1. poglavje

Klasična kriptografija

- zgodovina (hieroglifi, antika, II. svetovna vojna)
- zamenjalna šifra

Klasične šifre in razbijanje

- prikrita, zamenjalna (pomična, afina), bločna (Vigenerjeva, Hillova)
- Kerckhoffov princip in stopnje napadov
- napad na Vigenerja (Kasiski test, indeks naključja)
- napad na Hillovo šifro
- tokovne šifre

Zgodovina

Kriptografija ima dolgo in zanimivo zgodovino:

– Hieroglifi, Špartanci, Cezar, ...

D. Kahn, **The Codebreakers** (The Story of Secret Writing), hrvaški prevod: (K. and M. Miles), **Šifranti protiv špijuna**, Centar za informacije i Publicitet, Zagreb 1979. (429+288+451+325=1493 strani).

Hieroglifi

Razvili so jih antični Egiptčani. Komunicirali so v jeziku sestavljenemu iz sličič namesto besed.

Najbolj izobraženi ljudje so jih razumeli, toda v religioznemu kontekstu – **npr. napisi na grobovih** – so njihovi duhovniki uporabljali tajne kriptografske verzije znakov, da bi bila vsebina več vredna (saj je šlo za božje besede) in bolj mistična.

Mnoge religije so uporabljale tajne znake, ki so jih razumeli le določeni izbranci.

Razbijalci šifer

Obstajajo od kar poznamo šifriranje.

L. 1799 so v Egipčanski Rosetti našli skoraj 2.000 let star kamen. Na njemu so bili trije teksti:

- hieroglifi,
- pisava egiptčanov (demotic) in
- starogrščina.

Del kamna iz Rosette, na katerem je bila neznana pisava, dokler je arheologi niso odšifrirali.

Ko je bil končan prevod iz Grščine, je bilo možno razvozlati tudi hieroglife, iz katerih smo izvedeli o zgodovini antičnega Egipta.

Še ena antična: o obriti glavi

Medtem, ko je bil genialni Histius na perzijskem sodišču, je hotel obvestiti Aristagorasa iz Grčije, da dvigne upor. Seveda je bilo pomembno, da nihče ne prestreže sporočilo.

Da bi zagotovil tajnost, je Histius obril sužnja, ki mu je nabolj zaupal, mu vtetoviral na glavo sporočilo [sužnju so rekli, da mu začenjajo zdraviti slepoto] in počakal, da mu zrastejo lasje.

Sužnju je bilo ukazano, da reče Aristagorasu:

"*Obrijte mojo glavo in poglejte nanjo.*"

Aristagoras je nato zares dvignil upor.

To je primer **prikrite šifre**, sporočilo je prisotno, a na nek način prikrito.

Poznamo mnogo takšnih primerov.

Varnost takega sporočila je odvisna od trika prikrivanja.

Tak trik je lahko odkriti, poleg tega pa ne omogoča hitrega šifriranja in odšifriranja.

To ne pride vpoštev za **resno uporabo**.

Anglija: Sir John dobi sporočilo: Worthie Sir John:- Hope, that is ye beste comfort of ye afflicted, cannot much, I fear me, help you now. That I would saye to you, is this only: if ever I may be able to requite that I do owe you, stand not upon asking me. 'Tis not much that I can do: but what I can do, bee ye verie sure I wille. I knowe that, if dethe comes, if ordinary men fear it, it frights not you, accounting it for a high honor, to have such a rewarde of your loyalty. Pray yet that you may be spared this soe bitter, cup. I fear not that you will grudge any sufferings; only if bie submission you can turn them away, 'tis the part of a wise man. Tell me, an if you can, to do for you anythinge that you wolde have done. The general goes back on Wednesday. Restinge your servant to command. - R.T.

Če vam uspe "med vrsticami" prebrati:

PANEL AT EAST END OF CHAPEL SLIDES

verjetno ne boste občutili enakega olajšanja kot Sir John Trevanion, njemu pa je vsekakor uspelo pobegniti, sicer bi ga v gradu Colcester gotovo usmrtili prav tako, kot so Sir Charlesa Lucasa ter Sir Georga Lislea.

Druga svetovna vojna

– Enigma (Nemčija),
– Tunny (Nemčija),
– Purple (Japonska),
– Hagelin (ZDA).

Zamenjalna šifra

Tomaž Pisanski, Skrivnostno sporočilo
Presek V/1, 1977/78, str. 40-42.

```
YHW?HD+CVODHVTHVO-!JVG:CDCYJ(JV/-V?HV(
-T?HVW-4YC4(?-DJV/-(?S-VO3CWC%J(-V4-DC
V!CW-?CVNJDJVD-?+-VO3CWC%J(-VQW-DQ-VJ+
V?HVDWHN-V3C:CODCV!H+?-DJVD-?+CV3JO-YC
```

(črko Č smo zamenjali s C, črko Ć pa z D)

Imamo 26! = 403291461126656355840000000 možnosti z direktnim preizkušanjem, zato v članku dobimo naslednje nasvete:

(0) Relativna frekvenca črk in presledkov v slovenščini: presledek 173,

E	A	I	O	N	R	S	L	J	T	V	D
89	84	74	73	57	44	43	39	37	37	33	30

K	M	P	U	Z	B	G	Č	H	Š	C	Ž	F
29	27	26	18	17	15	12	12	9	9	6	6	1

(1) Na začetku besed so najpogostejše črke N, S, K, T, J, L.
(2) Najpogostejše končnice pa so E, A, I, O, U, R, N.
(3) Ugotovi, kateri znaki zagotovo predstavljajo samoglasnike in kateri soglasnike.
(4) V vsaki besedi je vsaj en samoglasnik ali samoglasniški R.
(5) V vsaki besedi z dvema črkama je ena črka samoglasnik, druga pa soglasnik.
(6) detektivska sreča

(0)	V	-	C	D	J	?	H	W	O	(	+	3
	23	19	16	12	11	10	9	7	6	6	5	4

Y	4	!	/	Q	:	%	T	N	S	G
4	3	3	2	2	2	2	2	2	1	1

Zaključek `V --> ' '` (drugi znaki z visoko frekvenco ne morejo biti).

Dve besedi se ponovita: `O3CWC%J(-`, opazimo pa tudi eno sklanjatev: `D-?+-` ter `D-?+C`.

Torej nadaljujemo z naslednjim tekstom:

```
YHW?HD+C ODH TH O-!J G:CDCYJ(J /- ?H
(-T?H W-4YD4(?-DJ /-(?S- O3CWC%J(- 4-DC
!CW-?C NJDJ D-?+- O3CWC%J(- QW-DQ- J+
?H DWHN- 3C:CODC !H+?-DJ D-?+C 3JO-YC
```


(3) Kanditati za samoglasnike e,a,i,o so znaki z visokimi frekvancami. Vzamemo:

$$\{e,a,i,o\} = \{-,C,J,H\}$$

(saj D izključi -,H,J,C in ? izključi -,H,C, znaki -,C,J,H pa se ne izključujejo)

Razporeditev teh znakov kot samoglasnikov izgleda prav verjetna. To potrdi tudi gostota končnic, gostota parov je namreč:

AV	CV	HV	JV	VO	?H	-D	DC	JM	W-	DJ	UC	CW	-?	VD
7	5	5	5	4	4	4	3	3	3	3	3	3	3	3

(5) Preučimo besede z dvema črkama:

```
   Samoglasnik na koncu
1) da ga na pa ta za (ha ja la)
2) če je le me ne se še te ve že (he)
3) bi ji ki mi ni si ti vi
4) bo do (ho) jo ko no po so to
5) ju mu tu (bu)
6) rž rt
```

```
   Samoglasnik na začetku
1) ar as            (ah aj au)
2) en ep             (ej eh)
3) in iz ig
4) on ob od os on     (oh oj)
5) uk up uš ud um ur (uh ut)
```

in opazujemo besedi: /- ?H
ter besedi: J+ ?H.

J+ ima najmanj možnosti, + pa verjetno ni črka n, zato nam ostane samo še:

```
J+ ?H        DWHN-
/- ?H
iz te       (ne gre zaradi: D-?+C)
ob ta(e,o)  (ne gre zaradi: D-?+C)
od te       (ne gre zaradi: D-?+C)
```

tako da bo potrebno nekaj spremeniti in preizkusiti še naslednje:
on bo; on jo; in so; in se; in je; in ta; en je; od tu ...

(6) Če nam po dolgem premisleku ne uspe najti rdeče niti, bo morda potrebno iskati napako s prijatelji (tudi računalniški program z metodo lokalne optimizacije ni zmogel problema zaradi premajhne dolžine tajnopisa, vsekakor pa bi bilo problem mogoče rešiti s pomočjo elektronskega slovarja).

Tudi psihološki pristop pomaga, je svetoval Martin Juvan in naloga je bila rešena (poskusite sami!).

Podobna naloga je v angleščini dosti lažja, saj je v tem jeziku veliko členov THE, A in AN, vendar pa zato običajno najprej izpustimo presledke iz teksta, ki ga želimo spraviti v tajnopis.

V angleščini imajo seveda črke drugačno gostoto kot v slovenščini.

Razdelimo jih v naslednjih pet skupin:

1. E, z verjetnostjo okoli 0.120,
2. T, A, O, I, N, S, H, R, vse z verjetnostjo med 0.06 in 0.09,
3. D, L, obe z verjetnostjo okoli 0.04,
4. C, U, M, W, F, G, Y, P, B, vse z verjetnostjo med 0.015 in 0.028,
5. V, K, J, X, Q, Z, vse z verjetnostjo manjšo od 0.01.

Najbolj pogosti pari so (v padajočem zaporedju): TH, HE, IN, ER, AN, RE, ED, ON, ES, ST, EN, AT, TO, NT, HA, ND, OU, EA, NG, AS, OR, TI, IS, ET, IT, AR, TE, SE, HI in OF,

Najbolj pogoste trojice pa so (v padajočem zaporedju): THE, ING, AND, HER, ERE, ENT, THA, NTH, WAS, ETH, FOR in DTH.

Klasične šifre

Transpozicijska šifra

V transpozicijski šifri ostanejo črke originalnega sporočila nespremenjene, njihova mesta pa so pomešana na kakšen sistematičen način

(primer: permutacija stolpcev).

Te šifre zlahka prepoznamo, če izračunamo gostoto samoglasnikov (v angleščini je ta 40%, in skoraj nikoli ne pade zunaj intervala 35%–45%).

Težko jih rešimo, vendar pa se potrpljenje na koncu običajno izplača.

Simetrična šifra *je peterica* $(\mathcal{P}, \mathcal{C}, \mathcal{K}, \mathcal{E}, \mathcal{D})$ *za katero velja:*

1. $\mathcal{P}$ *je končna množica možnih čistopisov*
2. $\mathcal{C}$ *je končna množica možnih tajnopisov*
3. $\mathcal{K}$ *je končna množica možnih ključev.*
4. *Za vsak ključ* $K \in \mathcal{K}$, *imamo šifrirni postopek* $e_K \in \mathcal{E}$ *in ustrezen odšifrirni postopek* $d_K \in \mathcal{D}$.
$$e_K : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{C} \quad \text{in} \quad d_K : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{P}$$
sta taki funkciji, da je $d_K(e_K(x)) = x$ *za vsak* $x \in \mathcal{P}$.

Pomična šifra (angl. shift cipher) je poseben primer zamenjalne šifre.

`wewillmeetatmidnight`

```
22  4 22  8 11 11 12  4  4 19  0 19 12  8  3 13  8  6  7 19
 7 15  7 19 22 22 23 15 15  4 11  4 23 19 14 24 19 17 18  4
```

`HPHTWWXPPELEXTOYTRSE`

Cezarjeva šifra zašifrira njegovo ime v Ehbčt.

Cezar ukazal napad

↓

Ehbčt žnčbčo rčščg

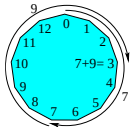
V kriptografiji si na splošno radi omislimo končne množice, kot pri številčnici na uri (npr. praštevilske obsege $\mathbb{Z}_p$).

Kongruence: naj bosta a in b celi števili in m naravno število.

$$a \equiv b \pmod{m} \iff m|b-a.$$

Primer: za $p=13$ velja
$7+_{13}9 = 7+9 \mod 13 = 3$ in
$5 *_{13} 4 = 5 * 4 \mod 13 = 7$

(saj ima pri deljenju s 13 vsota 16 ostanek 3, produkt 20 pa ostanek 7), možno pa je tudi deljenje.



Deljenje v primeru $p = 13$:

$*_{13}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	2	4	6	8	10	12	**1**	3	5	7	9	11
3	3	6	9	12	2	5	8	11	**1**	4	7	10
4	4	8	12	3	7	11	2	6	10	**1**	5	9
5	5	10	2	7	12	4	9	**1**	6	11	3	8
6	6	12	5	11	4	10	3	9	2	8	**1**	7
7	7	**1**	8	2	9	3	10	4	11	5	12	6
8	8	3	11	6	**1**	9	4	12	7	2	10	5
9	9	5	**1**	10	6	2	11	7	3	12	8	4
10	10	7	4	**1**	11	8	5	2	12	9	6	3
11	11	9	7	5	3	**1**	12	10	8	6	4	2
12	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	**1**

Afina šifra:

$$e(x) = ax + b \pmod{26} \qquad \text{za } a, b \in \mathbb{Z}_{26}$$

Za $a = 1$ dobimo pomično šifro.
Funkcija je injektivna, če in samo če je $D(a, 26) = 1$.

Imamo $|\mathcal{K}| = 12 \times 26 = 312$ možnih ključev.

Za pomično šifro in afino šifro pravimo, da sta **monoabecedni**, ker preslikamo vsako črko v natanko določeno črko.

Vigenèrejeva šifra (1586):

Naj bo $m \in \mathbb{N}$ in

$$\mathcal{P} = \mathcal{C} = \mathcal{K} = (\mathbb{Z}_{26})^m.$$

Za ključ $K = (k_1, k_2, \ldots, k_m)$ definiramo

$$\begin{aligned} e(x_1, \ldots, x_m) &= (x_1 + k_1, \ldots, x_m + k_m) \text{ in} \\ d(y_1, \ldots, y_m) &= (y_1 - k_1, \ldots, y_m - k_m), \end{aligned}$$

kjer sta operaciji "+" in "−" opravljeni po modulu 26.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
A	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
B	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A
C	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B
D	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C
E	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D
F	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E
G	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F
H	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G
I	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H
J	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I
K	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
L	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
M	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
N	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
O	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
P	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
Q	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
R	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
S	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
T	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
U	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
V	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
W	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
X	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
Y	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
Z	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y

Sporočilo

`TO BE OR NOT TO BE THAT IS THE QUESTION`

zašifriramo s ključem `RELATIONS`:

```
ključ:      RELAT IONSR ELATI ONSRE LATIO NSREL
čistopis:   TOBEO RNOTT OBETH ATIST HEQUE STION
tajnopis:   KSMEH ZBBLK SMEMP OGAJX SEJCS FLZSY
```

Npr. prvo črko tajnopisa dobimo tako, da pogledamo v tabelo na mesto (`R`, `T`).

Kako pa najdemo iz `T` in `K` nazaj `R`?

To ni monoabecedna šifra.

Pravimo ji **poliabecedna šifra**.

Vigenèrejeva šifra in 26^m možnih ključev.

Za $m = 5$ je število 1.1×10^7 že preveliko, da bi "peš" iskali pravi ključ.

Hillova šifra (1929)

Naj bo m neko naravno število in naj bo

$$\mathcal{P} = \mathcal{C} = (\mathbb{Z}_{26})^m.$$

Za K vzemimo obrnljivo $m \times m$ matriko in definirajmo

$$e_K(x) = xK \quad \text{in} \quad d_K(y) = yK^{-1},$$

pri čemer so vse operacije opravljene v $\mathbb{Z}_{26}$.

Ponovimo:

Odšifriranje (razbijanje) klasičnih šifer

Kriptografske sisteme kontroliramo s pomočjo ključev, ki določijo transformacijo podatkov.
Seveda imajo tudi ključi digitalno obliko (binarno zaporedje: 01001101010101...).

Držali se bomo **Kerckhoffovega principa**, ki pravi, da "nasprotnik"

pozna kriptosistem oziroma algoritme, ki jih uporabljamo, ne pa tudi ključe, ki nam zagotavljajo varnost.

Ločimo naslednje nivoje napadov na kriptosisteme:

1. **samo tajnopis**: *nasprotnik ima del tajnopisa,*
2. **poznani čistopis**: *nasprotnik ima del čistopisa ter ustrezen tajnopis,*
3. **izbrani čistopis**: *nasprotnik ima začasno na voljo šifrirno mašinerijo ter za izbrani $x \in \mathcal{P}$ konstruira $e(x)$,*
4. **izbrani tajnopis**: *nasprotnik ima začasno na voljo odšifrirno mašinerijo ter za izbrani $y \in \mathcal{C}$ konstruira $d(y)$.*

Odšifriranje Vigenèrejeve šifre

Test Friedericha Kasiskega (1863):

(in Charles Babbage-a 1854)

poiščemo dele tajnopisa $\boldsymbol{y} = y_1 y_2 \ldots y_n$, ki so identični in zabeležimo razdalje $d_1, d_2, \ldots$ med njihovimi začetki. Predpostavimo, da iskani m deli največji skupni delitelj teh števil.

Naj bo $d = n/m$. Elemente tajnopisa $\boldsymbol{y}$ zapišemo po stolpcih v $(m \times d)$-razsežno matriko. Vrstice označimo z $\boldsymbol{y_i}$, tj.

$$\boldsymbol{y_i} \;=\; y_i \, y_{m+i} \, y_{2m+i} \, \ldots$$

Indeks naključja (William Friedman, 1920):

Za zaporedje $\boldsymbol{x} = x_1 x_2 \ldots x_d$ je **indeks naključja** (angl. index of coincidence, oznaka $I_c(\boldsymbol{x})$) **verjetnost**, da sta naključno izbrana elementa zaporedja $\boldsymbol{x}$ enaka.

Če so $f_0, f_1, \ldots, f_{25}$ frekvence črk $A, B, \ldots, Z$ v zaporedju $\boldsymbol{x}$, je

$$I_c(\boldsymbol{x}) \;=\; \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{25} \binom{f_i}{2}}{\displaystyle\binom{d}{2}} \;=\; \sum_{i=0}^{25} \frac{f_i(f_i-1)}{d(d-1)}.$$

Če so p_i pričakovane verjetnosti angleških črk, potem je

$$I_c(\boldsymbol{x}) \;\approx\; \sum_{i=0}^{25} p_i^2 \;=\; 0.065.$$

Za povsem naključno zaporedje velja

$$I_c(\boldsymbol{x}) \;\approx\; 26\left(\frac{1}{26}\right)^2 \;=\; \frac{1}{26} \;=\; 0.038.$$

Ker sta števili .065 in .038 dovolj narazen, lahko s to metodo najdemo dolžino ključa

(ali pa potrdimo dolžino, ki smo jo uganili s testom Kasiskega).

Za podzaporedje $\boldsymbol{y_i}$ in $0 \le g \le 25$ naj bo

$$M_g(\boldsymbol{y_i}) \;=\; \sum_{i=0}^{25} p_i \frac{f_{i+g}}{d}.$$

Če je $g = k_i$, potem pričakujemo

$$M_g(\boldsymbol{y_i}) \;\approx\; \sum_{i=0}^{25} p_i^2 \;=\; 0.065$$

Za $g \neq k_i$ je običajno M_g bistveno manjši od 0.065.

Torej za vsak $1 \le i \le m$ in $0 \le g \le 25$ tabeliramo vrednosti M_g, nato pa v tabeli za vsak $1 \le i \le m$ poiščemo tiste vrednosti, ki so blizu 0.065.

Ustrezni g-ji nam dajo iskane zamike $k_1, k_2, \ldots, k_m$.

Odšifriranje Hillove šifre

Predpostavimo, da je nasprotnik določil m, ki ga uporabljamo, ter se dokopal do m različnih parov m-teric (2. stopnja – poznan čistopis):

$$x_j = (x_{1,j}, x_{2,j}, \ldots, x_{m,j}), \;\; y_j = (y_{1,j}, y_{2,j}, \ldots, y_{m,j}),$$

tako da je $y_j = e_K(x_j)$ za $1 \le j \le m$.

Za matriki $X = (x_{i,j})$ in $Y = (y_{i,j})$ dobimo matrično enačbo $Y = XK$.

Če je matrika X obrnljiva, je $K = YX^{-1}$.

Za Hillovo šifro lahko uporabimo tudi 1. stopnjo napada (samo tajnopis), glej nalogo 1.25.

Koliko ključev imamo na voljo v primeru Hillove šifre? Glej nalogo 1.12.

Za afino-Hillovo šifro glej nalogo 1.24.

Tokovne šifre

Naj bo $x_1x_2\dots$ čistopis.

Doslej smo obravnavali kriptosisteme z enim samim ključem in tajnopis je imel naslednjo obliko.

$$\mathbf{y} = y_1y_2\cdots = e_K(x_1)e_K(x_2)\dots$$

Taki šifri pravimo **bločna šifra** (angl. block cipher).

Posplošitev: iz enega ključa $K \in \mathcal{K}$ napravimo zaporedje (tok) ključev. Naj bo f_i funkcija, ki generira i-ti ključ:

$$z_i = f_i(K, x_1, \dots, x_{i-1}).$$

Z njim izračunamo:

$$y_i = e_{z_i}(x_i) \qquad \text{in} \qquad x_i = d_{z_i}(y_i).$$

Bločna šifra je poseben primer tokovne šifre (kjer je $z_i = K$ za vse $i \geq 1$).

Sinhrona tokovna šifra *je sedmerica* $(\mathcal{P}, \mathcal{C}, \mathcal{K}, \mathcal{L}, \mathcal{F}, \mathcal{E}, \mathcal{D})$ *za katero velja:*

1. $\mathcal{P}$ *je končna množica možnih* **čistopisov**,
2. $\mathcal{C}$ *je končna množica možnih* **tajnopisov**,
3. $\mathcal{K}$ *je končna množica možnih* **ključev**,
4. $\mathcal{L}$ *je končna množica tokovne* **abecede**,
5. $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \dots)$ *je generator toka ključev:*
$$f_i : \mathcal{K} \times \mathcal{P}^{i-1} \longrightarrow \mathcal{L} \quad \text{za } i \geq 1$$
6. *Za vsak ključ* $z \in \mathcal{L}$ *imamo šifrirni* $(e_z \in \mathcal{E})$ *in odšifrirni* $(d_z \in \mathcal{D})$ *postopek, tako da je* $d_z(e_z(x)) = x$ *za vsak* $x \in \mathcal{P}$.

Za šifriranje čistopisa $x_1x_2\dots$ zaporedno računamo

$$z_1, y_1, z_2, y_2, \dots,$$

za odšifriranje tajnopisa $y_1y_2\dots$ pa zaporedno računamo

$$z_1, x_1, z_2, x_2, \dots.$$

Tokovna šifra je **periodična** s periodo d kadar, je $z_{i+d} = z_i$ za vsak $i \geq 1$

(poseben primer: Vigenèrejeva šifra).

Začnimo s ključi $(k_1, \dots, k_m)$ in naj bo $z_i = k_i$ za $i = 1, \dots, m$.
Definiramo linearno rekurzijo stopnje m:

$$z_{i+m} = z_i + \sum_{j=1}^{m-1} c_j\, z_{i+j} \mod 2,$$

kjer so $c_1, \dots, c_{m-1} \in \mathbb{Z}_2$ vnaprej določene konstante.

Za ustrezno izbiro konstant $c_1, \dots, c_{m-1} \in \mathbb{Z}_2$ in neničelen vektor $(k_1, \dots, k_m)$ lahko dobimo tokovno šifro s periodo $2^m - 1$.

Hitro lahko generiramo tok ključev z uporabo **LFSR** (**Linear Feedback Shift Register**).
V pomičnem registru začnemo z vektorjem

$$(k_1, \dots, k_m).$$

Nato na vsakem koraku naredimo naslednje:

1. k_1 dodamo toku ključev (za XOR),
2. $k_2, \dots, k_m$ pomaknemo za eno v levo,
3. 'nov' ključ k_m izračunamo z
$$\sum_{j=0}^{m-1} c_j\, k_{j+1} \quad \text{(to je "linear feedback")}.$$

Primer:

$c_0 = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$,

torej je $k_{i+4} = k_i + k_{i+1}$.

Izberimo $k_0 = 1$, $k_1 = 0$, $k_2 = 1$, $k_3 = 0$.

Potem je $k_4 = 1$, $k_5 = 1$, $k_6 = 0$, ...

Naj bo $\boldsymbol{k} = (k_0, k_1, k_2, k_3)^t$ in

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Torej je $A(\boldsymbol{k}) = (k_1, k_2, k_3, k_4)^t$,

$A^2(\boldsymbol{k}) = A(k_1, k_2, k_3, k_4)^t = (k_2, k_3, k_4, k_5)^t$

...

$A^i(\boldsymbol{k}) = (k_i, k_{i+1}, k_{i+2}, k_{i+3})^t$.

Najdaljša možna perioda je 15.

Enkrat dobimo:

$$A^i(\boldsymbol{k}) = A^j(\boldsymbol{k})$$

in ker je A obrnljiva

$$A^{i-j}(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{k}$$

Karakteristični polinom matrike A je

$$f(x) = 1 + x + x^4.$$

Ker je $f(x)$ nerazcepen, je $f(x)$ tudi minimalni polinom matrike A.

Red matrike A je najmanjše naravno število s, tako da je $A^s = I$. Naj bo e najmanjše naravno število, tako da $f(x) \mid (x^e - 1)$. Potem je $e = s$.

$$1 + x^{15} = (x+1)(x^2+x+1)(x^4+x+1)$$
$$(x^4+x^3+1)(x^4+x^3+x^2+x+1).$$

Splošno: če hočemo, da nam rekurzija stopnje m da periodo $2^m - 1$, potem si izberemo nerazcepen f.

Analiza je neodvisna od začetnega neničelnega vektorja.

Kriptoanaliza LFSR tokovne šifre:
uporabimo lahko poznan čistopis, glej nalogo 1.27.

2. poglavje

Shannonova teorija

- Popolna varnost
- Entropija
- Lastnosti entropije
- Ponarejeni ključi
  in enotska razdalja
- Produktne šifre

Popolna varnost

Omenimo nekaj osnovnih principov za študij varnosti nekega kriptosistema:

- **računska varnost**,
- **brezpogojna varnost**,
- **dokazljiva varnost**.

Kriptosistem je **računsko varen**, če tudi najboljši algoritem za njegovo razbitje potrebuje vsaj N operacij, kjer je N neko konkretno in zelo veliko število.

Napadalec (Oskar) ima na razpolago 18 Crayev, 4000 Pentium PC-jev in 200 DEC Alpha mašin (Oskar je "računsko omejen").

Kriptosistem je **dokazljivo varen** (angl. provable secure), če lahko pokažemo, da se njegova varnost zreducira na varnost kriptosistema, ki je zasnovan na dobro preštudiranem problemu.

Ne gre torej za absolutno varnost temveč *relativno varnost*.

Gre za podobno strategijo kot pri dokazovanju, da je določen problem *NP-poln* (v tem primeru dokažemo, da je dani problem vsaj tako težak kot nekdrugi znani NP-poln problem, ne pokažemo pa, da je absolutno računsko zahteven).

Kriptosistem je **brezpogojno varen**, kadar ga napadalec ne more razbiti, tudi če ima na voljo neomejeno računsko moč.

Seveda je potrebno povedati tudi, kakšne vrste napad imamo v mislih. Spomnimo se, da zamične, substitucijske in Vigenère šifre niso varne pred napadom s poznanim tajnopisom (če imamo na voljo dovolj tajnopisa).

Razvili bomo teorijo kriptosistemov, ki so brezpogojno varni pri napadu s poznanim tajnopisom. Izkaže se, da so vse tri šifre brezpogojno varne, kadar zašifriramo le en sam element čistopisa.

Glede na to, da imamo pri brezpogojni varnosti na voljo neomejeno računsko moč, je ne moremo študirati s pomočjo teorije kompleksnosti, temveč s teorijo verjetnosti.

Naj bosta X in Y slučajni spremenljivki,
naj bo $p(x) := P(X = x)$, $p(y) := P(Y = y)$ in
$p(x \cap y) := P((X = x) \cap (Y = y))$ produkt dogodkov.

Slučajni spremenljivki X in Y sta **neodvisni**, če in samo, če je $p(x \cap y) = p(x)p(y)$ za vsak $x \in X$ in $y \in Y$.

Omenimo še zvezo med pogojno verjetnostjo in pa verjetnostjo produkta dveh dogodkov oziroma **Bayesov izrek o pogojni verjetnosti**:

$$p(x \cap y) = p(x/y)p(y) = p(y/x)p(x),$$

iz katerega sledi, da sta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni, če in samo, če je $p(x/y) = p(x)$ za vsak x in y.

Privzemimo, da vsak ključ uporabimo za največ eno šifriranje, da si Anita in Bojan izbereta ključ K z neko fiksno verjetnostno porazdelitvijo $p_{\mathcal{K}}(K)$ (pogosto enakomerno porazdelitvijo, ni pa ta nujna) in naj bo $p_{\mathcal{P}}(x)$ verjetnost čistopisa x.

Končno, predpostavimo, da sta izbira čistopisa in ključa neodvisna dogodka.

Porazdelitvi $\mathcal{P}$ in $\mathcal{K}$ inducirata verjetnostno porazdelitev na $\mathcal{C}$. Za množico vseh tajnopisov za ključ K

$$C(K) = \{e_K(x) \mid x \in \mathcal{P}\}$$

velja

$$p_{\mathcal{C}}(y) = \sum_{\{K \mid y \in C(K)\}} p_{\mathcal{K}}(K)\, p_{\mathcal{P}}(d_k(y))$$

in

$$P(Y = y/X = x) = \sum_{\{K \mid x = d_K(y)\}} p_{\mathcal{K}}(K).$$

Sedaj lahko izračunamo pogojno verjetnost $p_{\mathcal{P}}(x/y)$, tj. verjetnost, da je x čistopis, če je y tajnopis

$$P(X = x/Y = y) = \frac{p_{\mathcal{P}}(x) \times \sum_{\{K \mid x = d_K(y)\}} p_{\mathcal{K}}(K)}{\sum_{\{K \mid y \in C(K)\}} p_{\mathcal{K}}(K)\, p_{\mathcal{P}}(d_k(y))}$$

in opozorimo, da jo lahko izračuna vsakdo, ki pozna verjetnostni porazdelitvi $\mathcal{P}$ in $\mathcal{K}$.

Primer: $\mathcal{P} = \{a, b\}$ in $\mathcal{K} = \{K_1, K_2, K_3\}$:

$$p_{\mathcal{P}}(a) = 1/4 \ \text{ in } \ p_{\mathcal{P}}(b) = 3/4.$$

$$p_{\mathcal{K}}(K_1) = 1/2 \ \text{ in } \ p_{\mathcal{K}}(K_2) = p_{\mathcal{K}}(K_3) = 1/4.$$

Enkripcija pa je definirana z $e_{K_1}(a) = 1$, $e_{K_1}(b) = 2$; $e_{K_2}(a) = 2$, $e_{K_2}(b) = 3$; $e_{K_3}(a) = 3$, $e_{K_3}(b) = 4$.

Potem velja

$$p_{\mathcal{C}}(1) = \frac{1}{8}, \ \ p_{\mathcal{C}}(2) = \frac{7}{16}, \ \ p_{\mathcal{C}}(3) = \frac{1}{4}, \ \ p_{\mathcal{C}}(3) = \frac{3}{16}.$$

$$p_{\mathcal{P}}(a/1) = 1, \ p_{\mathcal{P}}(a/2) = \frac{1}{7}, \ p_{\mathcal{P}}(a/3) = \frac{1}{4}, \ p_{\mathcal{P}}(a/4) = 0.$$

Šifra $(\mathcal{P}, \mathcal{K}, \mathcal{C})$ je **popolnoma varna**, če je

$$P(X = x/Y = y) = p_{\mathcal{P}}(x) \quad \text{za vse} \quad x \in \mathcal{P} \quad \text{in} \quad y \in \mathcal{C},$$

tj. "končna" verjetnost, da smo začeli s tajnopisom x pri danem čistopisu y, je identična z "začetno" verjetnostjo čistopisa x.

V prejšnjem primeru je ta pogoj zadoščen samo v primeru $y = 3$, ne pa tudi v preostalih treh.

Izrek 1. *Če ima vseh 26 ključev pri zamični šifri enako verjetnost 1/26, potem je za vsako verjetnostno porazdelitev čistopisa zamična šifra popolnoma varna.*

Dokaz: $\mathcal{P} = \mathcal{C} = \mathcal{K} = \mathbb{Z}_{26}$, $e_K(x) = x + K \bmod 26$:

$$p_{\mathcal{C}}(y) = \frac{1}{26} \sum_{K \in \mathbb{Z}_{26}} p_{\mathcal{P}}(y - K) = \frac{1}{26},$$

$$P(Y = y/X = x) = p_{\mathcal{K}}(y - x \bmod 26)) = \frac{1}{26}. \quad \blacksquare$$

Torej lahko zaključimo, da zamične šifre ne moremo razbiti, če za vsak znak čistopisa uporabimo nov, naključno izbran ključ.

Sedaj pa preučimo popolno varnost na splošno. Pogoj

$$P(X = x/Y = y) = p_{\mathcal{P}}(x) \quad \text{za vse} \quad x \in \mathcal{P} \quad \text{in} \quad y \in \mathcal{C}$$

je ekvivalenten pogoju

$$P(Y = y/X = x) = p_{\mathcal{C}}(y) \quad \text{za vse} \quad x \in \mathcal{P} \quad \text{in} \quad y \in \mathcal{C}.$$

Privzemimo (BŠS), da je $p_{\mathcal{C}}(y) > 0$ za vse $y \in \mathcal{C}$. Ker je $P(Y = y/X = x) = p_{\mathcal{C}}(y) > 0$ za fiksen $x \in \mathcal{P}$ in za vsak $y \in \mathcal{C}$, za vsak tajnopis $y \in \mathcal{C}$ obstaja vsaj en ključ K, da je $e_K(x) = y$ in zato velja $|\mathcal{K}| \geq |\mathcal{C}|$.

Za vsako simetrično šifro velja $|\mathcal{C}| \geq |\mathcal{P}|$, saj smo privzeli, da je šifriranje injektivno.

V primeru enakosti (v obeh neenakostih) je Shannon karakteriziral popolno varnost na naslednji način:

Izrek 2. *Naj bo $(\mathcal{P}, \mathcal{C}, \mathcal{K}, \mathcal{E}, \mathcal{D})$ simetrična šifra za katero velja $|\mathcal{K}| = |\mathcal{C}| = |\mathcal{P}|$. Potem je le-ta popolnoma varna, če in samo, če je vsak ključ uporabljen z enako verjetnostjo $1/|\mathcal{K}|$ ter za vsak čistopis x in za vsak tajnopis y obstaja tak ključ K, da je $e_K(x) = y$.*

Dokaz: ($\Longrightarrow$) Ker je $|\mathcal{K}| = |\mathcal{C}|$, sledi, da za vsak čistopis $x \in \mathcal{P}$ in za vsak tajnopis $y \in \mathcal{C}$ obstaja tak ključ K, da je $e_K(x) = y$.

Naj bo $n = |\mathcal{K}|$, $\mathcal{P} = \{x_i \,|\, 1 \le i \le n\}$ in naj za fiksen tajnopis y označimo ključe iz $\mathcal{K}$ tako, da je $e_{K_i}(x_i) = y$ za $i \in [1..n]$. Po Bayesovem izreku velja

$$P(X = x_i/Y = y) = \frac{P(Y = y/x = x_i)\, p_{\mathcal{P}}(x_i)}{p_{\mathcal{C}}(y)} = \frac{p_{\mathcal{K}}(K_i)\, p_{\mathcal{P}}(x_i)}{p_{\mathcal{C}}(y)}.$$

Če je šifra popolnoma varna, velja $P(X = x_i/Y = y) = p_{\mathcal{P}}(x_i)$, torej tudi $p_{\mathcal{K}}(K_i) = p_{\mathcal{C}}(y)$, kar pomeni, da je vsak ključ uporabljen z enako verjetnostjo $p_{\mathcal{C}}(y)$ in zato $p_{\mathcal{K}}(K) = 1/|\mathcal{K}|$.

Dokaz obrata poteka na podoben način kot v prejšnjem izreku. ■

Najbolj znana realizacija popolne varnosti je **Vernamov enkratni ščit**, ki ga je leta 1917 patentiral Gilbert Vernam za avtomatizirano šifriranje in odšifriranje telegrafskih sporočil.

Naj bo $\mathcal{P} = \mathcal{C} = \mathcal{K} = (\mathbb{Z}_2)^n$, $n \in \mathbb{N}$,

$$e_K(x) = x \text{ XOR } K,$$

odšifriranje pa je identično šifriranju.

Shannon je prvi po 30-ih letih dokazal, da ta sistem res ne moremo razbiti.

Slabi strani te šifre sta $|\mathcal{K}| \ge |\mathcal{P}|$ in dejstvo, da moramo po vsaki uporabi zamenjati ključ.

Entropija

Doslej nas je zanimala popolna varnost in smo se omejili na primer, kjer uporabimo nov ključ za vsako šifriranje.

Sedaj pa nas zanimata šifriranje vse več in več čistopisa z istim ključem ter verjetnost uspešnega napada z danim tajnopisom in neomejenim časom.

Leta 1948 je Shannon vpeljal v teorijo informacij *entropijo*, tj. matematično mero za informacije oziroma negotovosti in jo izrazil kot funkcijo verjetnostne porazdelitve.

Naj bo X slučajna spremenljivka s končno zalogo vrednosti in porazdelitvijo $p(X)$.

Kakšno informacijo smo pridobili, ko se je zgodil dogodek glede na porazdelitev $p(X)$

oziroma ekvivalentno,

če se dogodek še ni zgodil, kolikšna je negotovost izida?

To količino bomo imenovali **entropija** spremenljivke X in jo označili s $H(X)$.

Primer: metanje kovanca, $p(\text{cifra}) = p(\text{grb}) = 1/2$.

Smiselno je reči, da je entropija enega meta en bit.

Podobno je entropija n-tih metov n, saj lahko rezultat zapišemo z n biti.

Še en primer: slučajna spremenljivka X

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Najbolj učinkovito zakodiranje izidov je x_1 z 0, x_2 z 10 in x_3 z 11, povprečje pa je

$$\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{4} \times 2 = 3/2.$$

Vsak dogodek, ki se zgodi z verjetnostjo 2^{-n}, lahko zakodiramo z n biti.

Posplošitev: dogodek, ki se zgodi z verjetnostjo p, lahko zakodiramo s približno $-\log_2 p$ biti.

Naj bo X slučajna spremenljivka s končno zalogo vrednosti in porazdelitvijo

$$p(X) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}.$$

Potem **entropijo porazdelitve** $p(X)$ definiramo s

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i = -\sum_{i=1}^{n} p(X{=}x_i) \log_2 p(X{=}x_i).$$

Za $p_i = 0$ količina $\log_2 p_i$ ni definirana, zato seštevamo samo po neničelnih p_i (tudi $\lim_{x\to 0} x \log_2 x = 0$).

Lahko bi izbrali drugo logaritemsko bazo, a bi se entropija spremenila le za konstantni faktor.

Če je $p_i = 1/n$ za $1 \le i \le n$, potem je $H(X) = \log_2 n$.

Velja $H(X) \ge 0$, enačaj pa velja, če in samo, če je $p_i = 1$ za nek i in $p_j = 0$ za $j \ne i$.

Sedaj pa bomo študirali entropijo različnih komponent simetrične šifre: $H(K)$, $H(P)$, $H(C)$.

Za primer $\mathcal{P} = \{a, b\}$ in $\mathcal{K} = \{K_1, K_2, K_3\}$:

$$p_{\mathcal{P}}(a) = 1/4 \text{ in } p_{\mathcal{P}}(b) = 3/4.$$

$$p_{\mathcal{K}}(K_1) = 1/2 \text{ in } p_{\mathcal{K}}(K_2) = p_{\mathcal{K}}(K_3) = 1/4$$

izračunamo

$$H(P) = -\frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\log_2\frac{3}{4} = 2 - \frac{3}{4}\log_2 3 \approx .81\ .$$

in podobno $H(K) = 1.5$ ter $H(C) \approx 1.85$.

Lastnosti entropije

Realna funkcija f je **(striktno) konkavna** na intervalu I, če za vse (različne) $x, y \in I$ velja

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \ (>) \ \geq \ \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Jensenova neenakost: če je f zvezna in striktno konkavna funkcija na intervalu I in $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ za $a_i > 0$, $1 \leq i \leq n$, potem je

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i),$$

enakost pa velja, če in samo, če je $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Izrek 3. *$H(X) \leq \log_2 n$, enakost pa velja, če in samo, če je $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 1/n$.*

Izrek 4. *$H(X,Y) \leq H(X) + H(Y)$, enakost pa velja, če in samo, če sta X in Y neodvisni spremenljivki.*

Dokaz izreka 4: Naj bo

$$p(X) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix}, \quad p(Y) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{pmatrix}$$

in $r_{ij} = p((X=x_i) \cap (Y=y_j))$ za $i \in [1..m]$, $j \in [1..n]$.

Potem za $i \in [1..m]$ in $j \in [1..n]$ velja

$$p_i = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} \quad \text{in} \quad q_j = \sum_{i=1}^{m} r_{ij}$$

ter

$$H(X) + H(Y) = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} r_{ij} \log_2 p_i q_j$$

in

$$H(X,Y) - H(X) - H(Y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} r_{ij} \log_2 \frac{p_i q_j}{r_{ij}}$$

$$(\text{Jensen}) \leq \log_2 \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i q_j = \log_2 1 = 0.$$

Enakost velja, če in samo, če je $p_i q_j / r_{ij} = c$ za $i \in [1..m]$ in $j \in [1..n]$.

Upoštevajmo še

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} r_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_i q_j = 1$$

in dobimo $c = 1$ oziroma za vse i in j

$$p((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = p(X = x_i)\, p(Y = y_j),$$

kar pomeni, da sta spremenljivki X in Y neodvisni. ■

Za slučajni spremenljivki X in Y definiramo **pogojni entropiji**

$$H(X/y) = -\sum_{x} p(x/y) \log_2 p(x/y)$$

in

$$H(X/Y) = -\sum_{y}\sum_{x} p(y) p(x/y) \log_2 p(x/y).$$

Le-ti merita povprečno informacijo spremenljivke X, ki jo odkrijeta y oziroma Y.

Izrek 5. *$H(X,Y) = H(Y) + H(X/Y)$.*

Dokaz: Po definiciji je $P(X=x_i/Y=y_j) = r_{ij}/q_j$ in $H(Y) + H(X/Y) =$

$$= -\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} r_{ij} \log_2 q_j - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} q_j\, r_{ij}/q_j \, \log_2 r_{ij}/q_j \quad ■$$

Iz izrekov 4 in 5 sledi:

Posledica 6. *$H(X/Y) \leq H(X)$, enakost pa velja, če in samo, če sta X in Y neodvisni spremenljivki.*

Ponarejeni ključi in enotska razdalja

Pogojna verjetnost $H(K/C)$ meri, koliko informacije o ključu je odkrito s tajnopisom.

Izrek 7. *Naj bo $(\mathcal{P}, \mathcal{C}, \mathcal{K}, \mathcal{E}, \mathcal{D})$ simetrična šifra. Potem velja $H(K/C) = H(K) + H(P) - H(C)$.*

Dokaz: Velja $H(K,P,C) = H(C/(K,P)) + H(K,P)$. Ker ključ in čistopis natanko določata tajnopis, je $H(C/K,P) = 0$.

Ker sta P in K neodvisni spremenljivki, dobimo $H(K,P,C) = H(P) + H(K)$ in podobno tudi $H(K,P,C) = H(K,C)$ ter uporabimo še izrek 5. ■

Napadalec privzame, da je čistopis "naravni" jezik (npr. angleščina) in na ta način odpiše mnoge ključe. Vseeno pa lahko ostane še mnogo ključev (med katerimi je le en pravi), ki jih bomo, razen pravega ključa, imenovali **ponarejeni** (angl. spurious).

Naš cilj bo oceniti število ponarejenih ključev.

Naj bo H_L mera povprečne informacije na črko (angl. per letter) v "smiselnem" čistopisu (sledi bolj natančna definicija).

Če so vse črke enako verjetne, je

$$H_L = \log_2 26 \approx 4.70.$$

Kot aproksimacijo *prvega reda* bi lahko vzeli $H(P)$. V primeru angleškega jezika dobimo $H(P) \approx 4.19$.

Tudi zaporedne črke v jeziku niso neodvisne, njihove korelacije pa zmanjšajo entropijo. Za aproksimacijo *drugega reda* bi lahko izračunali entropijo porazdelitve parov črk in potem delili z dve, kajti H_L meri entropijo jezika L na črko.

V splošnem, naj bo P^n slučajna spremenljivka, katere verjetnostna porazdelitev je enaka verjetnostni porazdelitvi n-teric v čistopisu.

Potem je **entropija za naravni jezik** L definirana s

$$H_L = \lim_{n\to\infty} \frac{H(P^n)}{n},$$

odvečnost jezika L pa z

$$R_L = 1 - \frac{H_L}{\log_2 |\mathcal{P}|}.$$

H_L meri entropijo jezika L na črko.

Entropija naključnega jezika je $\log_2 |\mathcal{P}|$.

$R_L \in [0, 1)$ meri kvocient "odvečnih znakov" in je 0 v primeru naključnega jezika.

Za angleški jezik je $H(P^2)/2 \approx 3.90$.

Empirični rezultati kažejo, da je $1.0 \le H_L \le 1.5$.

Če ocenimo H_L z 1.25, potem je $R_L \approx .75$, kar pomeni, da je angleščina 75% odvečna

(tj. tekst bi lahko zakodirali le z 1/4 prvotnega teksta).

Podobno kot P^n definiramo še C^n in za $y \in C^n$ še

$$K(y) = \{K \in \mathcal{K} \mid \exists x \in P^n,\ p_{\mathcal{P}^n}(x) > 0,\ e_K(x) = y\},$$

tj. $K(y)$ je množica ključev, za katere je y smiselno šifriranje čistopisa dolžine n,

tj. množica verjetnih ključev, za katere je y tajnopis.

Matematično upanje ponarejenih ključev je torej

$$\overline{s}_n = \sum_{y\in\mathcal{C}^n} p(y)(|K(y)| - 1) = \sum_{y\in\mathcal{C}^n} p(y)|K(y)| \ - \ 1.$$

Izrek 8. *Če je $(\mathcal{P}, \mathcal{C}, \mathcal{K}, \mathcal{E}, \mathcal{D})$ šifra za katero je $|\mathcal{C}| = |\mathcal{P}|$ in so vsi ključi med seboj enakovredni, potem za tajnopis z n znaki (n je dovolj velik) in za matematično upanje ponarjenih ključev $\overline{s}_n$ velja*

$$\overline{s}_n \ge \frac{|\mathcal{K}|}{|\mathcal{P}|^{nR_L}} - 1.$$

Dokaz: Iz izreka 7 sledi

$$H(K/C^n) = H(K) + H(P^n) - H(C^n).$$

Poleg ocene $H(C^n) \le n \log_2 |\mathcal{C}|$ velja za dovolj velike n tudi ocena $H(P^n) \approx nH_L = n(1 - R_L) \log_2 |\mathcal{P}|$.

Za $|\mathcal{C}| = |\mathcal{P}|$ dobimo

$$H(K/C^n) \ge H(K) - nR_L \log_2 |\mathcal{P}|.$$

Ocenjeno entropijo povežemo še s ponarejenimi ključi

$$H(K/C^n) = \sum_{y\in\mathcal{C}^n} p(y)H(K/y) \le \sum_{y\in\mathcal{C}^n} p(y) \log_2 |K(y)|$$

$$\le \log_2 \sum_{y\in\mathcal{C}^n} p(y)|K(y)| = \log_2(\overline{s}_n + 1). \ \blacksquare$$

Desna stran neenakosti v zadnjem izreku gre z večanjem števila n eksponentno proti 0 (to ni limita, števila $|\mathcal{K}|$, $|\mathcal{P}|$ in R_L so fiksna, število $|\mathcal{K}|$ pa je običajno veliko v primerjavi s $|\mathcal{P}|^{R_L} > 1$).

Enotska razdalja simetrične šifre je tako število n, označeno z n_0, za katerega postane matematično upanje ponarejenih ključev nič, tj. povprečna dolžina tajnopisa, ki jo napadalec potrebuje za računanje ključa pri neomejenem času.

Velja $$n_0 \ \approx \ \frac{\log_2 |\mathcal{K}|}{R_L \log_2 |\mathcal{P}|}.$$

V primeru zamenjalnega tajnopisa sta $|\mathcal{P}| = 26$ in $|\mathcal{K}| = 26!$. Če vzamemo $R_L = .75$, potem je enotska razdalja

$$n_0 \ \approx \ \frac{88.4}{.75 \times 4.7} \ \approx \ 25\ .$$

Produktne šifre

Še ena Shannonova ideja v članku iz leta 1949 igra danes pomembno vlogo, predvsem pri simetričnih šifrah.

Zanimali nas bodo šifre, za katere $\mathcal{C} = \mathcal{P}$,

tj. **endomorfne šifre**.

Naj bosta $S_i = (\mathcal{P}, \mathcal{P}, \mathcal{K}_i, \mathcal{E}_i, \mathcal{D}_i)$, $i = 1, 2$, endomorfni simetrični šifri. Potem je **produkt** sistemov S_1 in S_2, označen s $S_1 \times S_2$, definiran s

$$(\mathcal{P}, \mathcal{P}, \mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2, \mathcal{E}, \mathcal{D})$$

ter

$$e_{(K_1,K_2)}(x) = e_{K_2}(e_{K_1}(x))$$

in

$$d_{(K_1,K_2)}(y) = d_{K_1}(e_{K_2}(y)).$$

Njegova verjetnostna porazdelitev pa naj bo

$$p_{\mathcal{K}}(K_1, K_2) = p_{\mathcal{K}_1}(K_1) \times p_{\mathcal{K}_2}(K_2),$$

tj. ključa K_1 in K_2 izberemo neodvisno.

Če sta M in S zaporedoma multiplikativni tajnopis in zamični tajnopis, potem je $M \times S$ afin tajnopis. Malce težje je pokazati, da je tudi tajnopis $S \times M$ afin tajnopis. Ta dva tajnopisa torej **komutirata**.

Vsi tajnopisi ne komutirajo, zato pa je produkt asociativna operacija:

$$(S_1 \times S_2) \times S_3 = S_1 \times (S_2 \times S_3).$$

Če je $(S \times S =)\ S^2 = S$, pravimo, da je sistem **idempotenten**.

Zamični, zamenjalni, afin, Hillov, Vigenèrov in permutacijski tajnopisi so vsi idempotentni.

Če simetrična šifra ni idempotentna, potem se zna zgoditi, da z njeno iteracijo za večkrat povečamo varnost. Na tem so zasnovani **DES** in mnoge druge simetrične šifre.

Če sta simetrični šifri S_1 in S_2 idempotentni in obenem še komutirata, potem se ni težko prepričati, da je tudi produkt $S_1 \times S_2$ idempotentna simetrična šifra.

3. poglavje

Simetrični kriptosistemi

- Bločne šifre, nekaj zgodovine, DES, AES
- Iterativne šifre, zmenjalno-permutacijske mreže
- Produktna šifra in Fiestelova šifra
- Opis šifer DES in AES
- Načini delovanja (ECB, CBC, CFB, OFB) in MAC
- Napadi in velika števila
- 3-DES, DESX in druge simetrične bločne šifre

Bločne šifre

Bločna šifra je simetrična šifra, ki razdeli čistopis na bloke fiksne dolžine (npr. 128 bitov), in šifrira vsak blok posamično (kontrast: *tekoča šifra* zašifrira čistopis po znakih – ponavadi celo po bitih).

Najmodernejše bločne šifre so **produktne šifre**, ki smo jih spoznali v prejšnjem poglavju: komponiranje več enostavnih operacij, katere (vsaka posebej) niso dovolj varne, z namenom, da povečamo varnost: *transpozicije, ekskluzivni ali (XOR), tabele, linearne transformacije, aritmetične operacije, modularno množenje, enostavne substitucije.*

Primeri bločnih produktnih šifer: DES, AES, IDEA.

Nekatere želene lastnosti bločnih šifer

Varnost:

- **razpršitev**: vsak bit tajnopisa naj bo odvisen od vseh bitov čistopisa.
- **zmeda**: zveza med ključem ter biti tajnopisa naj bo zapletena,
- **velikost ključev**: mora biti majhna, toda dovolj velika da prepreči požrešno iskanje ključa.

Učinkovitost

- hitro šifriranje in odšifriranje,
- enostavnost (za lažjo implementacijo in analizo),
- primernost za hardware ali software.

Kratka zgodovina bločnih šifer DES in AES

Konec 1960-ih: IBM – Feistelova šifra in LUCIFER.

1972: NBS (sedaj NIST) izbira simetrično šifro za zaščito računalniških podatkov.

1974: IBM razvije DES, 1975: NSA ga "popravi".

1977: DES sprejet kot US Federal Information Processing Standard (FIPS 46).

1981: DES sprejet kot US bančni standard (ANSI X3.92).

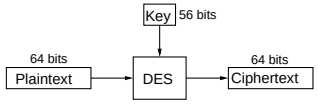
1997: AES (Advanced Encryption Standard) izbor

1999: izbranih 5 finalistov za AES

National Security Agency (NSA)

- www.nsa.gov
- ustanovljena leta 1952,
- neznana sredstva in število zaposlenih (čez 100.000?)
- Signals Intelligence (SIGINT): pridobiva tuje informacije.
- Information Systems Security (INFOSEC): ščiti vse občutljive (classified) informacije, ki jih hrani ali pošilja vlada ZDA,
- zelo vplivna pri določanju izvoznih regulacij ZDA za kriptografske produkte (še posebej šifriranje).

Data Encryption Standard (DES)



Ideja za DES je bila zasnovana pri IBM-u v 60-ih letih (uporabili so koncept Claude Shannona imenovan *Lucifer*).

NSA je zreducirala dolžino ključev s 128 bitov na 56.

V sredini 70-ih let je postal prvi komercijalni algoritem, ki je bil objavljen z vsemi podrobnostmi (FIPS 46-2).

Advanced Encryption Standard

AES je ime za nov FIPS-ov simetrični (bločni) kriptosistem, ki bo nadomestil DES.

Leta 2000 je zanj *National Institute of Standards and Technology (NIST)* izbral belgijsko bločno šifro **Rijndael**.

Dolžina *ključev* oziroma blokov je 128, 192 ali 256

Uporabljala pa ga tudi ameriška vlada, glej

`http://csrc.nist.gov/encryption/aes/round2/r2report.pdf`.

Običajno uporabljamo **iterativne šifre**.

Tipični opis:

- krožna funkcija,
- razpored ključev,
- šifriranje skozi N_r podobnih krogov.

Naj bo K naključni binarni ključ določene dolžine.

K uporabimo za konstrukcijo podključev za vsak krog s pomočjo *javno* znanega algoritma.

Imenujemo jih **krožni ključi:** $K^1, \ldots, K^{N_r}$.

Seznamu krožnih ključev $(K^1, \ldots, K^{N_r})$ pa pravimo **razpored ključev**.

Krožna funkcija g ima dva argumenta:

(i) krožni ključ (K^r) in (ii) *tekoče stanje* (w^{r-1}).

Naslednje stanje je definirano z $w^r = g(w^{r-1}, K^r)$.

Začetno stanje, w_0, naj bo čistopis x.

Potem za tajnopis, y, vzamemo stanje po N_r krogih:

$$y = g(g(\ldots g(g(x, K^1), K^2) \ldots, K^{N_r-1})K^{N_r}).$$

Da je odšifriranje možno, mora biti funkcija g injektivna za vsak fiksen ključ K_i, tj. $\exists\, g^{-1}$, da je:

$$g^{-1}(g(w, K), K) = w, \qquad \text{za vse } w \text{ in } K.$$

Odšifriranje opravljeno po naslednjem postopku:

$$x = g^{-1}(g^{-1}(\ldots g^{-1}(g^{-1}(y, K^{N_r}), K^{N_r-1}) \ldots, K^2)K^1).$$

Zamenjalno-permutacijske mreže

(angl. *substitution-permutation network* – (**SPN**)).

Čistopis $\mathcal{P}$ in tajnopis $\mathcal{C}$ so binarni vektorji dolžine ℓm, $\ell, m \in \mathbb{N}$ (tj. ℓm je dolžina bloka).

SPN je zgrajen iz dveh komponent (zamenjave in permutacije):

$$\pi_S \;:\; \{0,1\}^\ell \longrightarrow \{0,1\}^\ell,$$
$$\pi_P \;:\; \{0,\ldots,\ell m\} \longrightarrow \{0,\ldots,\ell m\}.$$

Permutacijo π_S imenujemo **S-škatla** in z njo zamenjamo ℓ bitov z drugimi ℓ biti.

Permutacija π_P pa permutira ℓm bitov.

Naj bo $x = (x_1, \ldots, x_{\ell m})$ binarno zaporedje, ki ga lahko smatramo za spoj m ℓ-bitnih podzaporedij označenih z $x_{(1)}, \ldots, x_{(m)}$.

SPN ima N_r krogov, v vsakem (razen zadnjem, ki je bistveno drugačen) opravimo m zamenjav z π_S in nato uporabimo še π_P. Pred vsako zamenjavo vključimo krožni ključ z XOR operacijo.

SPN šifra
$\ell, m, N_r \in \mathbb{N}$, π_S in π_P permutaciji, $\mathcal{P} = \mathcal{C} = \{0,1\}^{\ell m}$ in $\mathcal{K} \subseteq (\{0,1\}^{\ell m})^{N_r+1}$, ki se sestoji iz vseh možnih razporedov ključev izpeljanih iz ključa K z uporabo algoritma za generiranje razporeda ključev.
Šifriramo z algoritmom SPN.

Alg. : *SPN*$(x, \pi_S, \pi_P, (K^1, \ldots, K^{N_r+1}))$

$w^0 := x$

for $r := 1$ **to** $N_r - 1$ **do** *(krožno mešanje ključev)*

$\quad u^r := w^{r-1} \oplus K^r$

$\quad$ **for** $i := 1$ **to** m **do** $\quad v^r_{(i)} := \pi_S(u^r_{(i)})$

$\quad w^r := (v^r_{\pi_P(1)}, \ldots, v^r_{\pi_P(\ell m)})$

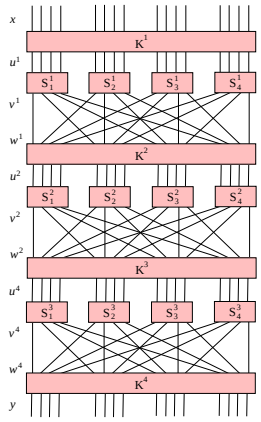
(zadnji krog)

$u^{N_r} := w^{N_r-1} \oplus K^{N_r}$

for $i := 1$ **to** m **do** $\quad v^{N_r}_{(i)} := \pi_S(u^{N_r+1}_{(i)})$

$y := v^{N_r} \oplus K^{N_r+1}$

output (y)



Primer: naj bo $\ell = m = N_r = 4$, permutaciji π_S in π_P pa podani s tabelami:

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
$\pi_S(z)$	E	4	D	1	2	F	B	8	3	A	6	C	5	9	0	7

ter

z	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$\pi_P(z)$	1	5	9	13	2	6	10	14	3	7	11	15	4	8	12	16

Naj bo ključ $K = (k_1, \ldots, k_{32}) \in \{0,1\}^{32}$ definiran z

$$K = \texttt{0011 1010 1001 0100 1101 0110 0011 1111},$$

sedaj pa izberimo še razpored ključev tako, da je za $1 \le r \le 5$, krožni ključ K^r izbran kot 16 zaporednih bitov ključa K z začetkom pri k_{4r-3}:

$$\begin{aligned}
K^1 &= 0011\ 1010\ 1001\ 0100\\
K^2 &= 1010\ 1001\ 0100\ 1101\\
K^3 &= 1001\ 0100\ 1101\ 0110\\
K^4 &= 0100\ 1101\ 0110\ 0011\\
K^5 &= 1101\ 0110\ 0011\ 1111
\end{aligned}$$

Potem šifriranje čistopisa

$$x = 0010\ 0110\ 1011\ 0111$$

poteka v naslednjem vrstnem redu.

$$\begin{aligned}
w^0 &= 0010\ 0110\ 1011\ 0111, & K^1 &= 0011\ 1010\ 1001\ 0100\\
u^1 &= 0001\ 1100\ 0010\ 0011, & v^1 &= 0100\ 0101\ 1101\ 0001\\
w^1 &= 0010\ 1110\ 0000\ 0111, & K^2 &= 1010\ 1001\ 0100\ 1101\\
u^2 &= 1000\ 0111\ 0100\ 1010, & v^2 &= 0011\ 1000\ 0010\ 0110\\
w^2 &= 0100\ 0001\ 1011\ 1000, & K^3 &= 1001\ 0100\ 1101\ 0110\\
u^3 &= 1101\ 0101\ 0110\ 1110, & v^3 &= 1001\ 1111\ 1011\ 0000\\
w^3 &= 1110\ 0100\ 0110\ 1110, & K^4 &= 0100\ 1101\ 0110\ 0011\\
u^4 &= 1010\ 1001\ 0000\ 1101, & v^4 &= 0110\ 1010\ 1110\ 1001\\
K^5 &= 1101\ 0110\ 0011\ 1111, & y &= 1011\ 1100\ 1101\ 0110
\end{aligned}$$

Možno so številne varijacije SPN šifer.

Na primer, namesto ene S-škatle lahko uporabimo različne škatle. To lahko vidimo pri DES-u, ki uporabi 8 različnih škatel.

Zopet druga možnost je uporabiti obrnljive linearne transformacije, kot zamenjavo za permutacije ali pa samo dodatek. Tak primer je AES.

Feistelova šifra

Feistelova šifra: r krogov (rund)

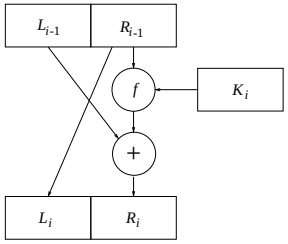
$$(L_{i-1}, R_{i-1}) \xrightarrow{K_i} (L_i, R_i).$$

kjer je $L_i = R_{i-1}$ in $R_i = L_{i-1} \oplus f(R_{i-1}, K_i)$, in smo podključe K_i dobili iz osnovnega ključa K.

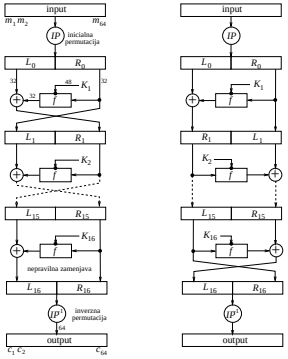
Končamo z (R_r, L_r) (in ne z (L_r, R_r)), zato je šifriranje enako odšifriranju, le da ključe uporabimo v obratnem vrstnem redu.

Funkcija f je lahko produktna šifra in ni nujno obrnljiva.

En krog



Opis šifre DES



DES-ove konstante

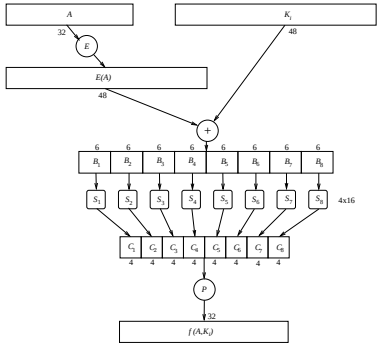
začetna in končna permutacija: IP, IP^{-1}

razširitev: E (nekatere bite ponovimo), permutacija P

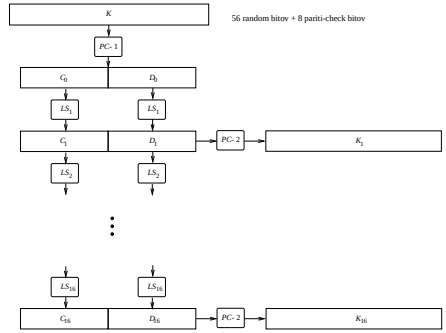
S-škatle: $S_1, S_2, \ldots, S_8$
(tabele: 4×16, z elementi $0 - 15$)

permutacije za gen. podključev: $PC - 1$, $PC - 2$

DES-ova funkcija



Računanje DES-ovih ključev



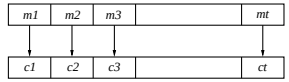
20 let je DES predstavljal delovnega konja kriptografije (bločnih šifer).

- do leta 1991 je NBS sprejel 45 hardwarskih implementacij za DES
- geslo (PIN) za bankomat (ATM)
- ZDA (Dept. of Energy, Justice Dept., Federal Reserve System)

Načini delovanja simetričnih šifer

– electronic codebook mode **(ECB)**
– cipher block chaining mode **(CBC)**
– cipher feedback mode **(CFB)**
– output feedback mode **(OFB)**

Pri **ECB** šifriramo zaporedoma blok po blok: $c = c_1, c_2, \ldots, c_t$, kjer je $c_i = E_k(m_i)$.



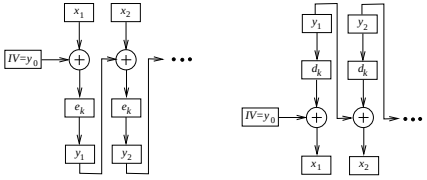
Odšifriranje: $m_i = D_k(c_i)$, $i = 1, 2, \ldots, t$.

Slabost: identični bloki čistopisa se (pri istem ključu) zašifrirajo v identične bloke tajnopisa.

Cipher Block Chaining mode – CBC

čistopis/tajnopis: 64 bitni bloki $x_1, x_2, \ldots / y_1, y_2, \ldots$

Šifriranje: $y_0 := \mathrm{IV}$, $y_i := e_K(y_{i-1} \oplus x_i)$ za $i \geq 1$.



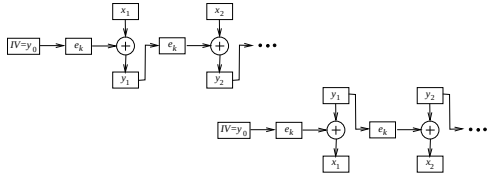
Odšifriranje: $y_0 := \mathrm{IV}$, $x_i := y_{i-1} \oplus d_K(y_i)$ za $i \geq 1$.

Identičena čistopisa z različnimi IV dasta različen tajnopis. Eno-bitna napaka pri tajnopisu pokvari le odšifriranje dveh blokov.

Cipher Feedback mode – CFB

čistopis/tajnopis: 64 bitni bloki $x_1, x_2, \ldots / y_1, y_2, \ldots$

$y_0 := \mathrm{IV}$, šifriranje: $z_i := e_K(y_{i-1})$, $y_i := y_{i-1} \oplus x_i$, $i \geq 1$.



Odšifriranje ($y_0 := \mathrm{IV}$, $x_0 = d_K(\mathrm{IV})$):

$$z_i := d_K(x_{i-1}) \quad \text{in} \quad x_i := y_i \oplus z_i \quad \text{za} \quad i \geq 1.$$

CFB se uporablja za preverjanje celovitosti sporočila (angl. message authentication code - MAC).

Output Feedback mode – OFB

čistopis/tajnopis: 64 bitni bloki $x_1, x_2, \ldots / y_1, y_2, \ldots$

Inicializacija: $z_0 := \mathrm{IV}$, šifriranje:

$$z_i := e_K(z_{i-1}) \quad \text{in} \quad y_i := x_i \oplus z_i \quad \text{za} \quad i \geq 1.$$

Odšifriranje: ($z_0 := \mathrm{IV}$)

$$z_i := e_K(z_{i-1}) \quad \text{in} \quad x_i := y_i \oplus z_i \quad \text{za} \quad i \geq 1.$$

OFB se uporablja za satelitske prenose.

Napadi na šifro DES

Požrešni napad: preverimo vseh 2^{56} ključev.

Leta 1993 Michael J. Wiener, Bell-Northern Research, Kanada, predstavi učinkovito iskanje DES ključa:

- **diferenčna kriptoanaliza** z 2^{47} izbranimi čistopisi (Biham in Shamir 1989)
  – je učinkovita tudi na nekaterih drugih bločnih šifrah,
- **linearna kriptoanaliza** z 2^{47} poznanimi čistopisi (Matsui 1993):

Slednja napada sta statistična, saj potrebujeta velike količine čistopisa in ustreznega tajnopisa, da določita ključ. Pred leti sta bila napada zanimiva le teoretično.

Wienerjev cilj je bil precizna ocena časa in denarja potrebnega za graditev čipov za iskanje DES ključa.

Požrešna metoda na prostor ključev: 2^{56} korakov je zlahka paralelizirana.

Dan je par čistopis-tajnopis (P, C) ter začetni ključ K. Registri za vsako iteracijo so ločeni, tako da je vse skupaj podobno tekočemu traku:

- hitrost 50 MHz
- cena $10.50 na čip
- 50 milijonov ključev na sekundo
- skupaj: $100 tisoč, 5760 čipov, rabi 35 ur

Pri linearni kriptoanalizi hranjenje parov zavzame 131,000 Gbytov. Implementirano leta 1993: 10 dni na 12 mašinah.

Po odkritju diferenčne kriptoanalize je Don Coppersmith priznal, da je IBM v resnici poznal ta napad (ne pa tudi linearno kriptoanalizo) že ko so razvijali DES:

"Po posvetovanju z NSA, smo se zavedali, da utegne objava kriterijev načrtovanja odkriti tehniko kriptoanalize. To je močno sredstvo, ki se ga da uporabiti proti mnogim tajnopisom.
To bi zmanjšalo prednost ZDA pred drugimi na področju kriptografije."

Novejši rezultati napadov

DES izivi pri RSA Security (3 poznani PT/CT pari):

The unkn	own mess	age is:	????????

junij 1997: razbito z internetnim iskanjem (3m).

julij 1998: razbito v treh dneh z DeepCrack mašino (1800 čipov; $250,000).

jan. 1999: razbita v 22 h, 15 min (DeepCrack + porazdeljena.mreža).

V teku (porazdeljena.mreža): RC5 – 64-bitni izziv:

- pričeli konec 1997; trenutna hitrost: 2^{36} ključev/sec (2^{25} secs/leto; pričakovani čas: ≤ 8 let).

Implementacijski napadi na DES

Napadi s pomočjo diferenčne analize porabe moči (angl. differential power analysis (**DPA**) attacks):

- Kocher, Jaffe, Jun 1999,
- procesorjeva poraba moči je odvisna od instrukcij,
- merimo porabo moči inštrukcij, ki se izvedejo v 16-ih krogih DES-a
- ≈1000 tajnopisa zadoščajo za odkritje tajnega ključa.

Napadi s pomočjo diferenčne analize napak (angl. differential fault analysis (**DFA**) attacks):

- Biham, Shamir 1997.
- napad: zberi naključne napake v 16-ih krogih DES-a.
- ≈200 napačnih odšifriranj zadošča za razkritje tajnega ključa.

Vse o napadih je veljalo za ECB način.

Isti čipe se da uporabiti tudi za druge načine, cena in čas pa se nekoliko povečata. Recimo po Wienerju za CBC način rabimo $1 milijon in 4 ure.

Varnost DES-a lahko enostavno povečamo, če uporabimo **3-DES** (zakaj ne 2-DES?).

$$\mathrm{DES_E(P, K_1) \longrightarrow DES_D(DES_E(P, K_1), K_2)}$$
$$\mathrm{\longrightarrow DES_E(DES_D(DES_E(P, K_1), K_2), K_3)}$$

Za $K_1 = K_2 = K_3$ dobimo običajni DES.

Običajno pa zamenjamo K_3 s K_1 in dobimo približno za faktor 10^{13} močnejši sistem.

Kako veliko je VELIKO?

sekund v enem letu (živimo "le" 2-3 milijarde sekund)	$\approx 3 \times 10^7$
starost našega sončnega sistema (v letih)	$\approx 6 \times 10^9$
urinih ciklov na leto (200 MHz)	$\approx 6.4 \times 10^{15}$
01-zaporedij dolžine 64	$\approx 2^{64} \approx 1.8 \times 10^{19}$
01-zaporedij dolžine 128	$\approx 2^{128} \approx 3.4 \times 10^{38}$
01-zaporedij dolžine 256	$\approx 2^{256} \approx 1.2 \times 10^{77}$
75 številčnih praštevil	$\approx 5.2 \times 10^{72}$
elektronov v vsem vesolju	$\approx 8.37 \times 10^{77}$

mega (M)	giga (G)	tera (T)	peta (P)	exa (E)
10^6	10^9	10^{12}	10^{15}	10^{18}

Računska moč

za naše potrebe bomo privzeli, da se smatra:

- 2^{40} operacij za *lahko*,
- 2^{56} operacij za *dosegljivo*,
- 2^{64} operacij za *komaj da dosegljivo*,
- 2^{80} operacij za *nedosegljivo*,
- 2^{128} operacij za *popolnoma nedosegljivo*.

3-DES je trikrat počasnejši od DES-a.

To je pogosto nesprejemljivo, zato je leta 1984 Ron Rivest predlagal **DESX**:

$$\mathrm{DESX_{k.k1.k2}(x) = k2 \oplus DES_k(k1 \oplus x).}$$

DESX ključ $K = k.k1.k2$ ima

$$56 + 64 + 64 = 184 \text{ bitov.}$$

DESX trik onemogoči preizkušanje vseh mogočih ključev (glej P. Rogaway, 1996).
Sedaj rabimo več kot 2^{60} izbranega čistopisa.

Hitrost

Preneel, Rijmen, Bosselaers 1997.

Softwarski časi za implementacijo na 90MHz Pentiumu.

šifra	velikost ključa (biti)	hitrost
DES	56	10 Gbits/sec (ASIC chip)
DES	56	16.9 Mbits/sec
3DES	128	6.2 Mbits/sec
RC5-32/12	128	38.1 Mbits/sec
Arcfour	variable	110 Mbits/sec

Opis šifre AES

Dolžina blokov je 128 bitov, ključi imajo tri možne dolžine: 128 ($N_r = 10$), 192 ($N_r = 12$) in 256 ($N_r = 14$),

1. *Za dan čistopis x, inicializira* `State` *z x in opravi* AddRoundKey, *ki z operacijo XOR prišteje* `RoundKey` *k* `State`.
2. *Za vsak od $N_r - 1$ krogov, opravi na* `State` *zaporedoma zamenjavo* SubBytes, *operaciji* ShiftRows *in* MixColumns *ter izvede* AddRoundKey.
3. *Naredi* SubBytes, ShiftRows *in* AddRoundKey.
4. *Za tajnopis y definira* `State`.

Vse operacije v AES so opravljene s pomočjo besed in vse spremenljivke so sestavljene iz določenega števila besed.

Čistopis x je sestavljen iz 16-ih besed: $x_0, \ldots, x_{15}$.

`State` je sestavljen iz (4×4)-dim. matrike besed:

$$\begin{pmatrix} s_{0,0} & s_{0,1} & s_{0,2} & s_{0,3} \\ s_{1,0} & s_{1,1} & s_{1,2} & s_{1,3} \\ s_{2,0} & s_{2,1} & s_{2,2} & s_{2,3} \\ s_{3,0} & s_{3,1} & s_{3,2} & s_{3,3} \end{pmatrix}.$$

`State` dobi vrednosti iz x na naslednji način:

$$\begin{pmatrix} s_{0,0} & s_{0,1} & s_{0,2} & s_{0,3} \\ s_{1,0} & s_{1,1} & s_{1,2} & s_{1,3} \\ s_{2,0} & s_{2,1} & s_{2,2} & s_{2,3} \\ s_{3,0} & s_{3,1} & s_{3,2} & s_{3,3} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_0 & x_4 & x_8 & x_{12} \\ x_1 & x_5 & x_9 & x_{13} \\ x_2 & x_6 & x_{10} & x_{14} \\ x_3 & x_7 & x_{11} & x_{15} \end{pmatrix}.$$

Na vsako besedo bomo gledali kot na dve šestnajstiški števili.

Operacija SubBytes deluje kot zamenjava, permutacija π_S $\{0,1\}^8$, na vsaki besedi od `State` posebej, z uporabo S-škatel.

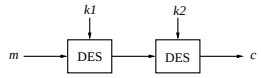
Druge simetrične šifre:

MARS, RC6, Serpent, Twofish
FEAL, IDEA, SAFER,
RC2, RC4, RC5,
LOKI, CAST, 3WAY,
SHARK, SKIPJACK,
GOST, TEA, ...

Dvojno šifriranje

2-DES: ključ $k = (k_1, k_2)$, $\quad k_1, k_2 \in_R \{0,1\}^{56}$.

Šifriranje: $c = \mathrm{DES}_{k_2}(\mathrm{DES}_{k_1}(m))$.



Odšifriranje: $m = \mathrm{DES}^{-1}_{k_1}(\mathrm{DES}^{-1}_{k_2}(c))$.

Dolžina ključa 2-DES-a je 112, torej za požrešno metodo potrebujemo 2^{112} korakov (nemogoče).

Opomba: dolžina blokov se ni spremenila.

Meet-in-the-middle napad na 2-DES

- Iz $c = E_{k_2}(E_{k_1}(m))$ sledi $E^{-1}_{k_2}(c) = E_{k_1}(m)$.
- Input: znani čp/tp pari $(m_1, c_1), (m_2, c_2), (m_3, c_3)$.
- Output: tajni ključ (k_1, k_2).

Za vsak $h_2 \in \{0,1\}^{56}$, izračunaj $E^{-1}_{h_2}(c_1)$ in shrani $[E^{-1}_{h_2}(c_1), h_2]$ v tabelo indeksirano s prvo koordinato.

Za vsak $h_1 \in \{0,1\}^{56}$ naredi naslednje:

1. Izračunaj $E_{h_1}(m_1)$.
2. Išči $E_{h_1}(m_1)$ v tabeli.
3. Za vsako *trčenje* $[E^{-1}_{h_2}(c_1), h_2]$ v tabeli preveri, ali je $E_{h_2}(E_{h_1}(m_2)) = c_2$ in $E_{h_2}(E_{h_1}(m_3)) = c_3$. Če se to zgodi, potem izpiši (h_1, h_2) in se vstavi.

Analiza:

- Število DES operacij je $\approx 2^{56} + 2^{56} = 2^{57}$.
- Pomnilnik: $2^{56}(64 + 56)$ bitov $\approx$ 983,040 TB.

Zaključek:

- 2-DES ima enako učinkovit ključ kot DES.
- 2-DES ni varnejši od DES-a.

Time-memory tradeoff:

- Čas: 2^{56+s} korakov; pomnilnik: 2^{56-s} enot, $1 \leq s \leq 55$. [DN]

Diferenčna kriptoanaliza

- požrešna metoda in metoda z urejeno tabelo
- diferenčna metoda (za 1, 3, 6 in 16 ciklov)

Bločni tajnopisi s simetričnim ključem
se ne uporabljajo samo za šifriranje, temveč tudi za konstrukcijo generatorjev psevdonaključnih praštevil, tokovnih tajnopisov, MAC in hash-funkcij.

1. **Požrešni napad**: preverimo vseh 2^{56} ključev (ne potrebujemo spomina).
2. Sestavimo **urejeno tabelo** $(e_K(x), K)$ za vseh 2^{56} ključev K in poiščemo v njej tak K, da je $y = e_K(x)$. Iskanje y-a je hitro, saj je tabela urejena.

   Ta metoda je praktična samo, če lahko večkrat uporabimo to tabelo.

Danes poznamo dva močna napada na DES: **diferenčno** kriptoanalizo in **linerno** kriptoanalizo.

Oba sta statistična, saj potrebujeta velike količine čistopisa in ustreznega tajnopisa, da določita ključ in zato nista praktična.

Zelo uspešna pa sta pri manjšem številu ciklov, npr. DES z 8imi cikli lahko razbijemo z diferenčno kriptoanalizo v nekaj minutah že na osebnem računalniku.

Diferenčno kriptoanalizo sta v letih 1990 in 1991 vpeljala Eli Biham in Adi Shamir (**izbran čistopis**).

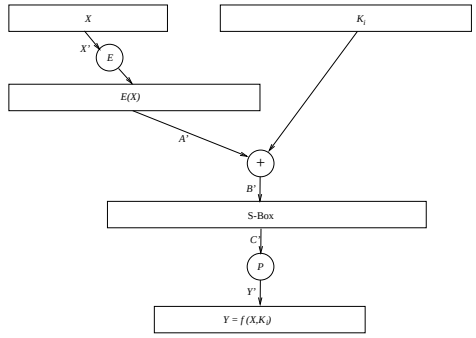
Oglejmo si pare tajnopisa za katere ima čistopis določene razlike. Diferenčna kriptoanaliza spremlja spreminjanje teh razlik, ko gre čistopis skozi nekaj ciklov DES-a in je šifriran z istim ključem.
Če poenostavimo, ta tehnika izbere pare čistopisa s fiksno razliko (čistopis je lahko izbran naključno).

Z uporabo razlik tajnopisa določimo verjetnosti različnih ključev. Analiza mnogih parov tajnopisa nam na koncu da najbolj verjeten ključ.

Naj bosta X in X^* par čistopisov z razliko X'. Tajnopisa Y in Y^* poznamo, zato poznamo tudi njuno razliko Y'. Naj bo $A^{(*)} := E(X^{(*)})$ in $P(C^{(*)}) = Y^{(*)}$.

Ker poznamo tudi razširitev E ter permutacijo P, poznamo A' in C' (glej sliko). $B^{(*)} = A^{(*)} \oplus K_i$ ne poznamo, vendar je njuna razlika B' enaka razliki A'.

Trik je v tem, da za dano razliko A' niso enako verjetne vse razlike C'. Kombinacija razlik A' in C' sugerira vrednosti bitov izrazov $A \oplus K_i$ in $A^* \oplus K_i$. Od tod pa s pomočjo A in A^* dobimo informacije o ključu K_i.



V primeru, ko imamo več kot en cikel, si pomagamo z določenimi razlikami, ki jih imenujemo **karakteristike**. Le-te imajo veliko verjetnost, da nam dajo določene razlike tajnopisa ter se razširijo, tako da definirajo pot skozi več ciklov.

Poglejmo si zadnji cikel DES-a
(začetno in končno permutacijo lahko ignoriramo).
Če poznamo K_{16} poznamo 48 bitov originalnega ključa. Preostalih 8 bitov dobimo s požrešno metodo. Diferenčna kriptoanaliza nam da K_{16}.

Podrobnosti:

Škatla S_i oziroma funkcija $S_i : \{0,1\}^6 \longrightarrow \{0,1\}^4$ ima za elemente cela števila z intervala $[0, 15]$:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
S_1: 0	14	4	13	1	2	15	11	8	3	10	6	12	5	9	0	7
1	0	15	7	4	14	2	13	1	10	6	12	11	9	5	3	8
2	4	1	14	8	13	6	2	11	15	12	9	7	3	10	5	0
3	15	12	8	2	4	9	1	7	5	11	3	14	10	0	6	13

Naj bo $B_j = b_1b_2b_3b_4b_5b_6$.
$S_i(B_j)$ določimo na naslednji način.

Bita b_1b_6 določita vrstico v, biti $b_2b_3b_4b_5$ pa stolpec s v tabeli S_i, katere (v, s)-ti element je $S_i(B_j) \in \{0,1\}^4$

Za razliko $B'_j \in (\mathbb{Z}_2)^6$ definiramo množico z 2^6 elementi: $\Delta(B'_j) := \{(B_j, B_j \oplus B'_j) \mid B_j \in (\mathbb{Z}_2)^6\}$

Primer: oglejmo si škatlo S_1 in naj bo $B'_j = 110100$ razlika (XOR) vhodov.

$\Delta(110100) =$ {(000000,110100),(000001,110101),...,(111111,001011)}

Za vsak urejen par izračunamo razliko izhoda iz S_1:

npr. $S_1(000000) = 1110$ in $S_1(110100) = 1001$
$\Longrightarrow$ razlika izhodov $C'_j = 0111$.

Tabela izhodnih razlik C'_j in možnih vhodov B_j za vhodno razliko $B'_j = 110100$:

```
0000  -
0001  8  000011, 001111, 011110, 011111, 101010, 101011, 110111, 111011
0010 16  000100, 000101, 001110, 010001, 010010, 010100, 100101, 011011,
         100000, 100101, 010110, 101110, 101111, 110000, 110001, 111010
0011  6  000001, 000010, 010101, 100001, 110101, 110110
0100  2  010011, 100111
0101  -
0110  -
0111 12  000000, 001000, 001101, 010111, 011000, 011000, 011101, 100011,
         101001, 101100, 110100, 111001, 111100
1000  6  001001, 001100, 011001, 101101, 111000, 111101
1001  -
1010  -
1011  -
1100  -
1101  8  000110, 010000, 010110, 011100, 100010, 100100, 101000, 110010
1110  -
1111  6  000111, 001010, 001011, 110011, 111110, 111111
```


Tabela izhodnih razlik in porazdelitev vhodov za vhodno razliko 110100 (števila morajo biti soda, zakaj?):

0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
0	8	16	6	2	0	0	12	6	0	0	0	0	8	0	6

Pojavi se samo 8 od 16ih možnih izhodnih vrednosti.

Če pregledamo vse možnosti (za vsako škatlo S_i in vsako razliko), se izkaže, da je povprečno zastopanih samo 75-80% možnih razlik izhodov.

Ta neenakomerna porazdelitev je osnova za diferenčni napad.

Za vsako škatlo S_j (8 jih je) in za vsako vhodno razliko (2^6 jih je) sestavimo tako tabelo (skupaj 512 tabel).

Velja povdariti, da vhodna razlika ni odvisna od ključa K_i (saj smo že omenili, da je $A' = B'$), zato pa izhodna razlika C' *je* odvisna od ključa K_i.

Naj bo $A = A_1 \dots A_8$, $C = C_1 \dots C_8$ in $j \in \{1, \dots, 8\}$.

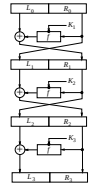
Potem poiščemo razliko $(C')_j$ v tabeli za S_j in $(A')_j$, ki nam določi vse možne vhode B_j iz katerih izračunamo vse $B_j \oplus A_j$, ki morajo vsebovati $(K_i)_j$.

Tako smo dobili nekaj kandidatov za $(K_i)_j$.

Primer: $A_1 = 000001$, $A_1^* = 110101$ in $C'_1 = 1101$. Potem dobimo 13-to vrstico iz Tabele 1, ki vsebuje 8 elementov (torej smo zožili število možnosti iz $2^6 = 64$ na 8).

Z naslednjim parom čistopisa dobimo nove kandidate, $(K_i)_j$ pa leži v preseku novih in starih kandidatov...

Napad na DES s tremi cikli



Naj bo L_0R_0 in $L_0^*R_0^*$ par čistopisa in L_3R_3 in $L_3^*R_3^*$ par tajnopisa za katere velja:

$$L_3 = L_2 \oplus f(R_2, K_3) = L_0 \oplus f(R_0, K_1) \oplus f(R_2, K_3)$$

Še L_3^* izrazimo na podoben način in dobimo

$$L'_3 = L'_0 \oplus f(R_0, K_1) \oplus f(R_0^*, K_1) \oplus f(R_2, K_3) \oplus f(R_2^*, K_3)$$

Predpostavimo še, da je $R_0 = R_0^*$ oziroma $R'_0 = 00\dots0$. Od tod dobimo

$$L'_3 = L'_0 \oplus f(R_2, K_3) \oplus f(R_2^*, K_3),$$

L'_3 je razlika tajnopisov, L'_0 pa razlika čistopisov, torej poznamo

$$f(R_2, K_3) \oplus f(R_2^*, K_3) \quad (= L'_0 \oplus L'_3).$$

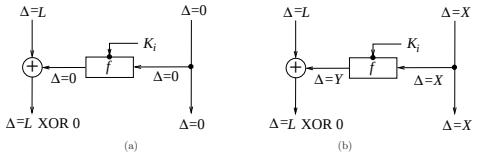
Naj bo $f(R_2, K_3) = P(C)$ in $f(R_2^*, K_3) = P(C^*)$, kjer sta C in C^* definirana enako kot prej (izhoda iz S škatel po tretjem ciklu). Potem je

$$C' = C \oplus C^* = P^{-1}(R'_3 \oplus L'_0).$$

Poznamo tudi $R_2 = R_3$ in $R_2^* = R_3^*$, saj sta R_3 in R_3^* dela tajnopisa.

Torej smo prevedli kriptoanalizo DES-a s tremi cikli na diferenčno kriptoanalizo DES-a z enim ciklom.

Napad na DES s 6-imi cikli



(a) Leva stran je karkoli, desna razlika pa je 0. To je trivialna karakteristika in velja z verjetnostjo 1.

(b) Leva stran je karkoli, desna vhodna razlika pa je $0x60000000$ (vhoda se razlikujeta na 1. in 3. bitu). Verjetnost, da bosta izhodni razliki $0x60000000$ in $0x00808200$ je enaka 14/64.

Karakteristika za n-ciklov, $n \in \mathbb{N}$, je seznam

$$L'_0, R'_0, L'_1, R'_1, p_1, \ldots, L'_n, R'_n, p_n,$$

z naslednjimi lastnostmi:

- $L'_i = R'_{i-1}$ za $1 \leq i \leq n$.
- za $1 \leq i \leq n$ izberimo (L_{i-1}, R_{i-1}) in (L^*_{i-1}, R^*_{i-1}), tako da je $L_{i-1} \oplus L^*_{i-1} = L'_{i-1}$ in $R_{i-1} \oplus R^*_{i-1} = R'_{i-1}$. Izračunajmo (L_i, R_i) in (L^*_i, R^*_i) z enim ciklom DES-a. Potem je verjetnost, da je $L_i \oplus L^*_i = L'_i$ in $R_i \oplus R^*_i = R'_i$ natanko p_i.

Verjetnost karakteristike je $p = p_1 \times \cdots \times p_n$.

Začnimo s karakteristiko s tremi cikli:

$L'_0 = 0x40080000$, $R'_0 = 0x04000000$
$L'_1 = 0x40000000$, $R'_1 = 0x00000000$ $p = 1/4$
$L'_2 = 0x00000000$, $R'_2 = 0x04000000$ $p = 1$
$L'_3 = 0x40080000$, $R'_2 = 0x04000000$ $p = 1/4$
Potem velja

$$L'_6 = L'_3 \oplus f(R_3, K_4) \oplus f(R^*_3, K_4) \oplus f(R_5, K_6) \oplus f(R^*_5, K_6)$$

Iz karakteristike ocenimo $L'_3 = 0x04000000$ in $R'_3 = 0x40080000$ z verjetnostjo 1/16.
Od tod dobimo razliko vhodov v S škatle 4. cikla: $0010000000000000001010000\ldots0$.

Razlike vhodov v škatle S_2, S_5, S_6, S_7 in S_8 so 000000. To nam omogoči, da z verjetnostjo 1/16 določimo v 6-tem ciklu 30 bitov originalnega ključa.

V tabelah ne smemo nikoli naleteti na prazno vrstico (**filtracija**). Tako izključimo približno 2/3 napačnih parov, med preostalimi pa je približno 1/6 pravilnih.

...

Drugi primeri diferenčne kriptoanalize

Iste tehnike napadov na DES lahko uporabimo tudi kadar imamo več kot 6 ciklov.

DES z n cikli potrebuje 2^m izbranega čistopisa:

n	m
8	14
10	24
12	31
14	39
16	47

Na diferenčno kriptoanalizo so občutljivi tudi drugi algoritmi s substitucijami in permutacijami, kot na primer FEAL, REDOC-II in LOKI.

Napad na DES s 16-imi cikli

Bihan in Shamir sta uporabila karakteristiko s 13-imi cikli in nekaj trikov v zadnjem ciklu.

Še več, z zvijačami sta dobila 56-bitni ključ, ki sta ga lahko testirala takoj (in se s tem izognila potrebi po števcih). S tem sta dobila linearno verjetnost za uspeh, tj. če je na voljo 1000 krat manj parov, imamo 1000 manj možnosti da najdemo pravi ključ.

Omenili smo že, da najboljši napad za DES s 16-imi cikli potrebuje 2^{47} izbranih čistopisov. Lahko pa ga spremenimo v napad z 2^{55} poznanega čistopisa, njegova analiza pa potrebuje 2^{37} DES operacij.

Diferenčni napad je odvisen predvsem od strukture S škatel. Izkaže se, da so DES-ove škatle zoptimizirane proti takemu napadu.

Varnost DES-a lahko izboljšamo s tem, da povečamo število ciklov. Vendar pa diferenčna kriptoanaliza DES-a s 17-imi ali 18-imi cikli potrebuje toliko časa kot požrešna metoda (več ciklov nima smisla).

4. poglavje

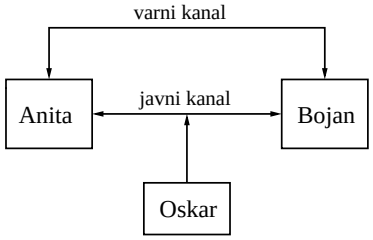
RSA sistem in faktorizacija

- Uvod
  - pomankljivosti simetrične kriptografije
  - kriptografija z javnimi ključi
- Teorija števil
- Opis in implementacija RSA
- Gostota praštevil
- Generiranje praštevil
- Gaussov izrek (o kvadratni recipročnosti)

Uvod

Pomankljivosti simetrične kriptografije

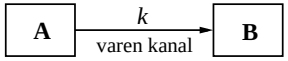
Sodelujoči si delijo *tajno* informacijo.



Dogovor o ključu

Kako Anita in Bojan vzpostavita tajni ključ k?

1. metoda: delitev point-to-point

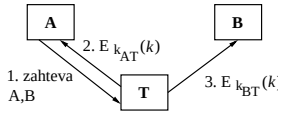


Varni kanal je lahko:
– kurir
– izmenjava na štiri oči (v temnem hodniku/ulici)

To ni praktično za večje aplikacije.

2. metoda: z neodvisnim centrom zaupanja T

– *Vsak* uporabnik A deli tajni ključ k_{AT} s centrom zaupanja T za simetrično šifrirno shemo E.
– Za vzpostavitev tega ključa mora A obiskati center zaupanja T *samo enkrat.*
– T nastopa kot **center za distribucijo ključev**: (angl. key distribution centre - KDC):



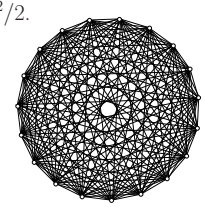
1. A pošlje T zahtevek za ključ, ki si ga želi deliti z B.
2. T izbere ključ k, ga zašifrira za A s ključem k_{AT}.
3. T zašifrira ključ k za osebo B s ključem k_{BT}.

Problemi pri uporabi KDC

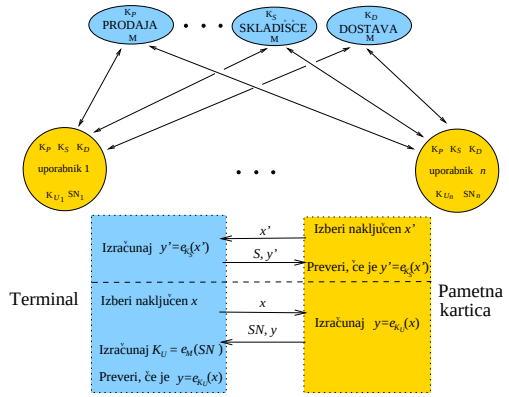
- centru zaupanja T moramo brezpogojno zaupati:
  – to ga naredi za očitno tarčo.
- Zahteva za stalno zvezo (on-line) s centrom T:
  – potencialno ozko grlo,
  – kritično za zanesljivost.

Upravljanje ključev

- v mreži z n uporabniki, mora vsak uporabnik deliti različen ključ z vsakim uporabnikom,
- zato mora hraniti vsak uporabnik $n-1$ različnih tajnih ključev,
- vseh tajnih ključev je $\binom{n}{2} \approx n^2/2$.

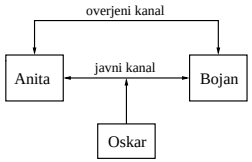


(Tudi preprečevanje tajenja je nepraktično.)



Kriptografija z javnimi ključi

Udeleženci si predhodno delijo *overjeno/avtentično* informacijo.



L. **1976** sta jo predlagala Whitfield **Diffie** in Martin **Hellman** (L. 1970 pa tudi James Ellis, ki je bil član Communication Electronics Security Group pri British Government Communications Headquarters).

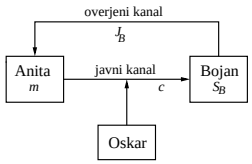
Generiranje para ključev

Vsaka oseba A naredi naslednje:

- generira par ključev (J_A, S_A),
- S_A je A-jev zasebni/tajni ključ,
- J_A je A-jev javni ključ.

Varnostna zahteva: za napadalca mora biti nemogoče priti do kluča S_A iz ključa J_A.

Šifriranje z javnimi ključi



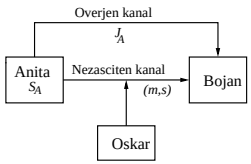
Da bi Bojanu poslala zaupno sporočil m, Anita:

- dobi overjenjo kopijo Bojanovega javnega kjuča J_B,
- izračuna $c = E(J_B, m)$, kjer je E šifrirna funkcija,
- pošlje Bojanu tajnopis c.

Za odšifriranje tajnopisa c Bojan naredi naslednje

- Izračuna $m = D(S_B, c)$, kjer je D odšifrirna funkcija.

Digitalni podpisi



Za podpis sporočila m Anita naredi naslednje:

- izračuna $s = \mathsf{Sign}(S_A, m)$,
- pošlje m in s Bojanu.

Bojan preveri Anitin podpis s sporočila m:

- pridobi si overjeno kopijo javnega ključa J_A,
- sprejme podpis, če je $\mathsf{Verify}(J_A, m, s) = \mathsf{Accept}$.

Prednosti kriptosistemov z javnimi ključi

- Ni zahteve po varnem kanalu.
- Vsak uporabnik ima 1 par ključev.
- Poenostavljeno upravljanje s ključi.
- Omogoča preprečevanje tajenja.

Pomanjkljivosti kriptosistemov z javnimi ključi

- Sheme z javnimi ključi so počasnejše.
- Javni ključi so večji od simetričnih.

V praksi uporabljamo skupaj sheme s simetričnimi in javnimi ključi in jim rečemo **hibridne sheme**

Primer: Da bi Bojanu poslala podpisano tajno sporočilo m, Anita naredi naslednje:

- izračuna $s = \mathsf{Sign}(S_A, m)$,
- izbere tajni ključ k simetrične šifrirne sheme (AES),
- pridobi overjeno kopijo Bojanovega javnega ključa J_B,
- pošlje $c_1 = E(J_B, k)$, $c_2 = \mathsf{AES}(k, (m, s))$.

Za odkritje sporočila m in preverjanje avtentičnosti, Bojan:

- odšifrira c_1: $k = D(S_B, c_1)$,
- odšifrira c_2 z uporabo ključa k, da dobi (m, s),
- pridobi overjeno kopijo javnega ključa J_A,
- preveri podpis s sporočila m.

Že l. 1977 so Ronald L. **Rivest**, Adi **Shamir** in Leonard M. **Adleman** naredili prvo realizacijo takšnega kriptosistema (**RSA**)
(tajno pa že l. 1973 **C. Cocks** pri GCHQ).

Temu so sledili številni drugi nesimetrični kriptosistemi, med katerimi pa so danes najbolj pomembni naslednji:

- RSA (faktorizacija),
- Merkle-Hellman Knapsack (metoda nahrbtnika)
- Chor-Rivest
- McEliece (linearne kode),
- ElGamal (diskretni logaritem),
- eliptične krivulje.

Javni kriptosistemi **niso** nikoli brezpogojno varni, zato študiramo računsko/časovno zahtevne sisteme.

Teorija števil

Evklidov algoritem in reševanje Diofantske enačbe

$$ax + by = d, \qquad \text{kjer} \quad D(a, b) \mid d.$$

Evklidov algoritem je zasnovan na preprostem dejstvu, da iz $k \mid a$ in $k \mid b$ sledi $k \mid a - b$.

Če je $D(a, b) = 1$ in poznamo eno rešitev (x_0, y_0), tj.

$$ax_0 + by_0 = d,$$

potem ima poljubna rešitev (x, y) naslednjo obliko:

$$x = x_0 - kb, \quad y = y_0 + ka, \quad \text{za } k \in \mathbb{Z}.$$

Zgodovina Evklidovega algoritma

Evklidov algoritem poišče največji skupni delitelj dveh naravnih števil in je zasnovan na dejstvu, da če število d deli števili a in b, potem deli tudi njuno razliko $a - b$.

V literaturi naletimo nanj prvič 300 p.n.š. v 7. knjigi Evklidovih **Elementov**.

Nakateri strokovnjaki so mnenja, da je njegov avtor Eudoxus (c. 375 p.n.š.). Gre za *najstarejši* netrivialen algoritem, ki je preživel do današnjih dni (glej Knuth).

Eno rešitev lahko poiščemo z **razširjenim Evklidovim algoritmom**.

Privzemimo, da je $a > b$ in zapišimo zgornjo enačbo malo bolj splošno (z zaporedji):

$$ap_i + bq_i = r_i.$$

Poiščimo dve trivialni rešitvi:

$$p_1 = 1, \quad q_1 = 0, \quad r_1 = a$$

in

$$p_2 = 0, \quad q_2 = 1, \quad r_2 = b.$$

Zaradi rekurzije

$$r_{i+1} = r_i - s_i r_{i-1}$$

(kjer je s_i izbran tako, da je $r_{i+1} < r_i$)
si lahko izberemo še

$$p_{i+1} = p_i - s_i p_{i-1} \quad \text{in} \quad q_{i+1} = q_i - s_i q_{i-1}.$$

Ko računamo a^{-1} (po modulu praštevila p), računamo samo r_i ter p_i (ne pa tudi q_i).

Zgled za razširjeni algoritem:

$4864 = 1{\cdot}3458{+}1406$	$p_2 := p_1 - 1 \cdot p_0 = 1$
$3458 = 2{\cdot}1406{+}646$	$p_3 := p_2 - 2 \cdot p_1 = -2$
$1406 = 2{\cdot}646{+}114$	$p_4 := p_3 - 2 \cdot p_2 = 5$
$646 = 5{\cdot}114{+}76$	$p_5 := p_4 - 5 \cdot p_3 = -27$
$114 = 1{\cdot}76{+}38$	$p_6 := p_5 - 1 \cdot p_4 = 32$
$76 = 2{\cdot}38{+}0$	$p_7 := p_6 - 2 \cdot p_5 = -91$

$4864 = 1{\cdot}3458{+}1406$	$p_2 = 1 \quad q_2 = -1$
$3458 = 2{\cdot}1406{+}646$	$p_3 = -2 \quad q_3 = 3$
$1406 = 2{\cdot}646{+}114$	$p_4 = 5 \quad q_4 = -7$
$646 = 5{\cdot}114{+}76$	$p_5 = -27 \quad q_5 = 38$
$114 = 1{\cdot}76{+}38$	$p_6 = 32 \quad q_6 = -45$
$76 = 2{\cdot}38{+}0$	$p_7 = -91 \quad q_7 = 128$

$$4864 \cdot (-91) + 3458 \cdot (128) = 38$$