## Metoda index calculus

$GF(23)^*$ z generatorem 5.
Izberi bazo 'majhnih' faktorjev: $B = \{-1, 2, 3\}$
in sestavi tabelo njihovih logaritmov:

| elt | -1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| log | 11 | 2 | 16 |

Iščemo logaritem elementa $\beta$ (Las Vegas).
Poišči 'gladko' potenco elementa $\beta$,
tj. $\beta^x$, ki se da razstaviti na faktorje iz $B$.





**Izračunaj log(13):** $13^2 = 169 = 2^3 \iff$
$\log 13^2 = \log 2^3 \iff 2\log 13 \equiv 3\log 2 \iff$
$2\log 13 \equiv 6 \pmod{22}$

Sledi $\log 13 \equiv 3$ ali $14 \pmod{22}$.
Preverimo $\log 13 = 14$.

**Izračunaj log(14):**
$14^3 = 2^3 7^3 = 2^3 \cdot 21 = 2^3 \cdot (-2) = -2^4$.
$3\log 14 = \log(-2^4) = \log(-1) + \log 2^4 = 11 + 4\cdot 2 = 19$,
$\log 14 = \frac{19}{3} = 19 \cdot (-7) = (-3)(-7) = 21$.





**Izračunaj log(15):**
$15^3 = 3^3 \cdot 5^3 = 3^3 \cdot 2 \cdot 5 = (-1) \cdot 2 \cdot 3$,
$3\log 15 = \log(-1) + \log 2 + \log 3 = 11 + 2 + 16 = 29 = 7$,
$\log 15 = \frac{7}{3} = 7(-7) = -49 = -5 = 17$.

**Izračunaj log(7):**
$7^3 = 49 \cdot 7 = 3 \cdot 7 = 21 = (-1) \cdot 2$,
$3\log 7 = \log(-1) + \log 2 = 11 + 2 = 13$,
$\log 7 = \frac{13}{3} = 13 \cdot (-7) = 63 = -3 = 19$.





**Še en primer:** $GF(89)^*$ z gen. 3.

tabela logaritmov:

| elt | -1 | 2 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| log | 44 | 16 | 1 | 70 |

**Izračunaj log(7):**
$7^3 = 76 = 2^2 \cdot 19$, $7^5 = 3 \cdot 5^2$,
$5\log 7 = \log 3 + 2\log 5 = 1 + 2 \cdot 70 = 141 = 53$,
$\log 7 = \frac{53}{5} = 53 \cdot (-35) = 81$.

**Izračunaj log(53):**
$53^3 = 3 \cdot 23$, $53^5 = 2^2 \cdot 17$, $53^7 = 2 \cdot 3^2$,
$7\log 53 = \log 2 + 2\log 3 = 16 + 2 = 8$,
$\log 53 = \frac{18}{7} = 18 \cdot (-25) = 78$.





## Metoda index calculus (splošno)

1. Izberi bazo faktorjev $\mathcal{B} = \{p_1, \ldots, p_t\}$, tako da se da dovolj veliko število elementov grupe $G$ dovolj hitro razstaviti v $\mathcal{B}$.

2. Poišči $t + 10$ lineranih zvez z logaritmi elementov iz $\mathcal{B}$:

izberi število $k < n$, izračunaj $\alpha^k$ in ga poskusi zapisati kot

$$\alpha^k = \Pi_{i=1}^t p_i^{c_i} \iff k \equiv \sum_{i=1}^t c_i \log p_i \bmod p - 1.$$





3. Sestavi tabelo logaritmov elementov iz $\mathcal{B}$.

4. Izberi naključno število $k \in \{1, \ldots, n\}$, izračunaj $\beta\alpha^k$ in ga poskusi zapisati kot

$$\beta\alpha^k = \Pi_{i=1}^t p_i^{d_i}.$$

Končno dobimo

$$\log_\alpha \beta = (\sum_{i=1}^t d_i \log_\alpha p_i - k) \mod n.$$





Obstajajo različni slučajni algoritmi za metodo Index calculus. Ob sprejemljivih predpostavkah je njihova časovna zahtevnost za pripravljalno fazo

$$\mathcal{O}\left(e^{1+o(1))\sqrt{\log p \log\log p}}\right),$$

za izračun vsakega posameznega logaritma pa

$$\mathcal{O}\left(e^{1/2+o(1))\sqrt{\log p \log\log p}}\right).$$





## Varnost bitov pri diskretnem log.

**Podatki:** $(p, \alpha, \beta, i)$,
kjer je $p$ praštevilo, $\alpha$ primitiven element grupe $\mathbb{Z}_p^*$ in $i$ poljubno naravno število, ki je manjše ali enako $\log_2(p-1)$.

**Cilj:** izračunaj $i$-ti bit (oznaka: $L_i(\beta)$) logaritma $\log_\alpha \beta$ za fiksna $\alpha$ in $p$ (začnemo šteti z desne).

$L_1(\beta)$ lahko najdemo s pomočjo Eulerjevega kriterija za kvadratne ostanke po modulu $p$:

Ker je $w^2 \equiv x^2 \pmod p \iff p|(w-x)(w+x)$ oziroma $w \equiv \pm x \pmod p$, velja

$$\{x^2 \bmod p \mid x \in \mathbb{Z}_p^*\} = \left\{\alpha^{2i} \bmod p \;\middle|\; 0 \le i \le \frac{p-3}{2}\right\}.$$

Od tod pa sledi

$$\beta \text{ kvadratni ostanek} \iff 2|\log_\alpha \beta \text{ tj. } L_1(\beta) = 0,$$

element $\beta$ pa je kvadratni ostanek če in samo če je

$$\beta^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod p.$$





Sedaj pa si oglejmo še primer, ko je $i > 1$.

Naj bo $p - 1 = 2^s t$, kjer je $t$ liho število.
Potem za $i \le s$ ni težko izračunati $L_i(\beta)$,
verjetno pa je težko izračunati $L_{s+1}(\beta)$,
kajti v nasprotnem primeru bi bilo možno uporabiti hipotetični podprogram za rešitev DLP v $\mathbb{Z}_p$.

Zgornjo trditev bomo dokazali za $s = 1$ oziroma $p \equiv 3 \pmod 4$. Tedaj sta kvadratna korena iz $\beta$ po modulu $p$ števili $\pm\beta^{(p+1)/4} \bmod p$.





Za $\beta \ne 0$ velja $L_1(\beta) \ne L_1(p-\beta)$, saj iz

$$\alpha^a \equiv \beta \pmod p \implies \alpha^{a+(p-1)/2} \equiv -\beta \pmod p,$$

ker je $(p-1)/2$ liho število.

Če je $\beta = \alpha^a$ za neko sodo potenco $a$, potem je

$$\alpha^{a/2} \equiv \beta^{(p+1)/4} \text{ ali } -\beta^{(p+1)/4} \pmod p.$$

Katera izmed teh dveh možnosti je pravilna lahko ugotovimo iz $L_2(\beta)$, saj velja

$$L_2(\beta) = L_1(\alpha^{a/2}).$$





**Algoritem za računanje diskretnega logaritma v $\mathbb{Z}_p$ za $p \equiv 3 \pmod 4$:**

1. $x_0 = L_1(\beta)$, $\beta = \beta/\alpha^{x_0} \bmod p$, $i := 1$
2. **while** $\beta \ne 1$ **do**
3. $\quad x_i = L_2(\beta)$
4. $\quad \gamma = \beta^{(p+1)/4} \bmod p$
5. $\quad$ **if** $L_1(\gamma) = x_i$ **then** $\beta = \gamma$
6. $\quad$ **else** $\beta = p - \gamma$
7. $\quad \beta = \beta/\alpha^{x_i} \bmod p$, $i := i + 1$





Dokaz pravilnosti zgornjega algoritma:

Naj bo

$$x = \log_\alpha \beta = \sum_{i \ge 0} x_i 2^i$$

in definirajmo za $i \ge 0$:

$$Y_i = \left\lfloor \frac{x}{2^{i+1}} \right\rfloor$$

in naj bo $\beta_0$ vrednost $\beta$ v koraku 1.
Za $i \ge 1$, pa naj bo $\beta_i$ vrednost $\beta$ v zadnjem koraku pri $i$-ti iteraciji **while** zanke.





Z indukcijo pokažemo za vsak $i \ge 0$:

$$\beta_i \equiv \alpha^{2Y_i} \pmod p.$$

Iz $2Y_i = Y_{i-1} - x_i$ sledi $x_{i+1} = L_2(\beta_i)$ za $i \ge 0$ ter končno še $x_0 = L_1(\beta)$. ■





## Končni obsegi

**Primer končnega obsega:** $\mathrm{GF}(2^4)$

Izberimo $f(x) = 1 + x + x^4 \in \mathrm{GF}(2)[x]$.
Naj bo $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = (a_0, a_1, a_2, a_3)$.
Elementi obsega $\mathrm{GF}(2^4)$ so:

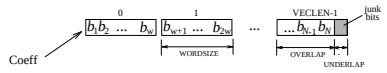
| | | | |
|---|---|---|---|
| (1000) | (1100) | (1010) | (1111) |
| (0100) | (0110) | (0101) | (1011) |
| (0010) | (0011) | (1110) | (1001) |
| (0001) | (1101) | (0111) | (0000) |





Element končnega obsega $v$ predstavimo kot vektor.
V hardwaru ponavadi delamo v $\mathrm{GF}(2)$, torej je $v$ 01-vektor, ki ga hranimo v registru dolžine $n$,
in je vsota vektorjev enaka XOR po koordinatah.

V softwaru pa hranimo binarni vektor $v$ v besedah (npr. long integers)




V splošnem obstaja veliko število različnih baz za $\mathrm{GF}(q^m)$ nad $\mathrm{GF}(q)$.

Definirajmo operaciji '+' in '×' v GF($p^n$):

$$(a_0, \ldots, a_{n-1}) + (b_0, \ldots, b_{n-1}) = (c_0, \ldots, c_{n-1}),$$

kjer je $c_i = a_i + b_i \pmod p$.

$$(a_0, \ldots, a_{n-1}) \times (b_0, \ldots, b_{n-1}) = (r_0, \ldots, r_{n-1}),$$

kjer je $(r_0, \ldots, r_{n-1})$ ostanek produkta $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \times (b_0, \ldots, b_{n-1})$ pri deljenju z nerazcepnim polinomom $f(x)$ stopnje $n$.





**Primer:** $(1011) + (1001) = (0010)$

$(1011) \times (1001)$
$= (1 + x^2 + x^3)(1 + x^3) = 1 + x + x^5 + x^6$
$= (x^4 + x + 1)(x^2 + x) + (1 + x + x^2 + x^3)$
$= (1111)$





**Končni obseg** GF$(2^4)^*$: izberemo $f(x) = 1+x+x^4$. GF$(2^4)^*$ je generiran z elementom $\alpha = x$.

| | |
|---|---|
| $\alpha_0 = (1000)$ | $\alpha_8 = (1010)$ |
| $\alpha_1 = (0100)$ | $\alpha_9 = (0101)$ |
| $\alpha_2 = (0010)$ | $\alpha_{10} = (1110)$ |
| $\alpha_3 = (0001)$ | $\alpha_{11} = (0111)$ |
| $\alpha_4 = (1100)$ | $\alpha_{12} = (1111)$ |
| $\alpha_5 = (0110)$ | $\alpha_{13} = (1011)$ |
| $\alpha_6 = (0011)$ | $\alpha_{14} = (1001)$ |
| $\alpha_7 = (1101)$ | $\alpha_{15} = \alpha^0 = 1$ |





Log tabela

| log | elt | | log | elt |
|---|---|---|---|---|
| 0 | (1000) | | 8 | (1010) |
| 1 | (0100) | | 9 | (0101) |
| 2 | (0010) | | 10 | (1110) |
| 3 | (0001) | | 11 | (0111) |
| 4 | (1100) | | 12 | (1111) |
| 5 | (0110) | | 13 | (1011) |
| 6 | (0011) | | 14 | (1001) |
| 7 | (1101) | | | |





Zech log tabela

| $1 + \alpha^i = \alpha^{z(i)}$ | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $i$ | $z(i)$ | | $i$ | $z(i)$ |
| $\infty$ | 0 | | 7 | 9 |
| 0 | $\infty$ | | 8 | 2 |
| 1 | 4 | | 9 | 7 |
| 2 | 8 | | 10 | 5 |
| 3 | 14 | | 11 | 12 |
| 4 | 1 | | 12 | 11 |
| 5 | 10 | | 13 | 6 |
| 6 | 13 | | 14 | 3 |





Računanje v **polinomski bazi** je odvisno od izbire polinoma $f(x)$.

Da bi pospešili redukcijo (po množenju ali kvadriranju), si ponavadi izberemo za $f(x)$ nerazcepni **trinom** (to je $x^n + x^m + 1$).

Na žalost nerazcepni trinomi ne obstajajo za poljubno velikost končnega obsega. V tem primeru uporabljamo *pentonome* ali *helptonome*.





Znano je, da ima vsak končni obseg GF($p^n$) bazo nad podobsegom GF($p$) naslednje oblike:

$$B = \{\beta, \beta^p, \cdots, \beta^{p^{n-1}}\}.$$

V praksi so takšne baze, ki jih imenujemo **normalne**, zelo praktične za hardwersko implementacijo množenja v obsegu GF($p^n$), še posebej, kadar je $p = 2$.





## Implementacija

Potenciranje opravimo z algoritmom kvadriraj in množi:

$$\alpha^{21} = (\alpha)(\alpha^4)(\alpha^{16})$$

Najprej izračunamo faktorje $\alpha$, $\alpha^2$, $\alpha^4$, $\alpha^8$, $\alpha^{16}$, in jih nato zmnožimo.

Namesto 20 množenj smo jih potrebovali le 6.

**Ali je lahko kvadriranje hitrejše od (splošnega) množenja?**

**NE!**

$$ab = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2}.$$

Če je kvadriranje 'lahko', potem tudi splošno množenje ni dosti težje od seštevanja.





**DA!**

V normalni bazi končnega obsega $\mathrm{GF}(2^n)$ je kvadriranje ciklični zamik, množenje pa ostane težko v splošnem.

V praksi so normalne baze zelo praktične za hardwarsko implementacijo množenja v obsegu $\mathrm{GF}(p^n)$, še posebej, kadar je $p = 2$. in je kvadriranje *cikličen zamik*.





S tem namenom so Mullin, Onyszchuk, Vanstone in Wilson [MOVW88] definirali **optimalne normalne baze** (ONB) kot tiste baze, katerih število koeficientov v reprezentaciji elementov $\beta^{p^i+1}$, $i = 0, \cdots, n-1$ glede na bazo $B$ je natanko $2n-1$. Z drugimi besedami $n \times n$-razsežna matrika $T = (t_{mk})$, definirana z $\beta\beta^{p^m} = \sum_{k=0}^{n-1} \beta^{p^k} t_{mk}$, vsebuje natanko $2n-1$ neničelnih elementov.

Ni težko preveriti, da je število $2n-1$ absolutna spodnja meja (DN).





**Izrek (Mullin et al. [MOVW]):**
*Obseg* $\mathrm{GF}(p^n)$ *vsebuje optimalno normalno bazo v naslednjih primerih*

*(i)* $n+1$ *je praštevilo in* $p$ *primitiven element obsega* $\mathrm{GF}(n+1)$,

*(ii)* $p = 2$, $2n+1$ *je praštevilo in bodisi*
*2 je primitiven element obsega* $\mathrm{GF}(2n+1)$ *bodisi*
*n je lih in 2 generira kvadratne ostanke obsega* $\mathrm{GF}(2n+1)$.





Mullin et al. [MOVW] so postavili hipotezo, da za $p = 2$ obstajajo optimalne normalne baze natanko tedaj kadar velja en izmed pogojev (i) in (ii).

Hipotezo sta leta 1992 dokazala Gao in Lenstra.





## Grupa na eliptični krivulji

Za kriptografijo sta jo leta 1985 prva predlagala Neal Koblitz in Victor Miller.

Eliptična krivulja $E$ nad obsegom $\mathbb{Z}_p$ je definirana z Weierstrassovo enačbo:

$$\boldsymbol{y^2 = x^3 + ax + b} \qquad (1)$$

kjer sta $a, b \in \mathbb{Z}_p$ in $4a^3 + 27b^2 \not\equiv 0 \pmod p$
($GF(2^m)$: $y^2 + xy = x^3 + ax^2 + b$).

$E(\mathbb{Z}_p) := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}_p,$ ki ustrezajo $(1)\} \cup \mathcal{O}$.

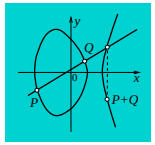




**Pravilo za seštevanje**

1. $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2) \in E(\mathbb{Z}_p)$, kjer $P \neq -Q := (x_2, -y_2)$.
   Potem je $P + Q = (x_3, y_3)$, kjer je
   $x_3 = \lambda^2 - x_1 - x_2$, $y_3 = \lambda(x_1 - x_3) - y_1$, in

$$\lambda = \begin{cases} \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} & ; \text{za } P \neq Q \\ \dfrac{3x_1^2 + a}{2y_1} & ; \text{za } P = Q. \end{cases}$$




2. $P + \mathcal{O} = \mathcal{O} + P = P$ in $P + (-P) = \mathcal{O}$ za vsak $P \in E(\mathbb{Z}_p)$.





Množica $E(\mathbb{Z}_p)$ je sestavljena iz točk $(x, y)$, $x, y \in \mathbb{Z}_p$, ki ustrezajo zgornji enačbi, vključno s točko neskončno $\mathcal{O}$.

**Izrek (Hasse).**

$$p + 1 - 2\sqrt{p} \leq |E| \leq p + 1 + 2\sqrt{p}$$

Schoofov algoritem izračuna $|E|$ v $O((\log p)^8)$ bitnih operacijah.

Grupa $E$ je izomorfna $\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2}$, kjer je $n_2 | n_1$ in $n_2 | (p-1)$, tako da lahko najdemo ciklično podgrupo $\mathbb{Z}_{n_1}$, ki jo uporabimo za ElGamalov kriptosistem.

*Podeksponentno* metodo **index calculus** zaenkrat ne znamo uporabiti pri DLP na eliptični grupi (razen če ni eliptična krivulja supersingularna).

Zato si lahko izberemo eliptično krivuljo s ciklično podgrupo velikosti (samo) okoli $2^{160}$.





**Primer**: EC nad GF($2^4$)

- Naj bo GF($2^4$) generiran s korenom $\alpha = x$ nerazcepnega polinoma $f(x) = 1 + x + x^4$.
- $E_1(\mathrm{GF}(2^4))$ $= \{(x, y) : y^2 + xy = x^3 + \alpha^4 x^2 + 1\} \cup \{\mathcal{O}\}$.
- $E_1(\mathrm{GF}(2^4))$ tvori grupo za seštevanje z $\mathcal{O}$ kot identiteto.





Rešitve enačbe: $y^2 + xy = x^3 + \alpha^4 x^2 + 1$ nad GF($2^4$)

| | |
|---|---|
| $(0, 1)$ | |
| $(1, \alpha^6)$ | $(1, \alpha^{13})$ |
| $(\alpha^3, \alpha^8)$ | $(\alpha^3, \alpha^{13})$ |
| $(\alpha^5, \alpha^3)$ | $(\alpha^5, \alpha^{11})$ |
| $(\alpha^6, \alpha^8)$ | $(\alpha^6, \alpha^{14})$ |
| $(\alpha^9, \alpha^{10})$ | $(\alpha^9, \alpha^{13})$ |
| $(\alpha^{10}, \alpha^1)$ | $(\alpha^{10}, \alpha^8)$ |
| $(\alpha^{12}, 0)$ | $(\alpha^{12}, \alpha^{12})$ |





Primer seštevanja v $E_1(\mathrm{GF}(2^4))$:

Naj bo $P_1 = (\alpha^6, \alpha^8)$, $P_2 = (\alpha^3, \alpha^{13})$.

- $P_1 + P_2 = (x_3, y_3)$:

$$\begin{aligned} x_3 &= \left(\frac{\alpha^8 + \alpha^{13}}{\alpha^6 + \alpha^3}\right)^2 + \frac{\alpha^8 + \alpha^{13}}{\alpha^6 + \alpha^3} + \alpha^6 + \alpha^3 + \alpha^4 \\ &= \left(\frac{\alpha^3}{\alpha^2}\right)^2 + \frac{\alpha^3}{\alpha^2} + \alpha^2 + \alpha^4 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_3 &= \frac{\alpha^8 + \alpha^{13}}{\alpha^6 + \alpha^3}(\alpha^6 + 1) + 1 + \alpha^8 \\ &= \frac{\alpha^3}{\alpha^2}\alpha^{13} + \alpha^2 = \alpha^{13} \end{aligned}$$





- $2P_1 = (x_3, y_3)$:

$$\begin{aligned} x_3 &= (\alpha^6)^2 + \frac{1}{(\alpha^6)^2} \\ &= \alpha^{12} + \alpha^3 = \alpha^{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_3 &= (\alpha^6)^2 + \left(\alpha^6 + \frac{\alpha^8}{\alpha^6}\right)\alpha^{10} + \alpha^{10} \\ &= \alpha^3 + (\alpha^6 + \alpha^2)\alpha^{10} = \alpha^8 \end{aligned}$$





**Še en primer EC nad** GF($2^4$)

- Naj bo GF($2^4$) generiran s korenom $\alpha = x$ nerazcepnega polinoma $f(x) = 1 + x + x^4$.
- $E_2(\mathrm{GF}(2^4))$ $= \{(x, y) : y^2 + \alpha^6 y = x^3 + \alpha^3 x + 1\} \cup \{\mathcal{O}\}$.
- $E_2(\mathrm{GF}(2^4))$ tvori grupo za seštevanje z $\mathcal{O}$ kot identiteto.





Iščemo rešitve enačbe

$$y^2 + \alpha^6 y = x^3 + \alpha^3 x + 1$$

nad GF($2^4$). Ta enačba ima samo 8 rešitev:

| | |
|---|---|
| $(\alpha^2, \alpha^8)$ | $(\alpha^2, \alpha^{14})$ |
| $(\alpha^{10}, 1)$ | $(\alpha^{10}, \alpha^{13})$ |
| $(\alpha^{11}, 0)$ | $(\alpha^{11}, \alpha^6)$ |
| $(\alpha^{13}, \alpha^5)$ | $(\alpha^{13}, \alpha^9)$ |





**Primer:** EC nad GF(23)

- Naj bo $p = 23$.
- $y^2 = x^3 + x + 1$, (i.e., $a = 1$, $b = 1$). Velja: $27a^3 + 16b^2 = 3 \cdot 1^3 + 16 \cdot 1^3 = 19 \neq 0$ v GF(23).
- $E_3(\mathrm{GF}(23)) = \{(x, y) : y^2 = x^3 + x + 1\} \cup \{\mathcal{O}\}$.
- $E_3(\mathrm{GF}(23))$ tvori grupo za seštevanje z $\mathcal{O}$ kot identiteto.

Rešitve enačbe $y^2 = x^3 + x + 1$ nad $\mathbb{Z}_{23}$:

| | | |
|---|---|---|
| (0, 1) | (6, 4) | (-11,-4) |
| (0,-1) | (6,-4) | (-10, 7) |
| (1, 7) | (7, 11) | (-10,-7) |
| (1,-7) | (7,-11) | (-6, 3) |
| (3, 10) | (9, 7) | (-6,-3) |
| (3,-10) | (9,-7) | (-5, 3) |
| (4, 0) | (11, 3) | (-5,-3) |
| (5, 4) | (11,-3) | (-4, 5) |
| (5,-4) | (-11,4) | (-4,-5) |





Primera seštevanja na $E_3(\mathrm{GF}(23))$

1. $P_1 = (3, 10)$, $P_2 = (9, 7)$,
   $P_1 + P_2 = (x_3, y_3)$.

   $\lambda = \frac{7-10}{9-3} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2} = 11 \in \mathbb{Z}_{23}$.

   $x_3 = 11^2 - 3 - 9 = 6 - 3 - 9 = -6$,
   $y_3 = 11(3 - (-6)) - 10 = 11(9) - 10$
   $= 89 = 20 = -3$.
   Sledi $P_1 + P_2 = (-6, -3)$.





2. $P_1 = (3, 10)$, $2P_1 = (x_3, y_3)$,

   $\lambda = \frac{3(3^2)+1}{20} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} = 6$.

   $x_3 = 6^2 - 6 = 30 = 7$,
   $y_3 = 6(3 - 7) - 10 = -24 - 10 = -11$.

   Sledi $2P_1 = (7, -11)$.





$P = (0, 1)$ je generator:

| | |
|---|---|
| $P$=( 0, 1) | |
| $2P$=(6,-4) | $15P$=( 9, 7) |
| $3P$=(3,-10) | $16P$=(-6,3) |
| $4P$=(-10,-7) | $17P$=(1,7) |
| $5P$=(-5,3) | $18P$=(12,-4) |
| $6P$=(7,11) | $19P$=(-4,5) |
| $7P$=(11,3) | $20P$=(5,4) |
| $8P$=(5,-4) | $21P$=(11,-3) |
| $9P$=(-4,-5) | $22P$=(7 -11) |
| $10P$ =(12,4) | $23P$=(-5,-3) |
| $11P$=(1,-7) | $24P$=(-10,7) |
| $12P$=(-6,-3) | $25P$=(3,10) |
| $13P$=(9,-7) | $26P$=(6,4) |
| $14P$=(4,0) | $27P$=(0,-1) |





Log – antilog tabela

| log | elt | log | elt |
|---|---|---|---|
| 0 | $\mathcal{O}$ | 14 | (4,0) |
| 1 | (0,1) | 15 | (9,7) |
| 2 | (6,-4) | 16 | (-6,3) |
| 3 | (3,-10) | 17 | (1,7) |
| 4 | (-10,-7) | 18 | (-11,-4) |
| 5 | (-5,3) | 19 | (-4,5) |
| 6 | (7,11) | 20 | (5,4) |
| 7 | (11,3) | 21 | (11,-3) |
| 8 | (5,-4) | 22 | (7,-11) |
| 9 | (-4,-5) | 23 | (-5,-3) |
| 10 | (-11,4) | 24 | (-10,7) |
| 11 | (1,-7) | 25 | (3,10) |
| 12 | (-6,-3) | 26 | (6,4) |
| 13 | (9,-7) | 27 | (0,-1) |





Antilog – log tabela

| elt | log | elt | log |
|---|---|---|---|
| $\mathcal{O}$ | 0 | (9,7) | 15 |
| (0,1) | 1 | (9,-7) | 13 |
| (0,-1) | 27 | (11,3) | 7 |
| (1,7) | 17 | (11,-3) | 21 |
| (1,-7) | 11 | (-11,4) | 10 |
| (3,10) | 25 | (-11,-4) | 18 |
| (3,-10) | 3 | (-10,7) | 24 |
| (4,0) | 14 | (-10,-7) | 4 |
| (5,4) | 20 | (-6,3) | 16 |
| (5,-4) | 8 | (-6,-3) | 12 |
| (6,4) | 26 | (-5,3) | 5 |
| (6,-4) | 2 | (-5,-3) | 23 |
| (7,11) | 6 | (-4,5) | 19 |
| (7,-11) | 22 | (-4,-5) | 9 |

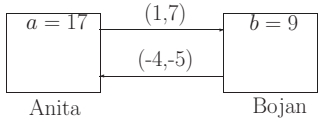




## Diffie–Hellmanov protokol nad $E(\mathrm{GF}(23))$

**Javni parametri**:

$$y^2 = x^3 + x + 1$$
$$P = (0, 1)$$








- Anita izračuna $17P = (1, 7)$,
- Bojan izračuna $9P = (-4, -5)$,
- Anita izračuna $17(-4, -5) = (6, 4)$,
- Bojan izračuna $9(1, 7) = (6, 4)$.

Anita in Bojan imata skupno točko $(6, 4)$.

## Računanje logaritmov

**Izračunaj** $\log_P(9,7)$**.**

Izračunaj naslednjo tabelo:

| elt | (0,1) | (7,11) | (-6,-3) | (12,-4) | (-10,7) |
|---|---|---|---|---|---|
| log | 1 | 6 | 12 | 18 | 24 |

Če je $k = \log_P(9,7)$, potem velja $kP = (9,7)$.





- Računamo
  $(9,7)+P,\ \ (9,7)+2P,\ \ \ (9,7)+3P,\ldots,$
  vse, dokler ne dobimo element iz tabele.
- Tako dobimo: $(9,7)+3P = (12,-4)$.
- Iz tabele preberemo $(12,-4) = 18P$.
- Sledi $(9,7)+3P = 18P$
  oziroma $(9,7) = 15P$, torej $k = 15$.





- Če je $|E(\mathrm{GF}(q))| = n$, lahko posplošimo metodo za $E(\mathrm{GF}(23))$ na naslednji način:
  - naredi tabelo $(i, iP)$ velikosti $\sqrt{n}$,
  - za iskanje logaritma elementa v tej tabeli potrebujemo največ $\sqrt{n}$ seštevanj točk.
- Če je $q \approx 10^{40}$, potem je $|E(\mathrm{GF}(q))| \approx 10^{40}$ in ima tabela $10^{20}$ vrstic.

  To je očitno <u>popolnoma nedosegljivo</u>.