**Pa še en napad:** recimo, da nam je uspelo ponarediti podpis naključnega števila $z$, nato pa poiščemo tak $x$, da je $z = h(x)$.

Ta napad preprečimo z enosmernimi funkcijami.

Dokazali bomo, da so funkcije brez trčenj enosmerne. To sledi iz trditve, da je možno algoritem za računanje obrata zgoščevalne funkcije uporabiti kot podprogram Las Vegas probabilističnega algoritma, ki išče trčenja.

**Izrek:** *Naj bo* $h : X \longrightarrow Z$ *zgoščevalna funkcija,* $|X| < \infty$ *in* $|X| \geq 2|Z|$ *ter naj bo* $\mathbf{A}$ *algoritem za računanje obrata zgoščevalne funkcije. Potem obstaja Las Vegas probabilistični algoritem, ki najde trčenja z verjetnostjo vsaj* $1/2$.

*Dokaz:* Naj bo $\mathbf{B}$ naslednji algoritem.

1. Izberi naključen element $x \in X$,
2. izračunaj $z := h(x)$,
3. izračunaj $x_1 := \mathbf{A}(z)$,
4. **if** $x_1 \neq x$ **then** $x_1$ in $x$ trčita glede na $h$ (uspeh)
   **else** QUIT(neuspeh).

Izračunajmo verjetnost za uspeh. Najprej definiramo ekvivalenčno relacijo

$$x \sim x' \iff h(x) = h(x').$$

Naj bo $C$ množica ekvivalenčnih razredov,
potem je $|C| \leq |Z|$. Velja tudi: $|Z| \leq |X|/2$.

$$P(\text{uspeh}) = \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} \frac{|[x]| - 1}{|[x]|} = \frac{1}{|X|} \sum_{c \in C} \sum_{x \in c} \frac{|c| - 1}{|c|}$$

$$= \frac{1}{|X|} \sum_{c \in C} (|c| - 1) \geq \frac{|X| - |Z|}{|X|} \geq \frac{1}{2} . \blacksquare$$

# Verjetnost trčenja

Naj bo $h : X \longrightarrow Z$ zgoščevalna funkcija,

$$s_z = |h^{-1}(z)|$$

in

$$N = |\{\{x_1, x_2\} \mid h(x_1) = h(x_2)\}|,$$

tj. $N$ je število neurejenih parov, ki trčijo pri funkciji $h$.

Pokazali bomo, da obstaja od nič različna spodnja meja za verjetnost $P$, da je $h(x_1) = h(x_2)$, kjer sta $x_1$ in $x_2$ naključna (ne nujno različna) elementa iz $X$.

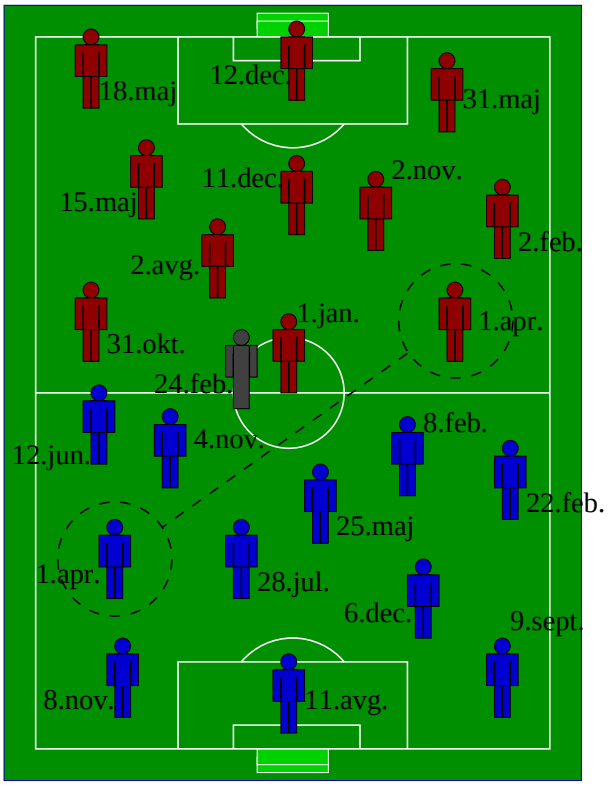
1. $\sum_{z \in Z} s_z = |X|$, tj. povprečje $s_z$-ov je $\overline{s} = |X|/|Z|$.
2. $N = \sum_{z \in Z} \binom{s_z}{2} = \frac{1}{2} \sum_{z \in Z} s_z^2 - \frac{|X|}{2}$.
3. $\sum_{z \in Z} (s_z - \overline{s})^2 = 2N + |X| - |X|^2/|Z|$.
4. $N \geq \frac{|X|}{2} \left( \frac{|X|}{|Z|} - 1 \right)$, pri čemer velja enakost natanko tedaj, ko je $s_z = |X|/|Z|$ za vsak $z \in Z$.
5. $P \geq 1/|Z|$, pri čemer velja enakost natanko tedaj, ko je $s_z = |X|/|Z|$ za vsak $z \in Z$.

# Kakšno naključje!!! Mar res?

Na nogometni tekmi sta na igrišču dve enajsterici in sodnik, skupaj **23 oseb**.

Kakšna je verjetnost, da imata **dve osebi** isti rojstni dan?

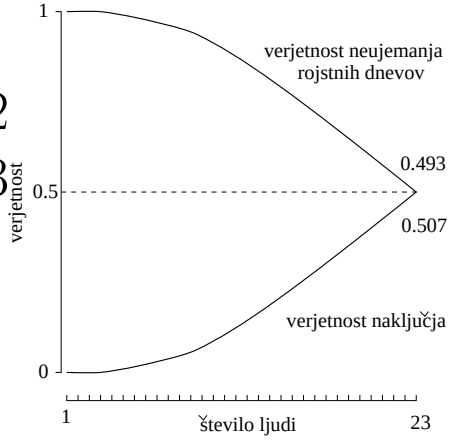
Ali je ta verjetnost lahko večja od 0.5?



Ko vstopi v sobo $k$-ta oseba, je verjetnost, da je vseh $k$ rojstnih dnevov različnih enaka:

$$\frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \cdots \times \frac{365-k+1}{365}$$

$$= \begin{cases} 0.493, & \text{če je } k=22 \\ 0.507, & \text{če je } k=23 \end{cases}$$



**V poljubni skupini 23-ih ljudi je verjetnost, da imata vsaj dva skupni rojstni dan $> 1/2$.**

Čeprav je 23 majhno število, je med 23 osebami 253 različnih parov. To število je veliko bolj povezano z iskano verjetnostjo.

Testirajte to na zabavah z več kot 23 osebami.

Organizirajte stave in dolgoročno boste gotovo na boljšem, na velikih zabavah pa boste zlahka zmagovali.

# Napad s pomočjo paradoksa rojstnih dnevov

(angl. Birthday Attack)

To seveda ni paradoks, a vseeno ponavadi zavede naš občutek.

Ocenimo še splošno verjetnost.

Mečemo $k$ žogic v $n$ posod in gledamo, ali sta v kakšni posodi vsaj dve žogici.

Poiščimo spodnjo mejo za verjetnost zgoraj opisanega dogodka.

Privzeli bomo, da je $|h^{-1}(x)| \approx m/n$, kjer je $n = |Z|$ in $m = |X|$ (v primeru, da velikosti praslik niso enake se verjetnost le še poveča).

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) = \prod_{i=1}^{k-1}\left(1 - \frac{i}{n}\right)$$

Iz Taylorjeve vrste

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

ocenimo $1 - x \approx e^{-x}$ in dobimo

$$\prod_{i=1}^{k-1}\left(1 - \frac{i}{n}\right) \approx \prod_{i=1}^{k-1} e^{\frac{-i}{n}} = e^{\frac{-k(k-1)}{2n}}.$$

Torej je verjetnost trčenja

$$1 - e^{\frac{-k(k-1)}{2n}}.$$

Potem velja

$$e^{\frac{-k(k-1)}{2n}} \approx 1 - \varepsilon$$

oziroma

$$\frac{-k(k-1)}{2n} \approx \log(1-\varepsilon)$$

oziroma

$$k^2 - k \approx 2n \log \frac{1}{1-\varepsilon}$$

in če ignoriramo $-k$, dobimo končno

$$\boxed{k \approx \sqrt{2n \log \frac{1}{1-\varepsilon}}\,.}$$

Za $\varepsilon = 0.5$ je

$$k \approx 1.17\sqrt{n},$$

kar pomeni, da, če zgostimo nekaj več kot $\sqrt{n}$ elementov, je bolj verjetno, da pride do trčenja kot da ne pride do trčenja.

V splošnem je $k$ proporcionalen z $\sqrt{n}$.

*Napad s pomočjo paradoksa rojstnih dnevov* s tem določi spodnjo mejo za velikost zaloge vrednosti zgoščevalne funkcije.

40-bitna zgostitev ne bi bila varna, saj bi prišli do trčenja z nekaj več kot $2^{20}$ (se pravi milijon) naključnimi zgostitvami z verjetnostjo vsaj 1/2.

V praksi je priporočena najmanj 128-bitna zgostitev in shema DSS z 160-imi biti to vsekakor upošteva.

# Zgoščevalna funkcija z diskretnim logaritmom

Varnost Chaum, Van Heijst in Pfitzmannove zgoščevalne funkcije je zasnovana na varnosti diskretnega logaritma.

Ni dovolj hitra, da bi jo uporabljali v praksi, je pa zato vsaj primerna za študij varnosti.

*Naj bosta* $p$ *in* $q = (p-1)/2$ *veliki praštevili,*
$\alpha$ *in* $\beta$ *pa dva primitivna elementa v* $\mathbb{Z}_p$,
*za katera je vrednost* $\log_\alpha \beta$ *zasebna.*

*Zgoščevalno funkcijo*

$$h : \{0, \ldots, q-1\} \times \{0, \ldots, q-1\} \longrightarrow \mathbb{Z}_p \backslash \{0\}$$

*definirajmo z*

$$h(x_1, x_2) = \alpha^{x_1} \beta^{x_2} \bmod p.$$

Pokazali bomo, da je ta funkcija **krepko brez trčenj** (strongly collision-free).

Predpostavimo obratno: za $(x_1, x_2) \neq (x_3, x_4)$ velja

$$h(x_1, x_2) = h(x_3, x_4)$$

oziroma

$$\alpha^{x_1}\beta^{x_2} \equiv \alpha^{x_3}\beta^{x_4} \pmod{p}$$

ali

$$\alpha^{x_1-x_3} \equiv \beta^{x_4-x_2} \pmod{p}.$$

Če je $d = D(x_4 - x_2, p-1)$, potem imamo zaradi $p - 1 = 2q$ natanko štiri možnost za $d$:

$$\{1, 2, q, p-1\}.$$

Če je $d = 1$, definiramo

$$y = (x_4 - x_2)^{-1} \mod (p-1)$$

in dobimo

$$\beta \equiv \beta^{(x_4-x_2)y} \equiv \alpha^{(x_1-x_3)y} \pmod{p},$$

iz česar znamo izračunati diskretni logaritem

$$\log_\alpha \beta \equiv (x_1 - x_3)(x_4 - x_2)^{-1} \mod (p-1).$$

Če je $d = 2$, je $d = D(x_4 - x_2, q) = 1$, tako da lahko definiramo

$$y = (x_4 - x_2)^{-1} \mod q$$

in dobimo za $(x_4 - x_2)y = kq + 1$, kjer je $k \in \mathbb{Z}$,

$$\beta^{(x_4 - x_2)y} \equiv \beta^{kq+1} \equiv (-1)^k \beta \equiv \pm\beta \pmod{p}$$

zaradi $\beta^q \equiv -1 \pmod{p}$.

Torej imamo

$$\pm\beta \equiv \beta^{(x_4-x_2)y} \equiv \alpha^{(x_1-x_3)y} \pmod{p},$$

od koder znamo izračunati diskretni logaritem

$$\log_\alpha \beta \equiv (x_1 - x_3)y \bmod (p-1)$$

ali pa

$$\log_\alpha \beta \equiv (x_1 - x_3)y + q \mod (p-1).$$

Primer $d = q$ ni možen, saj iz

$$0 \leq x_2 \leq q-1 \qquad \text{in} \qquad 0 \leq x_4 \leq q-1$$

sledi

$$-(q-1) \leq x_4 - x_2 \leq q-1.$$

Končno si poglejmo še primer $d = p-1$, kar se lahko zgodi le za $x_2 = x_4$. Potem velja

$$\alpha^{x_1} \equiv \alpha^{x_3} \pmod{p}$$

oziroma $x_1 = x_3$ in $(x_1, x_2) = (x_3, x_4)$. Protislovje! ■

# Razširitev zgoščevalne funkcije

Doslej smo študirali zgoščevalne funkcije s končno domeno.

Sedaj pa pokažimo, kako lahko razširimo zgoščevalne funkcije, ki so krepko brez trčenj in imajo končno domeno, do zgoščevalnih funkcij, ki so krepko brez trčenj in imajo neskončno domeno.

Tako bomo lahko podpisovali sporočila poljubne dolžine.

Naj bo $h^*$ zgoščevalna funkcija za katero je $|X| = \infty$.

Naj bo zgoščevalna funkcija $h : (\mathbb{Z}_2)^m \longrightarrow (\mathbb{Z}_2)^t$, $m \geq t + 1$ krepko brez trčenj.

Potem bomo za $X = \cup_{i=m}^{\infty} (\mathbb{Z}_2)^i$ definirali zgoščevalno funkcijo

$$h^* : X \longrightarrow (\mathbb{Z}_2)^t,$$

ki bo tudi krepko brez trčenj.

Elementi množice $X$ so zaporedja bitov, $|x|$, $x \in X$, pa naj predstavlja dolžino elementa $x$, tj. število bitov $x$-a. Z $x \,||\, y$ označimo spetje zaporedij $x$ in $y$.

**1.primer:** $m \geq t+2$. Naj bo $|x| = n > m$ in $x$ spetje $x_1 \,||\, x_2 \,||\, \ldots \,||\, x_k$, kjer je

$$|x_1| = |x_2| = \cdots = |x_{k-1}| = m - t - 1$$

in $|x_k| = m-t-1-d$, pri čemer je $0 \leq d \leq m-t-2$. Torej je

$$k = \left\lceil \frac{n}{m-t-1} \right\rceil .$$

Funkcijo $h^*(x)$ definiramo z naslednjim algoritmom:

1. **for** $i = 1$ **to** $k - 1$ **do** $y_i = x_i$
2. $y_k = x_k \,||\, 0^d$
3. naj bo $y_{k+1}$ število $d$ v dvojiškem sistemu
4. $g_1 = h(0^{t+1} \,||\, y_1)$
5. **for** $i = 1$ **to** $k$ **do** $g_{i+1} = h(g_i \,||\, 1 \,||\, y_{i+1})$
6. $h^*(x) = g_{k+1}$

Spetje $y_1 \,||\, y_2 \,||\, \ldots \,||\, y_{k+1}$ smo dobili tako, da smo $x_k$-ju na desni pripeli $d$ ničel, zaporedju $y_{k+1}$ pa smo pripeli ničle na levi, tako da je $|y_{k+1}| = m - t - 1$.

**Izrek:** *Naj bo* $h : (\mathbb{Z}_2)^m \longrightarrow (\mathbb{Z}_2)^t$, $m \geq t + 2$ *zgoščevalna funkcija krepko brez trčenj. Potem je zgoraj def. zgoščevalna funkcija* $h^* : X \longrightarrow (\mathbb{Z}_2)^t$ *tudi krepko brez trčenj.*

**Dokaz:** Predpostavimo, da smo našli $x \neq x'$ tako, da je $h^*(x) = h^*(x')$ in pokažimo, da lahko poiščemo v polinomskem času trčenje za $h$. Vzamemo $|x| \geq |x'|$.

Naj bo $y(x) = y_1||\ldots||y_{k+1}$ in $y(x') = y'_1||\ldots||y'_{j+1}$, kjer sta $x$ in $x'$ dopolnjena z $d$ ničlami po 2. koraku in so $g_1, \ldots, g_{k+1}$ in $g'_1, \ldots, g'_{j+1}$ zaporedoma vrednosti, ki jih izračunamo v korakih 4 in 5.

Če je $|x| \not\equiv |x'| \pmod{m-t-1}$, potem je $d \neq d'$ in od tod $y_{k+1} \neq y'_{j+1}$, torej dobimo trčenje iz

$$h(g_k||1||y_{k+1})=g_{k+1}=h^*(x)=h^*(x')=g'_{j+1}=h(g'_j||1||y'_{j+1}).$$

Zato smemo sedaj privzeti, da $m-t-1$ deli $|x|-|x'|$. Iz $y_{k+1} = y'_{j+1}$, tako kot v prejšnjem primeru, sledi

$$h(g_k||1||y_{k+1}) = h(g'_j||1||y'_{j+1}).$$

Če je $g_k \neq g'_j$, smo našli trčenje, v nasprotnem primeru pa je

$$h(g_{k-1}||1||y_k) = g_k = g'_j = h(g'_{j-1}||1||y'_j).$$

Če na ta način s postopnim vračanjem ne pridemo do trčenja, dobimo na koncu

$$h(0^{t+1}||y_1)=g_1=g'_{j-k}=\begin{cases} h(0^{t+1}||y'_1), & \text{če je } |x| = |x'| \\ h(g'_{j-k}||1||y'_1), & \text{sicer} \end{cases}$$

Za $|x| = |x'|$ oziroma $k = j$ nam da $y_1 \neq y'_1$ trčenje, sicer pa je $y_i = y'_i$ za $1 \leq i \leq k+1$. Od tod $y(x) = y(x')$, toda potem je $x = x'$, saj je preslikava $x \mapsto y(x)$ injekcija. Dobili smo protislovje s predpostavko, da je $x \neq x'$.

Končno v primeru, ko je $m - t - 1$ deli $|x| - |x'| \neq 0$ dobimo trčenje, ker je $(t+1)$-vi bit v spetju $0^{t+1}||y_1$ enak 0, $(t+1)$-vi bit v spetju $g'_{j-k} \,||\, 1 \,||\, y'_1$ pa 1. ■

**2.primer:** $m = t + 1$. Naj bo $|x| = n > m$ in definirajmo funkcijo $f$ z $f(0) = 0$ in $f(1) = 01$.

Zgoščevalno funkcijo $h^*(x)$ definiramo z algoritmom:

1. $y = y_1 y_2 \dots y_k := 11||f(x_1)||f(x_2)|| \cdots ||f(x_n)$
2. $g_1 = h(0^t \,||\, y_1)$
3. **for** $i = 1$ **to** $k - 1$ **do** $g_{i+1} = h(g_i \,||\, y_{i+1})$
4. $h^*(x) = g_k$

Funkcija $x \mapsto y = y(x)$ iz prvega koraka je injekcija.

**Izrek:** *Naj bo* $h : (\mathbb{Z}_2)^{t+1} \longrightarrow (\mathbb{Z}_2)^t$ *zgoščevalna funkcija krepko brez trčenj. Potem je zgoraj def. zgoščevalna funkcija* $h^* : X \longrightarrow (\mathbb{Z}_2)^t$ *tudi krepko brez trčenj.*

**Dokaz:** Predpostavimo, da smo našli $x \neq x'$ tako, da je $h^*(x) = h^*(x')$ in naj bo $y(x) = y_1||\ldots||y_{k+1}$ in $y(x') = y'_1||\ldots||y'_{j+1}$, kjer sta $x$ in $x'$ dopolnjena z $d$ ničlami po 2. koraku.

Če je $k = j$, dobimo (kot pri prejšnjem dokazu) bodisi trčenje za zgoščevalno funkcijo $h$ bodisi $y = y'$. Slednje nam da $x = x'$, kar pa je protislovje!

Sedaj pa privzemimo, da je $k \neq j$ oziroma kar $j > k$. Če ne pride do trčenja, dobimo naslednje zaporedje enakosti:

$$y_k = y'_j, \quad y_{k-1} = y'_{j-1}, \ldots, y_1 = y'_{j-k+1},$$

kar pa ni možno, saj za $x \neq x'$ ter poljubno zaporedje $z$ velja $y(x) \neq z||y(x')$, kajti zaporedni enici se pojavita izključno na začetku zaporedja $y(x)$.

Od tod zaključimo, da je $h^*$ krepko brez trčenj. ■

Za računanje funkcije $h^*$ smo uporabili funkcijo $h$ kvečjemu

$$\left(1 + \left\lceil \frac{n}{m-t-1} \right\rceil\right) - \text{krat} \quad \text{za} \quad m \geq t+2$$

in

$$(2n+2) - \text{krat} \quad \text{za} \quad m = t+1.$$

# Zgoščevalne funkcije iz kriptosistemov

Naj bo $(\mathcal{P}, \mathcal{C}, \mathcal{K}, \mathcal{E}, \mathcal{D})$ računsko varen kriptosistem in naj bo

$$\mathcal{P} = \mathcal{C} = \mathcal{K} = \mathbb{Z}_n,$$

kjer je $n \geq 128$, da bi preprečili napad z rojstnim dnevom.

Ta pogoj izključi **DES** (pa tudi DES-ov čistopis ni tako dolg kot DES-ov ključ).

Naj bo dano zaporedje

$$x_1 \,||\, x_2 \,||\, \ldots \,||\, x_k, \quad \text{kjer je } x_i \in (\mathbb{Z}_2)^n, \;\; 1 \leq i \leq k.$$

Če število bitov v zaporedju ne bi bilo večkratnik števila $n$, bi lahko dodali nekaj ničel...

Začnemo z neko začetno vrednostjo $g_0 = \text{IV}$ (initial value) in nato konstruiramo zaporedje

$$g_i = f(x_i, g_{i-1}),$$

kjer je $f$ šifrirna funkcija izbranega kriptosistema. Potem je $h(x) = g_k$.

Definiranih je bilo veliko takih funkcij in mnoge med njimi so razbili (tj. dokazali, da niso varne), ne glede na to, ali je ustrezna šifra varna ali ne.

Naslednje štiri variacije pa zaenkrat izgledajo varne:

$$
\begin{aligned}
g_i &= e_{g_{i-1}}(x_i) \oplus x_i, \\
g_i &= e_{g_{i-1}}(x_i) \oplus x_i \oplus g_{i-1}, \\
g_i &= e_{g_{i-1}}(x_i \oplus g_{i-1}) \oplus x_i, \\
g_i &= e_{g_{i-1}}(x_i \oplus g_{i-1}) \oplus x_i \oplus g_{i-1}.
\end{aligned}
$$

# Zgoščevalna funkcija MD4

Preglejmo nekaj hitrih zgoščevalnih funkcij.

**MD4** je predlagal Rivest leta 1990, njeno izboljšano verzijo **MD5** pa leta 1991.

Funkcija **Secure Hash Standard** (**SHS**) iz leta 1992/93 je bolj komplicirana, a je zasnovana na istih principih. Njeno "tehnično napako" pa so odpravili šele leta 1994 (**SHA-1**).

Iz danega zaporedja bitov $x$ najprej sestavimo zaporedje

$$M \;=\; M[0]\, M[1]\, \ldots\, M[N-1],$$

kjer je $M[i]$ 32-bitna beseda in je $N \equiv 0 \bmod 16$.

1. $d = (447 - |x|) \bmod 512$,
2. naj bo $j$ binarna reprezentacija števila $x \bmod 2^{64}$, pri čemer je $|j| = 64$,
3. $M = x \,||\, 1 \,||\, 0^d \,||\, j$.

1. $A = 67452301$ (hex), $B = efcdab89$ (hex),
   $C = 98badcfe$ (hex), $D = 10325476$ (hex)
2. **for** $i = 1$ **to** $N/16 - 1$ **do**
3. **for** $j = 0$ **to** $15$ **do**
4. $X[j] = M[16i + j]$.
5. $AA = A, \ldots, DD = D$.
6. 1. krog
7. 2. krog
8. 3. krog
9. $A = A + AA, \ldots, D = D + DD$.

Osnovne operacije:

| | |
|---|---|
| $X \wedge Y$ | po bitih |
| $X \vee Y$ | po bitih |
| $X \oplus Y$ | XOR po bitih |
| $\neg X$ | negacija |
| $X + Y$ | seštevanje po modulu $2^{32}$ |
| $X \lll s$ | ciklični pomik v levo za $s$ mest |

V *big-endian* arhitekturi (kot npr. Sun SPARC postaja) predstavimo število na naslednji način

$$a_1 2^{24} + a_2 2^{16} + a_3 2^8 + a_4,$$

v *little-endian* arhitekturi (kot npr. Intel 80xxx), ki jo je privzela funkcija MD4 pa z

$$a_4 2^{24} + a_3 2^{16} + a_2 2^8 + a_1.$$

V 1., 2. in 3. krogu funkcije **MD4** uporabimo zaporedoma funkcije $f$, $g$, in $h$, definirane spodaj.

$$f(X,Y,Z) = (X \wedge Y) \vee ((\neg X) \wedge Z)$$

$$g(X,Y,Z) = (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z)$$

$$h(X,Y,Z) = X \oplus Y \oplus Z$$

# 1. krog

1. $A = (A + f(B, C, D) + X[0]) \lll 3$
2. $D = (D + f(A, B, C) + X[1]) \lll 7$
3. $C = (C + f(D, A, B) + X[2]) \lll 11$
4. $B = (B + f(C, D, A) + X[3]) \lll 19$

---

5. $A = (A + f(B, C, D) + X[4]) \lll 3$
6. $D = (D + f(A, B, C) + X[5]) \lll 7$
7. $C = (C + f(D, A, B) + X[6]) \lll 11$
8. $B = (B + f(C, D, A) + X[7]) \lll 19$

---

9. $A = (A + f(B, C, D) + X[8]) \lll 3$
10. $D = (D + f(A, B, C) + X[9]) \lll 7$
11. $C = (C + f(D, A, B) + X[10]) \lll 11$
12. $B = (B + f(C, D, A) + X[11]) \lll 19$

---

13. $A = (A + f(B, C, D) + X[12]) \lll 3$
14. $D = (D + f(A, B, C) + X[13]) \lll 7$
15. $C = (C + f(D, A, B) + X[14]) \lll 11$
16. $B = (B + f(C, D, A) + X[15]) \lll 19$

# 2. krog

1. $A = (A + g(B, C, D) + X[0] + 5A827999) \lll 3$
2. $D = (D + g(A, B, C) + X[4] + 5A827999) \lll 5$
3. $C = (C + g(D, A, B) + X[8] + 5A827999) \lll 9$
4. $B = (B + g(C, D, A) + X[12] + 5A827999) \lll 13$

---

5. $A = (A + g(B, C, D) + X[1] + 5A827999) \lll 3$
6. $D = (D + g(A, B, C) + X[5] + 5A827999) \lll 5$
7. $C = (C + g(D, A, B) + X[9] + 5A827999) \lll 9$
8. $B = (B + g(C, D, A) + X[13] + 5A827999) \lll 13$

---

9. $A = (A + g(B, C, D) + X[2] + 5A827999) \lll 3$
10. $D = (D + g(A, B, C) + X[6] + 5A827999) \lll 5$
11. $C = (C + g(D, A, B) + X[10] + 5A827999) \lll 9$
12. $B = (B + g(C, D, A) + X[14] + 5A827999) \lll 13$

---

13. $A = (A + g(B, C, D) + X[3] + 5A827999) \lll 3$
14. $D = (D + g(A, B, C) + X[7] + 5A827999) \lll 5$
15. $C = (C + g(D, A, B) + X[11] + 5A827999) \lll 9$
16. $B = (B + g(C, D, A) + X[15] + 5A827999) \lll 13$

# 3. krog

1. $A = (A + h(B, C, D) + X[0] + 6ED9EBA1) \lll 3$
2. $D = (D + h(A, B, C) + X[8] + 6ED9EBA1) \lll 9$
3. $C = (C + h(D, A, B) + X[4] + 6ED9EBA1) \lll 11$
4. $B = (B + h(C, D, A) + X[12] + 6ED9EBA1) \lll 15$

---

5. $A = (A + h(B, C, D) + X[2] + 6ED9EBA1) \lll 3$
6. $D = (D + h(A, B, C) + X[10] + 6ED9EBA1) \lll 9$
7. $C = (C + h(D, A, B) + X[6] + 6ED9EBA1) \lll 11$
8. $B = (B + h(C, D, A) + X[14] + 6ED9EBA1) \lll 15$

---

9. $A = (A + h(B, C, D) + X[1] + 6ED9EBA1) \lll 3$
10. $D = (D + h(A, B, C) + X[9] + 6ED9EBA1) \lll 9$
11. $C = (C + h(D, A, B) + X[5] + 6ED9EBA1) \lll 11$
12. $B = (B + h(C, D, A) + X[13] + 6ED9EBA1) \lll 15$

---

13. $A = (A + h(B, C, D) + X[3] + 6ED9EBA1) \lll 3$
14. $D = (D + h(A, B, C) + X[11] + 6ED9EBA1) \lll 9$
15. $C = (C + h(D, A, B) + X[7] + 6ED9EBA1) \lll 11$
16. $B = (B + h(C, D, A) + X[15] + 6ED9EBA1) \lll 15$

Zgoščevalna funkcija **MD4** še ni bila razbita, vendar pa je ni težko razbiti, če bi opustili prvi ali pa zadnji krog.

Zato zgoščevalna funkcija **MD5** uporablja 5 krogov, a je 30% počasnejša (.9Mbytes/sec na SPARC-u).

Zgoščevalna funkcija **SHA** je še počasnejša (0.2Mbytes/sec na SPARC-u).
Opisali bomo le nekaj njenih modifikacij:

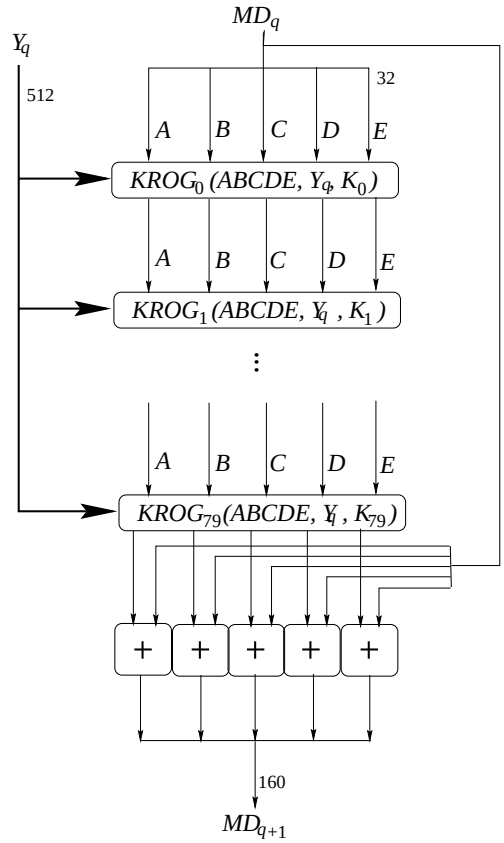
1. **SHS** privzame *big-endian* arhitekturo namesto *little-endian*.
2. **SHS** dobi 160-bitni rezultat (5 registrov).
3. **SHS** obdela 16 besed naenkrat, vendar jih najprej razširi v 80 besed, potem pa uporabi zaporedje 80-ih operacij na vsaki besedi.

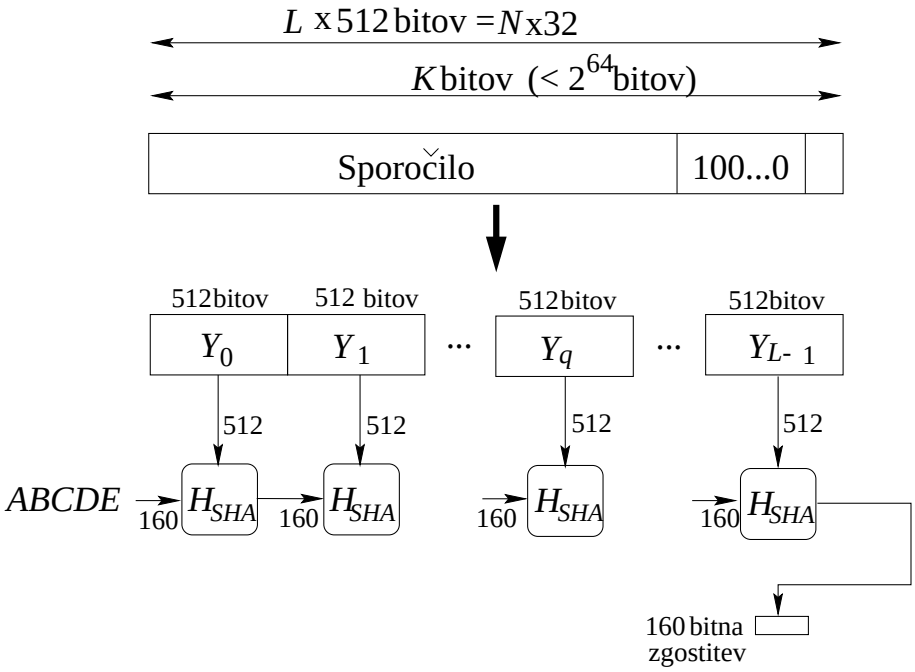
   $$X[j] = X[j-3] \oplus X[j-8] \oplus X[j-14] \oplus X[j-16]$$

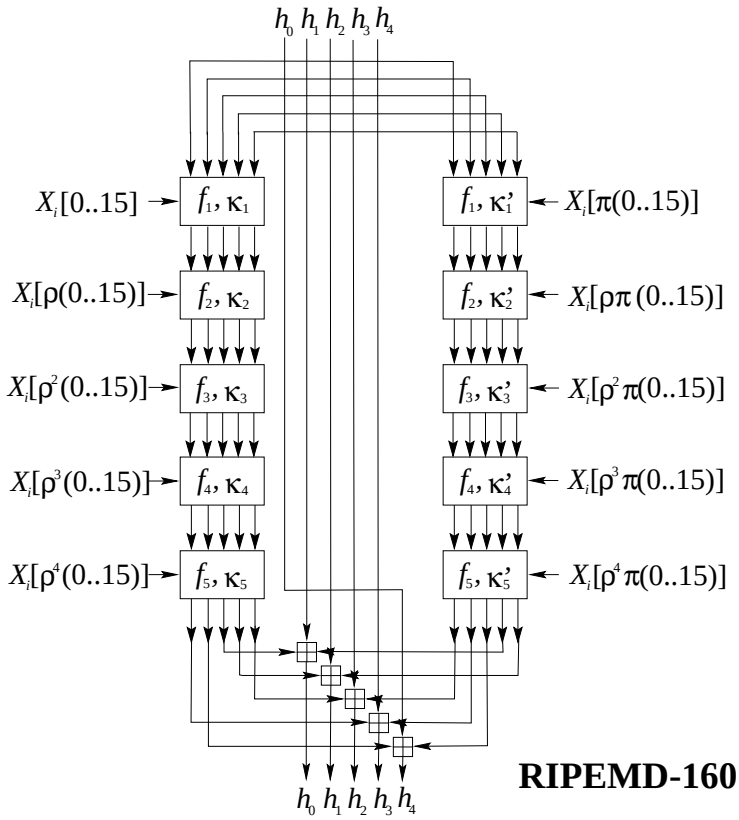
   za $16 \leq j \leq 79$.
4. **SHA-1** pa uporabi

   $$X[j] = X[j-3] \oplus X[j-8] \oplus X[j-14] \oplus X[j-16] \lll 1$$

   za $16 \leq j \leq 79$.


$MD_q$
$Y_q$
512
32
A
B
C
D
E
$KROG_0\,(ABCDE,\, Y_q,\, K_0)$
$KROG_1\,(ABCDE,\, Y_q,\, K_1)$
$KROG_{79}(ABCDE,\, Y_q,\, K_{79})$
+
160
$MD_{q+1}$


L x 512 bitov = N x 32
K bitov (< 2^64 bitov)
Sporočilo
100...0
512bitov
512 bitov
512bitov
512bitov
Y0
Y1
Yq
YL- 1
512
512
512
512
ABCDE
160
HSHA
160
HSHA
160
HSHA
160
HSHA
160 bitna
zgostitev


h0 h1 h2 h3 h4
Xi[0..15]
f1, κ1
f1, κ'1
Xi[π(0..15)]
Xi[ρ(0..15)]
f2, κ2
f2, κ'2
Xi[ρπ(0..15)]
Xi[ρ2(0..15)]
f3, κ3
f3, κ'3
Xi[ρ2π(0..15)]
Xi[ρ3(0..15)]
f4, κ4
f4, κ'4
Xi[ρ3π(0..15)]
Xi[ρ4(0..15)]
f5, κ5
f5, κ'5
Xi[ρ4π(0..15)]
h0 h1 h2 h3 h4

**RIPEMD-160**

# HMAC

(Keyed-Hashing for Message Authentication)

Prednosti:

1. Kripto. zgoščevalne funkcije so v splošnem hitrejše v softwaru kot pa simetrične šifre (kot na primer DES).
2. Knjižnice zgoščevalnih funkcij so široko dostopne (medtem ko so bločne šifre, tudi kadar so uporabljene samo za MAC, omejene v smislu izvoznih dovoljenj).

Za design objectives v HMAC algoritmu in njegovo varnost glej:

M. Bellare, R. Canetti in H. Krawczyk, CRYPTO'96

(in `http://wwwcse.ucsd.edu/users/mihir`),

ki ga trenutno poskušajo vključiti v IETF
(Internet Engineering Task Force).

# Časovne oznake/žigi (Timestamping)

Potrebujemo pričo o obstoju določenih podatkov ob določenem času, na primer na področju

- zaščite intelektualne lastnine
  (angl. intelectual property - IP), ali pa
- zanesljivega servisa za preprečevanje zanikanja
  (za dokaz, da je bil digitalni podpis generira
  v času veljavnosti ustreznega javnega ključa).

Če želi Bojan imeti dokaz o obstoju podatkov $x$ ob nekem določenem času, potem naredi naslednje:

1. najprej izračuna zgostitev $z = h(x)$,
2. nato še zgostitev spoja
$$z' = h(z \,||\, \text{javna\_informacija}),$$
3. rezultat podpiše $y = \text{sig}_K(z')$, in
4. naslednji dan v časopisu objavi podatke
$$(z, \text{javna\_informacija}, y).$$

# Časovne oznake s TS

Časovne žige omogoča pooblaščena organizacija za podpise, (angl. **Timestamper - TS**), ki je elektronski notar (angl. trusted timestamping service) oz. center zaupanja (TTP, angl. trusted third party).

Bojan najprej izračuna

$$z = h(x), \quad y = \mathrm{sig}_K(x)$$

in pošlje par $(z, y)$ notarju TS,

ki doda še datum $D$ in podpiše trojico $(z, y, D)$.

Zgornji algoritem je varen le pod pogojem, če je notar nepodkupljiv.

Potencialno se TS sooči z enormno odgovornostjo, če so časi kompromitirani.

Na primer, uporabnik lahko zanika vse podpise, ki jih je opravil kdaj koli.

Morda lahko nastane hujša škoda kot kompromitacija CA-jevega zasebnega ključa, o katerem bomo govorili v naslednjem poglavju.

Sicer pa si pomagamo z naslednjim algoritmom:

1. TS najprej izračuna
$$L_n = (t_{n-1}, \mathrm{ID}_{n-1}, z_{n-1}, y_{n-1}, h(L_{n-1})),$$
2. nato še $C_n = (n, t_n, z_n, y_n, \mathrm{ID}_n, L_n)$,
3. rezultat podpiše $s_n = \mathrm{sig}_{\mathrm{TS}}(h(C_n)))$, ter
4. pošlje $(C_n, s_n, \mathrm{ID}_{n+1})$ osebi $\mathrm{ID}_n$.

8. poglavje

# Upravljanje ključev

- **Distribucija ključev**
  (Blomova shema, Diffie-Hellmanova shema)
- **Certifikati**
  (avtentikacijska drevesa, certifikatna agencija, infrastruktura javnih ključev, proces certifikacije, modeli zaupanja)
- **Uskladitev ključev**
  (Kerberos, Diffie-Hellmanova shema, MTI protokoli, Giraultova shema)
- **Internetne aplikacije**
  (Internet, IPsec: Virtual Private Networks, Secure Sockets Layer, varna e-pošta)

## Vprašanja

- Od kje dobimo ključe?
- Zakaj zaupamo ključem?
- Kako vemo čigav ključ imamo?
- Kako omejiti uporabo ključev?
- Kaj se zgodi, če je kompromitiran (izgubljen) zasebni ali tajni ključ? Kdo je odgovoren?
- Kako preklicati ključ?
- Kako lahko obnovimo ključ?
- Kako omogočimo servis preprečitve zanikanja?

Ta vprašanja veljajo tako za simetrične (tajne) ključe kakor tudi za javne in zasebne ključe.

**Upravljanje ključev** je množica tehnik in postopkov, ki podpirajo dogovor in vzdrževanje relacij ključev med pooblaščenimi strankami/sogovorniki.

**Infrastruktura javnih ključev (PKI)**: podporni servisi (tehnološki, pravni, komercialni, itd.), ki so potrebni, da lahko tehnologijo javnih ključev uporabimo za večje projekte.

Sistemi z javnimi ključi imajo prednost pred sistemi s tajnimi ključi, saj za izmenjavo tajnih ključev ne potrebujejo varnega kanala.

Večina sistemov z javnimi ključi (npr. RSA) je tudi do 100-krat počasnejša od simetričnih sistemov (npr. DES). Zato v praksi uporabljamo za šifriranje *daljših* besedil simetrične sisteme.

Obravnavali bomo več različnih protokolov za tajne ključe. Razlikovali bomo med *distribucijo ključev* in *uskladitvijo ključev*.

**Sistem distribucije ključev** je mehanizem, kjer na začetni stopnji verodostojna agencija generira in distribuira tajne podatke uporabnikom tako, da lahko vsak par uporabnikov kasneje izračuna ključ, ki je nepoznan ostalim.

**Uskladitev ključev** označuje protokol, kjer dva ali več uporabnikov sestavjo skupen tajni ključ, s komunikacijo po javnem kanalu. Vrednost ključa je določena s funkcijo vhodnih podatkov.

Obstaja potreba po zaščiti pred potencialnimi nasprotniki, tako pasivnimi kot tudi aktivnimi.

*Pasivni* sovražnik je osredotočen na prisluškovanje sporočilom, ki se pretakajo po kanalu.
Več nevšečnosti nam lahko naredi *aktivni* sovražnik:

- spreminjanje sporočil,
- shranjevanje sporočil za kasnejšo uporabo,
- maskiranje v uporabnika omrežja.

Cilj *aktivnega* sovražnika uporabnikov $U$ in $V$ je lahko:

- prelisičiti $U$ in $V$ tako, da sprejmeta neveljaven ključ kot veljaven,
- prepričati $U$ in $V$, da sta si izmenjala ključ, čeprav si ga v resnici nista.

## Center zaupanja

V omrežju, ki ni varno, se v nekaterih shemah pojavi agencija, ki je odgovorna za

- potrjevanje identitete,
- izbiro in prenos ključev
- itd.

Rekli ji bomo **center zaupanja** ali **verodostojna agencija** (angl. Trusted Authority – TA ali Trusted Third Party – TTP). Uporabljali bomo oznako **TA**.

# Distribucija ključev

- "Point-to-point" distribucija po varnem kanalu:
  - zaupni kurir,
  - enkratna registracija uporabnikov,
  - prenos po telefonu.
- Neposreden dostop do overjene javne datoteke:
  - avtentična drevesa,
  - digitalno podpisana datoteka.
- Uporaba "on-line" zaupnih strežnikov,
- "Off-line" certifikatna agencija (CA).

## Point-to-point

Predpostavimo, da imamo

– omrežje z $n$ uporabniki,
– agencija TA generira in preda enolično določen ključ vsakemu paru uporabnikov omrežja.

Če imamo varen kanal med TA in vsakim uporabnikom omrežja, potem dobi vsak posameznik $n-1$ ključev, zahtevnost problema pa je vsaj $\mathcal{O}(n^2)$.

Ta rešitev ni praktična celo za relativno majhne $n$.

Želimo si boljšo rešitev, npr. z zahtevnostjo $\mathcal{O}(1)$.

## Blomova shema

Naj bo javno $p$ praštevilo večje od danega $n \in \mathbb{N}$ in naj bo $k \in \mathbb{N}$ za katerega velja $k \leq n - 2$.

TA pošlje po varnem kanalu $k + 1$ elementov $\mathbb{Z}_p$ vsaki osebi in nato si lahko vsak par $\{U, V\}$ izračuna svoj ključ $K_{U,V} = K_{V,U}$.

Število $k$ je velikost največje koalicije, proti kateri bo shema še vedno varna.

## Paul R. Halmos

*"...the source of all great mathematics is the special case, the concrete example. It is frequent in mathematics that every instance of a concept of seemingly great generality is in essence the same as a small and concrete special case."*

I Want to be a Mathematician, Washington: MAA Spectrum, 1985.

## ???

*“ Sometimes a research is a lot of hard work in looking for the easy way.”*

## David Hilbert (-1900)

*“The art of doing mathematics consists in finding that special case which contains all the germs of generality.”*

Najprej opišimo shemo v primeru, ko je $k = 1$.

- *Izberemo javno praštevilo* $p$.
- *TA izbere tri naključne elemente* $a, b, c \in \mathbb{Z}_p$ *(ne nujno različne) in oblikuje polinom*

$$f(x, y) = a + b(x + y) + c\,xy \mod p.$$

- *Za vsakega uporabnika* $U$ *izbere TA javni* $r_U \in \mathbb{Z}_p$*, tako da so le-ti medseboj različni.*

- *Za vsakega uporabnika $U$ izračuna TA polinom*

$$g_U(x) = f(x, r_U) \bmod p$$

*in mu ga pošlje po varnem kanalu.*

Opozorimo, da je $g_U(x)$ linearen polinom, tako da ga lahko zapišemo v naslednji obliki

$$g_U(x) = a_U + b_U x,$$

kjer je

$$a_U = a + br_U \bmod p \qquad \text{in} \qquad b_U = b + cr_U \bmod p.$$

- *Za medsebojno komunikacijo osebi $U$ in $V$ uporabita ključ*

$$\begin{aligned} K_{U,V} = K_{V,U} &= f(r_U, r_V) \\ &= a + b(r_U + r_V) + c\, r_U r_V \bmod p. \end{aligned}$$

Uporabnika $U$ in $V$ izračunata svoja ključa $K_{U,V}$ in $K_{U,V}$ zaporedoma s

$$f(r_U, r_V) = g_U(r_V) \quad \text{in} \quad f(r_U, r_V) = g_V(r_U).$$

**Izrek 1.** *Blomova shema za $k = 1$ je brezpogojno varna pred posameznimi uporabniki.*

**Dokaz:** Recimo, da želi uporabnik $W$ izračunati ključ

$$K_{U,V} = a + b(r_U + r_V) + c\, r_U r_V \bmod p.$$

Vrednosti $r_U$ in $r_V$ so javne, $a, b$ in $c$ pa ne.
Oseba $W$ pozna vrednosti

$$a_W = a + b r_W \bmod p \quad \text{in} \quad b_W = b + c r_W \bmod p,$$

ker sta to koeficienta polinoma $g_W(x)$, ki ju je dobila od agencije TA.

Pokažimo, da je informacija, poznana osebi $W$, konsistentna s poljubno vrednostjo $\ell \in \mathbb{Z}_p$ za ključ $K_{U,V}$, tj. $W$ ne more izločiti nobene vrednosti za $K_{U,V}$.

Poglejmo si naslednjo matrično enačbo v $(\mathbb{Z}_p)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & r_U + r_V & r_U\, r_V \\ 1 & r_W & 0 \\ 0 & 1 & r_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell \\ a_W \\ b_W \end{pmatrix}.$$

Prva enačba vsebuje hipotezo, da je $K_{U,V} = \ell$, drugi dve enačbi pa sledita iz definicije števil $a_W$ in $b_W$.

Determinanta zgornje matrike je

$$r_W^2 + r_U r_V - (r_U + r_V) r_W = (r_W - r_U)(r_W - r_V).$$

Iz $r_W \neq r_U$ in $r_W \neq r_V$ sledi, da je determinanta različna od nič in zato ima zgornji sistem enolično rešitev za $a, b$ in $c$.

Koalicija uporabnikov $\{W, X\}$ pa ima štiri enačbe ter tri neznanke in od tod zlahka izračuna $a$, $b$ in $c$ ter končno še polinom $f(x, y)$, s katerim dobi vsak ključ. ■