Teorija kodiranja – 1. domača naloga

(do petka 22. marca 2002)

---

1. Naj bo $C = \{c_1 = 00000, c_2 = 10110, c_3 = 01011, c_4 = 11101\}$ binarna koda ter $P(c_1) = 0.1$, $P(c_2) = 0.1$, $P(c_3) = 0.2$ in $P(c_4) = 0.6$, kjer $P(c_i)$ označuje verjetnost, da bo poslan c_i. Uporabljen je BSC[1] z verjetnostjo p napake posameznega znaka, po kanalu pa dobimo $r = 00001$.

   (a) Kaj je razdalja kode C?

   (b) Za $p = 0.1$ dekodiraj r z uporabo IMLD.[2]

   (c) Za $p = 0.1$ dekodiraj r z uporabo MED.[3]

   (d) Za $p = 0.4$ dekodiraj r z uporabo IMLD.

   (e) Za $p = 0.4$ dekodiraj r z uporabo MED.

2. Spomnimo se definicije simetričnega kanala s q simboli in verjetnostjo p napake posameznega znaka ($0 \leq p \leq 1$):

   - Naj bosta X_i in Y_i zaporedoma i-ti poslani znak in i-ti prejeti znak ($i = 1, 2, \ldots$).
   - Za $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_q\}$, naj bo za vse $1 \leq j, k \leq q$,

$$Pr(Y_i = a_k \mid X_i = a_j) = \begin{cases} p/(q-1) & \text{če je } j \neq k \\ 1 - p & \text{če je } j = k. \end{cases}$$

   (a) Pokaži, da je za $p = (q-1)/q$ simetrični kanal s q simboli z verjetnostjo p 'neuporaben'.

   (b) Če velja $(q-1)/q < p \leq 1$, potem pokaži, da lahko simetrični kanal s q simboli in verjetnostjo napake p spremenimo v simetrični kanal s q simboli in verjetnostjo napake p', kjer je $0 \leq p' < (q-1)/q$.

---

[1]BSC = Binary Symmetric Channel
[2]IMLD = Incomplete Maximum Likelihood Decoding
[3]MED = Minimum Error Decoding (glej. str. 19, nal. 21)

3. (a) Dokaži trikotniško neenakost za Hammingovo razdaljo, tj. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ za vse $x,y,z \in A^n$.

   (b) Naj bo C koda z razdaljo $d = 2t + u + 1$ (t in u sta naravni števili). Dokaži, da lahko C popravi t napak in hkrati odkrije $t + u$ napak.
   (Strategija za dekodiranje je naslednja: če dobimo r in obstaja natanko določena kodna beseda $c \in C$ za katero je $d(c,r) \leq t$, potem dekodiramo r v c; če natanko določene kodne beseda, potem je r zavrnjen. Dokazati je potrebno, da napravi dekoder vedno pravilno odločitev če pride do kvečjemu $t + u$ napak na kodno besedo.)

4. Naj bo $C = \{c_1 = 0000, c_2 = 1010, c_3 = 0111\}$ binarna koda. Predpostavimo, da uporabljamo IMLD in BSC z verjetnostjo p napake posameznega znaka. Predpostavimo, da so vse kodne besede poslane z enako verjetnostjo.

   (a) Za $c \in C$ naj bo $L(c)$ oznaka za množico binarnih 4-četveric, ki so bližje kodni besedi c kot kateri koli drugi kodni besedi.
   Določi $L(c_1)$, $L(c_2)$ in $L(c_3)$.

   (b) Za vsak i, $1 \leq i \leq 3$, naj bo w_i verjetnost da IMLD naredi napačno odlo'citev ali pa zavrne sprejeto besedo, pri predpostavki, da je bila poslana beseda c_i. Določi w_1, w_2 in w_3.

   (c) Spomnimo se, da je verjetnost napake $[n,M]$-kode C enaka $P_C = (1/M)\sum_{i=1}^{M} w_i$. Določi P_C za kodo C v primeru, ko je $p = 0.1$.

   (d) Predpostavimo, da so vse kodne besede poslane z enako verjetnostjo. Potem definiramo verjetnost napake za kodo C:

$$P_C = \sum_{i=1}^{M} w_i P(c_i).$$

   Naj bo $P(c_1) = 0.7$, $P(c_2) = 0.2$, in $P(c_3) = 0.1$. Določi P_C za kodo C v primeru, če je $p = 0.1$.
   (Namen točk (c) in (d) je ilustrirati, da je verjetnost napake za kode odvisna od distribucije verjetnosti izvornega sporočila.)