \alpha_2, \ldots$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \ldots$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ in jih označimo z $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_N$! Ker velja za vsak α zveza: $\alpha' = a_0\alpha$, velja ta očitno tudi za $\beta : \beta' = a_0\beta$. Enačbo, ki ji zadoščajo β, dobimo kar, če iz enačbe, ki ji zadoščajo β', izpostavimo a_0 in uvedemo neznanko $z : z' = a_0 z$:

$$a_0^N(z - \beta_1)(z - \beta_2)\ldots(z - \beta_N) = 0$$

Nekaj β-ov more biti enakih 0. Tedaj je leva stran enačbe deljiva z neko potenco z-ja. Od nič različne β označimo z $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_r$, r je njihovo število. Enačba, ki ji zadoščajo od nič različni β, je torej stopnje r:

$$b_0 z^r + b_1 z^{r-1} + \ldots + b_{n-1} z + b_n = 0 \qquad 2$$

Prav toliko je od 0 različnih β', ki tudi zadoščajo enačbi stopnje r, ki pa ima vodilni koeficient enak 1:

$$z'^r + B_1 z'^{r-1} + \ldots + B_{n-1} z' + B_n = 0 \qquad 2'$$

Eulerjeva formula in Eulerjeva funkcija. Naravo števila π nam bo pojasnila analiza. Domnevo, da je število π transcendentno, je že leta 1755

postavil L. Euler. Pravilnost te domneve je dobrih sto let pozneje dokazal F. Lindemann. (1882.)

Pri dokazovanju se bomo oprli na tole zvezo med številoma e in π:

$$e^{i\pi} + 1 = 0, \qquad 3$$

ki sledi iz Eulerjeve formule: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ za $x = \pi$.

Razen tega pa bomo potrebovali še osnovne lastnosti Eulerjeve funkcije $\Gamma(p)$, ki jo definira integral:

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-z}\, dz \qquad 4$$

Lahek račun pove, da je $\Gamma(1) = 1$. Z integracijo per partes pa dobimo brez posebnih težav zvezo:

$$\Gamma(p) = (p-1)\ \Gamma(p-1)$$

Odtod spoznamo, da je za vsak celi pozitivni p vrednost funkcije tudi celo število, in sicer kar:

$$\Gamma(p) = 1 \cdot 2 \ldots (p-1) = (p-1)! \qquad 4'$$

* * *

Dovolj smo pripravljeni, da se lotimo svoje glavne naloge: dokaza, da je število π transcendentno. V dokazovanju bomo sledili Hilbertu, ki nam je precej poenostavil Lindemannova razmišljanja: Dokaz, da število π ne zadošča nobeni algebrajski enačbi, bomo naslonili na Eulerjev obrazec (3). Če je π algebrajsko število, je z njim algebrajsko tudi število $i\pi$*). Algebrajska enačba, ki ji zadošča število $i\pi$ naj ima korene $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ (med temi koreni je tudi naš $i\pi$). Prav gotovo velja:

$$(1 + e^{\alpha_1})\ (1 + e^{\alpha_2}) \ldots (1 + e^{\alpha_n}) = 0,$$

ker je po (3) vsaj tisti faktor enak 0, kjer je eksponent $i\pi$. Zmnožimo!

$$1 + e^{\alpha_1} + \ldots + e^{\alpha_n} + e^{\alpha_1+\alpha_2} + \ldots + e^{\alpha_{n-1}+\alpha_n} + \ldots + e^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}$$

V izrazu, ki smo ga tako dobili, morejo biti nekateri eksponenti enaki 0. Vsak tak člen z eksponentom 0 je enak 1. Vse člene, ki so enaki 1, združimo v en sam člen a, ki je celo, od nič različno število. (Tudi če so vsi eksponenti od nič različni, je $a = 1$). Ostali členi pa so prav naši znani, od nič različni $\beta_1\ \beta_2, \ldots\ \beta_r$, ki so, kakor vemo, algebrajska števila. Zadnji izraz lahko pišemo krajše:

$$a + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \ldots + e^{\beta_r} = 0 \qquad 3'$$

Da uvidimo transcendentnost števila π, zadošča dokazati tale izrek: *Relacija (3') je neizpolnljiva, če so $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_r$ algebrajska števila.*

Res, če velja ta izrek in je π algebrajsko število, ne more veljati Eulerjev obrazec (3).

Naj bo x koren enačbe $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$. Pomnožimo enačbo z i^n in vpeljimo novo neznanko $\xi = ix$, tako dobimo enačbo, ki ji zadošča število ix. V tej enačbi so nekateri koeficienti imaginarna števila:

$$a_0 \xi^n + ia\ \xi^{n-1} - a_2 \xi^{n-2} - ia_3 \xi^{n-3} + \ldots + i^{n-1} a_{n-1} \xi + i^{n-1} a_n = 0$$

Pomnožimo vso enačbo s polinomom, ki je iste stopnje kot leva stran enačbe, koeficienti pa so konjugirani koeficientom enačbe. Tako dobimo enačbo za ix, ki ima racionalne cele koeficiente:

$$a^2_0 \xi^{2n} + (a^2_1 - 2 a_0 a_1) \xi^{2n-2} + \ldots + (a^2_{n-1} - 2 a_{n-2} a_n) \xi^2 + a^2_n = 0$$

Dokaz gornjega izreka oprimo na dve lastnosti števila 0! Prva pove, da je produkt enak 0, če je vsaj en faktor enak 0, druga pa odlikuje število 0 kot tisto celo število, ki je deljivo z vsemi celimi števili. Predpostavimo torej, da je relacija (3′) izpolnjena in iz te predpostavke izpeljimo protislovje!

Enačba (3′) ostane v veljavi, če jo pomnožimo s kakšnim od nič različnim številom. Poskusili bomo najti tako celo število, da bomo mogli produkt leve strani enačbe (3′) in tega števila pisati kot vsoto dveh števil. Prvo število bo celo racionalno število, gotovo različno od nič, drugo število pa bo manjše od 1. Vsota dveh takih števil pa prav gotovo ne more biti enaka nič. Tako bo naša predpostavka ovržena in izrek bo dokazan.

Vsa umetnost tiči torej v tem, da najdemo primerno celo število, s katerim bomo pomnožili enačbo (3′).

Produkt našega števila in vsote več eksponencialnih členov bi nato radi razčlenili v dve števili: prvo število hočemo kot celo racionalno število, drugo pa mora biti zadosti majhno. Skušajmo to nalogo ugnati s primerno linearno kombinacijo vrednosti funkcije $\Gamma(p)$, pri celoštevilčnih argumentih $p, p+1, \ldots, p+n$, ki jo delimo še s $(p-1)!$:

$$H = \frac{c_n \Gamma(p) + c_{n-1} \Gamma(p+1) + \ldots + c_0 \Gamma(p+n)}{(p-1)!} \qquad 5$$

Koeficiente $c_0, c_1, \ldots c_n$, ki so cela števila, ter p in n bomo določili pozneje. Za sedaj izberimo le $c_n \neq 0$ in naj ne bo c_n deljiv s p. Število H je v tem primeru od nič različno celo število. Upoštevajmo, da je pri celem argumentu vrednost funkcije $\Gamma(p)$ določena z (4′). Ulomek (5) moremo tedaj krajšati s $(p-1)!$ in tako uvidimo, da je prvi člen v številu H enak c_n, vsi nadaljnji členi pa so deljivi s p. Ker pa je $p > c_n$, prvi člen ne more biti deljiv s p in z njim vred tudi število H ne. Število H je tedaj celo število, ki ni deljivo s p. Tako število pa je gotovo različno od nič, kajti nič je deljiv z vsakim celim številom.

Številu H moremo dati še drugo obliko, če upoštevamo definicijo funkcije Γ (p). Po definiciji (4) te funkcije moremo namreč pisati:

$$(p-1)!\, H = c_n \int_0^\infty z^{p-1} e^{-z}\, dz + c_{n-1} \int_0^\infty z^p e^{-z}\, dz + \ldots + c_0 \int_0^\infty z^{p+n-1} e^{-z}\, dz.$$

Vsota integralov pa je enaka integralu vsote. In tako dobimo:

$$(p-1)!\, H = \int_0^\infty z^{p-1} \varphi(z) \cdot e^{-z}\, dz,$$

kjer je $\varphi(z)$ polinom stopnje n s koeficienti $c_0, \ldots, c_n$.

S tako določenim številom H pomnožimo enačbo (3′), ki jo pišimo raje s sumacijskim znakom:

$$a \cdot H + \sum_{s=1}^{s=r} e^{\beta_s} \cdot H = 0$$

Vsak člen pod sumacijskim znakom moremo razcepiti v dva člena tako, da izvršimo v H integracijo v dveh korakih: najprej od 0 do β_s, nato pa od β_s do ∞.* S tem pa tudi levo stran enačbe razcepimo v dva člena:

$$A + B = 0, \qquad 6$$

kjer pomeni:

$$A = a \cdot H + \frac{1}{(p-1)!} \sum_{s=1}^{s=r} e^{\beta_s} \int_{\beta_s}^{\infty} z^{p-1} \varphi(z) \cdot e^{-z}\, dz \qquad 6'$$

$$B = \frac{1}{(p-1)!} \sum_{s=1}^{s=r} e^{\beta_s} \int_{0}^{\beta_s} z^{p-1} \varphi(z) e^{-z}\, dz \qquad 6''$$

Število p in koeficiente polinoma $\varphi(z)$ bomo mogli določiti tako, da bo člen A celo racionalno, od nič različno število, člen B pa bo manjši od 1.

Prvi člen aH je gotovo različen od nič, ker sta oba faktorja a in H od nič različna. Parameter p naj bo sedaj praštevilo, večje od a. Za vsak tak p je produkt aH tuj parametru p. Če je produkt deljiv s praštevilom p, je vsaj en faktor produkta deljiv s tem praštevilom. V našem primeru pa sta oba faktorja temu praštevilu tuja.

Polinom $\varphi(z)$ določimo tako, da bo razlika $A - aH$ celo število, deljivo s praštevilom p. V vseh integralih izraza (6') vpeljimo nove spremenljivke z zvezo $\zeta = z - \beta_s$:

$$(p-1)!\,(A - aH) = \sum_{s=1}^{s=r} \int_{0}^{\infty} e^{-\zeta} (\zeta + \beta_s)^{p-1} \varphi(\zeta + \beta_s)\, d\zeta$$

Sedaj imajo vsi integrali iste meje in vsoto integralov moremo pisati kot integral vsote:

$$(p-1)!\,(A - aH) = \int_{0}^{\infty} e^{-\zeta} \sum_{s=1}^{s=r} (\zeta + \beta_s)^{p-1} \varphi(\zeta + \beta_s)\, d\zeta \qquad (*)$$

Vsoto, ki je pod integralskim znakom, uredimo po potencah spremenljivke ζ. Tako dobimo polinom, ki ga označimo $\Phi(\zeta)$.

$$\Phi(\zeta) = \sum_{s=1}^{s=r} (\zeta + \beta_s)^{p-1} \varphi(\zeta + \beta_s)$$

Koeficienti tega polinoma so simetrične funkcije β-ov, saj je vsota na desni strani očitno neobčutljiva za vsako permutacijo β-ov. Integral sam bo zopet neka linearna kombinacija vrednosti funkcije Γ. Najmanjša vrednost funkcije Γ, ki nastopi v tej kombinaciji, pa ne sme biti manjša od $\Gamma(p+1)$, ker hočemo, da bo integral deljiv s $p!$ Najnižja potenca spremenljivke ζ v polinomu $\Phi(\zeta)$ mora biti tedaj ζ^p. Vsota je prav gotovo deljiva s kakim številom, če je vsak njen člen deljiv s tistim številom. Tako vidimo, da mora biti $\varphi(\zeta + \beta_s)$ deljiv s ζ^p pri vsakem s. To pa pomeni, da mora biti polinom $\varphi(z)$ pri vsakem s deljiv z $(z - \beta_s)^p$. Našim zahtevam torej zadostimo, če izberemo za polinom $\varphi(z)$ s primerno konstanto pomnožen produkt $[(z-\beta_1)\,(z-\beta_2) \ldots (z-\beta_r)]^p$. Polinom $\varphi(z)$ je tako v bistvu p-ta potenca polinoma, katerega koreni so števila β.

* Števila β_s so vobče kompleksna, zato moramo oba integrala izvršiti v kompleksnem smislu. Funkcija, ki jo integriramo, je cela funkcija (edina singularnost te funkcije je v neskončnosti), zato smemo integrirati po poljubni poti, ki veže obe mejni točki. Prvi integral izvršimo po premočrtni spojnici izhodišča in točke β_s, drugi integral pa po vzporednici realne osi, ki gre skozi točko β_s. Vse lastnosti integrala v kompleksnem, ki jih bomo potrebovali, so enake lastnostim integrala v realnem, zato smemo brez skrbi izvršiti vse nadaljnje pretvorbe.

Konstanto, s katero je deljiv polinom $\varphi(z)$, določimo tako, da bodo koeficienti polinoma $\Phi(\zeta)$ cela racionalna števila. Spoznali smo že, da so ti koeficienti simetrične funkcije β-ov. Da bodo cela števila, pa morajo biti simetrične funkcije celih algebrajskih števil β'. Zveza med števili β' in β je kaj preprosta: $\beta' = b_0\beta$. Konstantni faktor polinoma $\varphi(z)$ izberimo kot primerno potenco koeficienta b_0. Faktorje b_0, ki jih vsebuje konstanta, porazdelimo po linearnih faktorjih produkta $(\zeta+\beta_s)^{p-1}\cdot\varphi(\zeta+\beta_s)$. Prvi faktor porabi $p-1$ konstant b_0, polinom $\varphi(\zeta+\beta_s)$ pa pobere $(r-1)\cdot p$ faktorjev (ker faktorja ζ^p ne obremenimo s konstanto b_0). V celoti potrebujemo torej $p-1+(r-1)\cdot p = pr-1$ faktorjev b_0. Konstantni faktor polinoma $\varphi(z)$ je torej enak b_0^{pr-1} in tako je polinom $\varphi(z)$ popolnoma določen.

$$\varphi(z) = b_0^{pr-1}[(z-\beta_1)(z-\beta_2)\ldots(z-\beta_r)]^p$$

V oglati oklepaj privzemimo še konstanto b_0:

$$\varphi(z) = b_0^{p(r-1)-1}[b_0(z-\beta_1)(z-\beta_2)\ldots(z-\beta_r)]^p$$

V oglatem oklepaju je sedaj prav leva stran enačbe (2), ki ji zadoščajo β:

$$\varphi(z) = b_0^{p(r-1)-1}[b_0z^r + b_1z^{r-1} + \ldots + b_{r-1}z + b_r]^p$$

Tako smo določili polinom $\varphi(z)$ in z njim tudi koeficiente $c_0, \ldots, c_n$ v izrazu (5). Za nas je važen le svobodni člen polinoma $\varphi(z)$, to je koeficient c_n. Binomski izrek nam pove, da je $c_n = b_r^p\cdot b_0^{p(r-1)-1}$, stopnja polinoma $\varphi(z)$, to je število n, pa je enaka $n = pr$. Število p smo izbrali tako, da je bilo praštevilo, tuje koeficientu c_n. To pa dosežemo, če je p praštevilo, večje od števil b_0 in b_r. Število c_n pa je tudi gotovo različno od nič, ker je produkt dveh od nič različnih števil. Res, če bi bil $b_0 = 0$, bi stopnja enačbe β ne bila r, če pa bi bil $b_r = 0$, bi imela enačba korene, enake 0, kar pa ni. Tako vidimo, da zadošča polinom $\varphi(z)$ vsem našim zahtevam. Sedaj moremo pisati:

$$H = \frac{b_0^{p(r-1)-1}}{(p-1)!}\int_0^\infty e^{-z}\cdot z^{p-1}[b_0z^r + b_1z^{r-1} + \ldots + b_r]^p\cdot dz \qquad 5'$$

Vrnimo se k polinomu $\Phi(\zeta)$. Upoštevajmo, kaj pomeni $\varphi(z)$, pa moremo pisati:

$$\Phi(\zeta) = \sum_{s=1}^{s=r}(\zeta+\beta_s)^{p-1}b_0^{pr-1}[(\zeta+\beta_s-\beta_1)\ldots(\zeta+\beta_s-\beta_{s-1})\zeta(\zeta+\beta_s-\beta_{s+1})\ldots(\zeta+\beta_s-\beta_r)]^p$$

izpostavimo iz členov vsote skupni faktor ζ^p:

$$\Phi(\zeta) = \zeta^p\sum_{s=1}^{s=r}(\zeta+\beta_s)^{p-1}b_0^{pr-1}[(\zeta+\beta_s-\beta_1)\ldots(\zeta+\beta_s-\beta_{s-1})(\zeta+\beta_s-\beta_{s+1})\ldots(\zeta+\beta_s-\beta_r)]^p$$

posamezne faktorje potence b_0^{pr-1} porazdelimo po posameznih linearnih faktorjih. Tako dobimo:

$$\Phi(\zeta) = \zeta^p\Sigma(b_0\zeta+\beta_s)^{p-1}[(b_0\zeta+\beta'_s-\beta'_1)\ldots(b_0\zeta+\beta'_s-\beta_{s-1})(b_0\zeta+\beta_s-\beta'_{s-1})\ldots$$
$$\ldots(b_0\zeta+\beta'_s-\beta_r)]^p$$

Vsoto na desni strani uredimo po potencah spremenljivke ζ. Koeficienti so simetrične funkcije β'-ov, ker je vsota neobčutljiva za permutacije β'-ov. V vsakem členu je odlikovan en β'; če β' permutiramo, se členi samo

zamenjajo med seboj, vsota pa se pri tem ne spremeni. Ker so koeficienti simetrične funkcije celih algebrajskih števil β', ki so rešitve enačbe (2'), so po znanem izreku cela racionalna števila. Ta števila bomo zaznamovali $C_0, \ldots, C_N$. Število N je očitno enako številu linearnih faktorjev v vsakem členu vsote, torej $N = pr - 1$. Tako moremo pisati:

$$\Phi(\xi) = \xi^p (C_0 \xi^N + C_1 \xi^{N-1} + \ldots + C_{N-1} \xi + C_N)$$

In če vstavimo to v relacijo (*), dobimo:

$$(p-1)!\,(A - aH) = \int_0^\infty e^{-\zeta}\, \xi^p (C_0 \xi^N + \ldots + C_N)\, d\xi$$

in po integraciji:

$$(p-1)!\,(A - aH) = C_N \Gamma(p+1) + C_{N-1} \Gamma(p+2) + \ldots + C_0 \Gamma(p+N+1)$$

Upoštevajmo (4') in delimo s $(p-1)!$ pa uvidimo, da je razlika $A - aH$ res deljiva s p. Pišimo: $A - aH = pM$, kjer je M določeno celo število, pa moremo sklepati, da je A od nič različno število. Število A je vsota dveh členov

$$A = aH + pM.$$

Prvi člen aH je tuj številu p, drugi pM pa je z njim deljiv. Število A torej ni deljivo s p in tako ne more biti enako 0, ker je 0 deljivo z vsakim številom.

Tako smo končali prvi del dokaza:

Število A (6') je celo, od nič različno število, če je množitelj H določen z integralom (5') in je praštevilo p tuje številom a, b_0 in b_r, ali $p > a$, $p > b_0$, $p > b_r$.

Lotimo se še drugega dela dokaza! Uvideti moramo, da je število B manjše od 1, če je le število p zadosti veliko. Ocenimo najprej posamezne člene vsote B! Integral v kompleksnem je — prav kakor integral v realnem — manjši od produkta zgornje meje podintegralske funkcije in dolžine integracijske poti. Absolutna vrednost podintegralske funkcije je enaka produktu absolutnih vrednosti posameznih faktorjev: $|e^{p-z}| \cdot |z|^{p-1} \cdot |\varphi(z)|$, dolžina poti pa je $|\beta_s|$, ker integriramo po premočrtni spajnici točk 0 in β_s. Na vsej integracijski poti je $|z| < |\beta_s|$. Vrednost integrala je tedaj gotovo manjša od zgornje meje izraza

$$|e^{\beta_s - z}| \cdot |\beta_s|^{p-1} |\varphi(z)| \cdot |\beta_s| = |\beta_s| \cdot e^{\frac{\beta_s - z}{p}} \cdot b_0^{\frac{p(r-1)-1}{p}} \cdot |b_0 z^r + b_1 z^{r-1} + \ldots + b_r|^p$$

Vse točke β_s leže na nekem končnem območju in na tem območju izraz, ki je med navpičnimi črtami, gotovo ne raste preko vsake meje. Najti moremo torej število μ, ki ga naš izraz na tem območju nikdar ne preseže. To pomeni, da ostane izraz pri vsakem β_s in pri vsakem z, ki leži na tem območju, pod številom μ. Tedaj pa velja za vsak člen števila B:

$$\left| e^{\beta_s} \int_0^{\beta_s} z^{p-1}\, \varphi(z) e^{-z}\, dz \right| < \mu^p$$

Ocenimo sedaj število B:

$$B < \frac{1}{(p-1)!} \sum_{s=1}^{s=r} \left| e^{\beta_s} \int_0^{\beta_s} z^{p-1}\, \varphi(z) e^{-z}\, dz \right|,$$

upoštevajmo oceno za integrale, pa dobimo:

$$B < r \cdot \frac{\mu^{p\alpha}}{(p-1)!}$$

Število B je majhno, kakor želimo, če le izberemo število p zadosti veliko. Saj vemo, da pri zadosti velikih številih p narašča potenca μ^p mnogo počasneje kakor fakulteta $(p-1)!$. Že prej smo določili številu p spodnjo mejo, sedaj pa ga po potrebi še povečajmo, da postane število B manjše od 1.

Tako smo zaključili drugi del dokaza:

Število B je manjše od 1, če je le parameter p v integralu H zadosti velik.

Združimo izsledke dosedanjega razmišljanja, pa moremo pribiti, da je vsota $A + B$ različna od 0 v nasprotju z našo predpostavko, ki je zahtevala, da bodi ta vsota v vsakem primeru (pri vsakem H) enaka 0. Predpostavka je s tem protislovjem ovržena in izrek je dokazan.

*

Tako je pred sedemdesetimi leti Lindemann dokazal, da je število π transcendentno. Problem kvadrature kroga, ki je tisočletja belil glave matematikom in nematematikom,* je bil za matematiko rešen. Spoznala je, da je v svoji prvotni zasnovi, ki zahteva rešitev s šestilom in ravnilom, nerešljiv. Lindemann je strogo utemeljil slutnjo, ki jo je leta 1544 v svoji knjigi *Arithmetica integra* zapisal M. Stifel: *Jalov je trud vseh, ki se ubadajo z računi, da bi dognali kvadraturo kroga.*

OBLIKOVANJE TOGIH KRIVULJNIKOV

Oton Sajovic

Za risanje nekaterih posebnih, v praksi nastopajočih krivulj, kot so stožernice, najpreprostejše spirale, krožna evolventa, verižnica, sinusova krivulja in podobno, obstoje za vsako krivuljo priprave, ki jo rišejo mehanično [1]. Precizni tehnični risar pa je vendar iz razumljivih razlogov tudi pri teh krivuljah navezan na risanje s krivuljnikom; še celo pa mu je ta neobhodno potreben pri tuširanju vseh raznolikih krivulj, za risanje katerih ni in po vsej priliki tudi v bodoče ne bo kake primernejše priprave. Najsi je krivuljnik elastičen, t. j. take vrste, da mu moreš s pritiskom prstov dati potreben profil, ali tog, t. j. s stalnim profilom, risar v splošnem brez njega ne bo mogel s tušem napraviti oblikovno dovršene nekrožne krivuljčne poteze povsod tam, kjer je potrebno predočiti krivuljo tako, da ustreza risba čimbolj teoretično podani obliki. V naših podjetjih za izdelovanje tehničnih pripomočkov in učil zelo uporabnih elastičnih krivuljnikov še ne izdelujejo, pač pa le toge. Na razpolago so krivuljniki z različnimi profili, vendar moremo ob njih ugotoviti le to, da so malo uporabni ter da zadoščajo le najpreprostejšim zahtevam, v glavnem za tuširanje stožernic.

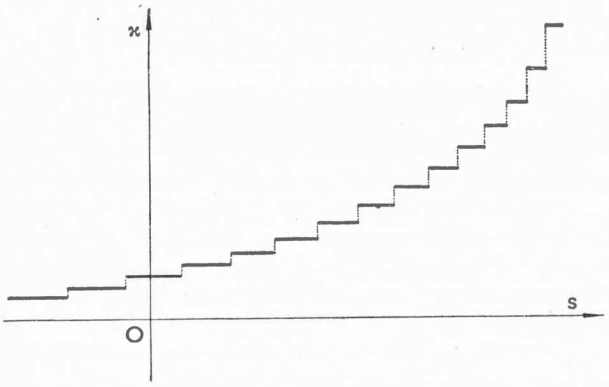
* Koliko preglavic so nematematiki prizadeli Akademijam znanosti, ko so od njih zahtevali priznanja in slave za domnevno rešitev te naloge, bo bralec zvedel iz članka M. Petrovića: *Kvadratura kruga.* (M. Petrović: *Članci*, NK Beograd 1951).

Odlika dobrega krivuljnika je v tem, da moreš tuširati z njim pri najrazličnejših krivuljah dolge loke v eni potezi. Naši dosedanji krivuljniki te lastnosti še nimajo. Resnici na ljubo pa naj bo povedano, da je ta pomanjkljivost splošna napaka večine često zelo slikovito in zapeljivo oblikovanih togih krivuljnikov menda po vsem svetu. Tu seveda niso mišljeni krivuljniki za specialno, v naprej določeno rabo, temveč taki, ki so namenjeni splošnemu risanju krivulj. Razen redkih izjem ti krivuljniki v praksi odpovedujejo kar po vrsti, čeprav so tehnično sicer dobro izdelani. Videti je, da vlada v izdelavi togih krivuljnikov še vedno neka nesmotrnost in empirizem preproste vrste, čeprav ne bi bilo tega treba, saj je že dokaj časa od tega, kar so se pojavile v strokovno-znanstvenem svetu namere, dati profiliranju togih krivuljnikov določeno, matematično utemeljeno smer in so bili v tem pogledu doseženi uspehi ([1], [2]).

V nadaljnjem namerjam podati kratek vpogled v vprašanja, ki se nanašajo na izbiro profilov togih krivuljnikov, ter uvesti čitatelja v misli, ki so podlaga novim načinom profiliranja in s katerimi dobiva splošni krivuljnik, ki je bil v dosedaj običajnih izvedbah risarska priprava povsem nematematičnega značaja ([3], p. 269), vsaj do neke mere značaj matematičnega instrumenta.

* * *

Eden izmed kriterijev za izbiro krivuljniških profilov je gotovo v načinu ravnanja s krivuljnikom. Krivuljnik uporabljamo namreč za tuširanje zveznih lokov, ki so zvezni v tangenti. Na teh lokih je najčešče tudi ukrivljenost zvezna funkcija krivuljnega parametra, n. pr. ločne dolžine. Ker rišemo po pravilu vedno le na konveksnih straneh krivuljnika, kar moremo delati zato, ker je krivuljo vedno možno razdeliti na konveksne odseke, bo zadoščalo, da iščemo primernih profilov le med krivuljami, pri katerih je v odseku, ki ga mislimo uporabljati, *naklonski kot tangente proti določeni stalni premici v ravnini krivulje zvezna in monotona funkcija ločne dolžine.*



Sl. 1. (κ,s)-diagram iz krožnih lokov sestavljenega profila.

Drugi kriterij pri izbiri pa je v načinu izpreminjanja ukrivljenosti krivuljniških lokov. Ker nam pri iskanju primernega odseka na krivuljniku drsi krivuljnik zvezno po onem odseku krivulje, ki ga hočemo izvleči s tušem, toliko časa, da najdemo mesto, kjer je krivuljnik čim tesneje pritisnjen ob krivuljo, bi kazalo profilno krivuljo krivuljnika izbirati med krivuljami, pri katerih je *ukrivljenost κ zvezna in monotona funkcija ločne dolžine s.* Dalje bi bila zaželena tudi neka *enakomernost v spreminjanju ukrivljenosti* profila s spreminjanjem ločne dolžine [2].

Ako upoštevamo, da nastopajo pri risanju krivulj najrazličnejše ukrivljenosti, bi izbirali krivuljniške profile tedaj med krivuljami, ki so *zvezne*

v tangenti in katerih ukrivljenost se z ločno dolžino zvezno in monotono spreminja od zelo majhnih do zelo velikih vrednosti.

Tu bi utegnili priti na misel, sestaviti aproksimativen krivuljniški profil iz krožnih lokov s stalno, toda nezvezno rastočo (ali kar je isto: stalno padajočo) dolžino polmerov tako, da bi imela sosednja loka v skupnem stikališču skupno tangento. Tako sestavljanje krivuljniškega profila da sicer zvezen profil, ne da pa zveznega $(\varkappa, s)$-diagrama profila (sl. 1). Aproksimacija krivulje, ki jo hočemo tuširati in katere $(\varkappa, s)$-diagram je v splošnem zvezen, s takim krivuljnikom gotovo ne bo zadostna. Če pomislimo, da je možno pri navadni oskulaciji celo s pritisnjenim krogom na določenem mestu aproksimirati krivuljo le v najožji bližini tega mesta — da ne govorimo o nezveznosti ukrivljenosti na mestih, kjer se stikajo krožni loki različnih polmerov pri krivuljniškem profilu, sestavljenem na navedeni način — bomo razumeli Emdejevo trditev, da je krivuljnik s takim profilom idealno slab [2].

Uporabnejši bi bil krivuljnik, sestavljen iz daljših odsekov različnih krivulj, vendar je tudi tu treba računati z nenadnimi skoki v ukrivljenosti ali pa vsaj z neenakomernostjo in različnostjo v načinu spreminjanja ukrivljenosti. Krivuljniške krivulje bo treba vsekakor iskati med krivuljami z zveznim $(\varkappa, s)$-diagramom, katerih ukrivljenost $\varkappa$ je po gornji ugotovitvi monotona — recimo naraščajoča — funkcija ločne dolžine in pri katerih je možno doseči ukrivljenosti enakomerno od zelo majhne do zelo velike*. Nekoliko nedoločna je tu zahteva po »enakomernosti« v spreminjanju ukrivljenosti z ločno dolžino. Ker so krivulje z navedeno lastnostjo *spirale***, uvaja Emde to enakomernost s tem, da priporoča uporabo spiral s kolikor možno preprosto naravno enačbo***. *Ukrivljenost $\varkappa$ krivuljniške*

---

* Ta zahteva je bolj teoretičnega značaja, kajti v praksi ne uporabljamo krivuljnika, kadar moramo izvleči krivuljo na mestu, kjer je krivinski polmer manjši od približno 1 cm. V takem primeru delamo s prosto roko ali pa rabimo šestilo za risanje zelo majhnih krogov. Emde [2] omenja dalje, da je primerneje kot krivuljnik uporabljati navadno šestilo tudi za krivulje s počasi spreminjajočim se velikim krivinskim polmerom. Do neke mere, t. j. za primeren obseg dolžine krivinskega polmera to mnenje velja, pri zelo velikih polmerih pa iz tehničnih razlogov gotovo ne; krog z zelo velikim polmerom tuširamo kar s krivuljnikom, ki pa mora dopuščati risanje lokov majhnih ukrivljenosti.

** Bolje bi bilo reči, ker imajo spirale to lastnost. Katere lastnosti karakterizirajo krivulje, ki jih imenujemo *spirale*, v literaturi namreč ni nikjer točno navedeno, kljub temu, da so že dolgo poznane najrazličnejše krivulje, ki jih povsem določeno imenujemo spirale ([4], p. 52; [5], p. 272).

*** Iz diferencialne geometrije ravninskih krivulj je znano, da funkcijska zveza med krivinskim polmerom ϱ in ločno dolžino s, ali kar je isto, med ukrivljenostjo $\varkappa$ in lokom s, krivuljo povsem določa. Enačba $f(\varrho, s) = 0$ ali $f(\varkappa, s) = 0$ ali v parametrični obliki: $\varrho = \varrho(t)$, $s = (t)$, odnosno: $\varkappa = \varkappa(t)$, $s = s(t)$, veljavna za določeno krivuljo, je od slučajne izbire koordinatnega sestava neodvisna *naravna enačba* te krivulje. Iz nje določimo, potem ko smo si izbrali primeren koordinatni sestav, lahko koordinate točk na krivulji. Kadar je naravna enačba podana v obliki $\varkappa = \varkappa(s)$, kot je to za naša razmotrivanja najprimerneje, in je koordinatni sestav premočrten ter pravokoten, sledita koordinati neposredno iz odnosa $(x'\,y'' - x''\,y')/(x'^2 + y'^2)^{3/2} = \varkappa$

Če je tu parameter namreč s, je $x'^2 + y'^2 = 1$ ali $x'\,x'' + y'\,y'' = 0$, nakar dobimo iz sestava diferencialnih enačb

$$-y'\,x'' + x'\,y'' = \varkappa,\quad x'\,x'' + y'\,y'' = 0$$

neposredno $$x'' = -\varkappa\sqrt{(1 - x'^2)},\qquad y'' = +\varkappa\sqrt{(1 - y'^2)}.$$

Ob upoštevanju robnih pogojev nam rešitvi teh dveh diferencialnih enačb dasta koordinati x in y točk v krivulji. Kadar sta koordinatni osi tangenta in normala krivulje v njeni točki s_0 ter je tangenta kot abscisna os usmerjena pozitivno v smislu naraščajoče ločne dolžine, sta rešitvi enačb

$$x = \int_{s_0}^{s} \cos\left(\int_{s_0}^{s} \varkappa\, ds\right) ds,\qquad y = \int_{s_0}^{s} \sin\left(\int_{s_0}^{s} \varkappa\, ds\right) ds.$$

krivulje naj bi bila tedaj po možnosti preprosta, od konstante različna zvezna in monotona funkcija ločne dolžine.

S tem bi bila podana splošna smer, ki bi se je morali držati pri iskanju krivuljniških krivulj. Med posameznimi krivuljami, ki zadoščajo gornjim pogojem, bi pa bilo treba še nadalje izbirati, kajti krivuljnik mora imeti lastnost, da je na vsakem mestu, uporabljanem za risanje kake krivulje, pritis krivuljnika in krivulje pritis čim višjega reda (risanje dolgih lokov v eni potezi!). Kratko povedano: *dober krivuljnik mora po vsem svojem razsegu nagibati k hiperoskulaciji.* V pogledu določitve spiral z zadostno »hiperoskulacijo« smo pa navezani še vedno na tipanje in je potrebno koristnost principov, po katerih izbiramo domnevno dobre krivuljniške krivulje med spiralami, preizkusiti v praksi. Dalje je vprašanje zase tudi še odnos med zadostno splošno nagnjenostjo k hiperoskulaciji in Emdejevim predlogom glede uporabe spiral s kolikor možno preprosto naravno enačbo. Vsem tem težavam in izbiranju se Emde ogne z mnenjem, da končno ni važna taka ali taka naravna enačba profila, temveč to, da je profil zakonita spirala in da ga ne izbiramo kar na oko [2].

* * *

Pri dosedaj v praksi uporabljanih primerih zakonitih krivuljniških krivulj je odnos med ukrivljenostjo in ločno dolžino tako algebrajski kakor tudi transcendenten. Za stožernice, katerih loki se često pojavljajo pri običajnih krivuljnikih, naj bo omenjeno, da so njih ($\varkappa$, s)-diagrami transcendentne krivulje z dokaj zamotanimi enačbami ([6], 1. pogl., § 7). Tu si bomo v nadaljnjem ogledali, kako je s krivuljniki, katerih profili imajo nekatere preproste naravne enačbe $\varkappa = \varkappa(s)$!

Najpreprostejši monotoni algebrajski odnos med $\varkappa$ in s je linearni odnos $\varkappa = \alpha s + \beta$, kjer sta α in β konstantni števili. S tem, da prenesemo začetek merjenja ločne dolžine v točko $s = -\beta/\alpha$, dobi ta enačba preprostejšo obliko

$$\varkappa = \alpha s.$$

Ukrivljenost in ločna dolžina sta pri tej krivulji premo sorazmerni količini, njen ($\varkappa$, s)-diagram pa je premica skozi koordinatno izhodišče. Če si izberemo točko $s = 0$ krivulje za izhodišče pravokotnega koordinatnega sestava, tangento v tej točki, usmerjeno v smislu naraščajoče ločne dolžine, pa za enako orientirano os x, sta koordinati x in y točke s na krivulji

$$x = \int_0^s \cos\left(\int_0^s \varkappa\, ds\right) ds = \int_0^s \cos\left(\alpha s^2/2\right) ds$$

$$y = \int_0^s \sin\left(\int_0^s \varkappa\, ds\right) ds = \int_0^s \sin\left(\alpha s^2/2\right) ds$$

(glej opombo *** na strani 109!). S transformacijo $\alpha s^2 = \pi u^2$ prevedemo oba izraza v obliko

$$x = \sqrt{\pi/\alpha} \cdot \int_C^u \cos\left(\pi t^2/2\right) dt = \sqrt{\pi/\alpha} \cdot C(u)$$

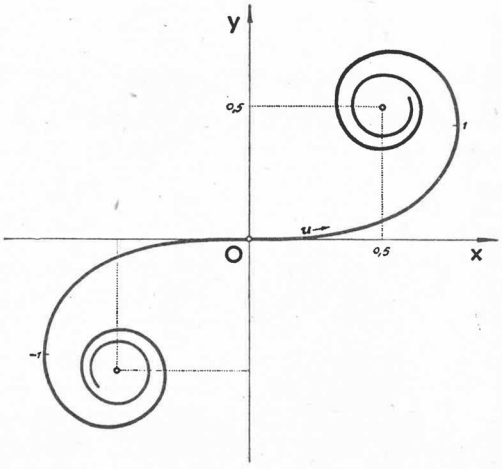
$$y = \sqrt{\pi/\alpha} \cdot \int_0^u \sin\left(\pi t^2/2\right) dt = \sqrt{\pi/\alpha} \cdot S(u),$$

kjer sta $C(u)$ in $S(u)$ znana Fresnelova integrala. Krivulja z enačbo $\varkappa = \alpha s$ je tedaj *klotoida* (v fiziki: *Cornujeva spirala*, sl. 2). Načrtamo jo hitro z uporabo tabel za vrednosti Fresnelovih integralov ([7], p. 34).

Krivuljniki s klotoido kot profilom so razmeroma dobro uporabni pri manjših vrednostih parametra s (ali u) profila; čim večja pa je vrednost parametra, oziroma čim večja je ukrivljenost, tem manjša postaja uporabnost klotoide kot krivuljniškega profila [2]. To dejstvo je teoretično utemeljeno v tem, da postaja z naraščajočo vrednostjo parametra s (ali u) relativna sprememba ukrivljenosti na enakih ločnih odsekih $\triangle s$ (ali enakih odsekih $\triangle u$), torej količina:

$$m = \triangle \varkappa / \varkappa = \alpha \triangle s / \alpha s = \\ = \triangle s / s = \triangle u / u,$$

kjer je $\triangle \varkappa$ sprememba ukrivljenosti na odseku $\triangle s$ (ali $\triangle u$), vedno manjša in dobiva s tem krivulja vedno bolj značaj kroga. Za krog je namreč stalno $m = 0$. Po tem, kar je bilo navedeno zgoraj, pa vemo, da je krog najmanj uporabna krivuljniška krivulja.



Sl. 2. Klotoida za $\alpha = \pi$.

Krivulja, katere ukrivljenost je obratno sorazmerna ločni dolžini:

$$\varkappa = \alpha / s, \quad (\alpha > 0, \; s \geqq 0)$$

ima $(\varkappa, s)$-diagram, ki stalno pada, ko narašča s zvezno od 0 dalje preko vsake vrednosti. Ta diagram je ena veja enakoosne hiperbole, ki sta ji koordinatni osi asimptoti. Koordinati x in y točk iskane krivulje v primeru, ko je abscisna os tangenta, ordinatna os pa normala v točki $s = s_0 \neq 0$ krivulje, sta:

$$x = \int_{s_0}^{s} \cos\left(\int_{s_0}^{s} \varkappa \, ds\right) ds, \quad y = \int_{s_0}^{s} \sin\left(\int_{s_0}^{s} \varkappa \, ds\right) ds.$$

Ker je količina

$$\tau = \int_{s_0}^{s} \varkappa \, ds = \alpha \, l(s/s_0)$$

kot, ki ga oklepa tangenta v točki s z abscisno osjo, vidimo, da se krivulja neštetokrat ovije okrog svoje točke $s = 0$ in »točke« $s = \infty$. Ti dve točki sta asimptotični točki krivulje. Integracija gornjih integralov privede do vrednosti:

$$x = s_0 \cdot \{\exp(\tau/\alpha) \cdot (\cos\tau + \alpha \sin\tau) - 1\}/(1 + \alpha^2)$$
$$y = s_0 \cdot \{\exp(\tau/\alpha) \cdot (\sin\tau - \alpha \cos\tau) + \alpha\}/(1 + \alpha^2).$$

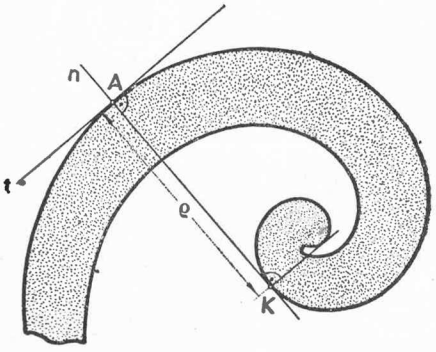
Prva asimptotična točka $(\tau \to -\infty)$ je končna in ima koordinate

$$x_a = -s_0/(1 + \alpha^2), \quad y_a = \alpha s_0/(1 + \alpha^2),$$

druga $(\tau \to +\infty)$ pa je nedoločena nebistvena točka. Če izrazimo enačbo krivulje v polarni obliki glede na sestav, katerega pol je asimptotična točka (x_a, y_a), polarna os pa v istem smislu vzporedna s pozitivnim poltrakom abscisne osi, dobimo enačbo: $r = r_0 \exp(\varphi/\alpha)$.

kjer je r_0 konstanta, odvisna od s_0 in α, φ pa polarni kot. Krivulja je tedaj *logaritmična spirala*, krivulja, ki seka vse radije vektorje v enakih kotih.

Uporaba logaritmične spirale pri profiliranju krivuljnika je privedla do zelo dobrih krivuljnikov. Če je profil krivuljnika logaritmična spirala s posebnim α^*, kot je to bilo pri krivuljniku, ki ga je konstruiral profesor tehniške visoke šole v Pragi F. Steiner ([8], p. 25/26), ga moremo uporabiti tudi za načrtovanje normale in tangente ali za določanje krivinskega središča v posameznih točkah podane krivulje, oziroma za načrtovanje evolute te krivulje. Konstanta α je bila izbrana tu tako, da je bila pripadajoča logaritmična spirala sama sebi evoluta, s tem normala v določeni njeni točki tangenta v neki drugi njeni točki (sl. 3, zunanji profil), dotikališče te tangente pa krivinsko središče krivulje v vzeti točki. Emde [2] omenja tudi krivuljnik profesorja Benneckeja, katerega profil sestavljajo loki logaritmične spirale. Profil je opremljen z enakomerno razdeljeno lestvico, ki omogoča merjenje dolžin krivuljnih lokov in s tem načrtavanje evolvente krivulje.



Sl. 3. Logaritmična spirala-avtoevoluta kot krivuljniški profil.

Vendar pa ima tudi logaritmična spirala podobno pomanjkljivost kot klotoida. Iz izraza za relativno spremembo ukrivljenosti logaritmične spirale na enakih ločnih odsekih $\triangle s$:

$$m = \triangle \varkappa / \varkappa = - \triangle s / (s + \triangle s)$$

razberemo, da se ta relativna sprememba z naraščajočo ločno dolžino s stalno manjša. Na odsekih z majhno ukrivljenostjo ima logaritmična spirala značaj kroga in so ti odseki na krivuljniškem profilu slabo uporabni.

Da bi se izognili nevšečnosti, ki jo kaže logaritmična spirala pri malih ukrivljenostih, bi mogli krivuljo pretvoriti v novo z izogonalno transformacijo, ki prevaja kroge v kroge tako, da postane tudi neskončna asimptotična »točka« spirale končna točka ([4], p. 68/69). Tako nastane iz logaritmične spirale t. im. *logaritmična bispirala*** ali *loksodroma* (ravninska). Pri navedeni transformaciji preidejo premice skozi končno asimptotično točko v eliptični šop krogov z obema končnima asimptotičnima točkama bispirale kot osnovnima točkama (sl. 4). Te kroge seka bispirala vse v istem kotu. V pravokotnem premočrtnem koordinatnem sestavu po sliki 4. je parametrična oblika enačbe bispirale

$$x = a \cdot \mathrm{sh}(p\varphi) / \{\cos\varphi + \mathrm{ch}(p\varphi)\}$$
$$y = a \cdot \sin\varphi / \{\cos\varphi + \mathrm{ch}(p\varphi)\},$$

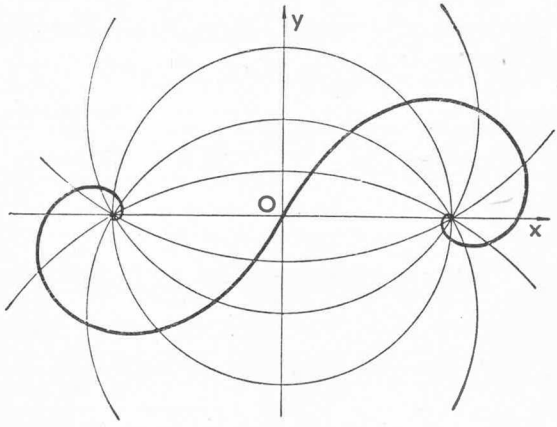
kjer je p konstanta, odvisna od kota, v katerem seka krivulja kroge šopa, $2a$ razdalja asimptotičnih točk, φ pa parameter. Šablone, napravljene po bispirali, so pokazale veliko uporabnost te krivulje kot krivuljniške krivulje.

* $\alpha \doteq 3{,}6442$.

** Logaritmično bispiralo dobimo lahko tudi s stereografsko projekcijo loksodrome na krogli.

Za profil zadošča seveda le ena polovica bispirale; na njej se spreminja ukrivljenost z ločno dolžino monotono v obsegu $0 \leqq \varkappa \leqq \infty$. S spreminjanjem konstante p dobimo različne profile tega tipa.

Klotoida je edini primer spirale z linearnim ($\varkappa$, s)-diagramom, medtem ko je logaritmična spirala ena izmed krivulj, katerih ($\varkappa$, s)-diagram je stožernica. Od ostalih krivulj z nerazpadlo stožernico kot sliko funkcijske zveze med $\varkappa$ in s menda ni bila nobena preiskana glede na njeno uporabnost pri oblikovanju krivuljnikov. Že bežen pregled teh možnosti kaže, da utegnemo priti v tej skupini krivulj v večini primerov do spiral, katerih enačb v parametrični obliki za pravokotne koordinate točk ne bo možno podati v zaključeni obliki, izraženih s preprostejšimi znanimi funkcijami, saj se upirata temu še celo razmeroma preprosta primera: $\varkappa = a \sqrt{s}$ in $\varkappa = as^2$.



Sl. 4. Logaritmična bispirala (p ≐ 0,577).

Med spiralami s transcendentnim ($\varkappa$, s)-diagramom ima po Emdeju [2] za oblikovanje krivuljnikov poseben pomen krivulja z naravno enačbo

$$\varkappa = \exp(as + \beta)^*,$$

(a, β konstanti, $a > 0$).

Za to spiralo je namreč kvocient

$$m = \triangle \varkappa/\varkappa = \triangle s \cdot \{a + a^2 \triangle s/2! + a^3(\triangle s)^2/3! + \ldots\}$$

pri stalnem $\triangle s$ konstanten. Krivulja tedaj nima nadležne lastnosti, da bi postajala v določenem odseku podobna krogu, kot imata to lastnost klotoida in logaritmična spirala. Od ločne dolžine s pri gornji krivulji relativna sprememba ukrivljenosti na enakih krivuljčnih odsekih sploh ni odvisna, pač pa je z njo zaradi konstance relativne spremembe njene ukrivljenosti po vsem območju dosežena neka »enakomernost« v spremembi ukrivljenosti. Emde je uvedel to krivuljo z zahtevo po krivulji, pri kateri je na enoto ločne dolžine reducirana relativna sprememba ukrivljenosti na enakih ločnih odsekih $\triangle s$ konstantna. Vzel je pri tem ta $\triangle s$ kar za enoto merjenja ločne dolžine. Glede na zahtevo je tedaj $(\triangle \varkappa/\triangle s)/\varkappa = a$, kjer je a konstanta in $\triangle s = 1$. Dobljeni odnos lahko tolmačimo tako, da rečemo, da je pri zahtevani krivulji relativna sprememba ukrivljenosti na enoto ločne dolžine vedno enaka in da se tedaj spremeni ukrivljenost na enoto ločne dolžine za določenih stalnih p odstotkov. S tem je $\triangle \varkappa = (p/100) \cdot \varkappa$ in $a \triangle s = p/100$. Ako pišemo:

$$a = a + a^2 \triangle s/2! + a^3(\triangle s)^2/3! + \ldots = \{\exp(a \triangle s) - 1\}/\triangle s,$$

kar moremo, ker je pri spiralah vedno možno usmeriti krivuljo (smisel merjenja ločne dolžine s) tako, da je v tej smeri stalno $\triangle \varkappa > 0$ in s tem

* S tem, da bi prenesli začetek merjenja ločne dolžine s v točko $s = -\beta/\alpha$, bi naravno enačbo krivulje lahko pisali: $\varkappa = \exp(\alpha s)$, $\alpha > 0$.

$a > 0$, sledi iz $(\triangle x/\triangle s)/x = a$ namreč $\triangle x/x = \exp(a\triangle s) - 1$ in odtod $x + \triangle x = x \cdot \exp(a\triangle s)$ ali

$$x(s + \triangle s) = x(s) \cdot \exp(a\triangle s).$$

Ker moremo $x(s)$ vedno izraziti v obliki: $\exp\{af(s)\}$, kjer je $f(s)$ neka funkcija ločne dolžine, je

$$x(s + \triangle s) = \exp\{a[f(s) + \triangle s]\}.$$

Iz oblike, v kateri se javlja prirastek na desni strani, sledi, da ima $f(s)$ obliko $s + \mu$, kjer je μ konstanta. S tem dobimo

$$x = \exp\{a(s + \mu)\} = \exp(as + \beta), \quad (\beta = a\mu),$$

kar je točno zgoraj navedena naravna enačba in je pri $\triangle s = 1$ (Emde)

$$p/100 = \exp(a) - 1. \qquad (\triangle s = 1)$$

V pravokotnem koordinatnem sestavu, katerega osi sta tangenta in normala krivulje $x = \exp(as + \beta)$ v točki $s = 0$, ter je tangenta orientirana pozitivno v smislu rastoče vrednosti s, je enačba spirale v parametrični obliki

$$x = (1/a) \cdot \{(\cos k \cdot Ci\varphi + \sin k \cdot Si\varphi) - (\cos k \cdot Cik + \sin k \cdot Sik)\}$$
$$y = (1/a) \cdot \{(\cos k \cdot Si\varphi - \sin k \cdot Ci\varphi) - (\cos k \cdot Sik - \sin k \cdot Cik)\},$$

kjer je $k = \exp\beta/a$, φ parameter, ki je z ločno dolžino s v odnosu $\varphi = k \cdot \exp(as)$, $Ci\varphi$ in $Si\varphi$ pa funkciji

$$Ci\varphi = -\int_{\varphi}^{\infty} (\cos t/t)\,dt, \quad Si\varphi = \int_{0}^{\varphi} (\sin t/t)\,dt,$$

prva torej integral kosinus, druga pa integral sinus količine φ. Izkaže se, da ima spirala za $\varphi = 0$ $(s = -\infty)$ asimptoto, za $\varphi = \infty$ $(s = \infty)$ pa asimptotično točko.

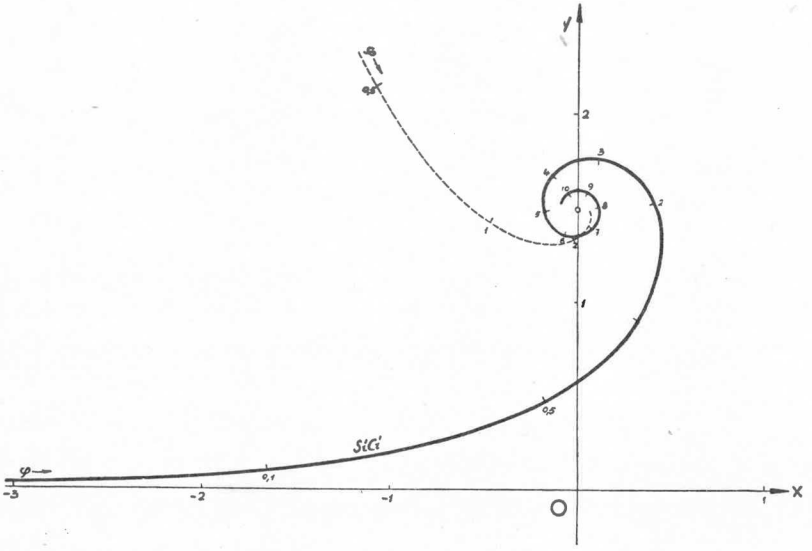
Precej preprostejšo obliko dobi enačba spirale, če vzamemo za abscisno os njeno asimptoto, orientirano v smislu rastočega s, ordinatno os pa položimo skozi asimptotično točko (sl. 5). V tem primeru je namreč

$$x = (1/a) \cdot Ci\varphi$$
$$y = (1/a) \cdot Si\varphi$$

in je φ kot, ki ga oklepa tangenta krivulje v točki (x, y) z abscisno osjo (asimptoto). Glede na značilni način izražanja koordinat x in y točk krivulje s funkcijama $Ci\varphi$ in $Si\varphi$ je imenoval Emde to krivuljo *spiralo SiCi* ([2]; [7], p. 4/5). Ta spirala je bila poznana že pred objavo navedene Emdejeve razprave, a ni imela posebnega imena ([5], p. 291, 292; [9], p. 13, primer a). Emde je v [7] poleg tabel funkcije $Ci\varphi$ in $Si\varphi$ (p. 6—9) objavil tudi sliko glave spirale *SiCi* (p. 5).

Krivuljniki s spiralo *SiCi* kot profilom, izdelani v različnih velikostih, odnosno z različno odstotno mero v spremembi ukrivljenosti na enoto ločne dolžine, so se izkazali kot zelo uporabni. Emde [2] poroča, da je bilo možno izvleči s temi krivuljniki najčešče preko 10 cm dolge loke v eni potezi. Na

vsakem profilu Emdejevih krivuljnikov je označena odstotna mera spremembe ukrivljenosti na 1 mm ločne dolžine, na posameznih mestih profila pa dolžina krivinskega polmera v centimetrih. Te krivuljnike, ki so izdelani iz celuloida in nosijo često napis »Emde-Kurve«, srečamo semtertja tudi pri nas v tehničnih uradih. Ako bi se lotili izdelave krivuljnikov s *SiCi*-profili in bi, bolj kakor je to pri Emdejevih krivuljnikih, poudarili »rep« spirale, t. j. del ob asimptoti, bi dobili krivuljnike, ki bi dobro služili mnogoterim



Sl. 5. Spirala SiCi ($\alpha = 1{,}05$) in njena evoluta (Kr. antiloga).

namenom. »Rep« krivuljnika bi bil namenjen risanju lokov z majhno ukrivljenostjo, čemur ne ustrezata dobro niti ploski del klotoide, ker je v normalnih izvedbah prekratek, niti ploski del logaritmične spirale, ker ima neugoden $m = \triangle \varkappa/\varkappa$.

Čeprav so navedeni rezultati raziskavanj v zvezi z oblikovanjem krivuljnikov privedli do uporabnih oblik krivuljniških profilov, jih vendar še ne moremo smatrati za stvar, s katero bi bilo dokončno razčiščeno vprašanje profiliranja krivuljnikov. Saj je že Emdejev način profiliranja dostopen nekemu posploševanju. Osnova Emdejevim razmotrivanjem je namreč funkcionalna enačba

$$\varkappa(s+h) - \varkappa(s) = (p/100)\cdot\varkappa(s),$$

v kateri je h dolžina konstantnih odsekov na krivulji, na katerih se ukrivljenost spremeni za p %. Prevedimo to enačbo, ki ji funkcija $\varkappa(s) = \exp(\alpha s)$ vsekakor zadošča (α je zavisen od h in p), s Taylorjevo razvrstitvijo na obliko

$$\frac{h}{1!}\varkappa'(s) + \frac{h^2}{2!}\varkappa''(s) + \frac{h^3}{3!}\varkappa'''(s) + \ldots + \frac{h^n}{n!}\varkappa^{(n)}(s) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\varkappa^{(n+1)}(s+\vartheta h) = \frac{p}{100}\varkappa(s).$$

Ako je možno zanemariti ostanek v primeri z ostalimi členi, bi nas to privedlo na linearno diferencialno enačbo reda n s konstantnimi koeficienti:

$$\frac{h^n}{n!}\varkappa^{(n)}(s) + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\varkappa^{(n-1)}(s) + \ldots + \frac{h^2}{2!}\varkappa''(s) + \frac{h}{1!}\varkappa'(s) - \frac{p}{100}\varkappa(s) = 0$$

kot enačbo, ki določa funkcijsko odvisnost med ukrivljenostjo $\varkappa$ in ločno dolžino s. V resnici nas ta enačba za $n = 1$ privede do spirale *SiCi*, za katero je $a = p/100\,h$. Na tem aproksimativnem odnosu med a, p in h je Emde ([2], tabela) zasnoval svoje krivuljnike. Naravne enačbe krivulj, ki ustrezajo gornji diferencialni enačbi za $n > 1$, pa niso več povsem preproste.

Morda bi končno le kazalo, ogledati si podrobneje ($\varkappa$, s)-diagrame krivulj, ki jih v praksi najpogosteje srečujemo, in tem sorodnih krivulj z namenom, izluščiti odtod po možnosti kako načelo, ki bi vedlo do še primernejšega profiliranja splošnega krivuljnika. Sicer pa niti ni še pojasnjeno, ali je splošni krivuljnik z zahtevano zmogljivostjo sploh možen in ali ni morda primerneje iskati krivuljnike, ki so visoko zmogljivi le za posamezne tipe ali skupine krivulj.

Uporabljana literatura:

[1] W. Meyer zur Capellen: *Mathematische Instrumente*, 2. izd. (1944, Leipzig), p. 166/168.
[2] F. Emde: *Kurvenlineale*. Zeitschrift für Instrumentenkunde 58 (1938), p. 409/411.
[3] F. Klein: *Elementarmathematik vom höherem Standpunkte aus* II, 3. izd. (1925, Berlin).
[4] G. Loria: *Curve piane speciali* II (1930, Milano).
[5] H. Wieleitner: *Spezielle ebene Kurven* (1908, Leipzig).
[6] G. Kowalewski: *Vorlesungen über allgemeine natürliche Geometrie und Liesche Transformationsgruppen* (1931, Berlin).
[7] Jahnke-Emde: *Tables of functions*, 4. izd. (1945, New York).
[8] J. Jarosch: *Methodik des Unterrichtes in der darstellenden Geometrie und im geometrischen Zeichnen* (1913, Wien).
[9] E. Cesàro-G. Kowalewski: *Vorlesungen über natürliche Geometrie* (1901, Leipzig).

UPORABA INTERFERENCE NA TANKIH PLASTEH

P. Gosar

Plast iz prozorne snovi, katere debelina je velikostnega reda valovne dolžine svetlobe, kaže v odbiti svetlobi lepe barve. Te nastanejo zaradi interference svetlobe, ki se odbije na prednji in zadnji strani plasti. Take barve vidimo n. pr. pri Newtonovih obročih, na milnih mehurčkih ali na tanki plasti nafte na vodni površini. Na podoben način nastanejo izredno žive barve, ki jih vidimo pri različnih hroščih, n. pr. pri zlati minici, metuljih, nekaterih ptičih in drugih živalih. Njihove lepe barve ne izvirajo od pigmenta. O tem se lahko takoj prepričamo, ker se te barve močno spreminjajo in prelivajo iz ene v drugo, če spremenimo kot, pod katerim gledamo na površino. Kako, da so tu barve mnogo bolj žive kot pri milnem mehurčku ali nafti na vodi? O tem in sploh o nastanku teh barv so precej razpravljali biologi in tudi fiziki, med njimi celo Lord Rayleigh. V razpravi On the Optical Character of some Brilliant Animal Colours[1] l. 1919 pravi Lord Rayleigh: »čudno je, da je razlaga enega izmed najbolj vidnih in lepih optičnih pojavov še vedno predmet razpravljanja«. Končno je l. 1924 Süffert[2] pokazal z mikroskopsko raziskavo, da so luske na krilih metuljev, ki dajejo take barve, sestavljene iz več plasti hitina, med katerimi je pa zrak. Debelina hitinaste plasti je največ $0{,}2\,\mu$. Süffert je tudi pravilno in temeljito razložil nastanek barv, ki jih dajejo take luske. Nasičene in žive barve nastanejo zaradi interference svetlobe, ki se odbije na posameznih površinah hitinastih plasti, ki so druga nad drugo. Če lusko stisnemo, se na stisnjenem mestu njena barva spremeni, ker se razdalja med plastmi zmanjša in se s tem spremeni razlika optičnih poti žarkov, ki med seboj

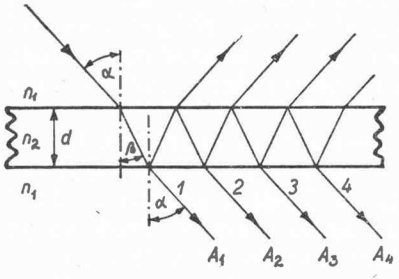
interferirajo. Tudi pokrovke hroščev imajo podobno strukturo. Take barve dobimo tudi pri nekaterih kristalih, n. pr. pri mineralu labradoritu in včasih pri kristalih kalijevega klorata. Tudi tu so barve posledica plastnate zgradbe kristala.

Posnemanje narave v izdelovanju enojnih in večkratnih plasti se je posrečilo šele pred dobrimi desetimi leti. Plasti dobimo z naparevanjem različnih prozornih snovi v vakuumu na steklo ali kovino. Njihov praktični pomen v optiki je izredno velik. Uporabljajo jih za zmanjšanje odboja svetlobe na lečah in prizmah, kot svetlobne filtre, polarizatorje, polprepustna zrcala, itd.

Površine z oslabljenim odbojem. Odboj svetlobe na površinah leč ali prizem v optičnih pripravah zelo zmanjšamo, če na leče in prizme naparimo sloj snovi z manjšim lomnim količnikom. Optična debelina naparjene plasti mora biti $\frac{1}{4}\lambda$ za sredino vidnega spektra (za zeleno barvo); mišljena je seveda valovna dolžina v materialu, ki je n-krat manjša kot v zraku (n je lomni količnik). S približnim računom dobimo takoj vpliv take plasti na intenziteto odbite svetlobe. Del vpadlega svetlobnega valovanja se odbije na mejni ravnini med zrakom in plastjo, del pa na drugi mejni ravnini med plastjo in steklom. Obe odbiti valovanji interferirata med seboj. Pri pravokotnem odboju se v fazi razlikujeta ravno za $\frac{1}{2}\lambda$; amplitudi se odštevata in zato dobimo oslabljen odboj. Če bi bili amplitudi obeh valovanj enaki, ne bi dobili sploh nič odbite svetlobe. Torej je najbolje, da sta odbojna koeficienta za obe mejni ravnini enaka. Iz te zahteve, torej $(n_1 - 1) / (n_1 + 1) = (n_2 - n_1) / (n_2 + n_1)$, sledi, da mora biti lomni količnik plasti enak kvadratnemu korenu iz lomnega količnika stekla: $n_1 = \sqrt{n_2}$. Lomni količnik plasti za lahko kronsko steklo ($n_2 = 1{,}51$) bi bil $n_1 = 1{,}23$, za težko flintovo steklo ($n_2 = 1{,}75$) pa $n_1 = 1{,}32$. Snovi s tako majhnim lomnim količnikom je težko dobiti. Edino uporabni so razni fluoridi, kot kriolit (natrijev aluminijev fluorid, $Na_3\ Al\ F_4$) in magnezijev fluorid. Lomni količnik plasti je vedno malo manjši od lomnega količnika kompaktne snovi, to pa zaradi bolj zrahljane strukture naparjene plasti. Tako varira pri naparjenem kriolitu lomni količnik plasti od 1,28 do 1,34, v primeri z 1,35 za kristal. Kakšen lomni količnik ima plast, je v veliki meri odvisno od hitrosti naparevanja, vakuuma in čistoče površine leče. Od tega je odvisna tudi mehanska trdnost plasti. Plasti iz fluoridov so mehansko precej slabo odporne. Da dobimo trdnejšo prevleko stekla, si lahko pomagamo tudi tako, da na steklo najprej naparimo plast s postopoma vedno večjim lomnim količnikom, dokler ne doseže lomni količnik vrednosti približno n_2^2, in nato plast z lomnim količnikom n_2 in debelino $\frac{1}{4}\lambda$. Plast s spreminjajočim se lomnim količnikom dobimo z istočasnim naparevanjem iz dveh pečic. Istočasno naparevamo n. pr. kremenjak, ki ima isti lomni količnik kot optično steklo, in titanov dioksid, ki ima lomni količnik $n = 3{,}0$. Najprej naparevamo v glavnem kremenjak, nato pa vedno več titanovega dioksida. Tako lomni količnik plasti postopoma raste. Prevleka debeline $\frac{1}{4}\lambda$ je pa zopet iz kremenjaka.

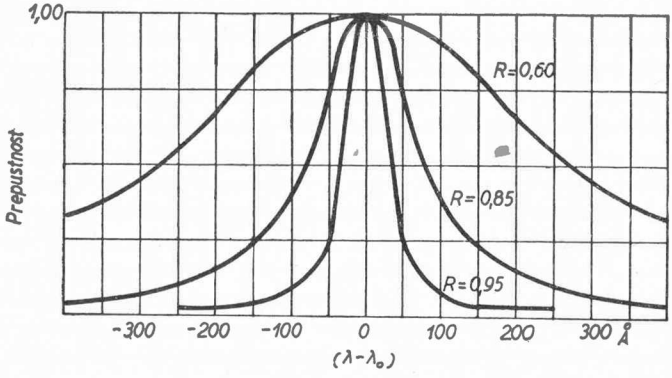
Debelina plasti $\frac{1}{4}\lambda$ iz kriolita z lomnim količnikom $n = 1{,}32$ za natrijevo črto je $\frac{1}{4}\,5890/1{,}32 = 1120$ Å. Če je taka plast naparjena na steklo, je odboj svetlobe v rumenem delu spektra najmanjši. Ostale barve se bolj odbijajo, ker zanje fazna razlika med obema odbitima valovanjema ni več 180^0. Zato je tako steklo v odbiti svetlobi škrlatne barve, ker se odbija nekaj modre in rdeče svetlobe.

Pri takih prevlekah stekla se koeficient odboja za belo svetlobo zmanjša od 4 % na 0,5 % ali na še manj. To je zelo važno za optične instrumente, ki so sestavljeni iz mnogih leč in prizem. Za primer naj navedemo, da so se izgube svetlobe v nekem instrumentu zmanjšale od 35 % na 25 %, ali drugje od 70 % na 46 %. Taka prevleka je važna tudi za fotografske objektive, ker povzroča tam na lečah sestavljenega objektiva odbita svetloba pege in mreno na filmu. Filmski igralci imajo naočnike, na katere je naparjena plast $\frac{1}{4}\lambda$, da pri snemanju ne motijo močni refleksi leč, ki lahko pokvarijo fotografije. V kinoprojektorjih lahko projekcijske žarnice obremenjujemo za 20 % manj, če je projekcijski objektiv izboljšan na ta način. S tem se znatno poveča življenjska doba žarnic.



Sl. 1. Prehod svetlobe skozi tanko plast.

Prehod svetlobe skozi tanko plast. Da bomo bolje razumeli delovanje svetlobnih filtrov, si moramo najprej podrobneje ogledati prehod svetlobe skozi tanko plast. Plast je iz snovi z lomnim količnikom n_2, na obeh straneh plasti pa naj bo snov z lomnim količnikom n_1 (gl. sl. 1!). Svetlobno valovanje, ki pada na plast pod kotom α, se deloma na plasti odbije, deloma pa gre skozi. V plasti imamo tudi dve valovanji: eno v smeri lomnega žarka, to je pod kotom β, ki je podan z lomnim zakonom $n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta$; drugo pa v smeri odbitega žarka v plasti. Amplitude posameznih valovanj lahko izračunamo, če nastavimo pogoje, ki slede iz Maxwellovih enačb, za obe mejni ravnini 12 in 21. Do cilja pa pridemo še hitreje na drug način. Svetlobno valovanje, ki ga prepušča plast, si lahko mislimo sestavljeno iz več ravnih valovanj, ki so nastala po zaporednih odbojih na mejah plasti, kot to kaže slika za en žarek. Valovanje, ki pade na mejno ravnino 12, se tu deloma odbije, deloma pa lomi. Isto se zgodi z lomnim valovanjem na drugi mejni ravnini. Odbiti val na drugi mejni ravnini se zopet deloma odbije na prvi mejni ravnini. Vse to se ponavlja. Valovanja, ki izhajajo iz druge mejne ravnine, so med seboj koherentna in zato interferirajo. Da dobimo intenziteto prepuščene svetlobe, moramo najprej ta valovanja sešteti z upoštevanjem faznih diferenc. Fazna diferenca med žarkoma 1 in 2 je zaradi daljše optične poti žarka 2 enaka $\delta = 4\pi nd \cos\beta/\lambda$. Amplituda zaporednih valovanj zaradi večkratnih odbojev pojema. Koeficient odboja na mejni ploskvi je $R = [(n_2 - n_1)/(n_2 + n_1)]^2$. Če je amplituda prvega prepuščenega valovanja



Sl. 2. Teoretične vrednosti za intenziteto svetlobe, prepuščene skozi tanko plast pri različnih R in λ. λ_0 je valovna dolžina svetlobe, ki jo plast najbolj prepušča. Debelina plasti je $\frac{1}{2}\lambda_0$.

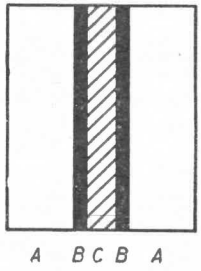
A_1, je amplituda naslednjega prepuščenega valovanja zaradi dvakratnega odboja A_1R. Amplituda celotnega prepuščenega valovanja je potem:

$$A_p = A_1(1 + Re^{i\delta} + R^2e^{2i\delta} + R^3e^{3i\delta} + \ldots) = A_1/(1 - Re^{i\delta}).$$

Odtod sledi, da je intenziteta prepuščene svetlobe $I_p = I_1/|1 - Re^{i\delta}|^2$, kjer je I_1 intenziteta prvega prepuščenega valovanja. Intenziteta tega valovanja je $I_1 = I_v(1 - R)^2$, ker je se vpadlo valovanje oslabilo zaradi dveh odbojev na ravninah 12 in 21. Torej je intenziteta prepuščene svetlobe:

$$I_p = I_v \cdot (1 - R)^2/(1 + R^2 - 2R\cos\delta),$$ odbite pa:

$$I_r = I_v \cdot 2R(1 - \cos\delta)/(1 + R^2 - 2R\cos\delta) = I_v - I_p.$$



Sl. 3. Zgradba interferenčnega filtra s kovinsko oblogo. A - steklo, B - kovina, C - dielektrik.

Ker je fazna diferenca δ odvisna od valovne dolžine svetlobe, je tudi intenziteta prepuščene ali odbite svetlobe odvisna od λ. Ta odvisnost je pa znatna le tedaj, če je R dovolj velik. Slika 2 podaja teoretične vrednosti za intenziteto prepuščene svetlobe za različne R in različne λ, če je debelina plasti $\frac{1}{2}\lambda_0$, kjer je λ_0 valovna dolžina svetlobe, ki jo plast najbolj prepušča.

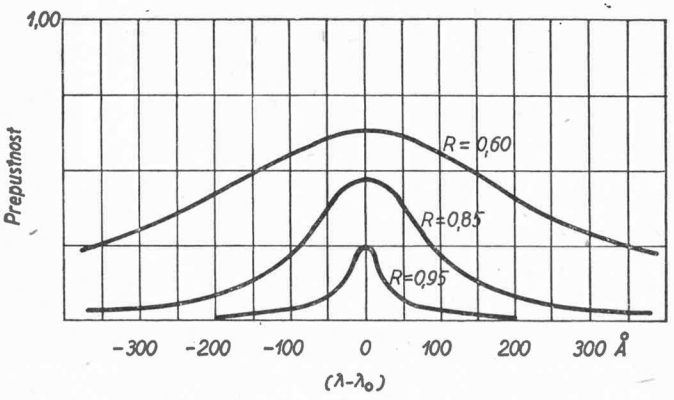
Interferenčni filtri s kovinsko oblogo. Če povečamo R, lahko dosežemo, da plast močno odbija nekatere barve in prepušča druge. To uporabljamo pri *interferenčnih filtrih.* Refleksijo na površinah plasti iz dielektrika povečamo na ta način, da na obe strani naparimo tanko kovinsko plast, ki svetlobo deloma odbija, deloma pa prepušča. Odbojni koeficient je odvisen od debeline kovinske plasti in je lahko tudi 90 %. Zgradba kovinskega interferenčnega filtra je narisana na sliki 3. Na ravno steklo najprej naparimo kovinsko plast, nato plast iz dielektrika in zopet kovinsko plast. Na vse to pa je prilepljena z balzamom zaščitna steklena plošča. Skozi filter po navadi pošiljamo vzporedno žarkovje pravokotno na ravnino filtra ($\cos\beta = 1$).

Kovinska plast na obeh straneh dielektrika spremeni tudi fazni kot δ, ki nastopa v formuli za intenziteto prepuščene svetlobe. K fazni diferenci δ, ki nastane zaradi daljše optične poti žarka 2 napram žarku 1, moramo prišteti še fazna premika φ, ki nastaneta pri odboju valovanja na kovinski plasti. Ta fazni skok je odvisen od vrste naparjene kovine in od debeline kovinske plasti. Naparevajo navadno aluminij, srebro in tudi zlato. Filter najbolj prepušča tiste valovne dolžine, za katere je $\delta + 2\varphi = m \cdot 2\pi$. Iz slike 2 vidimo, da lahko filter prepušča poljubno ozek pas valovnih dolžin, če le dovolj zvečamo koeficient odboja. Širina prepuščenih pasov je pa še manjša, če ne vzamemo $m = 1$, ampak $m = 2$ ali še več. Vendar prepušča tak filter več valovnih dolžin, ki pripadajo različnim m-om in lahko padejo že v vidni del spektra. S tem dobimo več pasov prepuščene svetlobe.

V resnici razmere niso tako idealne, kot je zgoraj prikazano. V računu nismo upoštevali absorpcije svetlobe v kovinskih plasteh, ki je pri velikem R znatna. Resnične prepustnostne krivulje kaže slika 4. Filter z razpolovno širino 230 Å prepušča samo 45 % svetlobe, s širino 130 Å 30 %, s širino 100 Å pa samo 20 % pri λ_0. Zato ne moremo narediti poljubno ozkih

filtrov. Z nagibanjem filtra proti vpadnemu žarku lahko malo spremenimo valovno dolžino najbolj prepuščene svetlobe, ker se δ in φ s kotom spreminjata. φ je poleg tega odvisen od polarizacije svetlobe. Za svetlobo, ki je polarizirana v vpadni ravnini, je drugačen kot za svetlobo, polarizirano pravokotno na vpadno ravnino. Zato dobimo pri zelo poševnem vpadu nepolarizirane svetlobe na filter dva pasova prepuščene svetlobe, ki sta polarizirana pravokotno drug na drugega.

Interferenčni filtri na totalni odboj[3,4]. Močan odboj na mejah interferenčne plasti dosežemo še na drug način. Plast iz dielektrika obložimo na vsaki strani z novo plastjo, ki ima manjši lomni količnik kot srednja. Če pošljemo svetlobo skozi srednjo plast pod kotom, ki je večji od kota totalnega odboja za mejo med snovjo z večjim lomnim količnikom in snovjo z manjšim lomnim količnikom, se na oblogah skoro vsa odbije. Kakor je znano, se pri totalnem odboju na snovi z manjšim lomnim količnikom vsa svetloba brez izgube odbije. Vendar prodira svetlobno valovanje deloma tudi v drugo sredstvo približno do globine nekaj valovnih dolžin uporabljene svetlobe. Če je snov z manjšim lomnim količnikom debela največ za nekaj valovnih dolžin, gre nekaj svetlobe skozi plast. Če je $n = 1{,}5$ in vpadni kot 45°, dobimo pri različnih debelinah naslednje prepustnosti:



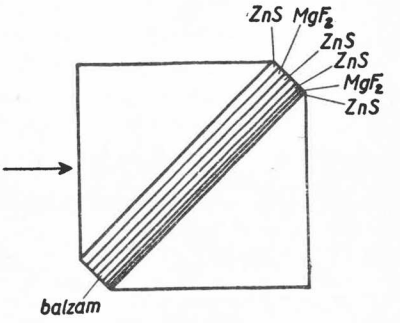
Sl. 4. Prepustnostne krivulje za interferenčne filtre s kovinsko oblogo.

$0{,}2\,\lambda$	$0{,}4\,\lambda$	$0{,}6\,\lambda$	$0{,}8\,\lambda$	$1{,}0\,\lambda$
71 %	30 %	16 %	6 %	2 %

Intenziteta prepuščene svetlobe pojema eksponencialno z debelino plasti. (Mimogrede naj omenimo, da je to popolnoma istovrsten pojav, kot tunelski efekt v valovni mehaniki.) Taka plast ima torej lahko poljubno velik odbojni koeficient. Ker tu ni nobene absorpcije, veljajo gornje formule za tak interferenčni filter popolnoma strogo.

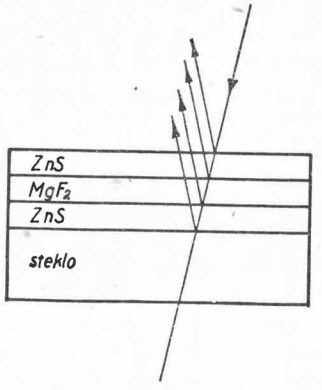
Doseči, da bo šla svetloba skozi filter pod kotom, ki je večji od mejnega kota totalnega odboja, pa ni tako lahko. Če na plast, ki je obložena z obema oblogama, pošljemo svetlobo iz zraka, ne bo šla nikoli skozi pod takim kotom. To dosežemo le, če pride svetloba na plast iz snovi, ki ima velik lomni količnik. Praktično izvedbo kaže slika 9. Na eno stranico enakostranične prizme iz flintovega stekla ($n_1 = 1{,}72$) je naparjena plast kriolita ($n_2 = 1{,}34$), nato ji sledi plast z velikim lomnim količnikom iz cinkovega sulfida ($n_3 = 2{,}38$) in zopet plast kriolita. Na vse to pa je prilepljena še ena enakostranična prizma z balzamom, ki ima isti lomni količnik kot prizma. Kot α_3, pod katerim gre svetloba skozi ZnS, je ($n_1 \sin 60^0 = n_3 \sin \alpha_3$, $\sin \alpha_3 = (n_1/n_3) \sin 60^0$) res večji od mejnega kota totalnega odboja ($\sin \alpha_m = n_2/n_3$, ker je $n_1 \sin 60^0 > n_2$).

Pri filtrih na totalni odboj je širina pasu prepuščene svetlobe odvisna od debeline kriolitne plasti, valovna dolžina prepuščene svetlobe pa v glavnem od debeline plasti iz ZnS. Značilno za take filtre je, da prepuščajo dva barvna pasova. Svetloba, ki jo prepušča filter v kratkovalovnem pasu, je polarizirana v vpadni ravnini, v dolgovalovnem pasu pa pravokotno na vpadno ravnino. Razlaga je enostavna: fazni premik φ pri totalnem odboju na kriolitu je odvisen od polarizacije svetlobe, zato je tudi λ_0 svetlobe, ki jo filter prepušča, odvisna od polarizacije. Odtod pa sledi, da filter tudi ne prepušča 100 % vpadle svetlobe pri λ_0, ampak samo 50 %. To je sicer še vedno mnogo boljše kot pri filtrih s kovinskimi oblogami. Vendar praktično ne prepuščajo nič več svetlobne energije kot kovinski filtri. To pa zato, ker pada tu svetloba poševno na filter in se zato δ s kotom zelo spreminja. Torej mora padati na filter zelo vzporedno žarkovje, kar pomeni veliko izgubo svetlobne energije. Filtri na totalni odboj so pa izredno uporabni v infrardečem delu spektra, kjer prejšnji s kovinsko oblogo odpovedo, ker se infrardeča svetloba v kovini mnogo bolj absorbira.



Sl. 5. Zgradba polprepustnega zrcala.

Filtri na totalni odboj lahko prepuščajo izredno ozek pas valovnih dolžin, na primer samo 5 Å. Vendar ni mogoče narediti velikih filtrov s tako majhno širino. Debelina naparjene plasti iz ZnS bi morala biti enakomerna na vsaj nekaj Å; to pa na velikih površinah še ni izvedljivo.

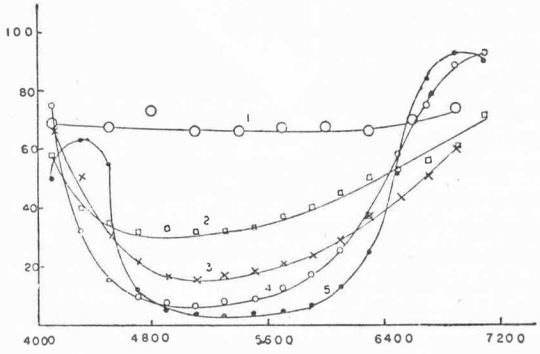


Sl. 6. Odboj svetlobe na več plasteh.

To, da lahko naredimo filtre, ki prepuščajo samo pas 5 Å ali še manj, nam omogoča meritev neenakomernosti debeline filtra na 0,5 Å natančno.[5] Na mizico dobrega spektrometra postavimo filter in ga z mizico počasi vrtimo. S kolimatorjem osvetlimo filter s strogo vzporednim žarkovjem enobarvne svetlobe. Pri daljnogledu odstranimo okular in postavimo oko v gorišče objektiva ter tako opazujemo površino filtra. Kolimator in daljnogled sta v isti črti. Če bi bil filter popolnoma enakomerno debel, bi ga videli enakomerno osvetljena v trenutku, ko bi imel tako lego proti smeri vpadle svetlobe, da bi jo ravno prepuščal. Ko bi se pa filter zavrtel za majhen kot, bi takoj ugasnil, ker ima tako majhno pasovno širino in se λ_0 s kotom spreminja. Zaradi neenakomernosti debeline filtra pa tega ne dobimo, ampak vidimo na filtru samo ozko svetlo črto. Črta povezuje na plasti mesta, ki pri določeni legi filtra ravno prepuščajo vpadlo svetlobo. Ko filter vrtimo, se tudi ta črta premika po njem. Tako lahko zasledujemo na filtru «izohipse» zelo natančno. S preprostim računom dobimo iz premika črt na filtru spremembo njegove debeline.

Površine z ojačenim odbojem. Na začetku smo videli, da se odboj na površini prozorne snovi močno zmanjša, če nanjo naparimo plast, ki ima

manjši lomni količnik in debelino $\frac{1}{4}\lambda$. Odboj pa lahko tudi močno zvečamo, če naparimo ravno tako debelo plast, toda iz snovi z večjim lomnim količnikom. Del vpadlega valovanja se odbije na površini naparjene plasti z nasprotno fazo. Valovanje, ki se odbije pri prehodu svetlobe iz plasti v steklo, se pa zaradi večjega lomnega količnika plasti odbije z isto fazo. Obe odbiti valovanji se pri interferenci v fazi ujemata. Intenziteta odbite svetlobe je torej približno $(\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2})^2$, če sta R_1 in R_2 refleksijska koeficienta za obe meji. Jakost odbite svetlobe torej močno naraste. Steklo, prevlečeno s plastjo ZnS, odbija že okoli 35 % svetlobe v primeri s 4 % pri neprevlečenem steklu. Še laže zvečamo koeficient odboja, če naparimo na mejno površino več plasti (gl. sl. 6!); najprej plast z velikim lomnim količnikom, n. pr. ZnS, nato plast z majhnim lomnim količnikom, n. pr. iz kriolita ali magnezijevega fluorida, itd. Vse te plasti morajo imeti debelino $\frac{3}{4}\lambda$ ali $\frac{1}{4}\lambda$ ali $(\frac{5}{4})\lambda$ itd., zato da se vsa odbita valovanja ujemajo v fazi. Odbojni koeficient izredno hitro raste s številom naparjenih plasti in doseže tudi 90 %.



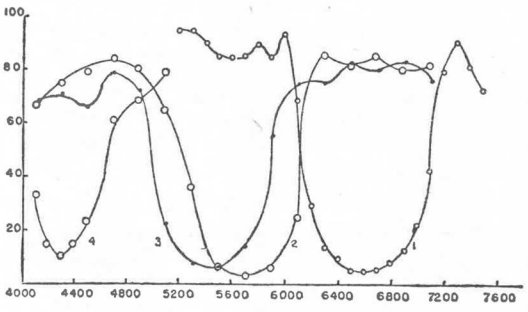
Sl. 7. Odvisnost intenzitete prepuščene svetlobe pri mnogoplastnem interferenčnem filtru od valovne dolžine in od števila plasti. Vse plasti so debele $\frac{1}{4}\lambda$ (1) 1 plast iz ZnS, (2) 2 plasti iz ZnS in 1 iz kriolita, (3) 3 plasti iz ZnS in 2 iz kriolita, (4) 4 plasti iz ZnS in 3 iz kriolita, (5) 5 plasti iz ZnS in 4 iz kriolita. M. Banning, J. Opt. Soc., 37, 793, 1947.

Če na kovinsko površino naparimo plast debeline $\frac{1}{4}\lambda$ iz MgF_2 in nato tako plast iz ZnS, s tem precej zvečamo refleksijski koeficient kovinske površine in obenem tudi zavarujemo kovino pred oksidacijo. To se uporablja pri kovinskih zrcalih. Refleksijski koeficient za aluminij naraste pri enem paru plasti od 91 % za čisto kovino na 96 %, pri dveh parih pa celo na 98 %.

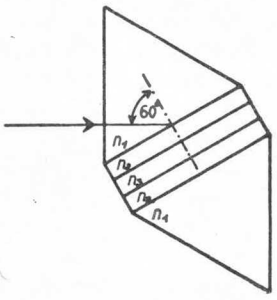
Kot zanimivost naj omenim še »mrzla zrcala«. To so zrcala, ki odbijajo vidno svetlobo, infrardečo pa prepuščajo. Narejena so iz tanke plasti kakega polprevodnika, n. pr. germanija, in več plasti dielektrikov z večjim in manjšim lomnim količnikom. Tanke plasti polprevodnikov odbijajo precej vidno svetlobo, infrardečo pa skoro popolnoma prepuščajo. Odbojni koeficient za tako plast iz germanija je pri vidni svetlobi okoli 45 %. Ker mora zrcalo mnogo bolj odbijati svetlobo, povečamo odboj z izmeničnim naparevanjem plasti z večjim in manjšim lomnim količnikom. Taka zrcala odbijajo samo vidno svetlobo in se uporabljajo v kinoprojektorjih.

Mnogoplastni interferenčni filtri. Odbita ali prepuščena svetloba je pri večjem številu plasti zelo odvisna od valovne dolžine. Najbolj se odbije tista barva, za katero so plasti debele $\frac{1}{4}\lambda$ ali $\frac{3}{4}\lambda$ ali $(^5/_4)\lambda$ itd. Zato so take skladovnice tankih plasti zopet uporabne kot barvni filtri. Veliko odvisnost od valovne dolžine dobimo zaradi superpozicije efektov posameznih plasti, ki sestavljajo filter. Intenziteto prepuščene ali odbite svetlobe pri takem sistemu plasti izračunamo na podoben način, kot smo to naredili pri eni plasti, samo da gremo pri računu stopnjema od ene plasti k naslednji.[6] Račun je precej zamotan in nepregleden.

Odvisnost intenzitete prepuščene svetlobe od barve in števila plasti kažeta sliki 7. in 8. Tu tudi vidimo, da je ostrina filtra tem boljša, čim debelejše so plasti. Odvisnost prepuščene svetlobe od valovne dolžine je pri plasteh z debelino $\frac{3}{4}\lambda$ mnogo večja kot pri plasteh z debelino $\frac{1}{4}\lambda$, ker se tam δ z valovno dolžino hitreje spreminja. Prednost teh filtrov je v tem, da ne absorbirajo skoro nič svetlobe in da je mesto največje prepustnosti lahko v poljubnem delu spektra. Pasovna širina je po navadi velika in jih uporabljajo predvsem za izločitev večjega kosa vidnega spektra. Te filtre narede navadno tako, da stekleno kocko prerežejo po diagonalni ravnini in na to diagonalno ravnino naparijo plasti ter nato zopet zlepijo obe polovici. Odbiti žarek se torej odbije pravokotno na vpadli. Število naparjenih plasti gre do 15. Pri večjem številu pa postane naparjena plast že tako debela, da se začne luščiti od podlage. Debelino posameznih plasti je mogoče določiti na najrazličnejše načine. Še najbolj enostavno je in tudi zadostuje, da jih opazujemo v odbiti svetlobi: Pod evakuirani zvonec, v katerem naparevamo plasti, priložimo čisto stekleno ploščo in nanjo naparimo posamezno plast istočasno z naparevanjem plasti na filter. S tem lahko opazujemo ločeno, kako se barva posamezne plasti spreminja z debelino. Tako je n. pr. kriolitna plast škrlatne barve, kadar ima debelino $\frac{1}{4}\lambda$ za zeleno barvo, ker zelene barve ne odbija. Plast iz ZnS je pa komplementarne, to je zelene barve tedaj, ko je debela $\frac{1}{4}\lambda$ za zeleno barvo.



Sl. 8. Odvisnost intenzitete prepuščene svetlobe od valovne dolžine pri različnih sedemplastnih interferenčnih filtrih. Debelina posameznih plasti je $\frac{3}{4}\lambda$. M. Banning, J. Opt. Soc., 37, 793, 1947.



Sl. 9. Zgradba filtra na totalni odboj.

Tudi pri teh filtrih se barva prepuščene svetlobe spreminja z vpadnim kotom. Če gledamo sistem plasti pod različnimi koti v odbiti svetlobi, se njihova barva lepo spreminja in preliva iz ene v drugo. To je čisto isti pojav, kot smo ga opazili pri barvah hroščev in nekaterih metuljev. Tam tvorijo plasti hitina, to je plasti z večjim lomnim količnikom, in plasti zraka, to je plasti z manjšim lomnim količnikom, interferenčni filter take vrste.

Pri interferenčnih filtrih s kovinsko oblogo ali filtrih na totalni odboj smo zahtevali velik refleksijski koeficient na mejah srednje plasti iz dielektrika. Tu imamo novo možnost, kako to dosežemo. Na srednjo plast, n. pr. kriolit, ki je debel $\frac{1}{2}\lambda$, naparimo na obeh straneh več plasti $\frac{1}{4}\lambda$ iz ZnS in kriolita. S tem zelo povečamo R. Primer[8]: filter s 15 plastmi: 1—7 plast so iz ZnS in kriolita $\frac{1}{4}\lambda$, 8 plast je iz kriolita in ima debelino $\frac{1}{2}\lambda$, ostale so pa zopet in ZnS in kriolita z debelino $\frac{1}{4}\lambda$. Tak filter prepušča pri $\lambda_{max} =$ $= 5200$ Å 80 % svetlobe, razpolovna širina pa je samo 60 Å. Motijo pa

nekoliko maksimi pri 4400 Å in 6200 Å z jakostjo 5 %, to pa zato, ker je R odvisen od valovne dolžine. Včasih vzamejo pri takem filtru manj plasti, zato pa na krajni plasti naparijo še tenko plast srebra, da se R poveča. Plast srebra je tako tenka, da je absorpcija svetlobe v srebru minimalna.

Polprepustna zrcala. Pri različnih optičnih meritvah, predvsem pri fotometriranju, moramo razcepiti žarek v dva približno enako močna žarka. To so navadno delali s polprepustnimi zrcali. Taka zrcala imajo to slabo stran, da absorbirajo 30 % ali še več vpadle svetlobe. To lahko deloma izboljšamo, če prevlečemo zrcalo, ki ima manj naparjenega srebra, s plastjo iz MgF_2 in ZnS, ki sta debeli $\frac{1}{4}\lambda$ za zeleno barvo. Lahko pa naredimo polprepustna zrcala iz samih dielektrikov, tako da se skoro nič svetlobne energije ne izgubi. Zgradbo takega polprepustnega zrcala kaže slika 15. Steklena kocka je prerezana po diagonalni ravnini. Na hipotenuzno ploskev ene izmed nastalih prizem so naparjeni trije sloji, najprej plast iz ZnS, nato plast iz kriolita in zopet plast iz ZnS. Vse te plasti imajo debelino $\frac{1}{4}\lambda$ za zeleno barvo pri vpadnem kotu 45°. Podobno so naparjene tri plasti na hipotenuzno ploskev druge prizme. Razlika je samo v tem, da je njihova debelina $\frac{1}{2}\lambda$ za zeleno barvo pri vpadnem kotu 45°. Obe prizmi sta nato zlepljeni skupaj. Svetloba prihaja v narisani smeri. Na prvih treh plasteh se odbije največ zelene barve. Svetloba, ki pride do druge trojice plasti, je škrlatno pobarvana. Tu se zelena barva odbije najmanj, ostale pa močno. Rezultat tega je, da sta odbita in prepuščena svetloba skoraj enake barve kot vpadla. Od števila plasti je odvisno, kolikšen del svetlobe se odbije in koliko je gre skozi. Naredili so polprepustna zrcala, ki odbijajo skoro natančno toliko svetlobe kot jo prepuščajo. Absorpcija svetlobe je pri teh zrcalih manjša kot 10 %.

Interferenčni polarizatorji. Skladovnica tankih plasti je uporabna tudi kot polarizator svetlobe. Če na tako skladovnico pada svetloba pod Brewsterjevim kotom, se odbije samo komponenta svetlobnega valovanja, ki je polarizirana pravokotno na vpadno ravnino. Pri odboju na eni sami ploskvi je odbojni koeficient premajhen, da bi bilo to v večji meri uporabno za pridobivanje polarizirane svetlobe. Z več plastmi, ki jih naparimo na steklo, pa dosežemo močan odboj. Zgradba takega polarizatorja je ravno taka kot polprepustnega zrcala, samo da mora imeti steklo ravno pravilni lomni količnik, da pade svetloba na plast pod Brewsterjevim kotom. Vse plasti so tu enako debele. Iz Brewsterjevega in lomnega zakona sledi, da mora za lomne količnike veljati: $n^2_s = 2\, n^2_k\, n^2_{ZnS} / (n^2_k + n^2_{ZnS})$. Primer: $n_{ZnS} = 2{,}3$, $n_k = 1{,}3$, torej $n_s = 1{,}55$. Pri tem je 98 % odbite ali prepuščene svetlobe polarizirane. Vpadni kot sme varirati za 5° na vsako stran.

Čeprav gre tu v bistvu za davno znane pojave, smemo vendarle reči, da se je v zadnjih letih z razvojem tehnike naparevanja tankih plasti razvilo tudi čisto novo področje optike. Danes se že dobe tovarne, ki so začele izdelovati za prodajo interferenčne filtre in sorodne izdelke, tako n. pr. Fish-Schurman Corporation, 230 East 45 th Street, New York 17, N. Y.; Barr and Stroud, Ltd. Glasgow; in Baird Associates, Inc., University Road, Cambridge 38, Mass; Société d'Études et d' Applications Vide, 9, Rue de la Grande-Ceinture, Argenteuil. Dandanes je pot od prvega laboratorijskega poskusa do industrijske produkcije mnogo krajša, kot je bila nekdaj.

Literatura:

[1] Lord Rayleigh: *On the Optical Caracter of some Brilliant Animal Colours.* Phil. Mag., *37*, 98 (1919).

[2] F. Süffert: *Morphologie und Optik der Schmetterlingsschuppen, insbesondere die Schillerfarben der Schmetterlinge.* Zeitschrift für Morphologie und Ökologie der Tiere. *1*, 171 (1924).

[3] B. H. Billings and M. A. Pittman: *A Frustrated Total Reflection Filter for the Infra-Red.* J. Opt. Soc. Am., *39*, 978 (1949).

[4] Harry D. Polster: *Reflection from a Multilayer Filter.* J. Op. Soc. Am., *39*, 1038 (1949).

[5] Alan E. Gee and Harry D. Polster: *A Method for Measuring Exstremely Small Non-Uniformities in the Optical Thickness of Evaporated Films.* J. Opt. Soc. Am., *39*, 1044 (1949).

[6] Doris L. Caballero: *A theoretical Development of Exact Solution of Reflectance of Multiple Layer Optical Coatings.* J. Opt. Soc. Am., *37*, 176 (1947):

[7] Mary Banning: *Practical Methodes of Making and Using Multilayer Filters.* J. Opt. Soc. Am., *37*, 792 (1947).

[8] Harry D. Polster: *A Dielectric Interferometer Filter.* J. Opt. Soc. Am., *39*, 1054 A (1949).

[9] J. R. Davy: *Industrial High Vacuum.* London 1951.

[10] *Les Propriétés Optiques des Lames Minces (Colloque international sur les lames minces solides,* Marseille, 1949). J. Phys. et Radium, *11*, 305—480 (1950).

Sliki 7. in 8. sta vzeti iz članka Mary Banning: Practical Methods of Making and Using Multilayer Filters, J. Opt. Soc. Am., *37*, 792 (1947), z dovoljenjem avtorja in urednika Journal of the Optical Society. Za prijaznost se najlepše zahvaljujemo.

INFRARDEČI SPEKTROFOTOMETRI

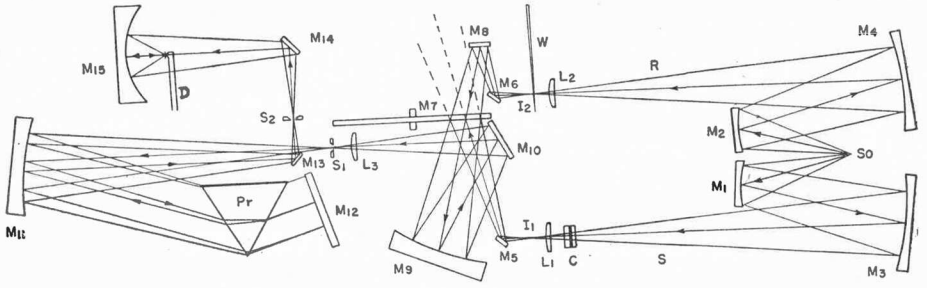
D. Hadži

Absorpcija v srednjem infrardečem delu spektra valovne dolžine 3 do 50 μ je v zvezi z nihanjem atomskih jeder v molekuli in iz nje lahko dobimo podatke o medsebojni legi in vezavi atomov. Pri molekulah, ki so sestavljene iz manjšega števila atomov, je možno iz lege posameznih absorpcijskih pasov izračunati konstante molekule. Pri tem obravnavamo molekulo kot model točkastih mas, ki predstavljajo atome in ki so povezane z elastičnimi silami. Molekula, ki vsebuje n atomov, ima $3n - 6$ normalnih načinov nihanja ali pa $3n - 5$, če je linearna. Nihanje je zvezano z absorpcijo le takrat, če je z njim združena sprememba električnega momenta. Pri linearni triatomski molekuli je n. pr. nihanje ←○ ● ○→ neaktivno, medtem ko je nihanje ←○ ●→ ←○ aktivno v absorpciji. Na tej osnovi so izdelana izbirna pravila, ki omogočajo določitev stopnje simetrije molekule.

Ker moramo pri teh računih reševati enačbe iste stopnje kot je število atomov v molekuli, moremo tako obravnavati le molekule z majhnim številom atomov. Včasih si pomagamo s poenostavitvami, da n. pr. štejemo atomske skupine (CH_3-, OH-) kot eno samo maso. Simetrija molekule zniža stopnjo enačb. Poznavanje simetrije molekule omogoča izbiro pravilnega steričnega modela molekule. Tako n. pr. vemo, da je molekula benzena ravninska, da pa ima molekula ciklooktatetraena obliko krone.

Spektra snovi v plinastem stanju kažejo rotacijsko strukturo vibracijskih pasov. Iz te lahko računamo vztrajnostne momente molekule in iz teh dolžine vezi in kote med vezmi. Če poznamo vse frekvence normalnih nihanj kake molekule, lahko iz njih računamo jakosti vezi in posredno njihove dolžine. Iz teh podatkov moremo računati tudi termodinamične funkcije snovi, kot n. pr. specifične toplote, prosto energijo in entropijo.

Nekaj let pred zadnjo vojno se je začela širiti infrardeča spektrografija tudi v kemične laboratorije. Izkazalo se je namreč, da nekatere atomske skupine nihajo skoraj neodvisno od ostanka molekule. Njih prisotnost v kompliciranih molekulah moremo torej ugotoviti po značilnih valovnih dolžinah absorpcijskih pasov. Pogoj za to je, da se skupina dovolj razlikuje od ostalih atomov bodisi po masi ali pa po jakosti vezi. Absorpcija skupin z lahkimi atomi je v področju okrog 3 do 4 μ (C—H, O—H, N—H, S—H), skupin z dvojno vezjo med 5 in 7 μ (C = C, C = O, C = N), pri še večjih valovnih dolžinah pa dobimo absorpcije, ki ustrezajo nihanjem enojnih vezi med atomi ogljika ter ogljika in kisika. Tu so tudi absorpcijski pasovi, ki izvirajo iz deformacij valenčnih kotov. Končno imamo pri valovnih dolžinah nad 15 μ absorpcije skupin s težkimi atomi, kot so n. pr. halogeni. Medtem ko so absorpcije pri manjših valovnih dolžinah, t. j. izpod 8 μ, posebno



Sl. 1. Potek žarkov v spektrofotometru z dvojnimi žarki (Perkin-Elmer Mod. 21). So gorilec; M1 do M 15 zrcala; S žarek, ki gre skozi celico C z analiznim vzorcem; R žarek, ki gre skozi fotometrsko zaslonko W; L leče iz KBr; M7 rotirajoče zrcalo, ki odbija izmenoma žarka R ali S na monokromator; S1 in S2 vstopna in izstopna reža; Pr prizma; M12 zrcalo Litrowa; D termočlen.

uporabne za dokazovanje prisotnosti posameznih skupin, je področje absorpcij, ki izvira iz nihanja ogljikovega skeleta bolj uporabno za identifikacijo spojin. Poleg kvalitativne je mogoča tudi kvantitativna analiza mešanic po intenziteti absorpcije na valovnih dolžinah, ki so značilne za posamezne komponente mešanice. To je dragoceno dognanje zlasti v primerih snovi, ki ne absorbirajo v vidnem in bližnjem ultravijoličnem delu spektra, kot so n. pr. ogljikovodiki. Važno za uporabnost infrardeče analize je to, da potrebujemo zelo malo snovi — navadno le nekaj miligramov — in da rabimo malo časa za snemanje spektra. Oboje je pomagalo k hitremu prodiranju te metode v industrijske laboratorije.

Poleg čisto analitske uporabe je za kemika važna tud' možnost proučevanja podrobnosti kemijske vezi in sekundarnih vezi med molekulami. Vpliv ostalih atomov v molekuli, kakor tudi vpliv bližnjih molekul se kaže v premikih absorpcije kake skupine in v spremembi intenzitete. Najbolj znan primer te vrste je *protonska vez*, ki poveča valovno dolžino absorpcije vezanega hidroksila za nekaj desetink mikrona.

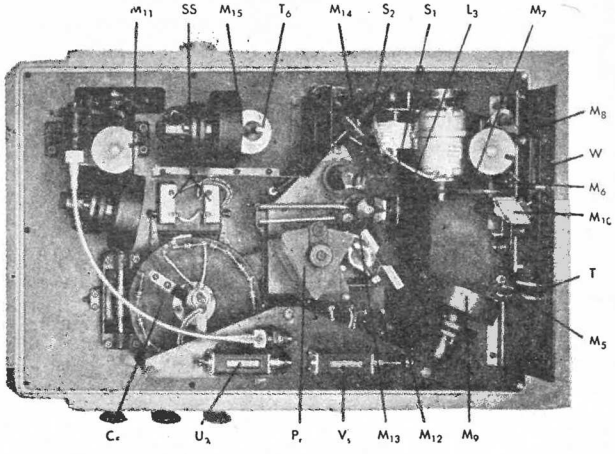
Dokler je bila infrardeča spektrografija omejena le na uporabo v molekularni fiziki, so uporabljali aparate, katere so si raziskovalci sami sestavljali. V tem času ni bilo potrebe po veliki hitrosti snemanja spektra, ker je vrednotenje spektra predstavljalo glavno delo. Važnejša je bila dobra ločljivost instrumenta. Razmere so se spremenile, ko je infrardeča spektrografija postala važen pripomoček analitika, zlasti v industriji. Tu rabijo

instrumente, ki delujejo hitro, ki niso preveč občutljivi za okolico in s katerimi lahko ravna tudi manj izvežbano osebje. Cena je postala manj važna, ker jo štednja na času kmalu povrne. To so bili ugodni pogoji, da preide izdelava infrardečih instrumentov v industrijski obseg. Danes imamo na svetu okrog 8 tvrdk, ki izdelujejo instrumente različnih konstrukcij in po različnih cenah. Te se gibljejo od 5 000—25 000 dolarjev. Kljub visoki ceni število infrardečih spektrofotometrov naglo narašča. Medtem ko jih je bilo leta 1935 v ZDA komaj 13, po vsem svetu pa le malo več, jih cenijo danes na 5 000.

Bistvene sestavine infrardečega spektrofotometra so: svetilo, monokromator, sprejemnik energije ter ojačevalec z napravo za beleženje energije vzdolž spektra.

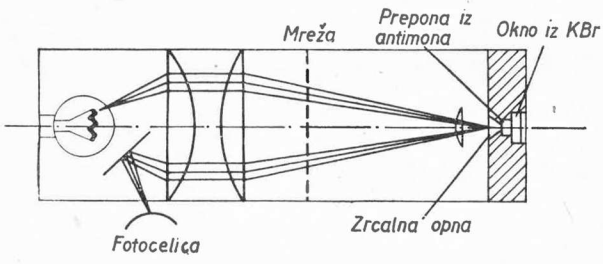
Za srednje infrardeče področje sta v rabi dve svetili: *Nernstov gorilnik* in *globar*. Prvi obratuje pri 1900° in prenese precej dolgo uporabo. Sestavljen je iz oksidov redkih zemelj, ki postanejo električno prevodni šele pri visoki temperaturi. Globar pa je paličica iz silicijevega karbida (silit) in obratuje pri 1200°. Zato oddaja manj vidne svetlobe kot Nernstov gorilnik, kar je velika prednost. Ima pa krajše življenje, povrh pa mora biti v zaprtem in evakuiranem ohišju, ker oddaja hlapne snovi.

V komercialnih instrumentih dosežejo razklon žarkov s prizmo. Vsega področja ni mogoče raziskovati s prizmo iz enega samega materiala zaradi absorpcije pri večjih in premajhne disperzije pri manjših valovnih dolžinah pri posameznih snoveh. Uveljavile so se sledeče snovi: kremenjak (prepušča do 3 μ), litijev fluorid (6 μ), kalcijev fluorid (10 μ), kuhinjska sol (15 μ), kalijev bromid (20 μ), talijev jodobromid (42 μ). Izpopolnitev tehnike gojitve velikih kristalov je omogočila brušenje prizem, katerih baza meri do 15 cm in višina do 12 cm. Lomeči kot je navadno 60°. Prizme uporabljajo ponajveč v *namestitvi Littrowa*. Pri tej stoji za prizmo zrcalo, tako da prehaja žarek dvakrat skozi prizmo in se dvakrat bolj razkloni. Prizma z zrcalom je nameščena na vrtljivi mizici. Med snemanjem spektra se ta vrti in tako odvija spektrum pred sprejemnikom. Za kolimacijo uporabljamo skoraj izključno zrcala. Vzrok temu je omejena prepustnost materiala, iz katerega so leče, in potreba po velikih aperturah zaradi majhne razpoložljive energije. Vstopna in izstopna reža skrbita, da pade na sprejemnik energije hkrati le majhen izrez spektra. Njuna širina je enakega reda velikosti, kot je širina absorpcijskih pasov navadnih spojin. Ker pa ustreza spektralna razdelitev energije svetila približno sevanju črnega telesa in



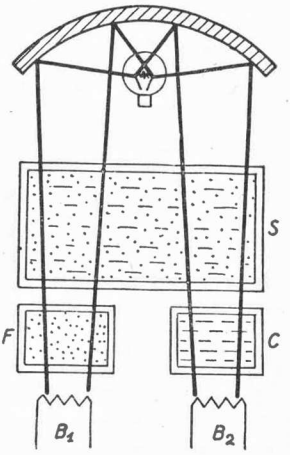
Sl. 2. Notranjost istega instrumenta kot na sl. 1. Veljajo isti znaki, poleg teh še: U števec, ki kaže nastavljeno valovno dolžino, Vs pa širino reže; C5 naprava za samodelno uravnavanje reže po môči gorilca, T zaslonka za ročno uravnavanje (služi za kompenzacijo neenakosti celic i. sl.).

ima maksimum blizu 2 μ, razpolagamo v kratkovalovnem delu spektra z veliko večjo energijo kot v dolgovalovnem. Pri starejših instrumentih je bilo treba zaradi tega med snemanjem spektra reži spreminjati. Pri sodobnih instrumentih se to vrši avtomatično in enakomerno, tako da pada na sprejemnik — dokler ni nobene absorpcije — precej stalen energijski tok. Temperaturne spremembe spremenijo lomni količnik prizme in zato je treba instrument vsakokrat kalibrirati z znanimi spojinami. Pri sodobnih instrumentih pa so te težave odpravljene. Z zrcalom Litrowa je namreč sklopljen bimetalni regulator, ki kompenzira spremembo lomnega količnika s spremembo kota zrcala.



Sl. 3. Golayeva celica.

Ogromno dela posvečajo *sprejemnikom* svetlobe, to je pripravam, ki kakorkoli reagirajo na infrardeče žarke in ki nazadnje dajo električni tok, ki ga lahko registriramo. Od različnih sprejemnikov, ki so bili nekoč v rabi, so ostali le še močno izpopolnjeni *termočleni* in *bolometri*. Bolometri so ohranili še precej svojega prvotnega značaja. To so tanki platinski trakovi, ki so pokriti s posebno prevleko, ki žarke dobro absorbira. Trak je v evakuiranem ohišju z okencem iz KBr. Pri absorpciji žarkov se trak segreje in zato se spremeni njegov upor. To spremembo izkoristimo za registracijo, pri čemer seveda rabimo primerno ojačenje. Kakovost bolometra je odvisna od konstrukcije, zlasti pa od prevleke traku. To so tajnosti tovarn, prav tako kot sestava kovin oziroma polprevodnikov, iz katerih delajo termočlene. Pri teh so glavna sestavina zlitine srebra, vendar pa odločilno vplivajo malenkostne primesi, o katerih ne poročajo. Kot bolometre rabijo, čeprav v manjši meri, tudi *termistorje*. To so polprevodniki z velikim temperaturnim koeficientom upora. Tudi ti zelo hitro reagirajo.



Sl. 4. Analizni aparat za pline brez prizme. R gorilnik; M zrcalo; S celica z mešanico za analizo; F celica s čistim plinom, katerega določamo; C celica s plinom, ki absorbira; B_1 in B_2 bolometra.

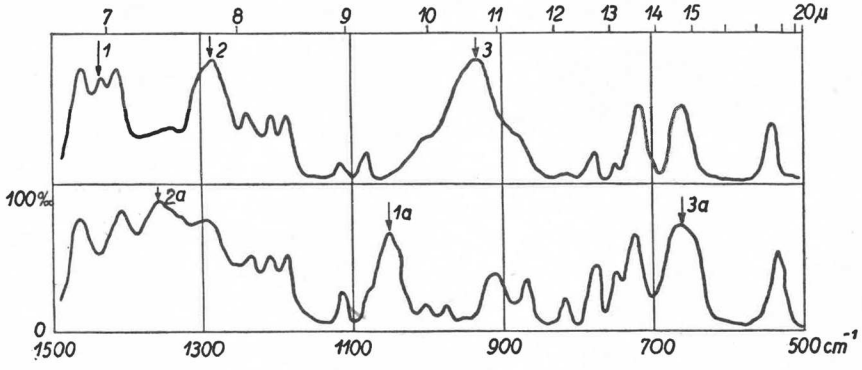
V novejšem času se uveljavlja *Golayeva pnevmatska celica* (sl. 3). To je kockasta celica (rob 3 mm), ki je zaprta z okencem iz KBr in ima v sredi prepono iz antimona. Ko pade v celico žarek, se prepona segreje, od nje pa žlahtni plin, ki polni celico. Pritisk, ki zaradi tega nastane, se prenese po kapilari na drugo polovico celice, ki jo zapira prožna opna. Opna je posrebrena in služi kot zrcalo, ki se ukrivi pri spremembi pritiska v celici. S posebnim optičnim sistemom dobimo potem na fotocelici spremembo osvetljenosti. Žarki s svetila, ki prehajajo skozi sistem leč, se odbijajo na opni in končno padajo na fotocelico. Pri tem prestopijo tudi dvakrat skozi mrežo (gl. sl. 3) in sicer tako, da se

neprozorne črte zgornje polovice mreže preko posebne leče upodobijo na reže spodnje polovice. Slika se z mrežo prekriva bolj ali manj, kakor se spreminja krivina zrcalne opne. To pa zopet povzroča spremembe količine svetlobe, ki jo prepušča spodnja polovica mreže. Tako dobimo spremembe toka s fotocelice, ki ustrezajo spremembam vpadajoče infrardeče svetlobe. Prednosti tega sprejemnika so, da je občutljiv do skrajne meje srednjega infrardečega področja in pa da zelo hitro reagira. Pri sprejemniku moramo vedeti, kako hitro reagira; to povemo tako, da navedemo čas, v katerem doseže sprememba toka dve tretjini svoje končne vrednosti, potem ko smo osvetlitev na hitro spremenili. Drugi važni podatek pa je občutljivost; tu navedemo najmanjši energijski tok, ki ga sprejemnik še zazna. Naslednja tabela podaja nekaj teh podatkov:

	čas	občutljivost
bolometer »Polaroid«	0,02 sek	$5 \cdot 10^{-10}$ W
bolometer »Baird«	0,015	$2 \cdot 10^{-10}$
termočlen »Hornig«	0,035	$7 \cdot 10^{-11}$
termistor	0,003	
Golayeva celica	0,003	$2 \cdot 10^{-10}$

Del spektralnega področja je mogoče zaznati s fotoelementi iz polprevodnikov, zlasti iz svinčevega sulfida in svinčevega telurida. Elementi iz prvega so občutljivi za žarke do 3,5 μ, iz drugega pa celo do 5 μ. Oboje moramo hladiti s tekočim zrakom, če želimo doseči skrajno mejo občutljivosti. Hlajenje namreč premakne mejo občutljivosti proti dolgim valovom, zviša 10 do 20krat celotno občutljivost, obenem pa prepreči motnje zaradi toplotnega sevanja okolice. Čas reagiranja elementov je izredno majhen: 10^{-4} do 10^{-3} sek; element s PbS, ki je občutljiv pri 3,5 μ, zaznava še energijski tok $15 \cdot 10^{-14}$ W; element PbTe občutljivost pri 5 μ pa $9 \cdot 10^{-13}$ W.

V začetni fazi infrardeče spektroskopije so merili tok s sprejemnika z občuljivim galvanometrom in beležili odklone na roko s svinčnikom ali pa avtomatično na fotografski papir. Pozneje so se pojavili svetlobni releji, ki so ojačevali prvotni odklon galvanometra čez sistem fotocelic. Še novejši



Sl. 5. Del infrardečega spektra laurinske kisline (zgoraj) in njenega homologa (spodaj), kjer je nadomeščen kislinski vodik z devterijem. Zaradi te substitucije so se premaknili pasovi 1, 2 in 3 na nove lege 1a, 2a in 3a. Pasova 1 in 3 izvirata iz deformacijskih nihanj skupine O—H, pas 2 pa iz valenčnega nihanja skupine C—OH. Ostali pasovi, ki izvirajo iz deformacijskih nihanj skupin CH_2, CH_3 in valenčnih nihanj verige ogljikovih atomov, se pri tej substituciji ne premikajo.

so istosmerni elektronski ojačevalci, ki so omogočili uporabo samodelnih pisalnih potenciometrov. Vendar je še vse to zahtevalo namestitev aparature na takih prostorih, kjer ni mehaničnih tresljajev. Velika napaka ojačevalcev te vrste je tudi v tem, da se premika ničlišče zaradi temperaturnih sprememb okolice, utrujanja celic itd. Sprejemniki, ki hitro reagirajo na spremembe osvetlitve, so omogočili uvedbo nizkofrekvenčnega ojačevanja. Spremembe s periodo 6 do 16 ciklov dosežemo na sprejemniku s prekinjanjem žarkov z rotirajočo segmentirano ploščo. Spremembe napetosti na sprejemniku prenese poseben transformator na ojačevalec. Mehanični usmernik, ki je sklopljen s prekinjevalcem žarkov, usmerja napetost na izhodu ojačevalca. Priključeni registrirni potenciometer jo potem beleži na papir. Ta krivulja pa še ne pove, kakšna je prepustnost snovi v odvisnosti od valovne dolžine, ker ima v najenostavnejšem primeru naloženo še absorpcijo atmosferske vlage in ogljikovega dvokisa. Ta dva močno absorbirata v predelih 6, 4,25 in 2,8 μ. Če hočemo dobiti spekter brez tega, je treba posneti dve krivulji, eno s snovjo in drugo s praznim instrumentom (ali s samim topilom, če je bila snov v raztopini). Potem je treba za vsako točko v spektru izračunati kvocient obeh izmerjenih prepustnosti. To je precej zamudno delo in zato se vedno bolj uveljavljajo instrumenti, ki beležijo že kar krivuljo samo s procenti absorpcije. Obstajajo različne rešitve tega problema, ki se dajo razdeliti na tri skupine. Pri prvi beležimo oba spektra na magnetofonski trak. Posnamemo najprej spektrum brez snovi, potem snemamo spektrum s snovjo ter istočasno predvajamo skozi ojačevalec prej registrirani spektrum. Registrirni potenciometer beleži sedaj le razliko med prvim in drugim posnetkom, torej opravi sam delo zamudnega računanja. Napaka sistema je v tem, da potrebuje dvojni čas za snemanje, kar pa se zmanjša pri serijskem delu, ker velja en trak s »praznim tekom« za vso serijo, če se medtem ne spreminjajo atmosferski pogoji. Druga težava je potreba po popolni stalnosti gorilnika. Vendar je izkušnja pokazala, da je to dosegljivo in da dobimo zelo zanesljive rezultate pri razmeroma enostavni konstrukciji. V prodaji je en tip takšnega instrumenta, ki velja okrog 25 000 dolarjev.

Pri drugi rešitvi uporabljajo tako imenovano optično izravnavo. Rotirajoče večdelno zrcalo pošilja svetlobo z gorilnika s frekvenco okrog 10 na sek. izmenoma skozi celico, ki vsebuje preiskovano snov, in prazno celico ali polnjeno samo s topilom. Oba žarka nadaljujeta isto pot skozi monohromator in zadevata izmenoma na sprejemnik. Če se celici razlikujeta po prepustnosti, to je, če snov pri določeni valovni dolžini absorbira, bo na sprejemniku nastala izmenična napetost s frekvenco rotirajočega zrcala in amplitudo, ki je sorazmerna razliki prepustnosti. Ta napetost se ojačuje in preko servomehanizmov prenaša na premakljivo zaslonko, ki slabi žarek na strani prazne celice. Slabitev je proporcionalna premiku zaslonke. Zaslonka se premika toliko časa, dokler se intenziteti obeh žarkov ne izenačita. Takrat namreč na sprejemniku ne nastaja več izmenična napetost. Z zaslonko je povezano pero, ki beleži premike zaslonke kot odstotke absorpcije. Smer gibanja zaslonke in z njo povezanega peresa je odvisna od faze napetosti na sprejemniku, faza pa od strani, s katere prihaja več energije. Ob prehodu kakšnega absorpcijskega pasu se zaslonka zapira do izravnave, ko obstane. Pri zmanjšanju absorpcije pa se faza napetosti na sprejemniku obrne, s čimer se obrne tudi smer gibanja zaslonke, ki se začne zopet odpirati. Opisani sistem zahteva visoko kvaliteto optičnih delov in zelo na-

tančno uravnavo, ker se morata sliki obeh žarkov, ki izmenoma padata na sprejemnik, popolnoma kriti. Zelo občutljiv del je tudi zaslonka, od katere je odvisna točnost meritve prepustnosti. Zato pa je instrument precej neodvisen od sprememb okolice med snemanjem. V prodaji je več modelov, ki so približno polovico cenejši od prej opisanega (ca. 12 000 dolarjev).*

Imamo pa še tretji sistem, ki prav tako uporablja dvojne žarke; te pa po vsej optični poti ter ima tudi dva enaka sprejemnika. Ta dva sta lahko vezana na en ojačevalec, ki potem ojačuje le razlike v napetosti med obema; lahko pa uporabimo tudi dva ojačevalca in samodelni potenciometer za registracijo. Napaka je v obeh primerih v tem, ker imamo ves čas dvojni žarek, torej razpolovimo energijo gorilca. Težava je tudi v tem, da morata biti sprejemnika popolnoma enaka. Prednost pa je, da ni posebno visokih zahtev na optične dele in stabilnost gorilca, niti ni pretirane občutljivosti za spremembe v okolici. Zaradi slabega izkoriščanja energije pa je ta tip le malo v rabi.

Pri sodobnem spektrofotometru traja snemanje področja od 2 do 15 μ 10 do 30 minut, kar je odvisno od zahtevane natančnosti. Točnost merjenja valovne dolžine je precejšnja; napaka je okrog 1 do 3 cm^{-1}, čemur ustreza pri 10 μ okrog 0,01 μ, torej 0,1%. Pri merjenju prepustnosti je napaka 0,5 do 1%. Precej si lahko prihranimo na času z ureditvijo, ki avtomatično zmanjša hitrost snemanja na mestih, kjer se pojavi močnejša absorpcija, prazne dele spektra pa hitro preide.

Kjer potrebujemo posebno visoko ločljivost, uporabljamo instrumente, ki imajo namesto prizme refleksne uklonske mreže. Takšne si navadno raziskovalci sami sestavljajo. Ločljivost, ki jo dosežejo, je okrog 0,5 cm^{-1}. Uklonske mreže za takšne instrumente imajo do 3000 raz na centimeter. Originalne mreže so sicer zelo drage, dobijo se pa odtisi, ki so razmeroma poceni, a vendar zelo dobri.

Pri kvantitativnem zasledovanju hitrih kemičnih reakcij, kot so procesi izgorevanja, polimerizacije in podobno, se je obnesel instrument s prikazovanjem spektra na katodni cevi. Zrcalo Litrowa oscilira z okrog 60 nihaji na sekundo okoli neke nastavljene lege, ki lahko obsega interval nekaj mikronov, in tako predvaja pred sprejemnikom ta del spektra. Sprejemnik mora biti tak, da dovoli tako hitro spreminjanje, torej termistor ali fotoelement. Zaslon katodne cevi mora imeti dovolj dolgo fosforescenco, da obdrži ves interval spektra, katerega opazujemo ali snemamo na film.

Spektrofotometer v zvezi z refleksnim mikroskopom omogoča delo z zelo majhnimi množinami snovi in celo analize delov celic v živalskih in rastlinskih tkivih. Tak mikroskop ima namesto leč ukrivljena zrcala. Z njim moremo posneti spektra snovi v množinah 5 do 10 μg. Posebno važno je to za preiskave kristalov s polarizirano svetlobo, ker ni vselej mogoče zrediti dovolj velikih kristalov in vlaken za makroskopsko preiskavo.

Poleg pravih spektrofotometrov, ki svetlobo razklonijo, so pa za industrijo zelo važni bolj preprosti primerjalni infrardeči fotometri za analizo plinov, ki izkoriščajo selektivno absorpcijo plina, čigar koncentracijo je treba določati (gl. sl. 4). V snovi je tak aparat diferencialni plinski termometer. Žarek iz svetila se cepi na dvoje in oba dela prehajata najprej skozi celico, v kateri je plinska mešanica, ki jo hočemo analizirati. Za to

* Tudi v Ljubljani bomo imeli Perkin-Elmerjev instrument te vrste, prispel bo najbrž še to jesen.

celico je postavljen vzporeden par celic, od katerih je ena polnjena s kakim plinom, ki ne absorbira v infrardečem, druga pa s čistim plinom, katerega koncentracijo hočemo določiti. Ta celica se bo tem manj ogrevala, čim večja je koncentracija absorbirajočega plina v mešanici. Ta namreč absorbira prav ono valovno dolžino, ki bi se sicer absorbirala v drugi celici in povzročala segrevanje. Nastale razlike v pritisku vplivajo na posrebreno membrano, ki reflektira svetlobo z zunanjega svetila na fotocelico. Spremembe krivine membrane spreminjajo količino svetlobe, ki pade na celico, kar preko ojačevalca beležimo na papir. Namesto tega sistema se lahko poslužujemo tudi bolometrov, ki so nameščeni na dnu plinskih celic.

NOVICE

Eksperimentalne potrditve enačbe $U = mc^2$

V okviru specialne relativnostne teorije je leta 1905 Albert Einstein podal enačbo $U = mc^2$, ki izraža odvisnost med maso in energijo. Iz te enačbe n. pr. sledi, da masi 1 kg ustreza energija $3 \cdot 10^{10}$ kWh, atomski masni enoti (1 ME = 1/16 mase atoma O^{16}) pa ustreza energija 931,15 MeV. Ta energija nam v celoti še ni na razpolago, ker so tudi pri jedrskih reakcijah spremembe mase relativno majhne in lahko merimo le spremembo mase in spremembo energije, ki ju veže enačba $\triangle U = \triangle mc^2$. Do danes se je posrečilo že precej eksperimentalnih potrditev te enačbe.

Poglejmo kot primer jedrsko reakcijo

$$N^{14} + d \rightarrow N^{15} + p.$$

Skupna mirovna masa delcev na levi strani (jedro N^{14} + devteron) je večja kot mirovna masa po reakciji (N^{15} + proton). Razlika teh mas je po prejšnjem enaka $\triangle m = \triangle U/c^2$, kjer je $\triangle U$ *reakcijska energija*. Mase atomov N^{14}, N^{15}, D in H izmerimo z masnim spektrografom, reakcijsko energijo pa dobimo iz razlike kinetične energije vstopajočega in izstopajočega delca. Ta razlika znaša pri omenjeni reakciji $\triangle U = 8{,}55 \pm 0{,}08$ MeV. Leta 1946 je Ewald z masnim spektrografom izmeril masno razliko dubleta $N^{14}H - N^{15}$ in našel vrednost $(107{,}76 \pm 0{,}20) \cdot 10^{-4}$ ME, za dublet $H_2 - D$ pa je bila že poprej dobro znana vrednost $(15{,}39 \pm 0{,}02) \cdot 10^{-4}$ ME iz meritev, ki jih je napravil Mattauch. Iz teh dveh dubletov lahko izračunamo za omenjeno reakcijo spremembo mase, ki znaša

$$\triangle m = (N^{14} + D) - (N^{15} + H) = (N^{14}H - N^{15}) - (H_2 - D) = \\ = (9{,}237 \pm 0{,}021) \cdot 10^{-3} \text{ ME}.$$

Ako tako dobljeno vrednost za razliko mase primerjamo s spremembo energije, dobimo, da 1 ME ustreza energija 926 ± 9 MeV. Povprečna vrednost se le za pol odstotka razlikuje od teoretične. Mattauch je objavil leta 1936 rezultate 17 podobnih meritev, katerih povpreček znaša (931 ± 4) MeV za masno enoto. V zadnjih letih so bile izvedene še mnoge masno spektroskopske meritve, ki dajejo podobne rezultate.

Na tem mestu naj omenim, da dobimo v tabelah atomske mase za cel atom, kjer so poleg mase jedra vštete tudi mase elektronov, medtem ko bi

morali pri jedrskih reakcijah pravzaprav računati samo z masami jeder. Ker pa nam gre zgoraj samo za razliko mas in imamo na obeh straneh enak naboj $(7 + 1)$, si mislimo, da dodamo na obeh straneh enako število (8) elektronov in potem računamo z masami celih atomov.

Tudi z jedrsko cepitvijo lahko preverimo Einsteinovo enačbo, vendar je možno podati le surovo oceno, ker še ni dovolj natančnih podatkov. Pri cepitvi jedra U^{235} se sprosti energija, ki jo lahko ocenimo od 180 do 200 MeV. Dempster in Grave pa sta določila povprečno razliko med maso urana in maso obeh razcepkov ter povprečno 2,5 nevtrona, ki odletijo pri cepitvi; dobila sta približno 0,20 ME. Iz tega dobimo, da 1 ME ustreza približno 1000 MeV.

Tretjo možnost imamo pri radioaktivnem razpadu. Stvar ni preprosta, ker je težko dobiti zadostne množine radioaktivne snovi za masno spektroskopijo. Prvo tako meritev so napravili pri radioaktivnem C^{14}, ki oddaja žarke β. Maksimalna energija izstopajočih elektronov je $0{,}154 \pm 0{,}004$ MeV, razlika v masah $C^{14} - N^{14}$ pa znaša $(0{,}168 \pm 0{,}005) \cdot 10^{-3}$ ME. Iz tega že lahko dobimo novo vrednost za zgornje razmerje: 1 ME ustreza energija (915 ± 36) MeV.

Nadaljnje rezultate lahko dobimo z opazovanjem tvorbe elektronskih parov. Chadwick, Blackett in Occhialini so obsevali z žarki γ z energijo 2,62 MeV tanko plast svinca ter iz sledov v wilsonski kameri izmerili povprečni energiji nastajajočih elektronov in pozitronov. Registrirali so 4000 delcev in dobili rezultat: 1 ME $\sim 940 \pm 50$ MeV.

Končno si oglejmo še inverzno reakcijo k zgornji, tako imenovano *anihilacijo*, t. j. združitev pozitrona z elektronom, pri čemer nastaneta dva fotona. Du Mond, Lind in Watson so uporabili pozitrone z maksimalno energijo 0,66 MeV, ki jih je dajal preparat radioaktivnega bakra (Cu^{64}). Valovno dolžino žarkov, ki nastajajo pri anihilaciji, so izmerili s kristalnim spektrometrom in dobili vrednost $\lambda = (2{,}4271 \pm 0{,}0010) \cdot 10^{-2}$ Å. Po enačbi $U = h\nu = hc/\lambda$ pa dobimo energijo fotona $U = (0{,}5107 \pm 0{,}0020)$ MeV, ki jo primerjamo z mirovno maso elektrona $5{,}4875 \cdot 10^{-4}$ ME. Tako dobimo, da ustreza 1 ME energija $930{,}7 \pm 0{,}4$ MeV, kar je doslej najnatančnejši rezultat.

B. Ravnikar

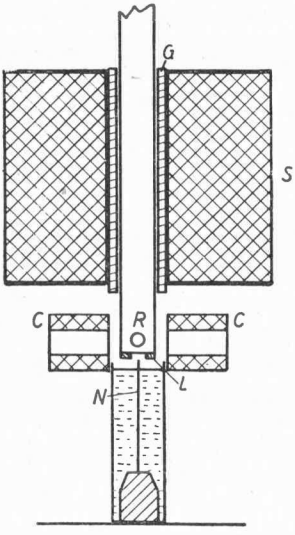
S. W. Flügge: The relativistic mass-energy relationship-has it been verified accurately? Nucleonics, 6, No. 4., 67 (1950, april).

Pospešek $4 \cdot 10^8$ g

Z navadnimi centrifugami dosežemo pospeške, ki nekaj tisočkrat presegajo pospešek pada (g). Tako je n. pr. pri 3000 obratih na minuto 10 cm od osi pospešek $\omega^2 r = 4000$ g. Z ultracentrifugami[1] so prišli že blizu milijonkratnega težnostnega pospeška. Dalje je težko priti, ker nastopa več težav. Prva je zračni upor, ki ga pa lahko odpravimo s tem, da centrifugo vrtimo v vakuumu. Druga težava je v tem, da se rotor pri preveliki kotni hitrosti razleti. Kdaj se bo rotor razletel, je odvisno od njegove velikosti in oblike. Da bo račun lažji, vzemimo namesto rotorja kos žice z dolžino $2r$, ki se vrti okrog svoje prečne simetrale. Žica naj ima presek S, gostoto ϱ ter trdnost σ. Žica se bo pretrgala, ko bo napetost v njej presegla njeno trdnost. Napetost v sredi je $F/S = \varrho \int_0^r \omega^2 r\, dr = \frac{1}{2} \varrho\, \omega^2 r^2$. Največja do-

pustna kotna hitrost je potemtakem $\omega_{max} = (1/r)(2\sigma/\varrho)^{\frac{1}{2}}$, centripetalni pospešek pri tem pa je $a_{max} = 2\sigma/r\varrho$. Za kroglo je račun težji, dobimo pa le malo drugačen rezultat: $\omega_{max} = (1/r)(\pi\sigma/\varrho)^{\frac{1}{2}}$ in $a_{max} = \pi\sigma/r\varrho$. S kroglo iz jekla s trdnostjo 100 kp/mm² in radijem 10 cm se da doseči centripetalni pospešek $4 \cdot 10^5\, g$, z radijem 1 cm pa $4 \cdot 10^6\, g$; frekvenca je v prvem primeru 1000, v drugem pa že 10 000 vrtljajev na sekundo.

Pri tako velikih frekvencah pa imamo težave z ležaji. Rotacijska os se nikdar ne ujema popolnoma z glavno osjo rotorja. Zato nastanejo veliki deviacijski momenti, ki kaj hitro uničijo ležaje, poleg tega pa nastopa tudi veliko trenje. Trenju in težavam z ležaji se lahko popolnoma izognemo le s tem, da rotor prosto visi v vakuumu, ne da bi se česar koli dotikal. To dosežemo tako, da vzamemo rotor iz jekla in uravnovesimo njegovo težo s silo elektromagneta, ki vleče rotor navzgor.[2] Na ta način pridemo do tako velikih kotnih hitrosti, da se razlete tudi najmanjši rotorji.



Sl. 1. Naprava za dosego velikih centripetalnih pospeškov. Jekleni rotor R visi v magnetnem polju elektromagneta, ki ga sestavljata tuljava S in železna cev G. Tuljava L stabilizira lego rotorjev v vertikalni smeri. Magnetna igla N služi za horizontalno stabilizacijo; zaradi boljšega dušenja je obdana z oljem. Tuljave C so za zavrtitev rotorja. J. W. Beams et al., J. Appl. Phys. 17, 886, 1946.

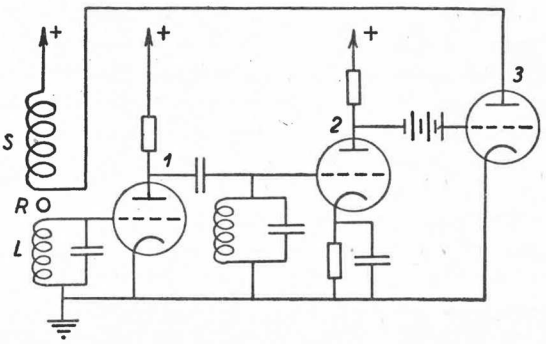
Napravo, ki je bila zgrajena v ta namen, kaže slika 1.[3] Rotor R visi v divergentnem magnetnem polju elektromagneta, ki ga sestavljata tuljava S in železna cev G. Da rotor prosto obvisi v magnetnem polju, mora biti sila magnetnega polja enaka teži, ravnotežje mora biti pa stabilno. Ta stabilizacija predstavlja glavni problem. Če se spremeni lega rotorja, se mora istočasno primerno spremeniti napajalni tok elektromagneta. Če se rotor dvigne, se mora tok pomanjšati, da gre rotor zopet navzdol; če pa zleze prenizko, se mora tok povečati, da ga zopet dvigne. Za to je potrebna kontrolna naprava, ki stalno »otipava« rotor.

Zelo poenostavljeno shemo stabilizacijske naprave vidimo na sliki 2. Tuljava L, ki jo vidimo tudi na sliki 1, je vezana v mrežni krog oscilatorja z frekvenco 10 MHz. Mislimo si majhen premik rotorja navzdol. V njem se zaradi tega inducirajo močnejši tokovi, ki jemljejo energijo mrežnemu krogu. Amplituda nihanja v mrežnem krogu se zmanjša in s tem tudi amplituda v anodnem krogu. Zato se zmanjša tok skozi cev 2, ki deluje kot detektor. Napetost na njeni anodi se dvigne; zato pa se poveča tok skozi cev 3, s katerim napajamo elektromagnet. Sila magneta se poveča in rotor se dvigne. Ko se dvigne rotor preko ravnovesne lege, se cel pojav obrne. Rotor začne nihati okrog mirovne lege. Nihanje pa mora biti dušeno. Da dobimo dušenje, potrebujemo še neko silo, ki je sorazmerna hitrosti, s katero se premika rotor gori in doli. Če rotor niha, je $z = A \sin \omega t$ in zato $v = dz/dt = A\omega \cos \omega t = A\omega \sin(\omega t + 90^0)$. Hitrost je v fazi premaknjena za 90°. Dušenje bomo torej dobili takole: Del toka, ki teče skozi cev 2, speljemo skozi zaporedno kombinacijo RC s primerno majhnim C. Nihanje napetosti na tem kondenzatorju je proti nihanju na anodi 2 premaknjeno skoraj za 90°. To napetost še primerno ojačimo in jo preko mešalne cevi pridružimo napetosti, ki regulira tok

skozi cev 3 (ves ta del naprave je na sliki 2 zaradi preglednosti izpuščen). Rotor se zavrti kakor rotor kratkostičnega elektromotorja z vrtilnim magnetnim poljem, ki ga naredimo z dvema paroma tuljav D. Pri moči 7 W, ki jo trošijo tuljave D, je bil dosežen pri kroglici iz kaljenega jekla s premerom 1,59 mm kotni pospešek 30 s^{-1}.

S to napravo sta dosegla J. W. More in J. L. Young z virginijske univerze na obodu kroglice iz kaljenega jekla s premerom 0,521 mm centripetalni pospešek $4{,}28 \cdot 10^8\ g$.[3] Kotna hitrost je bila v tem primeru $4 \cdot 10^6\ s^{-1}$, hitrost na ekvatorju torej 1040 m/s. Oddtod izračunana trdnost jekla je bila 288 kp/mm^2. Omenjeno kotno hitrost so izmerili, malo preden se je kroglica razletela.

Kotno hitrost so izmerili s posebno fotoelektrično napravo. Kroglico so zgoraj ravno odbrusili, s čimer so določili njeno orientacijo. Potem so jo polovico počrnili, polovico pa pustili svetle. Med vrtenjem so jo močno osvetlili. Utripajočo svetlobo, ki jo je kroglica odbijala, je lovila fotocelica, ki je dajala zato izmenično napetost. To so preko ojačevalca nesli na osciloskop, na katerem so izmerili frekvenco.



Sl. 2. Shema kontrolne naprave. S je tuljava elektromagneta, L pa kontrolna tuljava v mrežnem krogu oscilatorja. Vsak premik rotorja R proti tuljavi L povzroči spremembo toka skozi S. Shema je samo principielna in so v njej izpuščene mnoge podrobnosti. Izpuščen je tudi del naprave, ki skrbi za dušenje.

Ker je bil pritisk okrog kroglice le 10^{-5} tor, je bilo trenje zelo majhno. Izračunali so, da bi po izklopitvi vrtilnega magnetnega polja kroglica zaradi trenja s plinom izgubila po dveh urah le en procent svoje kotne hitrosti.

J. Kalan

[1] Obzornik za mat. in fiz. 1952, št. 2, str. 84.
[2] F. T. Holmes: *High Rotational Speeds in Vacuum.* R. Sci. Instr. *8*, 444, 1937.
[3] J. W. Beams, J. L. Young, J. W. More: *The Production of High Centrifugal Fields:* J. Appl. Phys. *17*, 886, 1946; Phys. Rev. *71*, 131, 1947.

49. razstava fizikalnih instrumentov v Parizu

(od 29. maja do 5. junija 1952)

Francosko fizikalno društvo (Société Francaise de physique) prireja že vrsto let razstave, pri katerih sodelujejo fizikalni laboratoriji univerz in državnih raziskovalnih zavodov ter posamezne tvrdke, ki izdelujejo fizikalne instrumente. Laboratoriji pokažejo na razstavi, kaj delajo. Tako lahko vsak obiskovalec oceni delavnost in iznajdljivost posameznih raziskovalnih skupin. Zato si laboratoriji prizadevajo, da se na razstavi dobro izkažejo. Tako tekmovanje jih torej vzpodbuja k delu. Tvrdke pa razstavljajo predvsem svoje nove izdelke, seveda pa tudi stare standardne. Saj imajo tu najlepšo priliko, da seznanijo s svojimi izdelki ljudi, ki jih to zanima. Poleg domačih francoskih tvrdk razstavlja po navadi tudi večje

število inozemskih. Razstava daje javnosti lep pregled francoske delavnosti na tem področju; ob primerjavi z inozemskimi izdelki pa dviga francosko zavest.

Letos je bila že 49. taka razstava. Bila je v glavnem poslopju Sorbonne v avli, po hodnikih in v slavnostni dvorani. Société Francaise de physique je izdala za to priliko katalog, ki prinaša na 290 straneh precej podroben opis vseh razstavljenih instrumentov. Letos je bilo 114 razstavljalcev. Od tega je bilo 17 laboratorijev. Ker so bile tvrdke v veliki večini, je imela letošnja razstava bolj videz fizikalnega sejma. Sejmsko ozračje se je pa kaj malo podalo resnim prostorom stare Sorbonne.

Obiskovalec je lahko dobil pregled nad eksperimentalnimi sredstvi, ki so danes na razpolago. Obenem je pa tudi videl, na katerih področjih fizike se največ dela. Brez pomena bi bilo naštevati množico instrumentov, ki so bili razstavljeni. Nekaj splošnih vtisov, ki jih je lahko dobil človek na letošnji razstavi, pa je vredno omeniti.

Presenča veliko število francoskih tvrdk, ki izdelujejo merilne priprave in precizne instrumente. Marsikaj je takega, kar so še do predkratkim izdelovale samo tuje tvrdke. Mnogo tvrdk je razstavljalo optične instrumente. Posebej je vredno omeniti l'Institut d'optique, ki je pokazal nekaj izboljšav faznega mikroskopa, interferenčni mikroskop in zrcalni mikroskop. Office National d'Etudes et de Recherches Aéronautiques (O. N. E. R. A.) je razstavil interferometer za preiskave v vertikalnem vetrovniku s 16 cm širokim poljem.

Največ tvrdk se bavi z izdelavo elektronskih instrumentov, usmernikov, ojačevalnikov, istosmernih in izmeničnih za različne frekvenčne obsege, generatorjev sinusnih, žagastih in pravokotnih nihanj v različnih frekvenčnih obsegih, oscilografov itd. To kaže, da uporabljajo pri fizikalnih meritvah vedno več elektronike. Večina potrebnih elektronskih instrumentov pa je danes že naprodaj in človeku ni treba več izgubljati časa s tem, da si jih šele sam gradi. Elementi, s katerimi danes gradijo merilne naprave, so torej usmerniki, ojačevalniki, oscilografi in ne več posamezni upori, bloki in elektronke.

Nadalje je človek z veseljem ugotovil, da so se že tudi v Evropi lotili novih področij elektronike, to je centimetrskih valov in tehnike kratkih sunkov. Francoska tvrdka Thomson & Houston (Paris) je razstavila več merilnih naprav za meritve v centimetrskem obsegu elektromagnetnega spektra okrog $\lambda = 3$ cm in $\lambda = 10$ cm. Izdelala je napravo za fizikalne meritve, pripravo za kontrolo radarskih naprav, dalje magnetrone in refleksne klystrone za $\lambda = 3$ cm in $\lambda = 10$ cm in germanijeve kristalne detektorje. Posebej je vredno omeniti tudi to, da je začela izdelovati tvrdka Laboratoire d'electronique et de physique appliquées elektronske pomnoževalke. Več tvrdk in laboratorijev je razstavilo bliskovne luči in naprave za hitro fotografijo v kratkih presledkih nekaj μ s.

Tudi instrumentov za merjenje radioaktivnosti ni manjkalo. Tvrdke so razstavile le standardne naprave, ki so potrebne za delo z radioaktivnimi izotopi. Commissariat à l'energie atomique pa je razstavil števno napravo za trojne koincidence, z ločljivostjo do 0,3 mikrosekunde. Demonstrirali so halogenski geigerski števec, ki daje tolikšne sunke, da ne potrebuje ojačevalnika, ampak je kar preko mikroampermetra vezan na baterijo 300 V. Razstavili so tudi nekaj scintilacijskih števcev, lepe primerke kristalov antracena in stilbena, tekočinske števce s terfenilom v ksilolu. Zlasti lepi

so bili nad 10 cm veliki kosi polistirola, v katerem je raztopljeno nekaj procentov antracena. Ti služijo za isti namen.

Zelo malo je bilo na razstavi priprav, ki so potrebne za pouk v šoli. Samo 4 tvrdke so razstavljale take priprave. To seveda ni hvale vredno. Pokaže pa, kolikšen pomen ima danes fizika za industrijo in da že dolgo ni več samo šolski predmet.

Ob koncu bi rekel, da bi tudi naše društvo lahko mislilo na to, da od časa do časa organizira take razstave in tako da javnosti pregled dela na področju fizike pri nas. Začetek bo morda skromen, toda enkrat bo treba začeti.

A. Moljk

DOPISI

Nesporazum v pojmih

V prvi številki letošnjega »Obzornika« beremo na strani 42 zanimivo vprašanje pod naslovom Nesporazum v pojmih. Na naslednji strani je podan odgovor, za katerega pa dvomim, da je S. V., ki je vprašanje postavil, z njim zadovoljen. Če sem vprašanje dobro razumel, ne gre samo za nesporazum v pojmih, ampak tudi za prav subtilno vprašanje, kaj se zgodi z magnetnim poljem, če prostor solenoida *ni* povsem izpolnjen s feromagnetikom. Poudariti je treba, da je že pojav vprašanja samega najbolj zgovoren dokaz, da je t. i. Gaussov sistem enot vreden pokoja in da ga je treba čim prej definitivno pokopati.

Če skozi tuljavo z n_1 navoji, ki ima obliko tankega svitka (toroida) in ki je popolnoma izpolnjen z neko homogeno snovjo, spustimo tok I, vlada magnetna poljska jakost $H = n_1 I/l$ (enota A/m), kjer je $l = 2\pi r$ (obseg svitka). Na vrh prve navijemo drugo tuljavo (n_2 navojev). Ko smo skozi prvo spustili tok, se je v drugi induciral napetostni sunek $\int U\,dt$, ki je sorazmeren številu navojev n_2. Ta napetostni sunek, deljen s številom navojev n_2, imenujemo *magnetni pretok* $\Phi = \int U\,dt/n_2$ (enota Vs). Veličino $B = \Phi/S = \int U\,dt/n_2 S$ pa imenujemo *gostoto magnetnega pretoka* (enota Vs/m^2).* Za vakuum velja $B = \mu_0 H$, kjer je μ_0 permeabilnost vakuuma (indukcijska konstanta), $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am. Tudi za večino snovi velja ta enačba precej natančno ($\mu_0 \approx \mu$), le feromagnetne snovi se vedejo drugače. V njih dobimo z enakim H mnogo večji B kot v drugih snoveh. Razlika $J = B - \mu_0 H$ se imenuje *magnetizacija* (magnetna polarizacija, magnetna dipolska gostota); merimo jo seveda prav tako v Vs/m^2. J se izpreminja v odvisnosti od H in je odvisen tudi od tega, kaj se je prej dogajalo s snovjo (histereza!). Splošno zvezo med B in H pišemo v obliki $B = \mu H = J + \mu_0 H = \mu_0 \mu_r H$, oziroma $J = \mu_0 (\mu_r - 1) H$; pri tem je μ

* Veličine B in Φ lahko definiramo tudi na drugačne načine. Eden od teh je preko sile $F = B.I.l$, ki deluje na vodnik s tokom I, ki je v dolžini l položen v magnetno polje z gostoto B ($B \perp l$).

permeabilnost snovi, μ_r relativna permeabilnost in $\mu_r - 1$ susceptibilnost.* μ_r ima za železo po navadi vrednost med 100 in 1000.

Orisana preprosta slika še ni popolna, ker velja le za primer, ko je tuljava popolnoma izpolnjena s feromagnetikom. Če pa to ni, se zadeva komplicira in pridemo na probleme, ki jih omenja vprašanje S. V.-a.

Vzemimo najprej primer, da se v toroidu nahaja feromagnetik, ki ima zelo tanko prečno razpoko. Meritev pokaže, da je v razpoki B ravno takšen kot v snovi in da je skoraj ravno takšen kot prej, ko ni bilo razpoke. Poljska jakost pa je zato v razpoki mnogo večja kot v železu. Če ima železo relativno permeabilnost μ_r, imamo v železu poljsko jakost $B/\mu_r\mu_0$, v razpoki pa B/μ. Pri debelejši razpoki je račun bolj kompliciran. Slej ko prej pa velja, da je celotna magnetna napetost enaka $\oint Hds = In$.

Če namesto razpoke izvrtamo v železu tanek vzdolžen kanal, dobimo nekaj drugega. V kanalu je B manjši kot v železu, namreč samo tolikšen, kot je bil prej, ko železa sploh ni bilo. Pač pa sta zdaj poljski jakosti v kanalu in železu enaki: $H = In/l$. Tako vidimo, da je z meritvijo v vzdolžnem kanalu mogoče ugotoviti, kakšna je poljska jakost v snovi, medtem ko nam meritev v prečni razpoki da vrednost za B.

Če eksperiment naredimo samo s koščkom feromagnetika, ki le deloma zapolni prvotno homogeno magnetno polje (poljska jakost H_0), potem z meritvijo v vzdolžnem kanalu ugotovimo, da je H v snovi mnogo manjši kot prvotna poljska jakost $H_0 = In/l$. Razmere so preproste le pri elipsoidu, v katerem je tudi zdaj polje še homogeno. Za rotacijski elipsoid, čigar os leži v smeri polja, je $H = H_0 - \varkappa J/\mu_0$, kjer je $\varkappa$ t. i. *faktor demagnetizacije*. $\varkappa$ je odvisen od razmerja osi elipsoida (ξ); njegove vrednosti daje tale tabela:

0 (tanka plošča)	1 (krogla)	10	100	∞ (dolga žica)
1	$\frac{1}{3}$	0,0203	0,0004	0

Zanimivo je, da je situacija nasprotna, če se v večjem kosu feromagnetika, v katerem je polje drugače homogeno, nahaja mehurček z obliko elipsoida. V tem primeru je magnetna poljska jakost v mehurčku večja kot okoliška poljska jakost H_0. Poljska jakost v mehurčku je

$$H = \mu_r H_0/[\mu_r - \varkappa(\mu_r - 1)].$$

V tej formuli je tudi obseženo, kar smo zgoraj povedali za razpoko in kanal.

Poudariti moramo, da so popolnoma analogne razmere tudi pri dielektrikih, le da nastopa E namesto H, D namesto B, ε_r namesto μ_r, P (elektr. polarizacija) namesto J in ε_0 namesto μ_0. Če zamenjamo znake za zgoraj omenjene magnetne veličine z ustreznimi za električne, dobimo pravilne enačbe. Paralele so pedagoško izredno učinkovite.

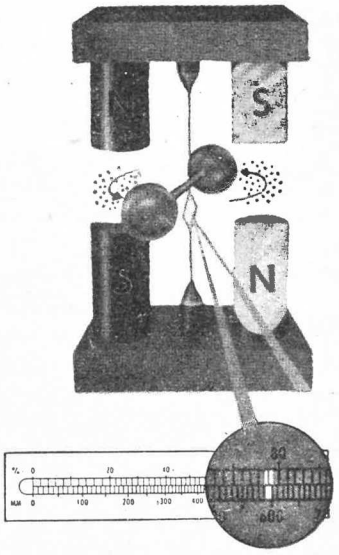
M. Brezinšćak

* *Pripomba uredništva:* Raba znakov in terminusov je v večini člankov v naši reviji nekoliko drugačna. Pišemo μ namesto μ_r in to imenujemo na kratko *permeabilnost* (brez pridevka relativna); μ_0 imenujemo *indukcijsko konstanto*, za produkt $\mu\mu_0$ pa nimamo ne znaka ne imena.

NOVI INSTRUMENTI

Instrument za merjenje koncentracije kisika v plinih

Znano je, da delujejo v nehomogenem magnetnem polju na feromagnetno snov sile, ki jo potiskajo tja, kjer je polje močnejše. Magnet privlačuje nemagnetno mehko železo. Toda tudi na neferomagnetne snovi delujejo sile, čeprav so vsaj 10^6-krat manjše. Izračunamo jih lahko iz enačbe $\mathfrak{f} = (\mu - 1)$ grad $(\frac{1}{2}\mu_0 H^2)$. Pri tem je $\mathfrak{f}$ gostota sile v N/m^3, μ (relativna) permeabilnost snovi, H magnetna poljska jakost in $\frac{1}{2}\mu_0 H^2$ gostota energije magnetnega polja (v vakuumu). Pri danem magnetnem polju in na danem mestu je torej sila sorazmerna faktorju $\mu - 1$, ki ga imenujemo susceptibilnost.* Paramagnetne snovi imajo pozitivno susceptibilnost ($\mu > 1$) in silijo zato v območje večje poljske jakosti. Diamagnetne snovi pa imajo negativno susceptibilnost ($\mu < 1$), zato silijo v območje manjše poljske jakosti.



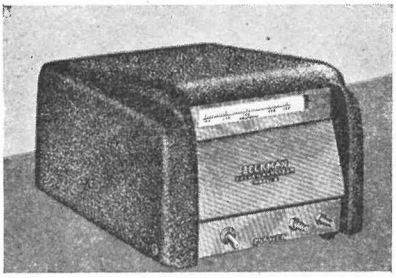
Sl. 1. Shema Beckmanovega instrumenta za merjenje koncentracije kisika v plinih.

Kisik je izredno močno paramagneten. V tekočem stanju je njegova susceptibilnost ($\mu - 1 = 3620.10^{-6}$) celo večja kot pri večini tekočin in trdnih teles. V plinastem stanju je njegova susceptibilnost pri normalnih pogojih $1{,}86.10^{-6}$, medtem ko je z izjemo dušikovega monoksida ($\mu - 1 = 0{,}82.10^{-6}$), dušikovega dioksida in klorovega dioksida susceptibilnost vseh ostalih plinov mnogo manjša in večinoma negativna; za vodik je na primer $\mu - 1 = -0{,}002.10^{-6}$. To lahko izkoristimo za merjenje koncentracije kisika v plinskih mešanicah, na primer v zraku, če le ne vsebujejo preveč NO, NO_2 ali ClO_2.

Zamisel instrumenta, ki ga je konstruiral A. O. Beckman, nam prikazuje sl. 1. V nehomogenem magnetnem polju dveh permanentnih magnetov je obešena na nekaj mikronov debelem kremenjakovem vlaknu približno 1 cm dolga ročica z dvema votlima steklenima kroglicama.[1] Na vlaknu je pritrjeno zrcalce, ki odbija svetlobni kazalec na prosojno skalo. Cela priprava je neprodušno zaprta. Če spustimo vanjo plinsko mešanico, ki vsebuje kisik, sili ta v prostor med poli in izpodrine obe kroglici. Pojav moremo primerjati z vzgonom. Vrtilni moment dobljene dvojice sil je sorazmeren razliki med susceptibilnostjo plina in stekla in torej linearno raste s koncentracijo kisika. Ta vrtilni moment zavrti ročico, dokler ne doseže ravnotežja z nasprotnim vrtilnim momentom zasukanega vlakna. Skalo umerimo tako, da nam pove koncentracijo kisika v odstotkih, ali pa delni tlak

* V skladu z racionalno pisavo enačb je tu pri susceptibilnosti opuščen faktor $1/4\pi$. V oni literaturi in tabelah, ki uporabljajo še iracionalno pisavo in stare merske sisteme, razumejo pod susceptibilnostjo izraz $(\mu - 1)/4\pi$.

kisika v torih. V tem primeru moramo meriti pri predpisani temperaturi, ali pa dobljene podatke reducirati. Skala seveda ni linearna, ker prideta kroglici pri zasuku v področje, kjer je grad ($\frac{1}{2}\mu H^2$) drugačen. Razdelitev je odvisna od razmaka in oblike polov. Na sliki imajo poli obliko polovičnih valjev in videti je, da je skala vsaj spočetka precej enakomerna.



Sl. 2. Izvedba Beckmanovega instrumenta, izdelek tvrdke Fisher Scientific Company, Pittsburgh, U. S. A. Instrument ima obseg od 100 do 160 torov kisika, ali pa od 0 do 5 %. Natančnost je ± 1 % polnega obsega. Cena: 525 dolarjev. Na sprednji steni vidimo dovodno in odvodno cev za plin. — Tvrdka izdeluje tudi cenejši instrument, ki ima obseg od 0 do 25 % kisika, ali pa od 0 do 100 %, ter natančnost ± 2 % polnega obsega.

Slika 2 nam prikazuje prenosno laboratorijsko izvedbo opisanega instrumenta.[2] Izvirna Beckmanova izvedba je drugačna, in sicer taka, da avtomatično beleži vsakokratno koncentracijo kisika v plinu, ki neprestano teče skozi instrument.[3]

Beckmanov instrument je zelo uporaben v metalurgiji, biologiji, medicini itd. Služi na primer za analizo dimnih plinov pri kuriščih, za zasledovanje proizvodnega procesa v plavžih, za zdravljenje s kisikom in podobno.

M. Kac

[1] W. G. Berl: *Physical Methods in Chemical Analysis.* Vol. II. New York, 1951.

[2] *The Laboratory,* Vol. 21, No. 1., published by Fisher Scientific Company, Pittsburgh.

[3] A. O. Beckman: *Analyseur — enrégistreur d'oxygène.* — Mésures et controle industriel, Paris, *15,* 467 (1950).

UTRINKI

Toplota visoke stopnje. Delikaten problem predstavlja dovajanje energije v kotel. Proizvaja jo baterija v obliki toplote visoke stopnje.

Tovariš, 8, 530 (1952).

Polovičarski prevod. — Rezilo ... doseže hitrost 818 *milj* in je torej za 68 *milj* hitrejše od zvoka. Stinjen zrak reže dele kovin, *manjše* od dveh milijontink *unče* ... Gumo reže samo, če poprej zmrzne v *nitrogeniju,* ...

Ljubljanski dnevnik, 10. VI. 1952.

Znan princip. — Znan je princip elektrofluorescenčne luči, ki obstoji v posebnem »draženju« specialnih kemičnih prahov, ki postanejo fluorescenčni, kadar jih zadevajo merkurijeve pare, nastajajoče na katodi.

Tovariš, 26. IX. 1952.

NOVE KNJIGE

Specialna relativnostna teorija

O. Costa de Beauregard: La théorie de la relativité restreinte (Collection d'ouvrages de mathématiques à l'usage des physiciens) Masson et Cie, Paris 1949, 173 strani.

Pisec prinaša pregled vse relativistične fizike v okviru specialne teorije relativnosti, ki zajema sisteme v premočrtnem gibanju. Po kratkem orisu relativnega principa Newtona in Einsteina uvede najprej štiridimenzijske tensorje, s katerimi nato dosledno opisuje vse probleme. Ta doslednost matematične formulacije je ena glavnih prednosti knjige. Le prav redko se poslužuje rezov pri konstantnem času, ki predstavljajo skupek vseh tistih svetovnih točk, ki so istočasni v primerno izbranem Galilejevem sistemu.

V drugem poglavju obravnava relativnostno kinematiko in optiko, ki vključuje analizo osnovnih poskusov, ki so prav dovedli do posebne relativnostne teorije. Tretje poglavje prinaša teorijo elektromagnetnega polja, Lorentzove sile v polju, napetostni tensor, gostoto spina ter elektromagnetnega momenta.

Glavni del knjige pa je posvečen problemu relativnostne hidrodinamike in termodinamike. Najprej obravnava idealne tekočine brez spina, potem viskozne tekočine in tekočine s spinom. Pri dinamiki večjega števila točk in njihovega medsebojnega vplivanja je važno poglavje o trku dveh koles velike hitrosti, ki nastopa prav v jedrski fiziki kot posebno važno raziskovalno sredstvo. V relativnostni termodinamiki omenja poleg klasičnih definicij temperature, ki gredo nazaj na Plancka in Einsteina, tudi moderna naziranja, ki ji pripisujejo kovariantni tensorski značaj.

Krajše, zaključno poglavje govori o nekaterih dopolnilih relativnostne dinamike, o vrtincih v idealni tekočini, o dinamiki nabite točke v potencialnem polju in o prvotni formulaciji valovne mehanike, kot jo je postavil L. de Broglie. Sledi pregled važnejših del splošnega značaja in del o posebnih problemih, ki jih knjiga obravnava.

Knjigi daje poseben čar osebna nota pisca, ki je sam našel v zadnjih letih več važnih novih izsledkov v relativnostni fiziki in ki zato opisuje posamezne probleme s tisto neposrednostjo in kritičnostjo, ki jo da aktivno raziskovalno delo. Sem spadajo relativnostna teorija težišča, ki je tako važna za študij trkov pri velikih hitrostih, relativnostna hidrodinamika tekočin s spinom, povezava med spinom in nesorazmernim vztrajnostnim tensorjem itd. Piscu se je v njegovi jasni izražavi posrečilo ne samo pokazati že znane strani relativnostne fizike, ampak osvetliti tudi manj znane in bolj sporne probleme ter zbrati za postavljene trditve tudi ves potrebni dokazni material. Da je matematična stran knjige odlična, se pri francoski knjigi samo po sebi razume.

A. Peterlin

E. Whittaker i G. Robinson: **Tečaj numeričke matematike.** Beograd, Naučna knjiga 1951. Prevod 4. izdaje knjige »The Calculus of Observations«, London 1948, ki ga je napisala Vojna Radojčić.

S prevodom najbolj znanega britanskega dela o numeričnem računanju je napravila prevajalka veliko uslugo našim strokovnjakom s cele vrste področij, ki bodo našli v knjigi veliko metod in primerov za številčno obravnavanje velikega dela svojih nalog. Kakor kaže naslov angleškega izvirnika, gre piscem knjige predvsem za tista področja računanja, ki so potrebna za obdelavo in uporabo odčitkov pri opazovanjih. Knjiga vsebuje najprej več poglavij o interpolaciji in njeni uporabi, katerim sledi nato zelo kratko poglavje o determinantah in linearnih enačbah in daljši poglavji o numeričnem reševanju splošnih enačb in o numeričnem integriranju. Nadaljnji posebni poglavji obravnavata statistično urejevanje podatkov in metodo najmanjših kvadratov, kjer so podane tudi nekatere metode za reševanje linearnih algebraičnih enačb. Sledijo poglavja o praktični Fourierovi analizi, o izglajevanju (graduaciji) podatkov, o korelaciji in o iskanju period. Po zelo kratkem poglavju o numeričnem reševanju diferencialnih enačb so nazadnje na kratko obravnavana vprašanja o seštevanju počasno konvergirajočih vrst, o razširitvi interpolacije na funkcije dveh spremenljivk in na uporabo eksponencialnih funkcij, dalje numerično računanje dvojnih integralov, reševanje integralnih enačb in določanje lastnih vrednosti z Rayleigh-Ritzovo metodo.

Da je obravnavana snov podana ne samo pravilno, temveč tudi jasno, pregledno in zanimivo, jamčita že imeni obeh piscev. Zelo koristni so tudi številni zgledi, ki vedno nazorno pokažejo, kako uporabiti splošna pravila. Prevajalka se je dokaj tesno držala izvirnika in je nadomestila tipične angleške znake in načine izražanja z domačimi samo tam, kjer je bilo to nujno potrebno. Zdi se mi, da bi knjiga pridobila še nekoliko na živahnosti, če bi šla prevajalka v tem pogledu dlje; vendar so taka mesta redka in tudi sedanji prevod ne otežuje razumevanja. Obžalovati moramo, da se knjiga v prvi vrsti zanima res samo za numerično obdelovanje rezultatov opazovanj in da so zato nekatera vprašanja numeričnega računanja, ki zelo zanimajo fizike in tehnike, le nakazana. To velja predvsem za funkcionalne enačbe, o katerih podata pisca samo najosnovnejša pravila in napotita za vse ostalo čitatelja na literaturo. Tudi je delo prirejeno samo za uporabo tabel in zato niso v njem navedene metode, ki posebno upoštevajo možnosti strojnega računanja. Toda kljub tem nedostatkom, ki seveda niti ne pridejo vedno v poštev, predstavlja knjiga zelo važen prispevek k doslej tako redkim spisom o numeričnem računanju v jugoslovanskih jezikih. Naj še omenim, da je podroben pregled nekaterih prosto izbranih mest pokazal sicer nekaj manjših tiskovnih napak, ki mogoče nekoliko motijo pri študiranju knjige, ki pa po mojem vendar bistveno ne zmanjšajo njene uporabnosti.

A. Kuhelj

VPRAŠANJA

5. Nihajoči tok v cevi

Po zelo dolgi valjasti cevi potiskamo vodo sem in tja. Nihanje naj bo harmonično, hitrosti pa tako majhne, da je tok laminaren. Tokovnice so vzporedne. Porazdelitev hitrosti po preseku je tu nekoliko drugačna kot pri stacionarnem toku. Kakšna je ta porazdelitev? Za koliko zaostaja nihanje toka za nihanjem gradienta pritiska?

ODGOVORI

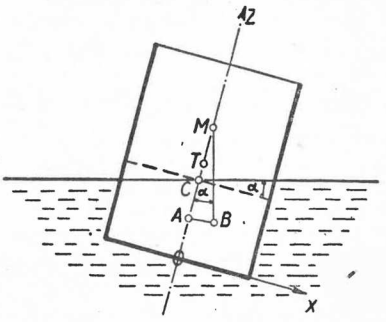
1. Lonec na vodi

Podatki so: r (radij lonca), h (višina), d (debelina stene) in razmerje gostot pločevine in vode ϱ_p/ϱ_v. Debelina stene je majhna v primeri z radijem ($d \ll r$). Lonec plava stabilno, če je metacenter nad težiščem, torej če je $z_M > z_T$ (sl. 1). Prijemališče vzgona je vedno v težišču izpodrinjene vode. Če je lonec nagnjen za kot α, je to prijemališče v točki B, za katero velja:

$$x_B V = \int 2\sqrt{r^2 - x^2}\,(z_C + x \operatorname{tg}\alpha)\, x\, dx = \\ = \tfrac{1}{4}\pi r^4 \operatorname{tg}\alpha.$$

Pri tem je V volumen izpodrinjene vode ($V = \pi r^2 z_C$). Odtod sledi:

$$x_B = \tfrac{1}{4} r^2 \operatorname{tg}\alpha / z_C.$$



Sl. 1. Lonec na vodi. A = težišče vzgona pri pokončni legi, B = isto pri nagnjeni legi, T = težišče lonca, M = metacentrum.

Če iščemo stabilnost pokončne lege, nas zanima, kako se lonec vede pri majhnem nagibu; takrat pa je $z_M - z_A = x_B/\alpha = \\ = \tfrac{1}{4} r^2/z_C$. Ker je $z_A = \tfrac{1}{2} z_C$, je $z_M = \tfrac{1}{2} z_C + \\ + \tfrac{1}{4} r^2/z_C$. Vzgon mora biti enak teži lonca: $\pi r^2 z_C \varrho_v = \pi r\,(2h + r)\,\varrho_p\, d$, odkoder dobimo:

$$z_C = (2h + r)\,\varrho_p\, d/\varrho_v\, r.$$

Ordinata težišča pa je $z_T = h^2/(2h + r)$. Če vse te vrednosti vstavimo v zgornjo neenačbo ($z_M - z_T > 0$) in še vpeljemo $k = h/r$ ter $u = \varrho_p\, d/\varrho_v\, r$, dobimo kot pogoj za pokončno stabilnost lonca nazadnje tole neenačbo:

$$D \equiv 2\,(2k + 1)^2 u^2 - 4k^2 u + 1 > 0.$$

Razmerje k je dano, treba pa je določiti, pri katerih u je neenačbi ustreženo.

Če sta korena u_1 in u_2 enačbe $D = 0$ realna, sta tudi pozitivna. Če je $u_1 < u_2$, je lonec stabilen v pokončni legi za vsak $u < u_1$ in $u > u_2$, vmes pa je nestabilen. Če pa enačba nima realnih korenov, je pokončna lega za vsak u stabilna. To pa je tedaj, če je diskriminanta negativna, torej

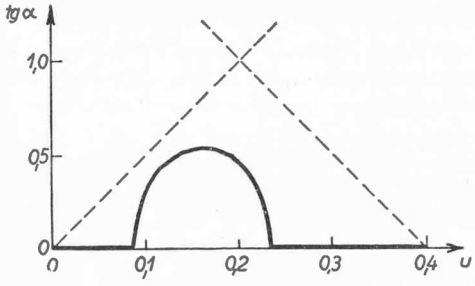
$$2k^4 - (2k + 1)^2 < 0.$$

Iz te neenačbe sledi $k < 1{,}81$. Pri loncu, pri katerem je $h \leqq 1{,}81\, r$, je torej pokončna lega vedno stabilna.

Pri enakostraničnem valju ($k = 2$) se zgornja neenačba glasi: $50 u^2 - \\ - 16 u + 1 > 0$; meji sta $u_1 = 0{,}0852$ in $u_2 = 0{,}2348$. Pri $u < 0{,}0852$ in $u > 0{,}2348$ lonec stabilno plava v pokončni legi. Da je pokončna lega za $u_1 < u < u_2$ nestabilna, lahko takoj vidimo: Težišče je nad metacentrom; teža ter vzgon dasta dvojico sil, ki vrti lonec iz pokončne lege stran. Toda pri nekem kotu α sta obe sili zopet na isti premici in imamo ravnotežje. Tedaj je $\operatorname{tg}\alpha = x_B/(z_T - z_B)$. Ordinato z_B izračunamo na podoben način kot x_B in dobimo $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{-(50 u^2 - 16 u + 1)}$, kar nam

pove, kako se spreminja nagib lonca z debelino pločevine. Ta rezultat kaže tudi sl. 2, kjer je nanesen tg α v odvisnosti od u.

Nastal bi lahko pomislek, da ravnotežje v hudo nagnjeni legi ni mogoče, ker lonec že zajame vodo. To bi se zgodilo, če bi bil tg $\alpha > (h - z_C)/r$, torej tg $\alpha > k - (2k + 1)u$. Področje, ki ustreza tej neenačbi, leži v diagramu (sl. 2) nad premico, ki poteka od leve zgoraj proti desni spodaj. Ker naša krivulja te premice ne seče, pri omenjenem loncu tak primer še ne more nastopiti. Še na drug zapletljaj moramo pomisliti. Lonec bi se lahko tako nagnil, da bi del dna pogledal iz vode. Tedaj bi seveda zgornji računi ne veljali več. Tak primer nastopi, če je tg $\alpha > z_0/r$, torej tg $\alpha > (2k + 1)u$. Po diagramu vidimo, da tudi ta primer pri enakostraničnem loncu ne more nastopiti.



Sl. 2. Odvisnost nagiba od teže lonca, ki ima obliko enakostraničnega valja. Na vodoravno os je naneseno razmerje $u = \varrho_p d / \varrho_v r$, na navpično pa tangens naklonskega kota pri stabilni legi lonca. Pri $u < 0{,}0852$ in $u > 0{,}2348$ je pokončna lega stabilna, vmes pa nagnjena. Pri $u > 0{,}4$ lonec potone.

Pri loncu, pri katerem je $h = 3r$, dobimo prav podobne rezultate kot zgoraj, z edino razliko, da se v nekem intervalu u lonec toliko nagne, da pogleda del dna iz vode. Za ta interval bi bilo treba račune na novo začeti, vendar jih tu ne podajamo, ker so prezamudni.

B. Povh.

2. Jod 132

Število telurjevih atomov naj bo N_1, jodovih pa N_2. N_1 in N_2 sta funkciji časa. Naloga zahteva, da poiščemo maksimum funkcije N_2. Množina telurja pada eksponencialno: $N_1 = N_0 \exp(-\lambda_1 t)$. V času dt razpade $-dN_1 = \lambda_1 N_1 dt$ atomov telurja, prav toliko pa nastane jodovih. Število atomov joda, ki jih v času dt razpade, je zopet enako $\lambda_2 N_2 dt$. Celotna sprememba števila jodovih atomov v času dt je torej $dN_2 = \lambda_1 N_1 dt - \lambda_2 N_2 dt$ ali $dN_2/dt + \lambda_2 N_2 = \lambda_1 N_0 \exp(-\lambda_1 t)$. Rešitev te diferencialne enačbe je:

$$N_2 = \lambda_1 (\lambda_2 - \lambda_1)^{-1} N_0 \cdot [\exp(-\lambda_1 t) - \exp(-\lambda_2 t)].$$

Iz enačbe $dN_2/dt = 0$ dobimo, da je ekstrem $t_m = [\ln(\lambda_1/\lambda_2)]/(\lambda_2 - \lambda_1)$. Razpadne konstante lahko izrazimo z razpolovnimi časi: $\lambda = \ln 2/T$.

Vnesimo oba podatka $T_1 = 77$ ur, $T_2 = 2{,}4$ ure, pa imamo končno: $t_m = 12{,}4$ ure.

Iz gornjega lahko poiščemo še maksimalno število atomov J^{132}. Dobimo: $N_{2\max} = (\lambda_1/\lambda_2)^{\lambda_2/(\lambda_2-\lambda_1)} \cdot N_0 = (T_2/T_1)^{T_1/(T_1-T_2)} \cdot N_0 = 0{,}028\, N_0$. Bolj kot število atomov nas zanima aktivnost, to je število razpadov na sekundo. Če je $A_0 = \lambda_1 N_0$ in $A_2 = \lambda_2 N_2$, je $A_{2\max} = (T_2/T_1)^{T_2/(T_1-T_2)} \cdot A_0 = 0{,}90\, A_0$. Maksimalna aktivnost dobljenega joda 132 je samo za 10% manjša kot aktivnost prvotnega telura 132.

B. Povh.

Iz uprave

Cenjene naročnike ponovno prosimo, da vsako spremembo naslova takoj javijo. — Tiste, ki še niso poravnali naročnine za l. 1952, prosimo, da čim prej nakažejo znesek 250 din na naš čekovni račun pri NB 604-95331-4. Revija more redno izhajati le, če more uprava v redu poravnati stroške izdajanja. — Mnogo naročnikov še za l. 1951 ni poravnalo naročnine; v letošnji prvi številki smo vsem tem priložili položnice z žigom »Naročnina 120 din za l. 1951 še ni poravnana«. Zato prosimo cenjene naročnike, da pregledajo položnice in store svojo dolžnost, da jih ne bo treba posebej opominjati. Stroškov opominjanja uprava ne more nositi in jih bodo morali poravnati naročniki sami. Kdor lani ni poravnal naročnine, je že itak oškodoval upravo, ker so stroški za vknjiževanje v banki letos za 20 din višji.

Osnovne fizikalne konstante

Iz 4. št. Obzornika 1951 smo ponatisnili tabelo »*Osnovne fizikalne konstante*« na kartonu 32 cm × 33 cm. Dobite jo pri vratarju Univerze, Ljubljana — Trg Revolucije, za ceno 20.— din za kos.

Društvo matematičara i fizičara N. R. Hrvatske poziva sve, koji se zanimaju matematičko-fizičkim naukama, da se pretplate na

Glasnik
matematičko-fizički i astronomski

i sarađuju u njemu.

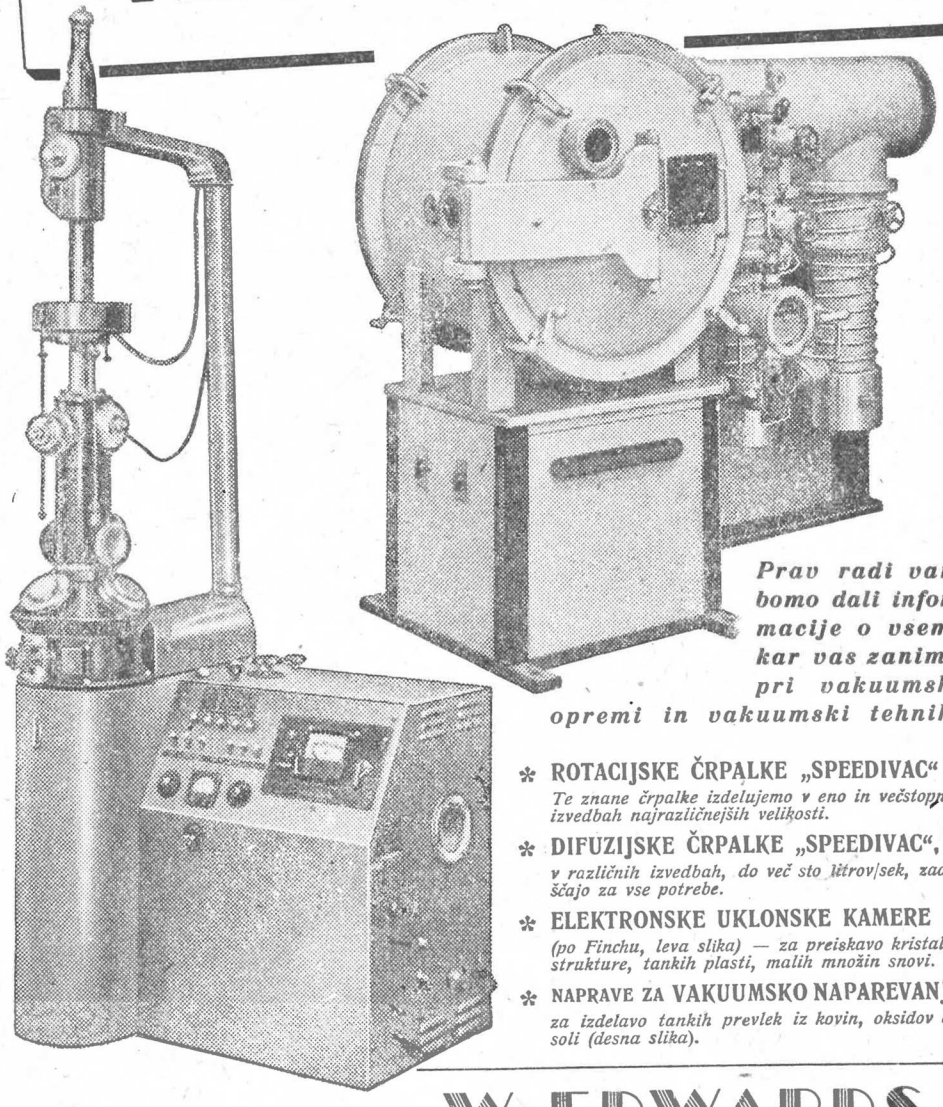
Zaista ne bi smjelo biti ni jednog kulturnog radnika, koji se bavi matematičko-fizičkim naukama, kao ni prosvjetne ustanove, koja nije pretplatnik Glasnika. Pretplatom i suradnjom u svojem naučnom i stručnom časopisu pokazujete u kolikoj mjeri pratite i podupirete razvitak i napredak svoje struke. Širite također Glasnik u svom krugu, jer time podupirete razvitak matematičko-fizičkih nauka u svojoj okolini.

Prijave pretplate slati na administraciju Glasnika: Hrvatsko prirodoslovno društvo, Zagreb, Ilica 16/III. Pretplata za god. 1952. iznosi din 240.—.

za šolo... za laboratorij... za industrijo

VSE NAPRAVE ZA

VISOKI VAKUUM



Prav radi vam bomo dali informacije o vsem, kar vas zanima pri vakuumski opremi in vakuumski tehniki

* **ROTACIJSKE ČRPALKE „SPEEDIVAC“**
  Te znane črpalke izdelujemo v eno in večstopnih izvedbah najrazličnejših velikosti.
* **DIFUZIJSKE ČRPALKE „SPEEDIVAC“,**
  v različnih izvedbah, do več sto litrov/sek, zadoščajo za vse potrebe.
* **ELEKTRONSKE UKLONSKE KAMERE**
  (po Finchu, leva slika) — za preiskavo kristalne strukture, tankih plasti, malih množin snovi.
* **NAPRAVE ZA VAKUUMSKO NAPAREVANJE**
  za izdelavo tankih prevlek iz kovin, oksidov ali soli (desna slika).

za boljšo vakuumsko službo...

W. EDWARDS

& CO. (LONDON) LTD.

LONDON, S. E. 26 * ENGLAND

Telegrami: EDCOHIVAC, Souphone, London